

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider –Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie civil et d'Hydraulique
Référence :/2019



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية و الري
المرجع/2019

Mémoire de Master

Spécialité :Génie Civil

Option :Structure

Thème

Vibration des plaques stratifiées menus d'ouvertures rectangulaires excentrées

L'étudiante :

LAYACHI Safa

Encadreur :

Dr. TATI Abdelouahab

Promotion Juillet 2019

Remerciements

En premier lieu, je remercie Dieu le tout –puissant qui nous a procuré la volonté ,la force et la connaissance pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur TATI Abdelouahab mon directeur de recherche, pour son aide précieuse, ses conseils judicieux et son orientation.

Mes plus vifs remerciements vont aussi aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je ne saurai oublier mes parents, mon frère, mes sœurs, mes amies, mes collègues pour leur soutien moral et leur précieuse aide.

Je souhaite également remercier chaleureusement le doctorant ATIKI Elhoussine pour ses informations.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents

Mon frère et mes sœurs

Ma famille et mes cousin(e)s

Mes cher(e)s ami(e)s

Mes professeurs

Mes collègues

Merci à tous et toutes

Resumé :

Le présent travail consiste à étudier la variation de la fréquence propre d'une plaque rectangulaire avec le changement de position des trous de différentes tailles le long de son axe diagonale en utilisant un élément fini rectangulaire à 4 nœuds, chaque nœud possède cinq « 5 » degrés de liberté basé sur la théorie de premier ordre de cisaillement transverse .Les résultats obtenus, à travers une série d'exemples, sont comparés avec les solutions analytiques et ceux obtenus via des modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. Cette comparaison a montré la bonne performance et la précision de l'élément utilisé. Après la validation de l'élément une analyse numérique du comportement vibratoire des plaques stratifiées a été faite, avec ou sans trous carrées et une étude paramétrique a été établie pour mettre en évidence l'effet des différents paramètres sur les fréquences naturelles des plaques stratifiées.

Mots clés : plaque stratifié, vibration libre, élément fini, théorie de premier ordre , matériaux composite, ouverture excentré.

المخلص

يتعلق العمل المقدم بدراسة تباين التردد الطبيعي لصفائح مستطيلة الشكل مع تغيير موضع الثقوب ذات الأبعاد المختلفة على طول محورها القطري باستخدام عنصر مستطيل الشكل بـ 4 عقد و لكل عقدة خمس درجات حرية مبنية على النظرية الأولى للقصر العرضي . وقد تم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها من خلال سلسلة من الأمثلة الموجودة في مراجع متعددة في هذا المجال. أظهرت هذه المقارنة الأداء الجيد و الدقة للعنصر المستخدم .

وبعد التحقيق من فعالية العنصر تم إجراء تحليل عددي للسلوك الاهتزازي للصفائح المتعددة مع أو بدون ثقوب مربعة ، و تم القيام بدراسة حدودية لإبراز تأثير مختلف العوامل على الترددات الطبيعية للصفائح الطبقية.

الكلمات المفتاحية : الصفائح المتعددة , الاهتزاز الحر , العنصر المحدود , نظرية الدرجة الأولى , المواد المركبة , فتحة لا مركزي .

Sommaire :

Introduction générale

CHAPITRE I : Recherche bibliographique

I-1) Généralité sur les matériaux composite	1
I -1-1) Introduction	1
I -1-2) Définition	1
I -1-3) Les composants	2
I-1-3-1) Le renfort.....	2
I-1-3-2) La matrice.....	2
I -1-4) Avantages et les inconvénients des matériaux composites :	3
I-1-4-1) Les avantages des matériaux composites :	3
I-1-4-2) Les inconvénients des matériaux composites par rapport aux métaux :	3
I-1-5) Classification des matériaux composites.....	4
I-1-6) Les types des matériaux composites	4
I-1-7) Définitions de base	5
I -1-8) Structures composites stratifiées	5
I-2) Vibration des plaques trouée	6

CHAPITRE II: Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie de premier ordre

II -1) Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie de premier ordre	8
II -1-1) Théorie Classique des Stratifiés (CLT).....	8
II -1-2) Théories de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur (HSDT)	9
II -1-3)Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT)	10
II -2) Les caractéristique mécanique d'un pli.....	13
II -2-1) Module d'Young longitudinal	13

II -2-2) Module d'Young transverse	14
II -2-3) Coefficient de poisson longitudinal	16
II -2-4) Module de cisaillement longitudinal.....	16
II -2-5) Loi de Hooke généralisé	17
II -2-5-1) Relation contrainte-déformation plane pour un pli.....	19
II -2-5-2) Résultantes des forces et moments dans un stratifié.....	21
II -2-6) Equation constitutive	22
II -3) Relation fondamentale de la dynamique appliquée pour un élément de plaque.....	24
II -3-1) Relations fondamentales de la mécanique des matériaux	24
II -3-2) Relations fondamentales relatives aux résultantes en membrane	25
II -3-3) Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement :	26
II -3-4) Relations fondamentales relatives aux moments	27
II -3-5) Résumé des relations fondamentales	28
II -4) Formulation énergétique de la théorie de stratifiée.....	30
II -4-1) Énergie de déformation d'un stratifié.....	30
II -4-1-1) Energie de déformation d'un stratifiée en fonction des déplacements	30
II -4-2) Énergie cinétique d'un stratifié.....	31
II -4-3) Travail des forces	31
II -4-4) Equation d'équilibre dynamique.....	31

CHAPITRE III :présentation de l'élément finis utilisée

III -1) Introduction	33
III -2) Domaines d'application.....	33
III -3) Formulation de l'élément fini utilisé	34
III -3-1) Description de l'élément utilisé.....	34
III -3-2) Cinématique de la théorie	34
III -3-3) Approximation nodale des déplacements	34
III -3-4) Champs des déplacements	35

III -3-5) Relations cinématiques	36
III -3-6) Loi de comportement.....	38
III -3-7) Énergie potentielle totale	38
III -3-8)Formulation de la matrice masse élémentaire	40
III -4)Présentation du programme	42
III -4-1) Introduction	42
III -4-2) Présentation de l’organigramme du programme.....	43
III -4-3) Description des « sous-routines » du programme	47
III -5) Validation numérique d’élément fini dans l'analyse dynamique des plaques	48
III -5-1) Plaques isotrope	48
III -5-2) Plaque composite stratifiée	51
III-6) Conclusion	54

CHAPITRE IV : validation et étude paramétrique

IV -1) Introduction	55
IV -2) plaque isotrope	56
IV -2-1) Effet de l’excentricité de l’ouverture sur la fréquence fondamentale	56
IV -3) plaque stratifiée	59
IV -3-1) Effet de l’excentricité de l’ouverture sur la fréquence fondamentale	59
IV -3-2) Effet de rapport d’anisotropie sur la fréquence fondamentale	63
IV -3-3) Effet de l'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale	68
IV -3-4) Effet du nombre de couches sur la fréquence propre	73
IV -3-5) Effet de rapport d’épaisseur sur la fréquence fondamentale	76
IV -4) Conclusion.....	81

Liste des figures

Figure (I-1): Matériau composite	2
Figure(I-2) : Classification schématique des principaux matériaux de renfort.....	2
Figure (I-3) : Classification schématique des principaux matériaux de matrice.....	3
Figure(I-4): Les constituants d'un composite stratifié.....	5
Figure (II -1) : Cinématique de la théorie classique des plaques Kirhhoff-Love.....	9
Figure (II -2) : Cinématique des théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur des plaques (HSDT).....	10
Figure (II -3) : Cinématique de la théorie de premier ordre des plaques Reissner-Mindlin	11
Figure (II -4) : Schéma simplifié d'une traction longitudinale	13
Figure (II -5) : Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.	14
Figure (II -6) : Schéma par couches d'un essai de cisaillement longitudinal.	16
Figure (II -7) Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.	17
Figure (II -8): Schématisation des résultantes en membrane	21
Figure (II -9) Schématisation des résultantes en cisaillement.....	22
Figure (II -10) Schématisation des moments de flexion et de torsion	22
Figure (III -1) domaine d'applications de la méthode d'élément finis.....	33
Figure (III-2) : Géométrie de l'élément(R4) et variables nodales correspondantes.....	34
Figure (III-3) : Organigramme du programme.....	46
Figure (III -4) Géométrie de la plaque.	48
Figure (III-5) :Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyé (SSSS), en fonction de nombre des éléments.	49
Figure (III-6) : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastrée(EEEE), en fonction de nombre des éléments.	50

Figure (III-7) : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastrée(SESE), en fonction de nombre des éléments.	51
Figure (III-8) : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de trois couches (0/90/0) simplement appuyé en fonction de nombre des éléments.	52
Figure ((III-9) : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de cinq couches (0/90/0/90/0) simplement appuyé en fonction de nombre des éléments.....	53
Figure (IV.1) : plaque carrée avec trou excentrée	55
Figure(IV.2): Variation de la fréquence fondamentale d' une plaque isotrope en fonction du rapport de l'excentricité (c/a) pour (d/a=0.2)	57
Figure (IV-3):Variation de la fréquence fondamentale d' une plaque isotrope en fonction du rapport de l'excentricité (c/a) pour (d/a=0.4)	58
Figure(IV-4):Variation de la fréquence fondamentale d' une plaque isotrope simplement appuyée en fonction du rapport de l'excentricité (c/a) et rapport d'ouverture (d/a).	59
Figure (IV.5) :Variation de la fréquence fondamentale d' une plaque stratifiée(0/90/90/0) en fonction du rapport de l'excentricité (c/a) pour (d/a=0.2).....	60
Figure (IV.6) :Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée a quatre couches (0/90/90/0) en fonction de l'excentricité pour (d/a=0.4)	62
Figure (IV.7) :Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée a quatre couches (0/90/90/0) simplement appuyée en fonction de l'excentricité (c/a) et rapport d'ouverture (d/a).....	63
Figure (IV.8) :Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyé (SSSS) (d/a=0.2).	64
Figure (IV.9) :Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée encastré (EEEE) (d/a=0.2)	65
Figure (IV.10):Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyé (SSSS) (d/a=0.4)	66

Figure (IV.11) :Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée encastéré (EEEE) (d/a=0.4).....	67
Figure (IV-12) :Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyé (SSSS) (d/a=0.2)	68
Figure (IV-13) : Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité del'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée encastéré (EEEE) (d/a=0.2)	70
Figure (IV.14):Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyé (SSSS) (d/a=0.4)	71
figure (IV.15) : Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité del'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a=0.4)	72
Figure (IV.16): Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) (d/a=0.2)	73
Figure (IV.17): Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a=0.2)	74
Figure (IV.18) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) (d/a=0.4)	75
figure (IV.19) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a=0.4)	76
Figure (IV.20): Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur a /h et rapport de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(SSSS)(d/a=0.2)	77
Figure (IV.21): Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur a /h et rapport de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a=02)	78
Figure (IV.22): Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a /h) et rapport de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) (d/a=0.4)	79
Figure (IV.23): Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur a /h et rapport de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a=0.4)	80

Liste des tableaux

Tableau (III -1): Fonctions des sousroutines.....	47
Tableau (III-2) : La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyé(SSSS).....	48
Tableau (III-3) : La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encadrée(EEEE).....	49
Tableau (III-4) : la fréquence propre fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée -encadrée (SESE).....	50
Tableau (III-5) :La fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de trois couches (0/90/0) simplement appuyé.	52
Tableau (III-6) :La fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de cinq couches (0/90/0/90/0) simplement appuyé.	53
Tableau (IV.1) : La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque isotrope simplement appuyée ($d/a=0.2$).....	56
Tableau (IV.2): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque isotrope encadré ($d/a=0.2$).....	56
Tableau (IV.3): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque isotrope simplement appuyée ($d/a=0.4$).....	57
Tableau (IV.4): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque isotrope encadré ($d/a=0.4$).....	58
Tableau (IV.5): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque stratifiée simplement appuyée ($d/a=0.2$).....	60
Tableau (IV.6): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque stratifiée encadré ($d/a=0.2$).....	60
Tableau (IV.7): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque stratifiée simplement appuyée ($d/a=0.4$).....	61
Tableau (IV.8): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque stratifiée encadré ($d/a=0.4$).....	61

Tableau (IV.9) :Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyé(SSSS) (d/a=0.2).	64
Tableau (IV.10):Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée encastéré (EEEE) (d/a=0.2)..	65
Tableau (IV.11):Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyé(SSSS) (d/a=0.4).	66
Tableau (IV.12):Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée encastéré (EEEE) (d/a=0.4)..	67
Tableau (IV.13): Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité del'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée (SSSS) (d/a=0.2)	68
Tableau (IV-14): Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée encastéré (EEEE) (d/a=0.2).....	69
Tableau (IV.15): Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité del'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) (d/a=0.4)	71
Tableau (IV.16): Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité del'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a=0.4)	72
Tableau (IV.17) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) (d/a=0.2).	73
Tableau (IV.18) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a=0.2).	74
Tableau (IV.19) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) (d/a=0.4).	75
Tableau (IV.20) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a=0.4).	76

Tableau (IV.21) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur a/h et rapport de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) ($d/a=0.2$)	77
Tableau (IV.22) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur a/h et rapport de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) ($d/a=0.2$).....	78
Tableau (IV.23): Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur a/h et rapport de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) ($d/a=0.4$).....	79
Tableau (IV.24) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur a/h et rapport de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) ($d/a=0.4$).....	80

Notations et symboles :

- C_{ij} : coefficients de la matrice de rigidité $[C]$
- $[C]$: Matrice des complaisances ou des rigidités
- E_i : Module d'young dans la direction i
- h : épaisseur de la plaque
- a : Longueur de la plaque
- b : Largeur de la plaque
- G_{ij} : Module de cisaillement
- ν_{ij} : coefficient de poisson
- ε_i : déformation relative dans la direction i
- σ_i : contrainte dans la direction i
- θ : angle d'orientation des fibres
- C_{ijkl} : tenseur de rigidités
- Q_{ij} : tenseur de rigidité de plaque
- S_{ij} : Les constantes de souplesse.
- Q_x, Q_y : forces de cisaillement respectivement dans les directions x et y .
- M_x, M_y : moment de flexion .
- M_{xy} : moment de torsion
- N_x, N_y, N_{xy} : résultantes en membrane
- u, v, w : composantes du vecteur des déplacements dans les directions x, y, z .
- ρ : masse volumique
- ρ_s : masse surfacique
- I_{xy} : moment d'inertie
- $[M]$: matrice globale de masse

$[K]$: matrice globale de rigidité.

$N_i(x, y)$: les fonctions de forme pour l'élément.

A_{ij} : matrice de rigidité en membrane

D_{ij} : matrice de rigidité en flexion

B_{ij} : matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

H_{ij} : matrice correspond au comportement de cisaillement transverse.

F_{ij} : cisaillement hors plan

K_{ij} : facteur de correction en cisaillement

ω : fréquence fondamentale .

d/a : rapport d'ouverture .

c/a : rapport d'excentricité .

Introduction générale :

Les matériaux composites stratifiés sont devenus incontournables dans presque tous les domaines de l'industrie et de construction grâce aux avantages qu'il présentent. les rapports: résistance poids et rigidité poids, sont les paramètres les plus prépondérant dans le choix de ce type de matériaux.

Les ouvertures sont utilisées dans un grand nombre d'éléments de structure, telles que les plaques et les coques. En génie civil, les ouvertures sont utilisées comme des portes ou fenêtres ou pour faire passer des canalisations de carburant ,des lignes électriques parfois juste pour permettre la réduction du poids. Elles trouvent une place aussi dans d'autres domaines comme le demaine de l'aviation .

Les ouvertures dans les plaques changent leurs caractéristiques dynamiques par conséquent. Les concepteurs utilisent parfois les ouvertures de formes et de tailles différentes pour modifier les valeurs des fréquences de l'élément de structure afin de le sécuriser. Les vibrations peuvent être la cause de rupture de certains éléments de structure telles que les plaques. Par conséquent, l'analyse des vibrations des plaques stratifiées en matériaux composites avec ouverture est indispensable lors de leur conception.

Objectif :

L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet du facteur d'exentricité des trous sur la vibration libre des plaques stratifiée en utilisant un élément finis basée sur la théorie de premier ordre .

Organisation des chapitres :

Ce mémoire est devisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre contient deux parties :

- La première partie présente des généralités sur les matériaux composites.
- La deuxième partie présente une revue bibliographique sur vibration des plaques trouées

Dans le deuxième chapitre, on présente les équations constitutives des plaques stratifiées selon la théorie de la déformation de cisaillement de première ordre (FSDT).

Le troisième chapitre a été consacré à la présentation de la formulation de l'élément fini utilisé et programmation, suivi par la validation de l'élément à partir d'une comparaison des résultats avec les résultats obtenus de la littérature.

Le quatrième chapitre, concerne une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres sur la variation des fréquences propres des plaques stratifiées.

Chapitre I**Recherche bibliographique****I-1) Généralités sur les matériaux composites :****I -1-1) Introduction :**

Les matériaux composites résultent d'une association de deux ou plusieurs types de matériau différents, visant à l'utilisation de leurs caractéristiques les plus avantageuses, de manière simultanée. De par leur composition, les matériaux composites sont hétérogènes et anisotropes.

Actuellement, les secteurs industriels qui utilisent des matériaux composites incluent :

- l'industrie automobile (pour la fabrication, par exemple, de capots, carters d'huile, colonnes de direction, chaîne cinématique, ressorts, panneaux stratifiés, ...)
- l'industrie du sport et des loisirs (pour la fabrication, par exemple, de planches et bateaux à voile, kayaks, skis, cadres de vélo, bâtons de golf, raquettes de tennis, planches de surf,...).
- l'industrie aérospatiale (pour la fabrication de panneaux solaires des satellites, antennes, capsules, robot pour ramassage, véhicules de lancement de satellites, ...) et d'autres secteurs.

I -1-2) Définition :

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. [1]

Un matériau composite constitué d'une matrice et d'un renfort constitué de fibres, Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. [2]

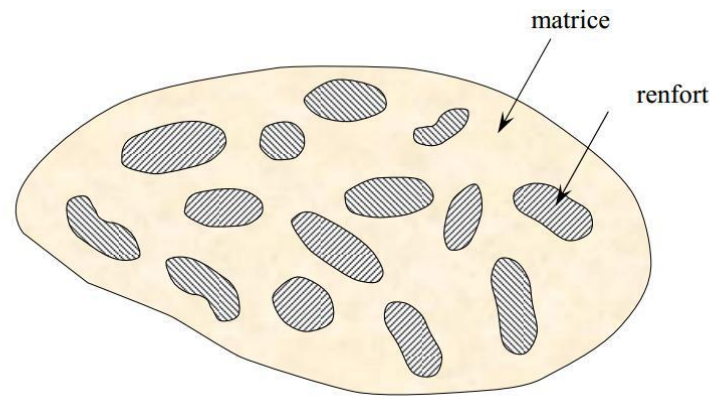


Figure (I-1): Matériau composite

I-1-3) Les composants :

Un matériau composite constitué d'une matrice et d'un renfort constitué de fibres.

I-1-3-1) Le renfort : armature, squelette, il assure la tenue mécanique (résistance à la Traction et rigidité). Souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou Inorganiques). [3]

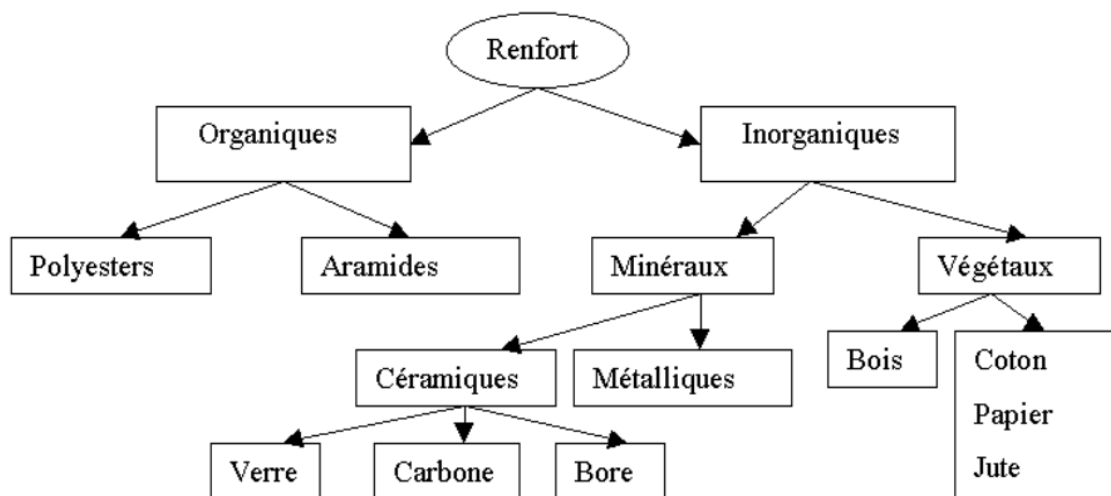


Figure (I-2) : Classification schématique des principaux matériaux de renfort [4]

I-1-3-2) La matrice : lie les fibres renforts, répartie les efforts (résistance à la compression Ou à la flexion), assure la protection chimique. Par définition, c'est un polymère ou Une résine organique. [3]

- **Les résines :** Les résines utilisées dans les matériaux composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Les résines doivent donc être assez déformables et présenter une bonne compatibilité avec les fibres.

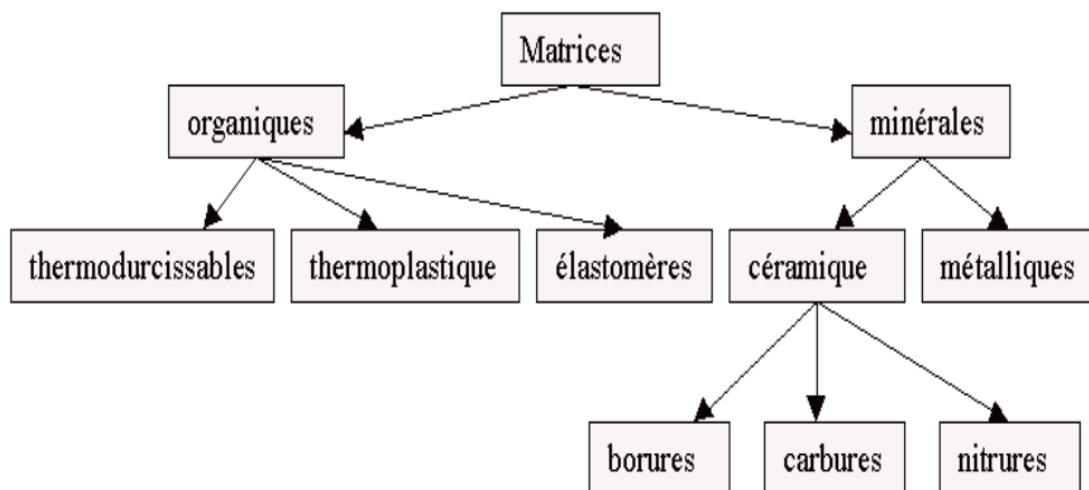


Figure (I-3) : Classification schématique des principaux matériaux de matrice [4]

I-1-4) Avantages et les inconvénients des matériaux composites :

I-1-4-1) Les avantages des matériaux composites :

Le principal intérêt de l'utilisation des matériaux composites provient de ses excellentes caractéristiques. Ils disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels :

- Légèreté
- grande résistance à la fatigue
- liberté de formes
- maintenance réduite
- faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu carbone)
- insensibles aux produits chimiques sauf les décapants de peinture qui attaquent les résines.
- Une bonne isolation électrique.

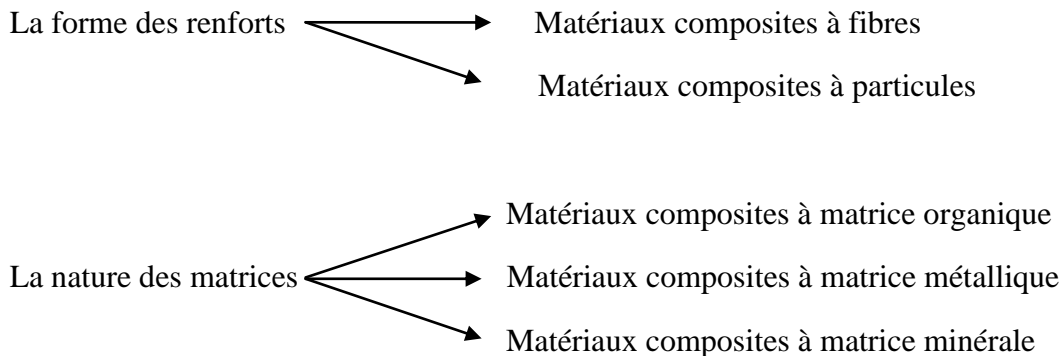
I-1-4-2) Les inconvénients des matériaux composites par rapport aux métaux :

- matériau couteux ;
- dégradation des propriétés structurales sous des températures extrêmes et des conditions humides ;
- pauvreté dans l'absorption d'énergie et les dommages d'impacts ;
- méthodes de contrôle coûteuses et compliquées ;

- difficile localisation des défauts ;
- Exigence d'une main-d'œuvre qualifiée dans le secteur manufacturier [5]

I-1-5) Classification des matériaux composites :

Il est possible de définir des classes de matériaux composites en se référant à la nature ou à la forme des constituants[6].



I-1-6) Les types des matériaux composites :

On distingue deux types de composites: les composites grandes diffusions et les composites hautes performances.

- **Grande diffusion :**

De caractéristiques moyennes, ils sont orientés vers l'optimisation des coûts. Ils représentent 95% des composites utilisés et ont un domaine d'application très large : capotage, conserveries, décoration, etc.

- **Hautes performances :**

Les matériaux composites à hautes performances sont utilisés dans le domaine d'aéronautique où le besoin d'une grande performance déduite des hautes valeurs ajoutées.

Les renforts sont plutôt des fibres longues.

Ils sont orientés vers l'optimisation des caractéristiques mécaniques et thermiques tout en diminuant le poids au maximum. Leurs coûts sont très élevés, ils sont réservés aux applications de pointe tel que l'aéronautique et l'espace, l'armement, le sport de haut niveau, etc. [7]

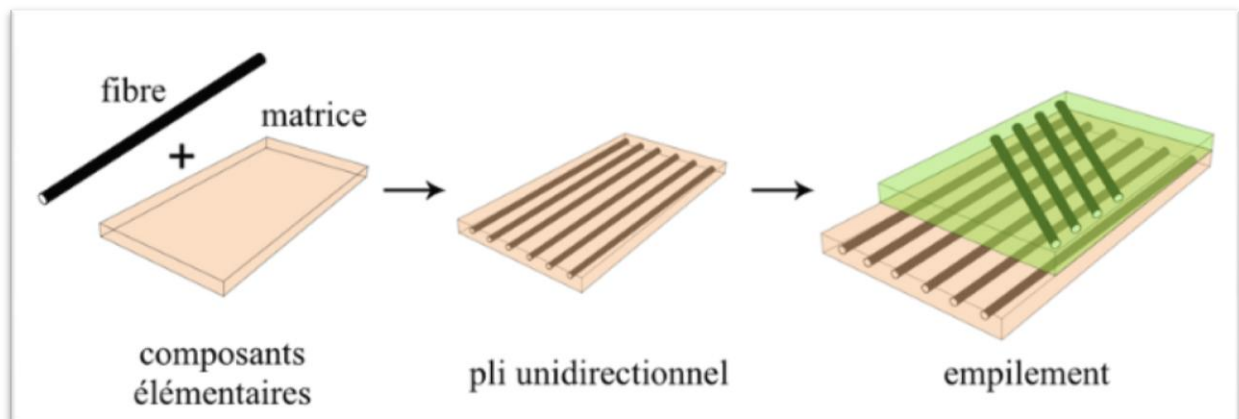
I-1-7) Définitions de base :

- **Homogène** : même propriétés en tout point du matériau.
- **Hétérogène** : en 2 points différents, propriétés différentes.
- **Isotrope** : même propriétés dans toutes les directions.
- **Isotrope transverse** : il existe un axe de symétrie. Symétrie par rapport à une droite.
- **Orthotrope** : propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux.
- **Anisotrope** : les propriétés sont différentes selon les différentes directions.

I-1-8) Structures composites stratifiées :

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine[8]. Cette opération permet de créer des plaques dont les caractéristiques mécaniques, de rigidité et résistance, peuvent être l'objet de la conception [9].

L'épaisseur d'une couche dépend de son grammage. L'épaisseur de chacune des couches est généralement très faible.



Figure(I-4): Les constituants d'un composite stratifié [10]

I-2) Vibration des plaques trouées :

La connaissance des fréquences propres d'une plaque rectangulaire avec des trous est essentielle. Dans les applications d'ingénierie, une plaque est souvent nécessaire pour accueillir des montages ou des accessoires, par conséquent, une plaque avec des trous est une structure courante. D'où la connaissance de l'analyse vibratoire libre de plaques avec des ouvertures à différentes positions et dans différentes conditions limites est importante.

Les fréquences fondamentales d'une plaque vibrante sont obtenues par plusieurs auteurs en utilisant différentes approches ,dont les références suivantes :

Paramasivam en 1973 [11] a proposé une méthode pour déterminer l'effet des ouvertures carrées sur la fréquence fondamentale de plaques isotropes carrées pour différentes conditions aux limites en utilisant la méthode des différences finies. Des résultats ont été obtenus pour le cas de plaques simplement appuyées et le cas de plaques parfaitement encadrées.

Aksu et Ali en 1976 [12] ont développé une théorie pour étudier les caractéristiques dynamiques de plaques rectangulaires isotropes et orthotropes avec une ou deux ouvertures rectangulaires en se basant sur l'utilisation de principes variationnels en conjonction avec la technique des différences finies.

Rajamani et Prabhakaran[13] ont étudié l'effet d'une ouverture centrale carrée sur les fréquences naturelles de plaques stratifiées symétriques carrées simplement appuyées et encadrées pour les cas de vibrations libres et forcées.

Sabir et Davies en 1997 [14]ont utilisé la méthode des éléments finis pour déterminer les fréquences naturelles de vibration de plaques carrées contenant un trou carré excentré. Les plaques ont été soumises à une compression uniaxiale ou biaxiale ou à un cisaillement uniformément réparti le long des quatre bords extérieurs, qui étaient simplement appuyés ou encadrés.

Les résultats obtenus par l'application de cette méthode :

- Pour les plaques sans charge avec petit trou, l'effet de l'excentricité du trou sur les fréquences propres est négligeable.
- Pour les grands trous, l'effet de l'excentricité est plus prononcé.

- Pour les plaques soumises à une charge uniaxiale ou biaxiale, la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de l'excentricité .

Grossi et al en 1997 [15] a appliqué la méthode optimisée de Rayleigh-Ritz pour trouver la fréquence fondamentale d'une plaque rectangulaire avec une ouverture circulaire dans différentes conditions limites.

Ali et Atwal en 1998 [16], Ont présenté Une méthode simplifiée pour l'analyse dynamique de plaques avec des ouvertures. Les plaques rectangulaires simplement appuyée à ouvertures rectangulaires ou carrées. La méthode est basée sur le principe de Rayleigh .Les résultats obtenus par l'application de cette méthode à des plaques de tailles différentes sont comparés aux résultats obtenus par l'application de la technique des éléments finis.

Avalos et al[15] ont calculé les fréquences propres de différents types de plaques rectangulaires simplement appuyée avec différents rapports de forme, qui contiennent deux trous rectangulaires à différents endroits dans la plaque en utilisant la méthode de Rayleigh .

Kim en 2012 [15] a étudié l'analyse théorique sur une plaque rectangulaire renforcée avec une ouverture.

Chapitre II**Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie de premier ordre.****II -1) Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie de premier ordre :**

Différentes théories, utilisées pour décrire le comportement mécanique des matériaux composites on peut citer :la théorie classique des plaques stratifiées (CLT), la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

II -1-1) Théorie Classique des Stratifiés (CLT) :

La Théorie Classique des Stratifiés est basée sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love, utilisées pour l'étude de structures du type coques courbes. D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure reste droite et perpendiculaire à la surface de référence, ne changeant pas sa forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction. [17]

Selon Reddy (1997) et Mendonça (2005), dans la théorie CLT les effets des déformations de cisaillements transversaux(γ_{xz} , γ_{yz}) et la déformation normale transversale (ϵ_{zz}), ne sont pas considérés. [17]

Selon Reddy (1997), le champ de déplacements de la théorie CLT est donné par l'expression suivante:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z) - z w_{0x}(x, y, t)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, z) - z w_{0y}(x, y, t) \quad (2-1)$$

$$w(x, y, t) = w_0(x, y, t)$$

$u_0(x, y, z, t)$ et $v_0(x, y, z, t)$ sont , les déplacements selon les directions des axes x et y .

$w(x, y, t)$ est le déplacement transversal selon la direction de l'épaisseur z du stratifié.

$w_{0x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $w_{0y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}$ sont, respectivement, les rotations autour des axes y et x .

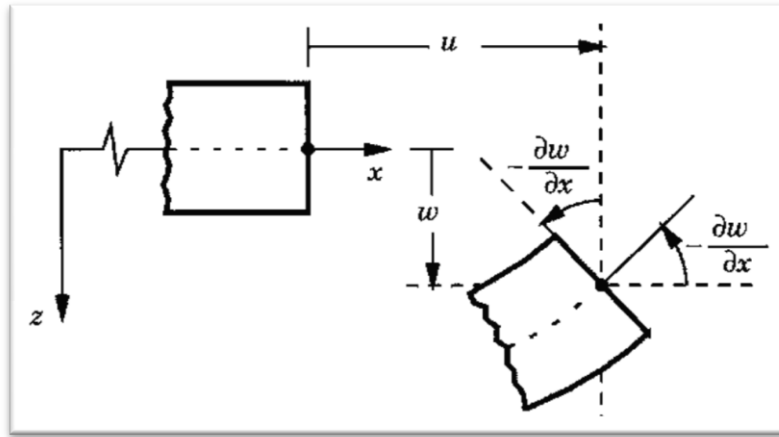


Figure (II -1) : Cinématique de la théorie classique des plaques Kirhhoff-Love[18]

II -1-2) Théories de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur (HSDT) :

La théorie des plaques stratifiées classique et la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre sont devenues assez mal adaptées à la description du comportement du multicouche d'une manière précise.

Par conséquent, de nombreux auteurs ont développé des théories plus raffinées dans la littérature, capables d'évaluer avec plus de précision les déformations et les contraintes de cisaillement transversales des plaques .

La plupart de ces dernières sont basées sur des modèles en déplacement exprimé par une fonction cubique ou non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque où la section droite peut subir un gauchissement après la déformation. Ces théories utilisent souvent un développement en série de puissance du champ de déplacement sous la forme suivante [19]:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + zu_1(x, y) + z^2u_2(x, y) + z^3u_3(x, y) + \dots \quad (2-2a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + zv_1(x, y) + z^2v_2(x, y) + z^3v_3(x, y) + \dots$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + zw_1(x, y) + z^2w_2(x, y) + z^3w_3(x, y) + \dots$$

$u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ et $w(x, y, z)$ sont les composantes vectoriels du déplacement,

$u_i(x, y)$, $v_i(x, y)$ et $w_i(x, y)$ sont des fonctions doivent être déterminés dans le plan (x, y)

Dans la théorie HSDT, n'est pas nécessaire l'introduction des facteurs de correction de cisaillement.

Le champ de déplacements de la théorie HSDT, est exprimés par Lo et al. (1977) comme suit[17]:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\Psi_x(x, y, t) + z^2\xi_x(x, y, t) + z^3\phi_x(x, y, t)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\Psi_y(x, y, t) + z^2\xi_y(x, y, t) + z^3\phi_y(x, y, t) \quad (2-2b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + z\Psi_z(x, y, t) + z^2\xi_z(x, y, t)$$

où les fonctions $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \phi_x, \phi_y$ sont fonctions dépendantes des coordonnées (x, y) qui n'ont pas de sens physique clair. [17]

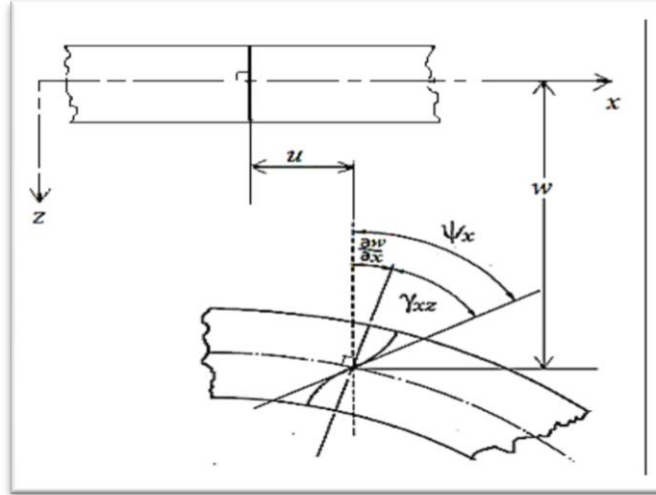


Figure (II -2) : Cinématique des théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur des plaques (HSDT) [20]

II -1-3) Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT) :

Les modèles élaborés selon la Théorie de la Déformation de Cisaillement de Premier Ordre (FSDT), sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de Mindlin-Reissner, selon lesquelles une ligne droite et perpendiculaire au plan moyen d'une couche quelconque, reste droite après la déformation, toutefois, elle ne reste pas nécessairement normale à ce plan de référence après la déformation de la structure. [17] Ces théories tiennent compte des effets du cisaillement transverse et introduisent parmi les déplacements inconnus les rotations des normales. [21]

Le champ de déplacement de la théorie *FSDT* est défini selon :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \varphi_x(x, y, t) \quad (2-3)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \varphi_y(x, y, t) \quad (2-4)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2-5)$$

φ_x et φ_y indiquent respectivement les rotations autour des axes y et x

La théorie *FSDT* suppose que les contraintes de cisaillement transversal $\bar{\sigma}_{xz}$; $\bar{\sigma}_{yz}$ constante à travers l'épaisseur du stratifié.

pour qu'il y ait l'accord de leurs valeurs maximales avec les situations réelles (caractérisées par des distributions paraboliques selon l'épaisseur du stratifié), il se fait nécessaire l'introduction de facteurs de correction de cisaillement. [17]

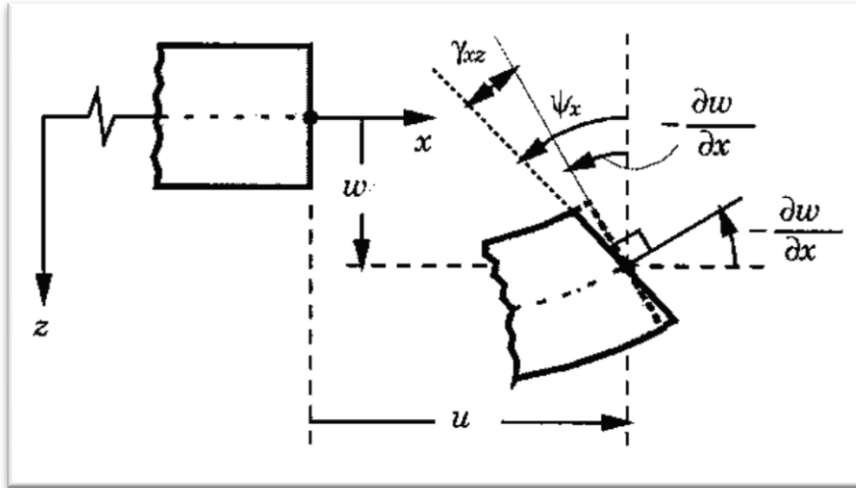


Figure (II -3) : Cinématique de la théorie de premier ordre des plaques Reissner-Mindlin [18]

Dans ce chapitre, en adoptant la théorie du premier ordre de cisaillement transverse (FSDT) des plaques stratifiés .

Le champ de déformation il s'écrit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad (2-6)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad (2-7)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (2-8)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (2-9)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2-10)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2-11)$$

u_0, v_0 : Déplacements en membrane.

w_0 : Déplacement transversal (flèche)

ϕ_x, ϕ_y : Rotations des sections droites respectivement dans les plans (x, z) et (y, z).

Le tenseur des déformations en point M du stratifié est donc :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

L'état de déformation en un point quelconque de la plaque globale est donné par les trois vecteurs de déformation suivants :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} + \{\varepsilon^{nl}\} \quad (2-13)$$

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{matrix} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon_0\} \text{ Les déformations en membrane} \quad (2-14)$$

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} \begin{matrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{matrix} \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

La matrice $\{k\}$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion.

$$\{\varepsilon^{nl}\} = \begin{Bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^{nl} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix} \end{Bmatrix} \quad \text{les déformations non linéaires} \quad (2-16)$$

Les déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \left\{ \begin{array}{l} Z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ Z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ Z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad (2-$$

17)

Le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\gamma_c(M) = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varnothing_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varnothing_x \end{array} \right\} \quad (2-18)$$

II -2) Les caractéristique mécanique d'un pli:

Des expressions simplifiées et pratiques des modules peuvent être obtenues en faisant une approche très simplifiée du comportement mécanique de la cellule élémentaire du matériau composite unidirectionnel.

II -2-1) Module d'Young longitudinal :

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale (figure II -4). L'hypothèse simplificatrice est de supposer une

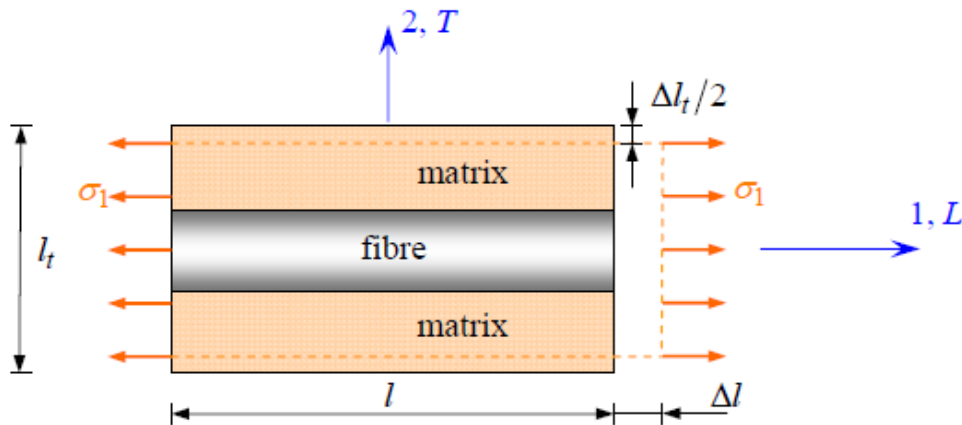


FIGURE (II -4) : Schéma simplifié d'une traction longitudinale [1].

Déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice. Si Δl est l'allongement de la cellule (identique à celui de la fibre et de la matrice), la déformation longitudinale imposée à la cellule est :

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} \quad (2-19)$$

Où l est la longueur de cellule considérée. L'identité des déformations dans la fibre et dans la matrice impose :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_l \quad (2-20)$$

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\begin{aligned} \sigma_f &= E_f \cdot \varepsilon_l \\ \sigma_m &= E_m \cdot \varepsilon_l \end{aligned} \quad (2-21)$$

La charge totale appliquée est :

$$f_1 = \sigma_f \cdot S_f + \sigma_m \cdot S_m \quad (2-22)$$

où S_f et S_m sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice.

Si S est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne $\sigma_1 = \frac{F_1}{S}$

$$s'écrit : \quad \sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (2-23)$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young

$$longitudinal : \quad \sigma_1 = E_L \cdot \varepsilon_l \quad (2-24)$$

La combinaison des relations (3) à (6) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal:

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (2-25)$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi des mélanges* pour le module d'Young dans la direction des fibres. La variation du module est linéaire entre les valeurs E_m module de la matrice et E_f module des fibres, lorsque la fraction volumique V_f de fibres varie de 0 à 1. [1]

II -2-2) Module d'Young transverse :

Le module d'Young transverse est déterminé dans un essai de traction transverse où le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres.

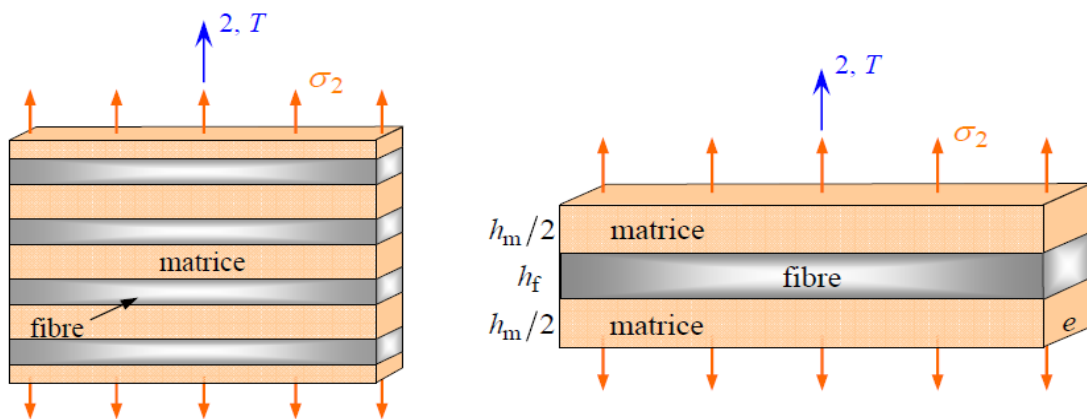


FIGURE (II -5) : Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel. [1]

La hauteur des couches doit simplement vérifier :

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad \text{et} \quad 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad (2-26)$$

La charge F_2 imposée suivant la direction transverse est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2 \quad (2-27)$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transverse s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}, \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad (2-28)$$

L'allongement transverse d'une cellule élémentaire résulte des allongements cumulés dans la fibre et la matrice. Soit :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m \quad (2-29)$$

et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad (2-30)$$

Soit :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \quad (2-31)$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée sur la cellule, par le module transverse :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2 \quad (2-32)$$

La combinaison des expressions (2-28) à (2-32) conduit à l'expression du module transverse :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m} \quad (2-33)$$

Cette expression est connue sous le nom de loi inverse des mélanges et peut être réécrite, en rapportant le module transverse au module d'Young de la matrice, suivant une relation sans dimension sous la forme [1] :

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1}{1 + \left(\frac{E_m}{E_f} - 1 \right) V_f} \quad (2-34)$$

II -2-3) Coefficient de poisson longitudinal :

Le coefficient de Poisson longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinal. En utilisant l'approche du comportement mécanique du matériau, les déformations transverses dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\mathcal{E}_{2m} = -\nu_m \mathcal{E}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{2f} = -\nu_f \mathcal{E}_1 \quad (2-35)$$

L'allongement transverse de la cellule élémentaire est :

$$\nu_{lt} = -\nu_m \mathcal{E}_1 h_m - \nu_f \mathcal{E}_1 h_f \quad (2-36)$$

Et la déformation transverse s'écrit :

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\nu_{lt}}{h_f + h_m} = -[\nu_m(1-\nu_f) + \nu_f \nu_f] \mathcal{E}_1 \quad (2-37)$$

D'où l'expression du coefficient de poisson :

$$\nu_{LT} = \nu_f \nu_f + \nu_m(1-\nu_f) \quad (2-38)$$

Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal. Les valeurs de ν_m et ν_f sont assez proches (voisines de 0,3). [1].

II -2-4) Module de cisaillement longitudinal :

Le module de cisaillement longitudinal GLT est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la figure (II -6) en utilisant à nouveau la modélisation par couches du composite unidirectionnel. Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales, du fait des contraintes τ imposées sur la cellule.

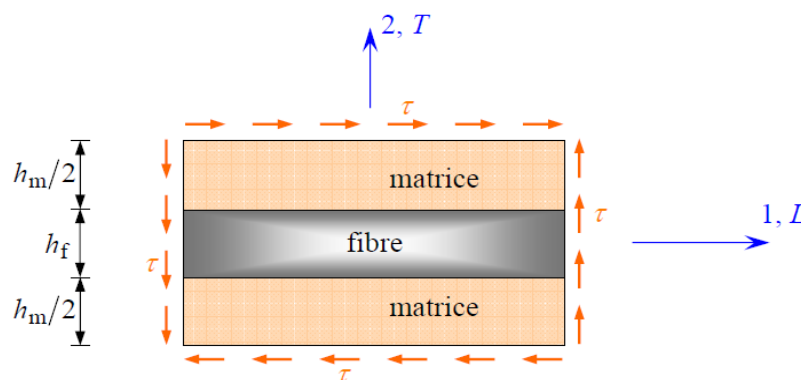


FIGURE (II -6) : Schéma par couches d'un essai de cisaillement longitudinal. [1]

Les déformations en cisaillement de la fibre et de la matrice s'expriment donc suivant :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{et} \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad (2-39)$$

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice (figure 1-10) sont : sont :

$$\delta_f = h_f \gamma_f \quad \text{et} \quad \delta_m = h_m \gamma_m \quad (2-40)$$

La déformation totale de la cellule

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m \quad (2-41)$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f) \quad (2-42)$$

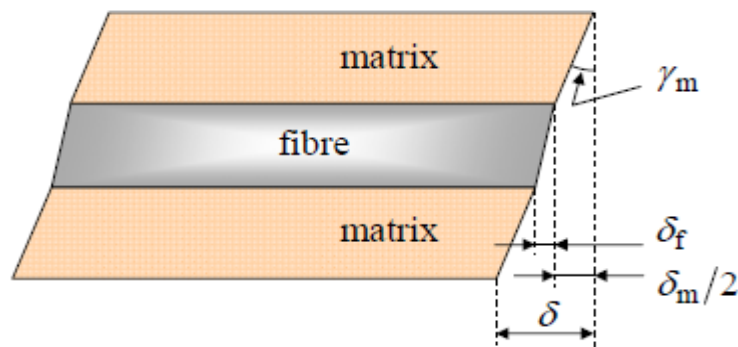


FIGURE (II -7) Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre. [1]

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement longitudinal G_{LT} suivant la relation :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}} \quad (2-43)$$

En combinant les expressions (2-39) à (2-43), nous obtenons :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1 - V_f}{G_m} \quad (2-44)$$

II -2-5) Loi de Hooke généralisé :

La relation entre contraintes et déformations peut être exprimé par :

$$\sigma(M) = C(M) \cdot \varepsilon(M) \quad (2-45)$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} & C_{51} & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} & C_{52} & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & C_{53} & C_{63} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{54} & C_{64} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{65} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R \quad (2-46)$$

La forme inverse de la loi de Hooke généralisée sera :

$$\varepsilon(M) = S(M) \cdot \sigma(M) \quad (2-47)$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} & S_{51} & S_{61} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & S_{42} & S_{52} & S_{62} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{43} & S_{53} & S_{63} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{54} & S_{64} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{65} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R \quad (2-48)$$

C : est la matrice de rigidité

S : la matrice de souplesse

C et S sont des matrices symétriques : il y a donc Constantes de rigidité C_{ij} ou constantes de souplesse S_{ij} .

La relation entre la matrice de rigidité et la matrice de souplesse est donnée par :

$$C = S^{-1}$$

La loi de Hooke d'une couche orthotrope est écrite de forme de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R \quad (2-49)$$

Ou :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R \quad (2-50)$$

9 constantes d'élasticité :

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} , \quad C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta} , \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} , \quad C_{12} = \frac{\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} - \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\
 C_{13} &= \frac{\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} , \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} , \quad C_{44} = G_{23} \quad (2-51) \\
 C_{55} &= G_{13} \quad C_{66} = G_{12} \\
 \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}
 \end{aligned}$$

Constante de souplesse :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= \frac{\nu_{12}}{E_1} & S_{13} &= \frac{\nu_{13}}{E_1} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{23} &= \frac{\nu_{23}}{E_2} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \quad (2-52) \\
 S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}
 \end{aligned}$$

Matériau isotrope :

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})
 \end{array} \right]_R \quad (2-53)$$

2 constantes d'élasticité (coefficients de Lamé ou E, ν)

II -2-5-1) Relation contrainte-déformation plane pour un pli :

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de contrainte plane, La relation contrainte déformation peut être donnée par [1]:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad (2-54)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2-55)$$

Les composantes de la rigidité Q_{ij} sont données par :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = Q_{21} \frac{\nu_{12}\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (2-56)$$

$$Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{13}, \quad Q_{55} = G_{23}$$

Avec E_1 et E_2 sont des modules d'Young du matériau dans les directions 1 et 2.

G_{12} est le module de cisaillement.

ν_{12} et ν_{21} sont des coefficients de Poisson.

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression:

$$[\bar{Q}] = [T^{-1}][Q][T] \quad (2-57)$$

$$\text{Avec : } [T] = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2-58)$$

$$\bar{Q}_{11} = c^4 Q_{11} + s^4 Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2 c^2$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2 c^2 + Q_{12}(c^4 + s^4)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66})s^3 c$$

$$\bar{Q}_{22} = s^4 Q_{11} + c^4 Q_{22} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2 c^2 \quad (2-59)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3 c + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66})sc^3$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66}))s^2 c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)$$

Où \bar{Q}_{ij} sont les coefficients de la matrice de rigidité d'une couche k donné.

θ Est l'angle d'orientation de la fibre.

II -2-5-2) Résultantes des forces et moments dans un stratifié :

❖ Résultantes en membranes :

Les résultantes en membrane sont définies par :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2-60)$$

N_x , N_y et N_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur, des contraintes normales et de cisaillement dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées sur la figure (II -8)

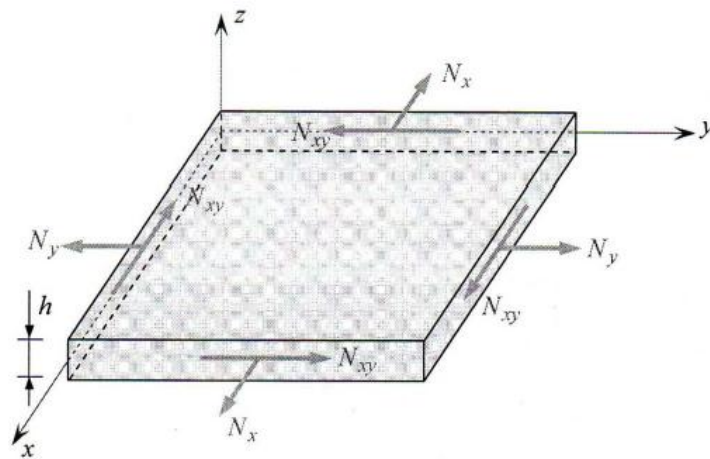


Figure (II -8): Schématisation des résultantes en membrane [22]

La discontinuité des contraintes d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (2.60) sous la forme :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (2-61)$$

❖ Résultantes en cisaillement :

les résultantes en cisaillement sont définies par :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad (2-62)$$

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié, elles sont schématisées sur la figure (II -9)

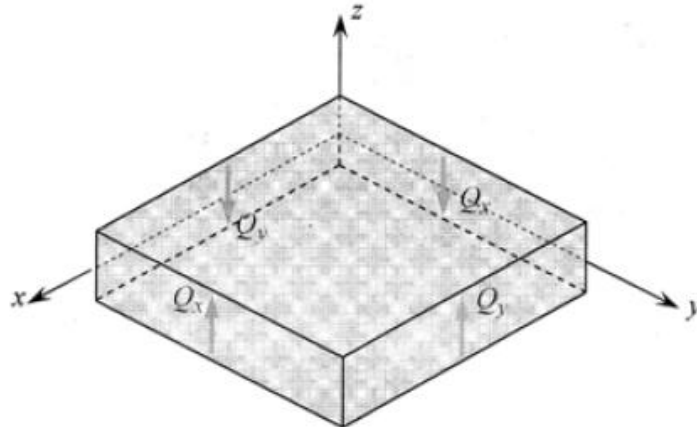


Figure (II -9) Schématisation des résultantes en cisaillement [22]

❖ **Moments de flexion et de torsion :**

Les moments de flexion et de torsion agissant sur un élément du stratifié sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad (2-63)$$

M_x et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} le moment de torsion.

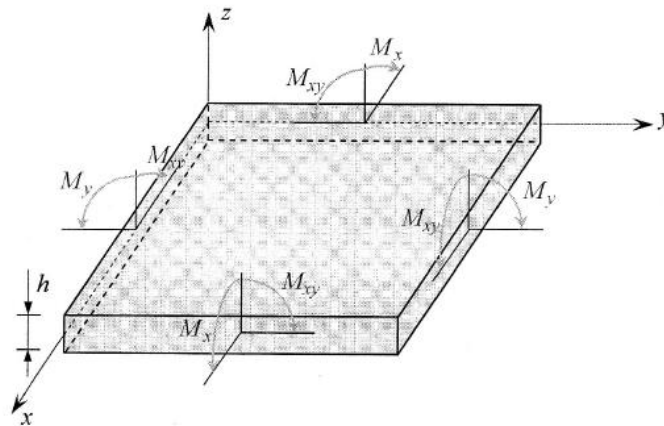


Figure (II -10) Schématisation des moments de flexion et de torsion [22]

II -2-6) Equation constitutive :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. La forme matricielle est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2-64)$$

Dans le cas où le stratifié est symétrique, le couplage membrane-flexion-torsion est nul ($\mathbf{B} = 0$). La symétrie concerne les propriétés des couches, leurs côtes et leurs orientations.

$$N(x, y) = A_{i,j} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} k(x, y) \quad (2-65)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2-66)$$

$$\text{Soit :} \quad M(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} k(x, y) \quad (2-67)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2-68)$$

Ou :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}_{ij}]_k \quad (2-69)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) [\bar{Q}_{ij}]_k \quad (2-70)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2-71)$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}]_{ij} \quad (2-72)$$

Pour tenir compte de la variation quadratique des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur, une amélioration de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse consiste à remplacer les coefficients F_{ij} par de nouveaux coefficients H_{ij} du stratifié :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} K_{44}F_{44} & K_{45}F_{45} \\ K_{54}F_{54} & K_{55}F_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2-73)$$

Avec : $H_{ij} = k_{ij}F_{ij}$ (2-74)

Les paramètres k_{ij} sont des facteurs de correction en cisaillement.

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{54} & H_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2-75)$$

Finalement l'équation du comportement mécanique d'un stratifié peut être écrite sous forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} \quad (2-76)$$

La matrice A est la matrice de rigidité réduite en membrane.

D est la matrice de rigidité réduite en flexion .

B la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

La matrice H correspond au comportement de cisaillement transverse.

II -3) Relation fondamentale de la dynamique appliquée pour un élément de plaque :

les équations de la relation fondamentale de la dynamique sont obtenues a partir des équations d'équilibres en intégrant selon z (expression en fonction des résultantes) ou en multipliant par z , puis en intégrant (expression en fonction des moments). [13]

II -3-1) Relations fondamentales de la mécanique des matériaux :

Les relations fondamentales ou équations d'équilibre d'un solide élastique sont données :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + f_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + f_z &= \rho a_z \end{aligned} \quad (2-77)$$

Ou f_x, f_y, f_z sont les composantes des forces volumiques exercées sur un solide.

a_x, a_y et a_z Les composantes du vecteur accélération. ρ est la masse volumique.

II -3-2) Relations fondamentales relatives aux résultantes en membrane :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz \quad (2-78)$$

L'intégration des deux premières aboutit aux relations relatives aux résultantes de membrane.

Le premier terme de cette équation s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (2-79)$$

Le deuxième terme de cette équation s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (2-80)$$

Le troisième terme de l'équation s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (2-81)$$

où les contraintes $\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right)$ et $\sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right)$ sont les contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles.

Enfin, nous poserons :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_x dz = F_x \quad (2-82)$$

Le second membre s'écrit alors :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz$$

Soit :

$$= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz \quad (2-83)$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

En introduisant : $\rho_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz$ (2-84)

la masse surfacique du stratifié au point (x, y), et la grandeur :

$$R = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz$$
 (2-85)

L'intégration de la première des équations (2.78) conduit donc finalement à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$
 (2-86)

De même, l'intégration de la deuxième des équations (2.78) conduit à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}$$
 (2-87)

II -3-3) Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement :

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié de la troisième terme des équations (2.78) conduit à :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_z dz$$
 (2-88)

Le premier terme s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x}$$
 (2-89)

Le deuxième terme :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y}$$
 (2-90)

Le troisième terme s'exprime sous la forme :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = q = 0 \quad \text{Parce que dans une plaque } \sigma_{zz} = 0$$
 (2-91)

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_z dz = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (2-92)$$

Finalement :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (2-93)$$

II -3-4) Relations fondamentales relatives aux moments :

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par z les deux premières des équations (2.78), puis en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z a_x dz \quad (2-94)$$

Intégrale par partie :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = [z \sigma_{xz}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz = \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) - Q_x \quad (2-95)$$

$$\text{Soit : } \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x \quad (2-96)$$

Le second membre de l'équation (2.94) s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z \alpha_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right) dz \quad (2-97)$$

$$= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \quad (2-98)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z \alpha_x dz = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (2-90)$$

$$\text{En posant : } I_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \quad (2-91)$$

La grandeur I_{xy} est le moment d'inertie au plan moyen (Oxy) de l'élément de plaque localisé au point (x, y) et ayant des côtés égaux à l'unité.

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} \left[\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (2-92)$$

En introduisant la composante des moments des forces volumiques exercées :

$$P_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_x dz \quad (2-93)$$

De même, la deuxième équation (2.78) conduit à :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} \left[\sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (2-94)$$

II -3-5) Résumé des relations fondamentales :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2-95)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} \left[\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + P_x - Q_x &= R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} \left[\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + P_x - Q_x &= R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } \rho_s, R, I_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho dz \quad (2-96)$$

Les grandeurs ρ_s, R, I_{xy} se calculent sans difficulté dans le cas où la plaque est constituée de n couches, la couche K ayant une masse volumique ρ_k . Nous avons :

$$\rho_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz = \sum_{K=1}^N \int_{h_{K-1}}^{h_K} \rho_k dz = \sum_{K=1}^N \rho_k (h_K - h_{K-1}) \quad (2-97)$$

De même :

$$R = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \rho_k (h_K^2 - h_{K-1}^2) \quad (2-98)$$

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^N \rho_k (h_K^3 - h_{K-1}^3) \quad (2-99)$$

Les relations fondamentales des stratifiés, tenant compte du cisaillement transverse, sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (2-64) dans les relations fondamentales (2-77) des plaques. Soit :

➤ **Resultantes dans le plan :**

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2-100}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2-101}$$

➤ **Résultantes de cisaillement hors plan :**

$$\begin{aligned}
& H_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x^2} \right) + H_{45} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + H_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2-102}$$

➤ **Equation en moment de flexion et torsion :**

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& - H_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - H_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2-103}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& - H_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - H_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2-104}$$

Ces cinq équations permettent en principe de déterminer les cinq fonctions solutions

$u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$, $w_0(x, y, t)$, $\phi_x(x, y, t)$, $\phi_y(x, y, t)$ Ces fonctions doivent vérifier en outre les conditions imposées sur les frontières de la structure étudiée [1].

Dans le cas de stratifiée symétrique, $B_{ij} = 0$ et $R=0$.

La résolution de ces équations est toutefois complexe, ne peut être menée de manière analytique dans le cas général, et qui est traitée par des méthodes numériques, ce qui suppose une écriture sous forme énergétique.

II -4) Formulation énergétique de la théorie de stratifiée :

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse du comportement mécanique des stratifiés à l'aide des éléments finis.

II -4-1) Énergie de déformation d'un stratifié :

L'énergie potentielle de déformation d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2-105)$$

Selon l'hypothèse de la théorie des stratifiés: $\sigma_{zz}=0$,

II -4-1-1) Energie de déformation d'un stratifiée en fonction des déplacements :

En substituant dans l'expression (2-105) les relations déformations-déplacements. En intégrant ensuite suivant l'épaisseur du stratifié, nous obtenons

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \iint \left(A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & + 2 \left(A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \\ & \left. + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) dx dy \end{aligned} \quad (2-106)$$

➤ Energie de déformation d'un stratifié symétrique :

Dans le cas d'un stratifié symétrique, les termes B_{ij} de couplage membrane-flexion sont nuls. Si la plaque stratifiée est orthotrope (l'axe de la plaque confondu avec les axes principaux), l'énergie de déformation est simplifiée comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + C \quad (2-107)$$

$D_{16} = D_{26} = 0$, l'équation la plus réduite dans la théorie des stratifiés en cadre d'élasticité anisotrope.

II -4-2) Énergie cinétique d'un stratifié :

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (2-108)$$

Où ρ est la masse volumique en un point et l'intégration est étendue à l'ensemble du solide.

Dans le cas de la théorie de premier ordre (FSDT), le champ des déplacements s'écrit :

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z \varphi_x(x,y,t)$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z \varphi_y(x,y,t) \quad (2-109)$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t)$$

En substituant ces relations dans l'expression (2-108), l'énergie cinétique du stratifié s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (2-110)$$

II -4-3) Travail des forces:

$$w = w_v + w_s \quad (2-111)$$

Travail des forces volumiques :

$$w_v = \int_v f_{vi} u_i dv \quad (2-112)$$

Travail des forces surfaciques :

$$w_s = \int_s f_{si} u_i ds \quad (2-113)$$

II -4-4) Equation d'équilibre dynamique :

Le principe de Hamilton : Si T est l'énergie cinétique, π est l'énergie potentielle totale entre les temps t_1 et t_2 le mouvement d'un corps élastique conservatif s'effectue de telle manière que la fonctionnelle

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\pi - T) dt = 0 \quad (2-114)$$

$$\pi = U - W \quad (2-115)$$

L'énergie potentielle totale est la somme de l'énergie de déformation U et de travail des forces extérieures W .

Généralement, cette relation est écrite sous la forme :

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} L dt \right] = 0 \quad (2-116)$$

En introduisant le Lagrangien :

$$L = \pi - T \quad (2-117)$$

Forme développée des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad (2-118)$$

Finalement :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial \pi}{\partial u_i} = 0 \quad (2-119)$$

En utilisant l'équation de Lagrange pour déterminer les équations différentielles de vibration libre :

$$\mathbf{M}\ddot{\delta} + \mathbf{K}\delta = \mathbf{0} \quad (2-120)$$

Le déterminant de l'équation (2-120) doit être nul :

$$\det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) = 0 \quad (2-121)$$

On obtient ainsi les n valeurs ω^2 ($w_i, i = 1, 2, \dots, n$) pour une dimension n des matrices $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{M}]$.

Chapitre III

Présentation de l'élément finis utilisée

III -1) Introduction :

Pour évaluer les états de contraintes, de déformation et les caractéristiques vibratoires dans la conception des produits, des pièces mécaniques et des structures, l'ingénieur doit décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. Et vu la difficulté de résoudre ces équations on a besoin de modèles qui permettent de simuler le comportement de ces systèmes physiques complexes. Pour cela, on a recours à plusieurs techniques dont la méthode des éléments finis. Cette méthode est une technique mathématique d'intégration des équations aux dérivées partielles mises sous forme vibrationnelle.

Cette méthode a connu plusieurs développements depuis son apparition en 1956, plus exactement par l'apparition des publications de Turner, Clough, Martin et Topp qui ont introduit le concept d'élément fini.

III -2) Domaines d'application :

La méthode des éléments finis est appliquée dans la majorité des domaines de la physique figure (III -1) Cela va de la mécanique à l'électronique, en passant par la thermique et la météorologie. Dans tous ces cas, la formulation reste quasiment identique, mais la nature des champs et les lois de comportement sont adaptées au domaine d'application. [23]

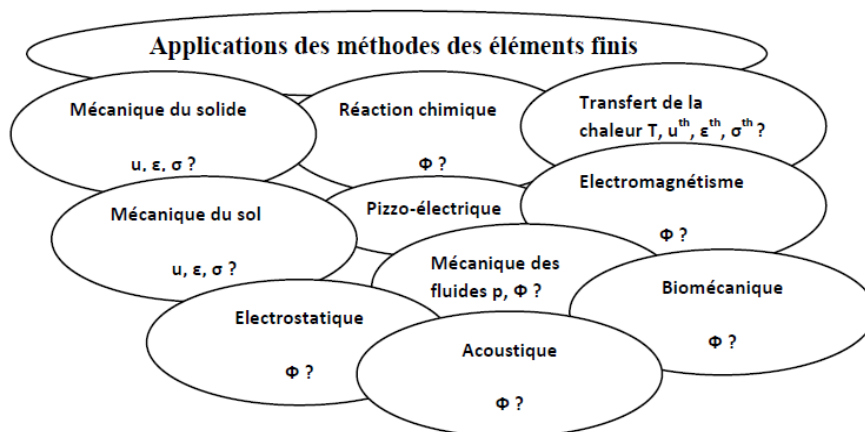


Figure (III -1) domaine d'applications de la méthode d'élément finis[23]

III -3) Formulation de l'élément fini utilisé :

III -3-1) Description de l'élément utilisé :

L'élément (R4) est de forme rectangulaire à 4 noeuds de type Lagrange c'est-à-dire que les variables sont indépendantes, chaque nœud possède 5 degrés de liberté ; deux degrés dans le plan (x, y) qui sont $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, et trois hors plan $w_0(x, y)$, $\phi_x(x, y)$, $\phi_y(x, y)$

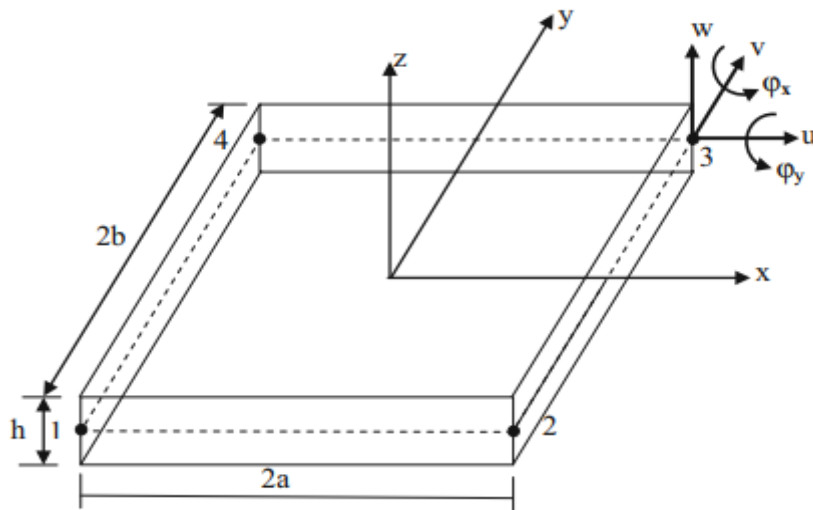


Figure (III-2) : Géométrie de l'élément(R4) et variables nodales correspondantes

III -3-2) Cinématique de la théorie :

L'élément utilisé est basé sur la théorie du premier ordre, alors les déplacements dans le plan et hors plan sont données par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) \quad (3-1)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) \quad (3-2)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (3-3)$$

Les variables des déplacements sont : $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$, $\phi_x(x, y)$, $\phi_y(x, y)$

III -3-3) Approximation nodale des déplacements :

Les variables $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$, $\phi_x(x, y)$, $\phi_y(x, y)$ sont interpolées en fonctions des variables nodales pour :

$$\delta(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy \quad (3-4)$$

Les coefficients ($\alpha_0 - \alpha_3$) peuvent être déterminés à partir des variables nodales.

Les fonctions de formes sont les fonctions N_i qui relient les déplacements d'un point quelconques intérieur à un élément aux n déplacements nodaux q_i .

$$N_1 = \frac{1}{4ab}(a-x)(b-y)$$

$$N_2 = \frac{1}{4ab}(a+x)(b-y) \quad (3-5)$$

$$N_3 = \frac{1}{4ab}(a+x)(b+y)$$

$$N_4 = \frac{1}{4ab}(a-x)(b+y)$$

III -3-4 Champs des déplacements :

Le vecteur déplacement en tous points de coordonnées (x, y) de la plaque peut être exprimé par:

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \delta_i \quad (3-6)$$

Où : $\delta(x, y)$ est le vecteur des déplacements.

$N_i(x, y)$ les fonctions de forme pour l'élément.

δ_i est le vecteur des déplacements.

Pour cet élément qui est un rectangulaire de quatre nœuds on a :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot u_i$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot v_i$$

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot w_i \quad (3-7)$$

$$\phi_x(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \phi_{xi}$$

$$\phi_y(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \phi_{yi}$$

Ou : $u_i, v_i, w_i, \phi_{xi}, \phi_{yi}$ sont les déplacements d'un nœud i

Est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément, étant le numéro du nœud considéré i .

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot q \tag{3-8}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \phi_{x1} \\ \phi_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \phi_{x2} \\ \phi_{y2} \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \phi_{x3} \\ \phi_{y3} \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \phi_{x4} \\ \phi_{y4} \end{Bmatrix} \tag{3-9}$$

III -3-5) Relations cinématiques :

Les déformations sont liés aux déplacements par :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \tag{3-10}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \tag{3-11}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \tag{3-12}$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \tag{3-13}$$

$$\gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{3-14}$$

$$\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{3-15}$$

Sous forme contracté nous permet d'avoir :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \quad (3-16)$$

$$\text{Avec : } \{\varepsilon\} \text{ déformations } \quad \{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3-17a)$$

$$\{k\} \text{ Courbures } \quad \{k\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3-17b)$$

Les déformations en membrane sont exprimées par :

$$\{\varepsilon_m\} = [B_m]\{q\} \quad (3-18)$$

Où :

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

$[B_m]$: La matrice qui relie les déformations à l'intérieur de l'élément et les déplacements aux nœuds.

Les déformations en flexion et torsion s'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = z k(x, y) \quad (3-20)$$

Où k la matrice de courbure s'écrit :

$$\{k\} = [B_f]\{q\} \quad (3-21)$$

En introduisant les fonctions de forme :

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

Les déformations en cisaillement transverse sont exprimées par :

$$\{\gamma\} = [B_c]\{q\} \quad (3-23)$$

Les déformations peuvent être en fonction de vecteur des déplacements :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [B_c]\{q\} \quad (3-24)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \varphi_{xi} & \text{et} & \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i \\ \varphi_y(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \varphi_{yi} & \text{et} & \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i \\ w(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) w_i \end{aligned} \quad (3-26)$$

Donc :

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

III -3-6) Loi de comportement :

Les expressions des résultantes et des moments sont :

$$\begin{aligned} \{N\} &= [A]\{\varepsilon_m\} + [B]\{k\} \\ \{M\} &= [B]\{\varepsilon_m\} + [D]\{k\} \end{aligned} \quad (3-28)$$

$$\{Q\} = [H]\{\gamma_c\}$$

III -3-7) Énergie potentielle totale :

L'énergie potentielle totale de l'élément est donné par :

$$\pi = U - W \quad (3-29)$$

U est l'énergie potentielle de déformation et W est le travail des forces extérieures. L'énergie potentielle totale peut être écrite en termes d'efforts résultants et les déformations correspondantes comme suit :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_A (\{\varepsilon_0\}^T \{N\} + \{K\}^T \{M\} + \{\gamma_z\}^T \{Q\}) dA - W \quad (3-30)$$

Où A est l'air de l'élément.

En utilisant les équations précédentes on aura :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \{q\}^T \left(\{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} + \{B_c\}^T [H] \{B_c\} \right) \{q\} dx dy - W \quad (3-31)$$

Avec $\{q\}$ est le vecteur des déplacements nodaux

$$\{q\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{y4} \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

L'annulation de la premier variation de l'énergie potentielle totale par rapport au vecteur des déplacements $\{q\}$, permet d'avoir l'équation suivant :

$$[K_e] \{q\} = \{F\} \quad (3-33)$$

Où la matrice de rigidité élémentaire :

$$[K^e] = \int_A \left(\{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} + \{B_c\}^T [H] \{B_c\} \right) dA \quad (3-34)$$

La matrice $[K^e]$ peut être écrite sous la forme :

$$[K^e] = [K_1^e] + [K_2^e] + [K_3^e] + [K_4^e] + [K_5^e] \quad (3-35)$$

$$[K_1^e] = \int_A \{B_m\}^T [A] \{B_m\} dA$$

$$[K_2^e] = \int_A \{B_m\}^T [B] \{B_f\} dA$$

$$[K_3^e] = \int_A \{B_f\}^T [B] \{B_m\} dA \quad (3-36)$$

$$[K_4^e] = \int_A \{B_f\}^T [D] \{B_f\} dA$$

$$[K_5^e] = \int_A \{B_c\}^T [H] \{B_c\} dA$$

$[K_1^e]$: Matrice de rigidité élémentaire membranaire

$[K_2^e]$ et $[K_3^e]$: Matrices de rigidité élémentaire de couplage membrane-flexion.

$[K_4^e]$: Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle

$[K_5^e]$: Matrice de rigidité élémentaire de cisaillement transverse.

III -3-8) Formulation de la matrice masse élémentaire :

La formulation de la matrice masse élémentaire est nécessaire pour évaluer le comportement des plaques multicouches en vibrations libres. Nous l'avons développée à partir de l'expression suivante de l'énergie cinétique T .

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial t} dv \quad (3-37)$$

$$\delta T = \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dv \quad (3-38)$$

Où :

ρ désigne la masse volumique représentative du volume V.

u v et w , sont les composantes du vecteur de déplacement.

La matrice de masse globale est obtenue par assemblage des matrices de masses élémentaire

$[M^e]$ s'écrit comme suit:

$$[M^e] = \iint [N]^T [m] [N] dx dy \quad (3-39)$$

Lorsque la matrice de fonction de forme :

$$[N] = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

$$[m] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

Ou :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2) dz \quad (3-42)$$

L'équation dynamique de la structure stratifiée, en l'absence de charges extérieures, est obtenue en utilisant le principe variationnels le plus généralement applicable est le principe de Hamilton, que l'on peut exprimer entre deux instants t_1 et t_2 , le mouvement d'un système conservatif s'effectue de telle sorte que:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\pi - T) dt = 0 \quad (3-43)$$

L'énergie potentielle totale π est la somme de l'énergie de déformation U et de travail conservatives des forces W .

$$\pi = U + W \quad (3-44)$$

Dans l'étude de la vibration libre ; le travail des forces égal à zéro, donc l'énergie potentielle totale π égale l'énergie de déformation U .

L'équation générale de mouvement et pour système non forcé (vibrations libres non amorties) « l'équation de Lagrange », est :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = 0 \quad (3-45)$$

Où :

$[M]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices globales de masse et de rigidité de la plaque.

$\{q\}$ $\{\ddot{q}\}$ sont respectivement le vecteur des variables nodales et le vecteur d'accélération nodale du système défini au temps t .

En pose :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3-46)$$

Donc :

$$\ddot{q} = -\omega^2 \dot{q} \quad (3-47)$$

La recherche des fréquences naturelles vibratoires revient à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$([k] - \omega^2[M])\{X\} = 0 \quad (3-48)$$

Où :

ω est la fréquence naturelle de vibration de la plaque (rd/s).

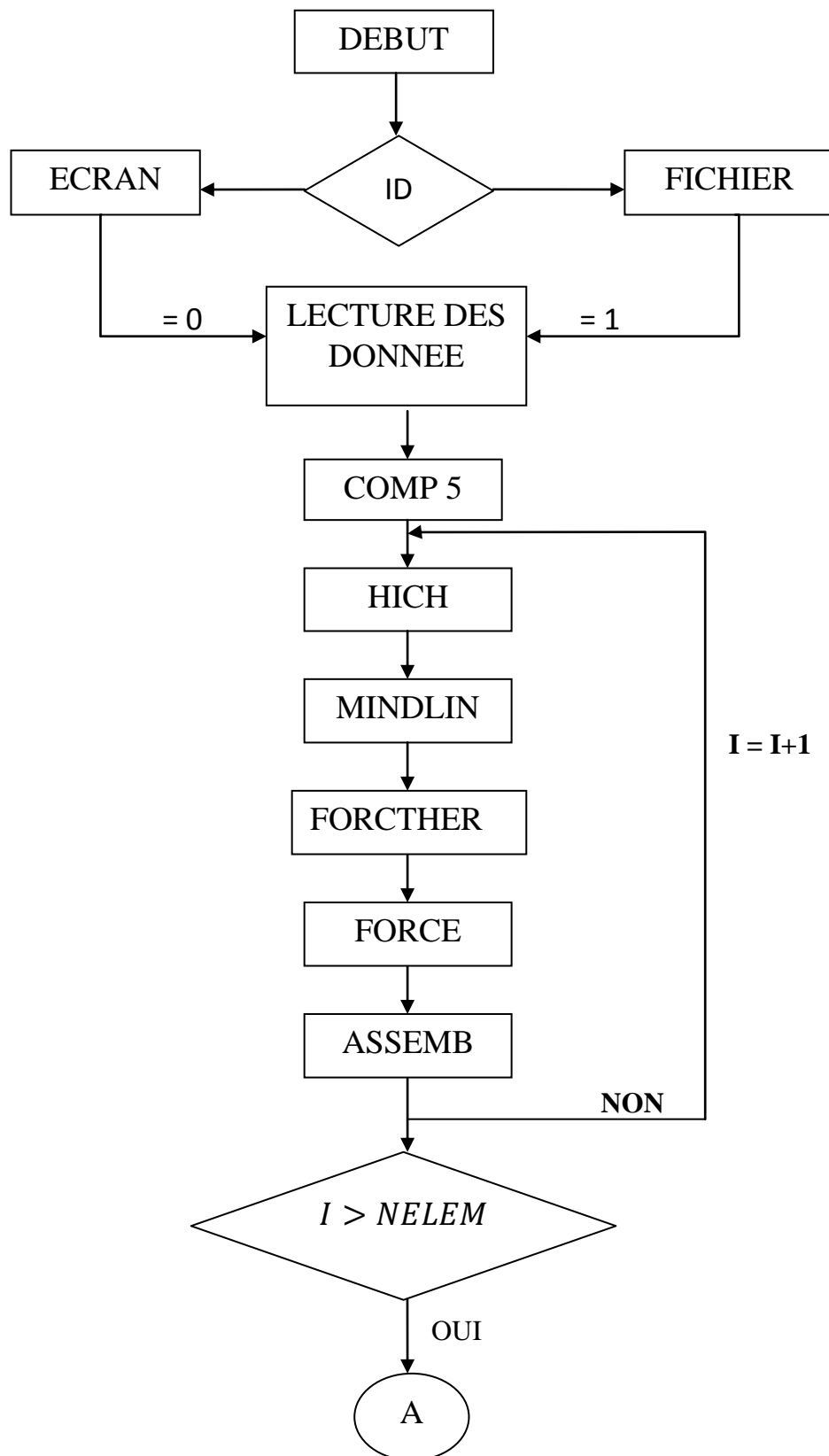
$\{X\}$ est le vecteur des déplacements global(les modes de vibration).

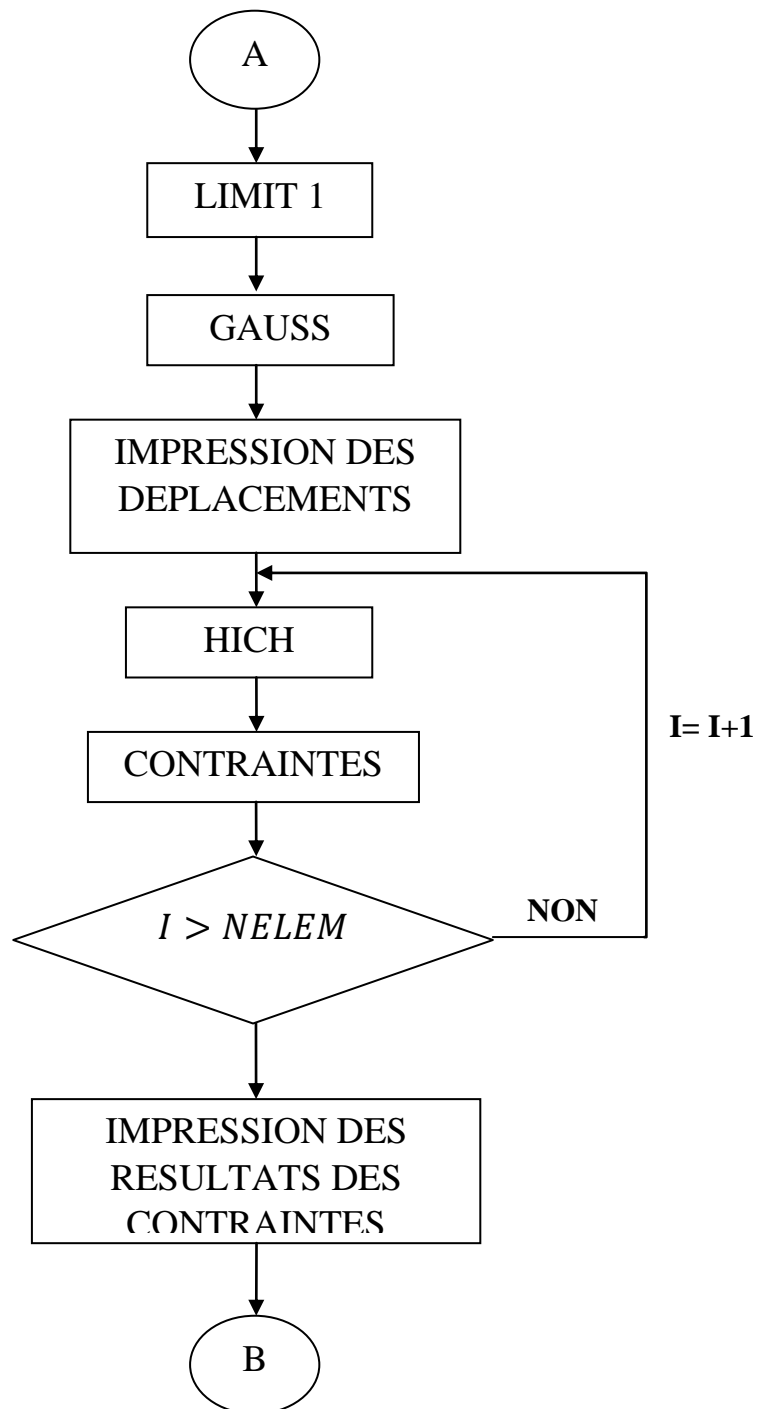
III -4)Présentation du programme :**III -4-1) Introduction :**

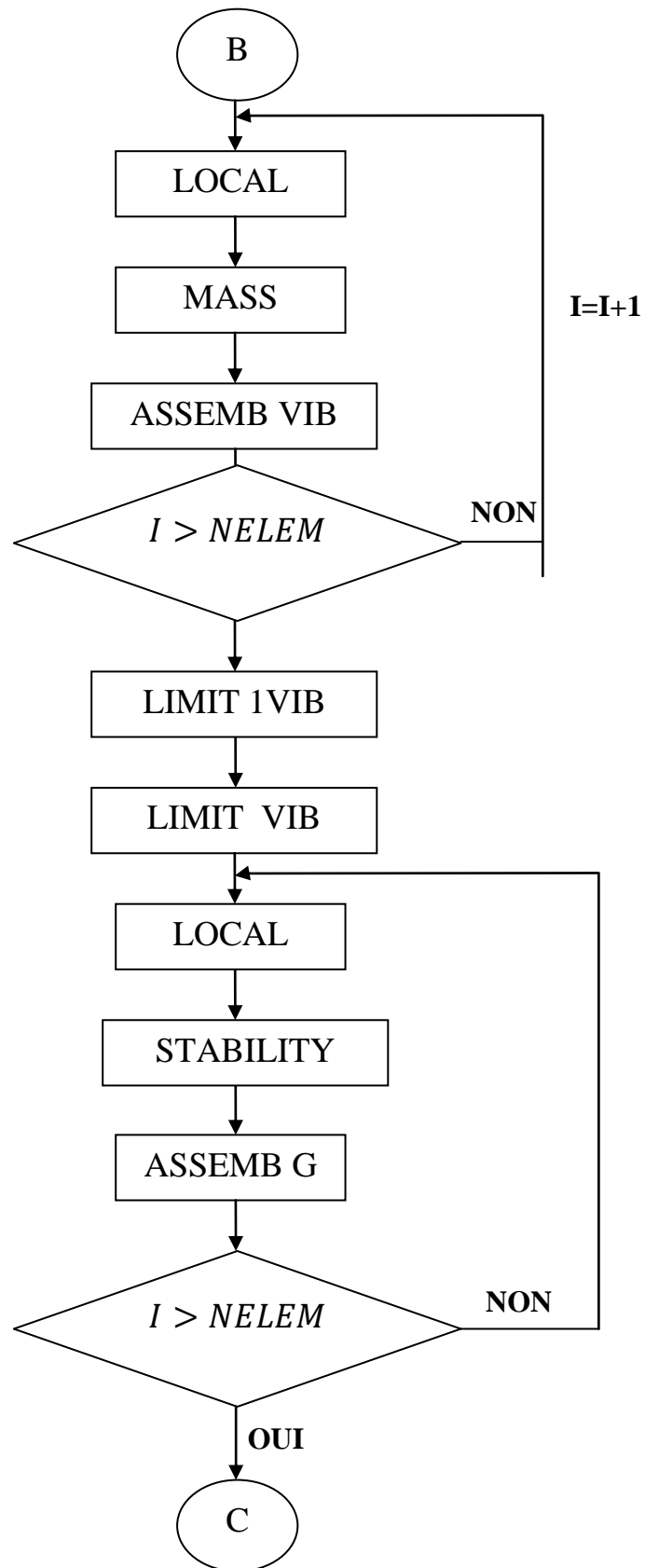
Dans cette étude on utilise un programme en langage FORTRAN77 et un autre programme MATLAB, le premier programme permet de résoudre l'équation et calculer $F = Kq$ et calculer la matrice de rigidité $[K]$ matrice masse $[M]$, le deuxième programme destiné pour trouver les fréquences propres à partir de résolution de l'équation suivante :

$$\det([K_e] - \omega^2[M]) = 0 \quad (3-49)$$

III -4-2) Présentation de l'organigramme du programme :







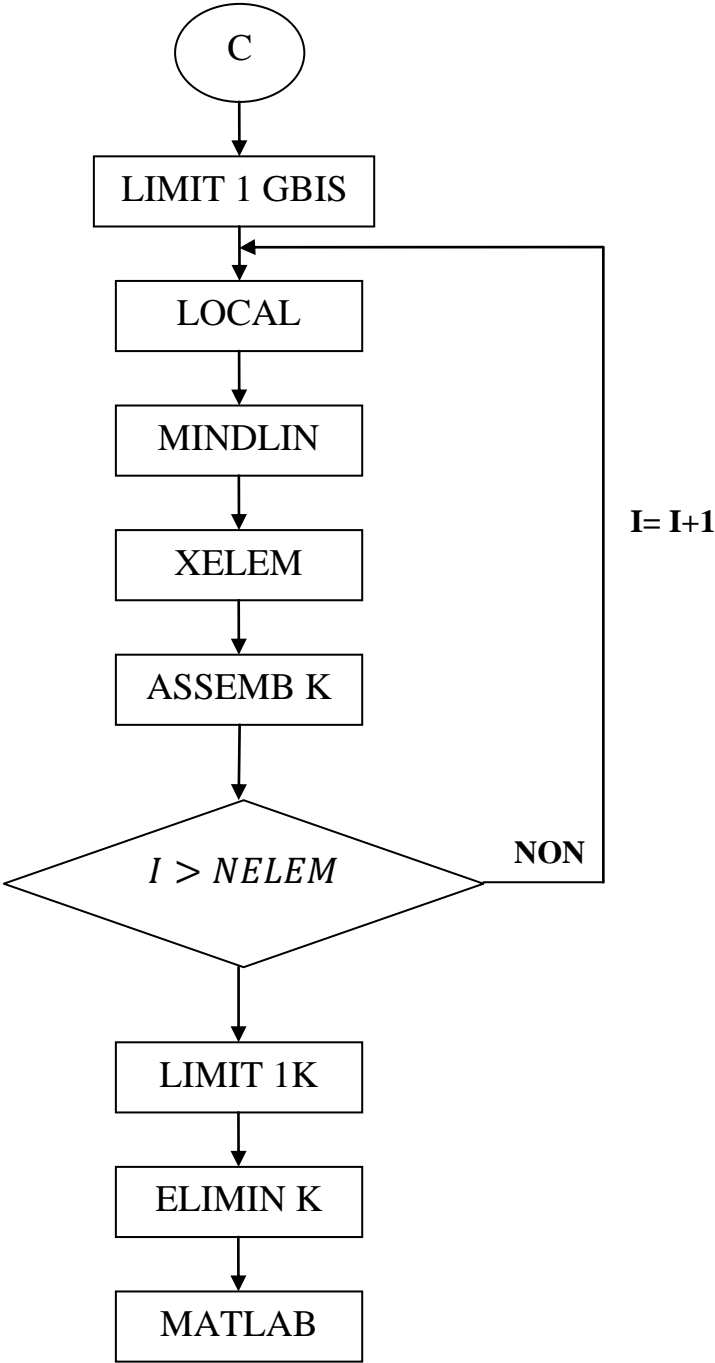


Figure (III-3) : Organigramme du programme.

III -4-3) Description des « subroutines » du programme :**Tableau (III -1): Fonctions des subroutines.**

Les subroutines	fonction
Comp5	calculer les caractéristiques mécaniques du stratifié ([A] , [B], [D], [H])
Hich	Construction du tableau de localisation.
Mindlin	Construction des matrices de rigidité élémentaires
Force	Création du vecteur forces élémentaire.
Assemb	L'assemblage de les matrices de rigidité élémentaires et le vecteur de force élémentaire dans la matrice de rigidité et le vecteur force, globaux respectivement
Limite1	Permet d'introduire les conditions aux limites pour calculer le déplacement
Gauss	Cette subroutines résout le système d'équation linéaire et calculer les déplacements à partir de l'équation $F = K\delta$
Local	Localiser les matrices réduites dans la matrice globale.
Xelem	Réduire la matrice de rigidité élémentaire de 20*20 à 12*12.
Assemb k	Assembler les matrices de rigidité élémentaires réduites
Limit1 K	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de rigidité réduite.
Elimin K	Eliminations les lignes et les colonnes de matrice de rigidité réduite dans les éléments sont nulles.
Masse	Création de la matrice de masse élémentaire.
Assemb vib	Assembler les matrices de masse.
Limit1 vib	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de masse.
Elimin vib	Eliminations les lignes et les colonnes de matrice masse correspondant aux déplacements fixés.

III -5) Validation numérique d'élément fini dans l'analyse dynamique des plaques :

Dans cette partie, nous allons étudier l'efficacité de l'élément rectangulaire à quatre nœuds utilisé dans l'étude du comportement dynamique des plaques isotrope et composite stratifiée. Les résultats obtenus seront comparés avec les solutions obtenus analytiquement

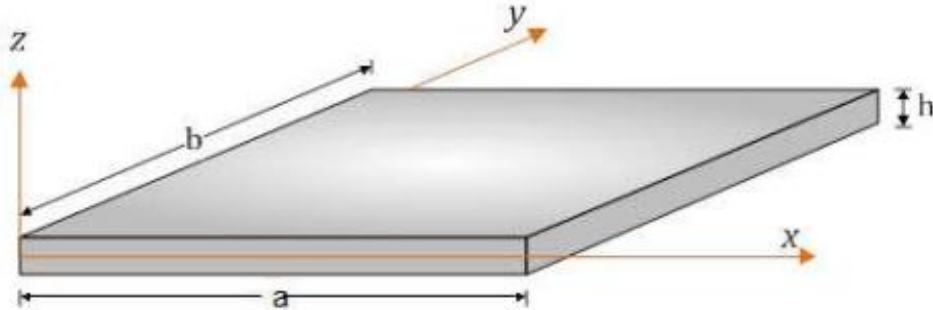


Figure (III -4) Géométrie de la plaque.

III -5-1) Plaques isotrope :

On considère une plaque isotrope carrée avec un rapport d'épaisseur $a/h = 10$. Les propriétés mécaniques du matériau sont: $E = 10.92$, $\nu = 0.3$, $\rho = 1$.

Les valeurs des fréquences propres sont normalisées par la relation suivante:

$$\bar{\omega} = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (3-50)$$

Tableau (III-2) : La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyé(SSSS).

Maillage Référence	fréquence fondamentale ($\bar{\omega}$)	Erreur%
présent élément 4*4	0.9880	6.2365
présent élément 8*8	0.9423	1.3225
présent élément 12*12	0.9347	0.5053
présent élément 16*16	0.9322	0.2365
présent élément 20*20	0.9322	0.2365
Mindlin [24]	0.930	-
3D élasticité [24]	0.932	-
Ferreira(Q4) [24]	0.9346	-
Analytique (Rayleigh-Ritz) [25]	0.930	-

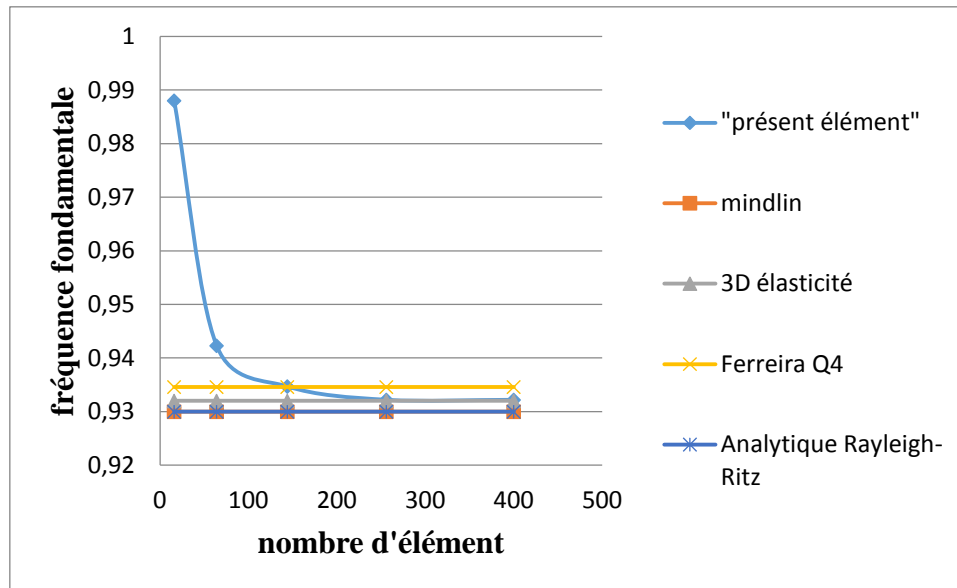


Figure (III-5) : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyé (SSSS)

Tableau (III-3) : La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastree(EEEE)

Maillage Référence	fréquence fondamentale ($\bar{\omega}$)	Erreur%
présent élément 4*4	1.8522	16.089
présent élément 8*8	1.6460	3.1651
présent élément 12*12	1.6124	1.0592
présent élément 16*16	1.6013	0.3635
présent élément 20*20	1.5961	0.0376
Ferreira(Q4) [24]	1.5955	-
Analytique (Rayleigh-Ritz) [25]	1.5940	-
Liew et al [26]	1.5582	-

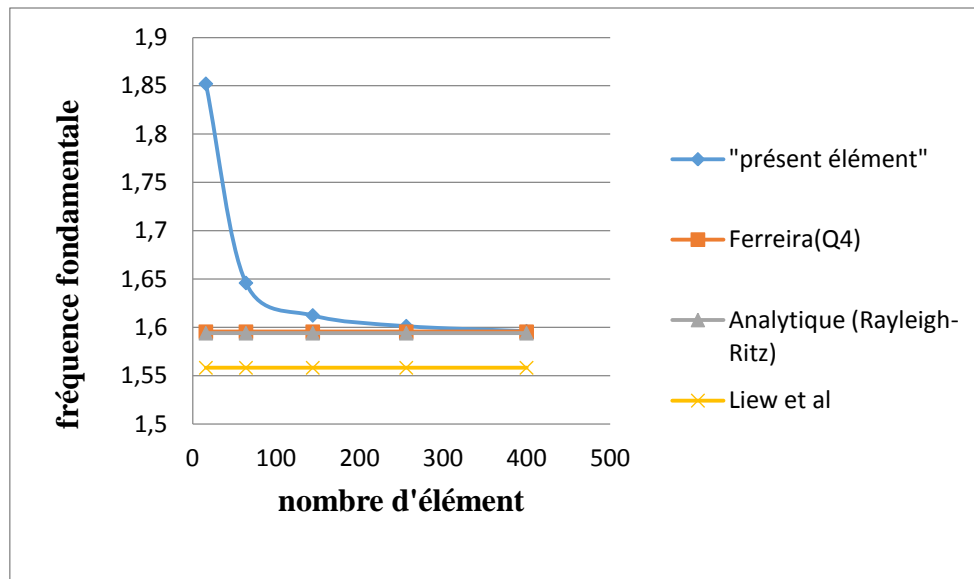


Figure (III-6) : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encadrée(EEEE)

Tableau (III-4) : la fréquence propre fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée -encadrée (SESE).

Maillage Référence	fréquence fondamentale ($\bar{\omega}$)	Erreur%
présent élément 4*4	1.4864	14.1628
présent élément 8*8	1.3425	3.1105
présent élément 12*12	1.3192	1.3210
présent élément 16*16	1.3111	0.6989
présent élément 20*20	1.3074	0.4147
Mindlin [24]	1.302	-
Ferreira(Q4) [24]	1.2940	-

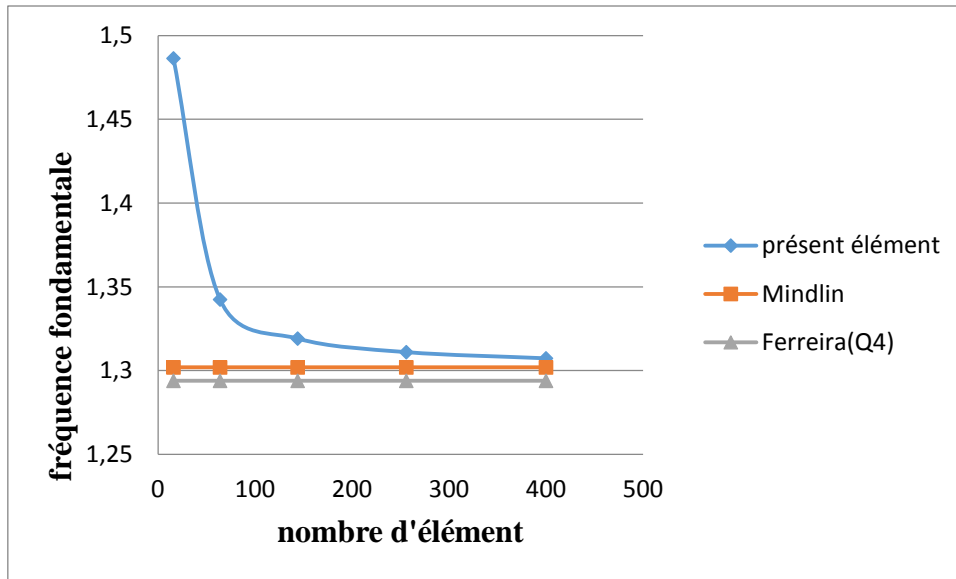


Figure (III-7) : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastrée(SESE).

Interprétation des résultats :

Les figures (III-5), (III-6) et ((III-7) représente la convergence de la fréquence fondamentale ($\bar{\omega}$).

D'après les résultats des fréquences fondamentale obtenus on remarque que :

Les résultats sont très proche l'une et l'autre (numérique et ferreira) , et quand le nombre d'élément augmente les valeurs se rapprochent de plus en plus.

III -5-2) Plaque composite stratifiée :

On considère une plaque stratifiée carrée simplement appuyée avec $a/h = 5$ et une stratification croisée (0 / 90 / ... / 0). Les caractéristiques mécaniques de chaque couche sont les suivantes:

$$\frac{E_1}{E_2} = 3 \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.6 \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.5 \quad \nu_{12} = 0.25 \quad \rho = 1$$

Les valeurs des fréquences propres sont normalisées par la relation suivante:

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho h^2}{E_2}} \quad (3-51)$$

Tableau (III-5) : La fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de trois couches (0/90/0) simplement appuyé.

Maillage Référence	fréquence fondamentale ($\bar{\omega}$)	Erreur%
présent élément 2*2	0.33075	24.9338
présent élément 4*4	0.27422	3.5808
présent élément 8*8	0.26419	0.207
présent élément 12*12	0.26305	0.6383
présent élément 16*16	0.26267	0.7818
présent élément 20*20	0.26248	0.8536
3D-Elasticity (Noor)[27]	0.26474	-

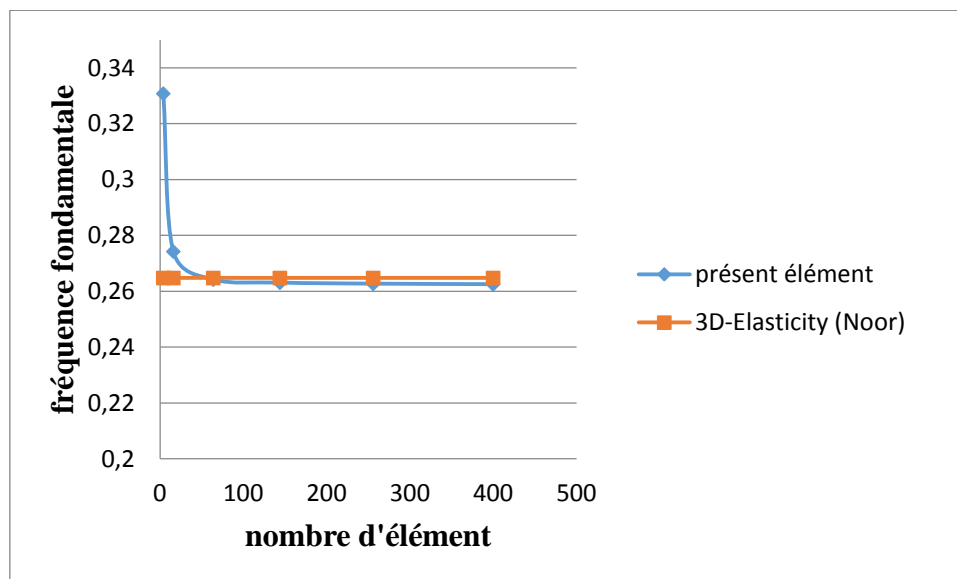


Figure (III-8) : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de trois couches (0/90/0) simplement appuyé .

Tableau (III-6) : La fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de cinq couches (0/90/0/90/0) simplement appuyé.

Maillage Référence	fréquence fondamentale ($\bar{\omega}$)	Erreur%
présent élément 4*4	0.27586	3.7574
présent élément 8*8	0.2657	0.06394
présent élément 12*12	0.2641	0.6657
présent élément 16*16	0.2638	0.7785
présent élément 20*20	0.2636	0.8538
3D-Elasticity (Noor) [27]	0.26587	-

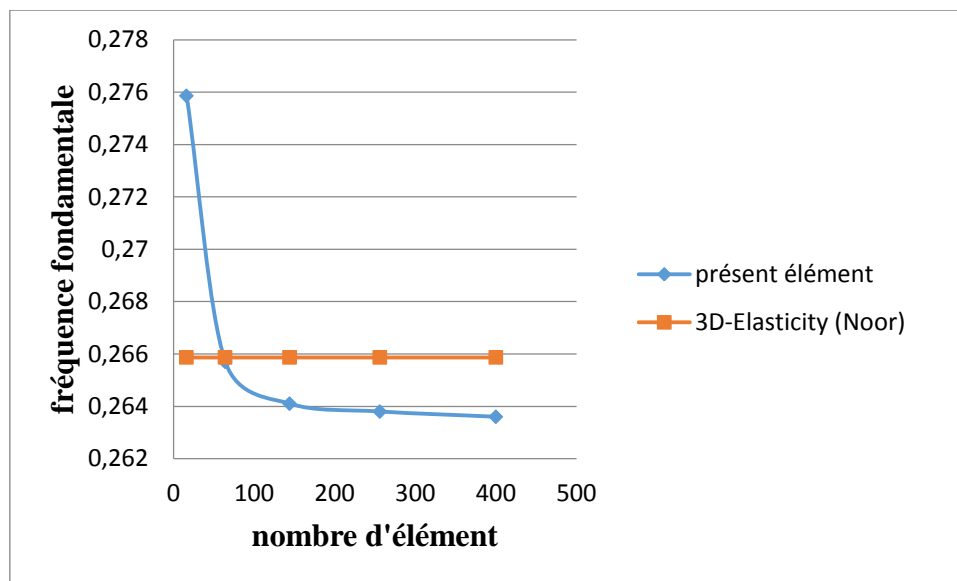


Figure ((III-9) : Convergence de la fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de cinq couches (0/90/0/90/0) simplement appuyé .

Interprétation des résultats :

les figures (III-8) et ((III-9) suivantes montrent le convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de 3 couches(0/90/0) simplement appuyée et d'une plaque stratifiée constituée de 5 couches(0/90/0/90/0) simplement appuyée respectivement.

D'après les résultats des fréquences fondamentale obtenus on remarque que : Les résultats convergeant vers le résultat analytique 3D-Elasticity (Noor)[27]

III -6) Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté l'élément fini utilisé ,pour le calcul de la fréquences propres d'une plaques isotrope et stratifiées. L'étude concerne la convergence de la fréquences propre en fonction de nombre d'élément dans différentes conditions aux limites . en traçant les courbes pour faciliter l'interprétation. et en comparant avec les résultat analytiques par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature.

Chapitre IV**Validation et étude paramétrique****IV -1) Introduction :**

La présence d'irrégularité géométrique telle que les trous et les ouvertures modifie les caractéristiques dynamiques de la plaque. Par conséquent, il devient nécessaire d'étudier l'effet des trous excentrés sur la réponse vibratoire et la stabilité des plaques pour éviter une rupture mécanique due à la résonance et la fatigue de la structure vis à vis aux vibrations subies.

Dans notre étude, nous prenons en considération les paramètres suivants :

- Le rapport de l'excentricité de l'ouverture (c/a).
- Le rapport de la dimension de l'ouverture (d/a).
- les conditions aux limites (SSSS et EEEE).
- le rapport d'anisotropies E_{11}/E_{22} .
- le nombre de couches.
- l'orientation des fibres.
- le rapport d'épaisseur (a/h).

Dans cette étude on adopte un maillage de (20×20)

Les valeurs des fréquences propres sont normalisées par la relation suivante:

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho h^2}{E_2}} \quad (\text{IV-1})$$

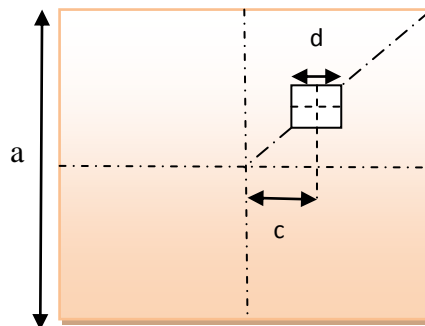


Figure IV.1 : plaque carrée avec trou excentrée

IV -2) plaque isotrope :**IV -2-1) Effet de l'excentricité de l'ouverture sur la fréquence fondamentale :**

on considère une plaque isotrope carrée avec deux dimensions de l'ouverture (d/a), la masse volumique $\rho = 1$, le rapport d'épaisseur $a/h = 10$, les caractéristiques mécaniques sont :

$$E = 10.92 \quad , \quad G = 4.2 \quad , \quad \nu = 0.3$$

Les condition aux limites sont :

- Plaque simplement appuyée (SSSS)
- Plaque encastree (EEEE)

Les valeurs des fréquences propres non dimensionnelles sont normalisées par la relation suivante :

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h^2}{E_2}} \quad (\text{IV-2})$$

Tableau (IV.1) : La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque isotrope simplement appuyée ($d/a = 0.2$) :

L'excentricité $\frac{c}{a}$	SSSS	
	ω (rad/s)	$\bar{\omega}$ (rad/s)
0	0.0345	18.574
0.1	0.0346	18.601
0.2	0.0347	18.627
0.3	0.0345	18.574
0.4	0.0342	18.493

Tableau (IV.2): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque isotrope encastree ($d/a = 0.2$) :

L'excentricité $\frac{c}{a}$	EEEE	
	ω (rad/s)	$\bar{\omega}$ (rad/s)
0	0.1120	33.466
0.1	0.1094	33.0756
0.2	0.1050	32.404
0.3	0.1035	32.1714
0.4	0.1097	33.121

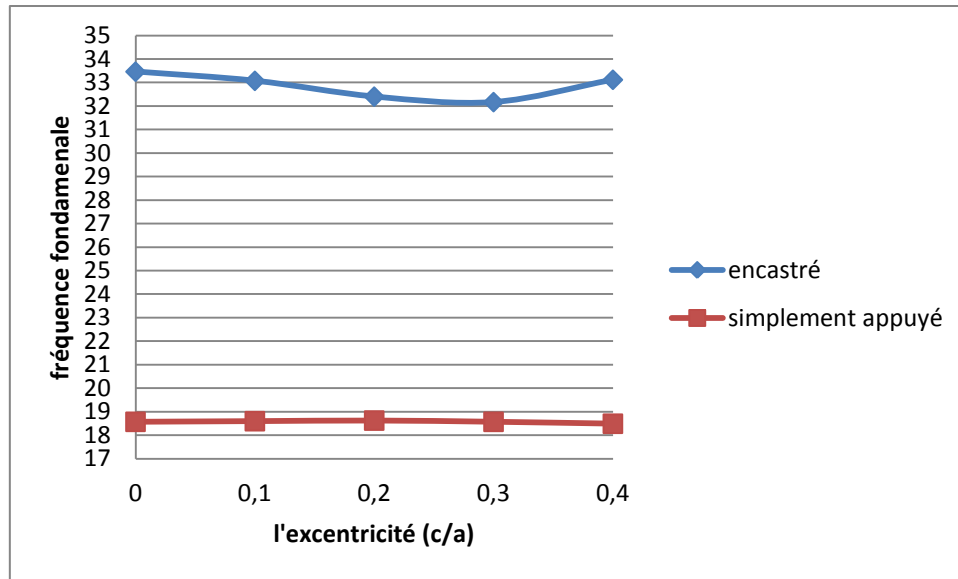


Figure IV.2: Variation de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope en fonction du rapport de l'excentricité (c/a) pour (d/a=0.2)

➤ **Interprétation des résultats :**

D'après les résultats présentés dans les (tableau IV.1), (tableau IV.2) et la (figure IV.2) on constate que :

- pour une plaque carré simplement appuyée la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a) jusqu'à l'excentricité (c/a)=0.2 puis diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- Dans le cas d'une plaque encadrée la valeur de fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a) jusqu'à l'excentricité (c/a)=0.3, puis augmente avec le rapport d'excentricité (c/a).

Tableau (IV.3): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque isotrope simplement appuyée ($d/a = 0.4$):

L'excentricité $\frac{c}{a}$	SSSS	
	ω (rad/s)	$\bar{\omega}$ (rad/s)
0	0.0399	19.975
0.1	0.0366	19.131
0.2	0.0321	17.916
0.3	0.0299	17.2916

Tableau (IV.4): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque isotrope encastéré ($d/a = 0.4$):

L'excentricité $\frac{c}{a}$	EEEE	
	ω (rad/s)	$\bar{\omega}$ (rad/s)
0	0.1921	43.829
0.1	0.1277	35.735
0.2	0.0968	31.112
0.3	0.1781	42.202

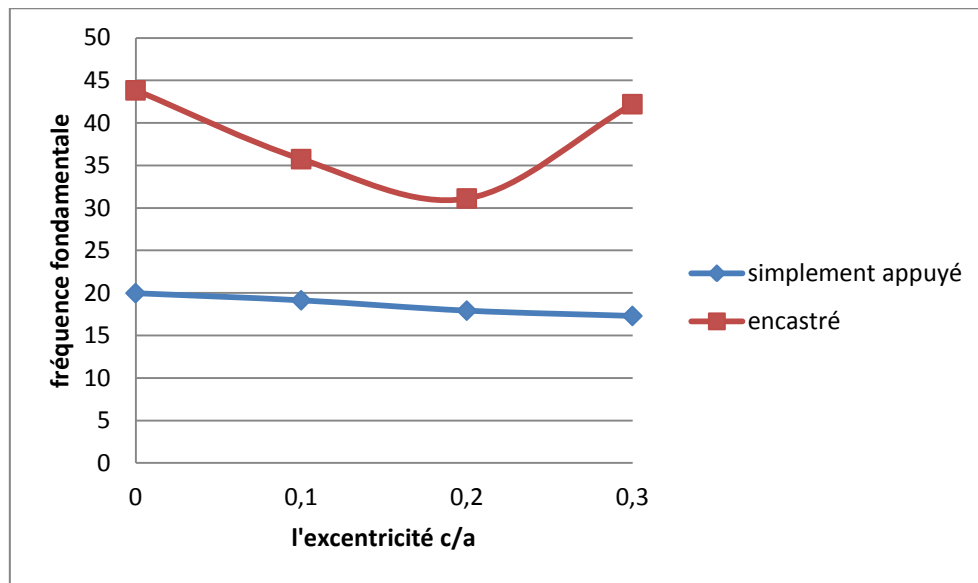


Figure IV-3: Variation de la fréquence fondamentale d' une plaque isotrope en fonction du rapport de l'excentricité (c/a) pour ($d/a=0.4$)

➤ **Interprétation des résultats :**

D'après les résultats présentés dans les (tableau IV.3), (tableau IV.4) et la (figure IV.3) on remarque que :

- pour une plaque carré simplement appuyée la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a) .
- dans le cas d'une plaque encastéré la valeur de fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a) jusqu'a l'excentricité (c/a)=0.2 qui représente un point d'inflexion de la courbe, puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a)), le changement de l'allure de cette courbe est probablement dûe au changement du mode de vibration .

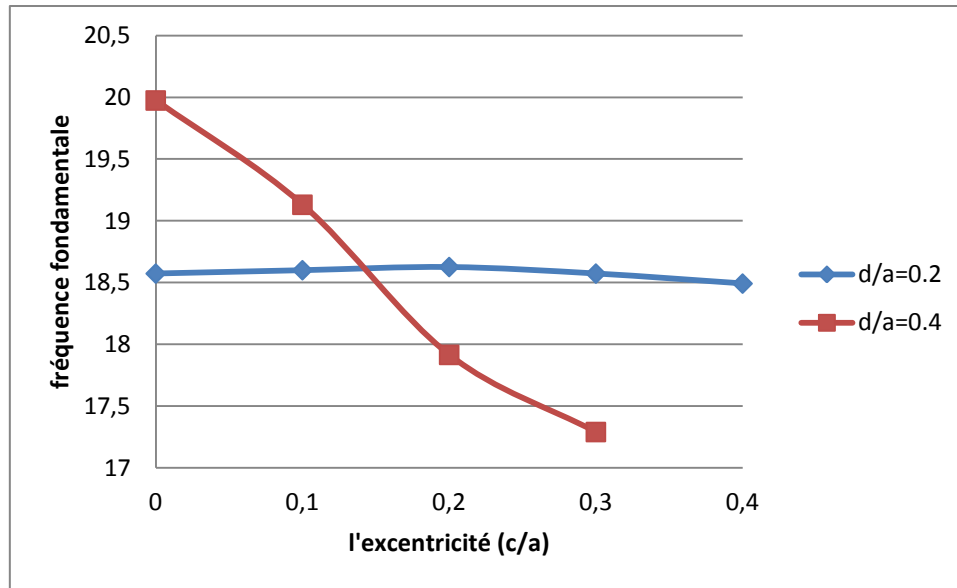


Figure IV-4: Variation de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée en fonction du rapport de l'excentricité (c/a) et rapport d'ouverture (d/a).

➤ **Interprétation des résultats :**

D'après les résultats présentés dans les (tableau IV.1), (tableau IV.3) et la (figure IV.4) on observe :

- pour une plaque carré avec rapport d'ouverture(d/a=0.2) la fréquence fondamentale augmente dans l'intervalle [0; 0.2]de rapport d'excentricité (c/a), puis diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a) .
- pour une plaque carré avec rapport d'ouverture(d/a=0.4) la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a) .

IV -3) plaque stratifiée :

IV -3-1) Effet de l'excentricité de l'ouverture sur la fréquence fondamentale :

on prend une plaque stratifiée à quatre couches (0 /90 /90 /0) Les couches ont la même épaisseur, la masse volumique $\rho = 1$, le rapport d'épaisseur $a/h = 10$, les caractéristiques mécaniques sont :

$$E_1 = 25 \quad E_2 = 1 \quad G_{12} = 0.5 \quad G_{13} = 0.5 \quad G_{23} = 0.2 \quad d/a = 0.2$$

Tableau (IV.5): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque stratifiée simplement appuyée ($d/a = 0.2$) :

L'excentricité $\frac{c}{a}$	SSSS	
	ω (rad/s)	$\bar{\omega}$ (rad/s)
0	0.0128	11.313
0.1	0.0129	11.3578
0.2	0.0134	11.5758
0.3	0.014	11.8321
0.4	0.0147	12.124

Tableau (IV.6): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque stratifiée encasté ($d/a = 0.2$):

L'excentricité $\frac{c}{a}$	EEEE	
	ω (rad/s)	$\bar{\omega}$ (rad/s)
0	0.037	19.255
0.1	0.0347	18.628
0.2	0.0322	17.944
0.3	0.0319	17.860
0.4	0.0337	18.357

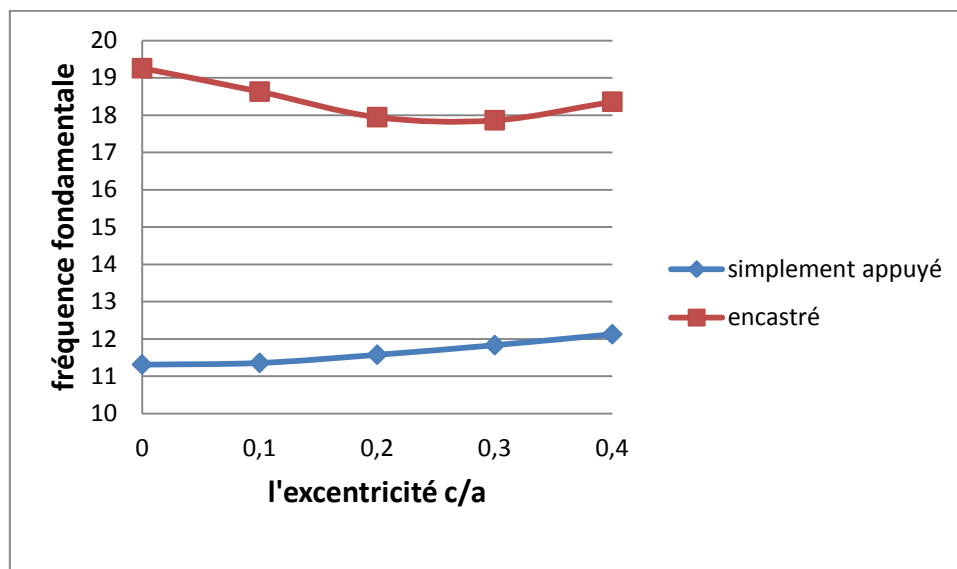


Figure IV.5 : Variation de la fréquence fondamentale d' une plaque stratifiée(0/90/90/0) en fonction du rapport de l'excentricité (c/a) pour ($d/a = 0.2$)

➤ **Interprétation des résultats :**

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV.5), (tableau IV.6) et la (figure IV.5) on observe :

- pour une plaque stratifiée carré simplement appuyée ,la fréquence fondamentale augmentent avec l'augmentation de l'excentricité (c/a).
- et pour une plaque stratifiée encastéré, la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de l'excentricité (c/a) jusqu'à (c/a)=0.3 qui représente point d'inflexion, puis augmente avec l'augmentation de l'excentricité (c/a) , le changement de l'allure de cette courbe est probablement dûe au changement du mode de vibration .

Tableau (IV.7): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque stratifiée simplement appuyée ($d/a = 0.4$) :

L'excentricité $\frac{c}{a}$	SSSS	
	ω (rad/s)	$\bar{\omega}$ (rad/s)
0	0.0117	10.8166
0.1	0.0113	10.6301
0.2	0.0111	10.535
0.3	0.0120	10.954

Tableau (IV.8): La fréquence propre fondamentale en fonction de l'excentricité de l'ouverture pour une plaque stratifiée encastéré ($d/a = 0.4$):

L'excentricité $\frac{c}{a}$	EEEE	
	ω (rad/s)	$\bar{\omega}$ (rad/s)
0	0.0599	24.774
0.1	0.0406	20.149
0.2	0.0311	17.635
0.3	0.0428	20.688

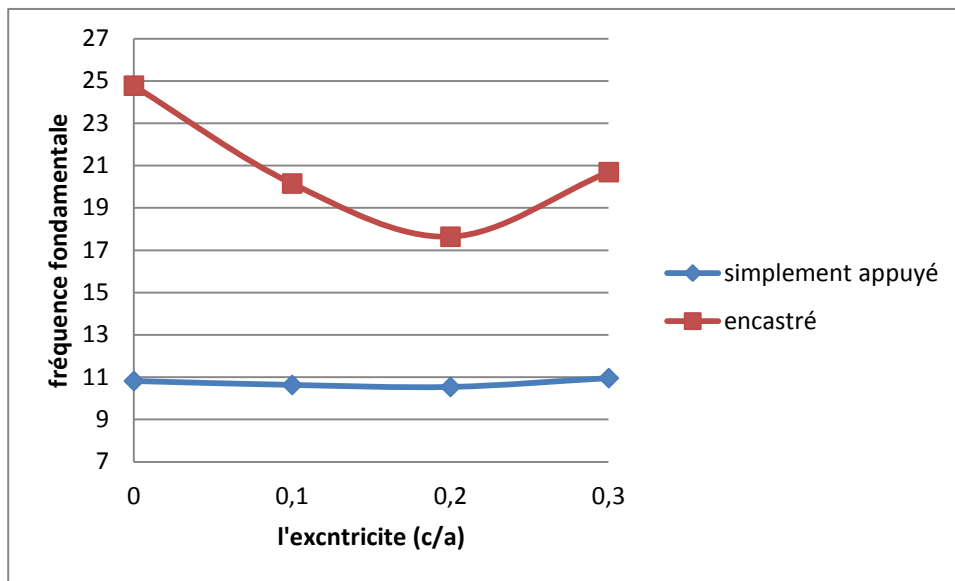


Figure IV.6 : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée à quatre couches (0/90/90/0) en fonction de l'excentricité pour ($d/a=0.4$)

➤ **Interprétation des résultats :**

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV.7), (tableau IV.8) et la (figure IV.6) on remarque que :

- pour une plaque stratifiée carré simplement appuyée la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de l'excentricité (c/a) jusqu'à (c/a)=0.2 qui représente point d'inflexion ,puis augmente avec l'augmentation de l'excentricité ..
- et pour une plaque stratifiée encastree la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de l'excentricité (c/a) jusqu'à (c/a)=0.2 qui représente point d'inflexion, puis augmente avec l'augmentation de l'excentricité (c/a).

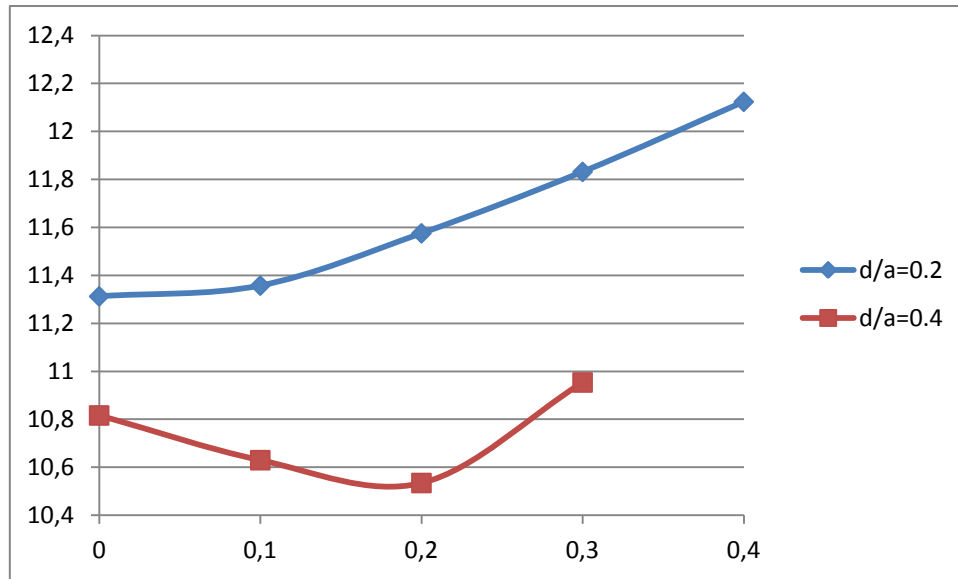


Figure IV.7 :Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée a quatre couches (0/90/90/0) simplement appuyée en fonction de l'excentricité (c/a) et rapport d'ouverture (d/a)

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV.5), (tableau IV.7) et la (figure IV.7) on remarque que :

- pour une plaque stratifiée carré avec rapport d'ouverture (d/a=0.2) la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a)
- pour une plaque stratifiée carré avec rapport d'ouverture(d/a=0.4) la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle [0;0.2]de rapport d'excentricité (c/a), puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a) .

IV -3-2) Effet de rapport d'anisotropie sur la fréquence fondamentale :

on considère une plaque stratifiée a quatre couches (0 /90 /90 /0) Les couches ont la même épaisseur, la masse volumique $\rho = 1$, le rapport d'épaisseur $a/h = 10$

Les propriétés mécaniques sont les suivantes:

$$E_2 = 1 \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.5 \quad \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5 \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2 \quad \nu = 0.25 \quad \frac{E_1}{E_2} = \text{variable}$$

Tableau (IV.9) :Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyé(SSSS) ($d/a = 0.2$) :

c/a	E_1/E_2				
	1	3	10	20	40
0	5.916	6.7823	8.8317	10.630	12.767
0.1	5.916	6.7823	8.888	10.723	12.845
0.2	5.830	6.7823	9.00	10.908	13.038
0.3	5.744	6.7823	9.1104	11.135	13.379
0.4	5.656	6.7823	9.2736	11.357	13.711

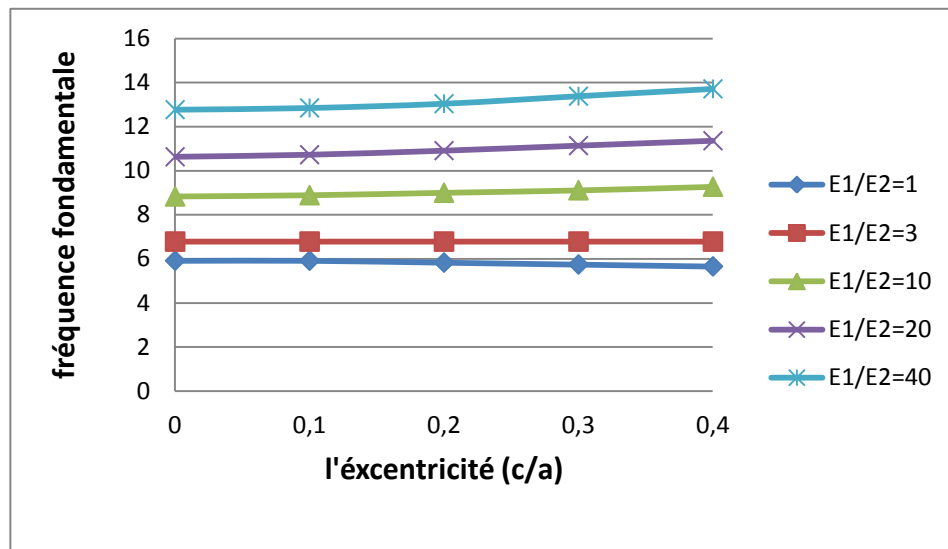


Figure IV.8 :Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyé (SSSS) ($d/a = 0.2$) .

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV.9) et la (figure IV.8) on remarque que :

- Pour le rapport $E_1/E_2=1$ la fréquence fondamentale reste constante dans l'intervalle $[0 ; 0.2]$ de l'excentricité, puis diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- Pour le rapport $E_1/E_2 =3$ la fréquence fondamentale reste constante avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- Pour les rapport $E_1/E_2=10$, $E_1/E_2=20$ et $E_1/E_2=40$ la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).

- la valeur de fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de rapport d'anisotropie.

Tableau (IV.10):Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée encastéré (EEEE) ($d/a = 0.2$) :

c/a	E_1/E_2				
	1	3	10	20	40
0	10.2469	12.49	16.24	18.52	20.6155
0.1	10.0498	12.247	15.811	17.972	19.949
0.2	9.7979	11.916	15.297	17.320	19.183
0.3	9.6436	11.832	15.264	17.2626	19.052
0.4	9.948	12.1655	15.652	17.748	19.621

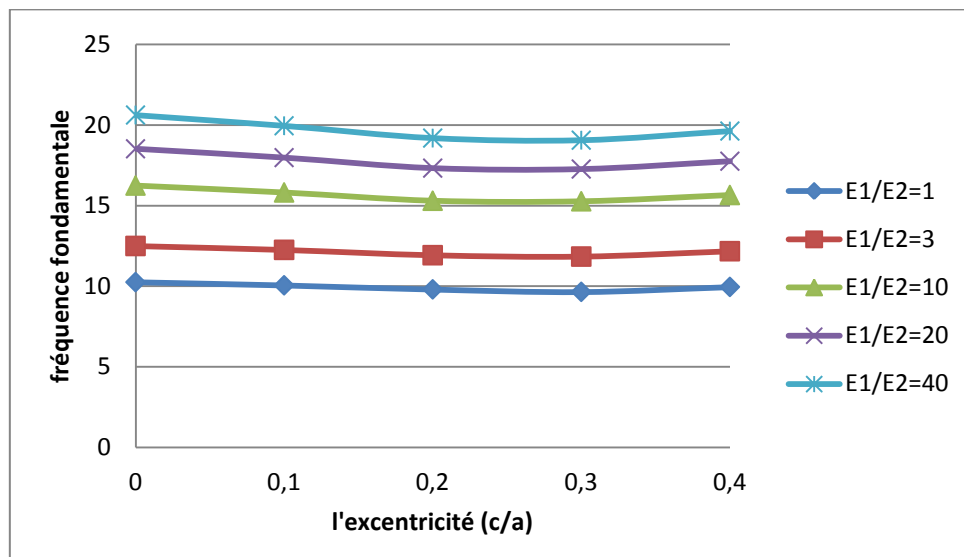


Figure IV.9 :Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée encastéré (EEEE) ($d/a = 0.2$)

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV.10) et la (figure IV.9) on remarque que :

- Les valeurs de la fréquence fondamentale diminuent dans l'intervalle $[0 ; 0.3]$ de rapport d'excentricité, puis augmentent avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a), quelque soit le rapport d'anisotropie.

Tableau (IV.11):Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyé(SSSS) ($d/a = 0.4$) :

c/a	E_1/E_2				
	1	3	10	20	40
0	6.557	7.141	8.775	10.247	12.0416
0.1	6.245	6.855	8.544	10.0498	11.832
0.2	5.744	6.4807	8.366	9.949	11.832
0.3	5.385	6.3245	8.485	10.344	12.369

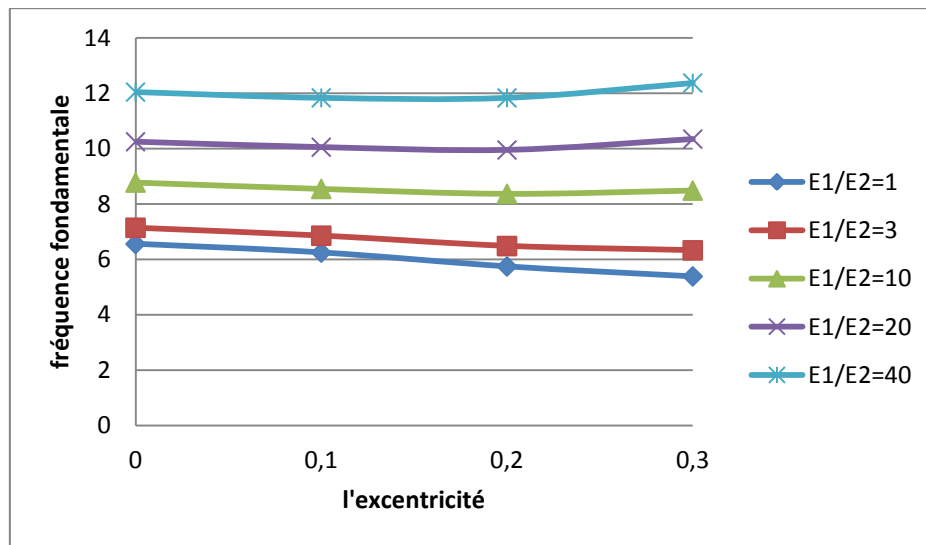


Figure (IV.10):Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyé (SSSS) ($d/a = 0.4$) .

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV.11) et la (figure IV.10) on remarque que :

- pour le rapport $E_1/E_2=1$ et $E_1/E_2=3$ la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- Pour le rapport $E_1/E_2=10$ et $E_1/E_2=20$ la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle $[0 ; 0.2]$ de rapport d'excentricité , puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).

- Pour le rapport $E_1/E_2=40$ la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité jusqu'à le rapport d'excentricité $(c/a)=0.1$, puis reste constante jusqu'à $(c/a)=0.2$, ensuite elle augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a) .

Tableau (IV.12):Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée encadré (EEEE) ($d/a = 0.4$):

c/a	E_1/E_2				
	1	3	10	20	40
0	13.379	16.309	20.928	23.664	26.076
0.1	10.9544	13.228	17.058	19.416	21.61
0.2	9.486	11.489	14.866	16.9705	18.947
0.3	12.649	14.933	18.221	20.124	21.84

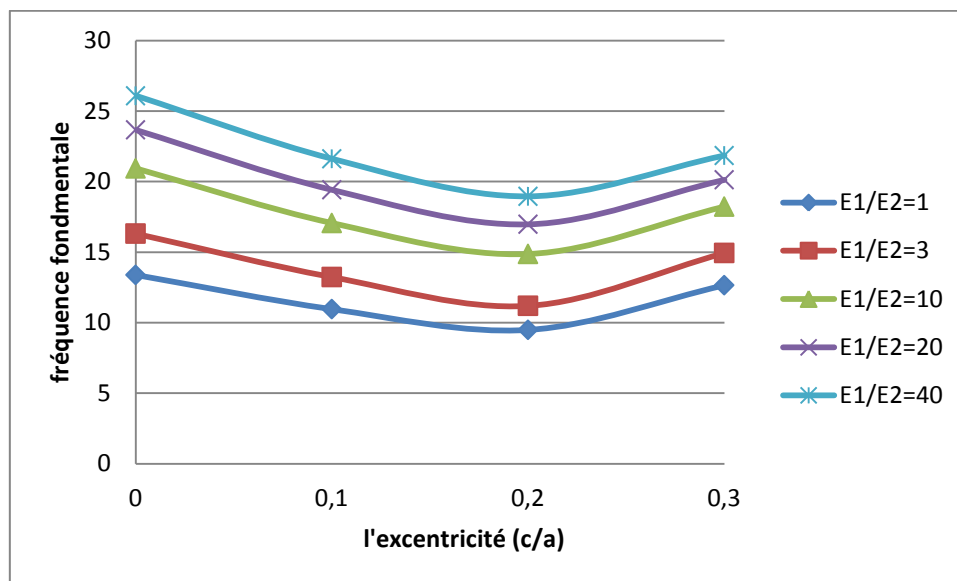


Figure IV.11 :Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'anisotropie et l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée encadré (EEEE) ($d/a = 0.4$).

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV.12) et la (figure IV.11) on remarque que :

- La valeur de la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle $[0 ; 0.2]$ de rapport d'excentricité (c/a), puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a), quelque soit le rapport d'anisotropie.

IV -3-3) Effet de l'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale :

on considère une plaque stratifiée $(\theta, -\theta, -\theta, \theta)$ carrée de 4 couches de rapport d'épaisseur $a/h = 10$. La valeur de θ varie de 0 à 90° . Les caractéristiques d'une couche sont les suivantes:

$$\frac{E_1}{E_2} = 25 \quad E_2 = 1 \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.5 \quad \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5 \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2 \quad \nu = 0.25 \quad d/a = 0.2$$

Tableau (IV.13): Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée (SSSS) ($d/a=0.2$) :

	θ						
	0	15	30	45	60	75	90
0	11.357	12.206	13.564	14.282	13.564	12.206	11.357
0.1	11.357	12.206	13.564	14.282	13.564	12.206	11.357
0.2	11.357	12.206	13.564	14.282	13.564	12.206	11.357
0.3	11.874	12.288	13.153	13.564	13.153	12.288	11.874
0.4	12.288	12.569	13.341	13.711	13.341	12.569	12.288

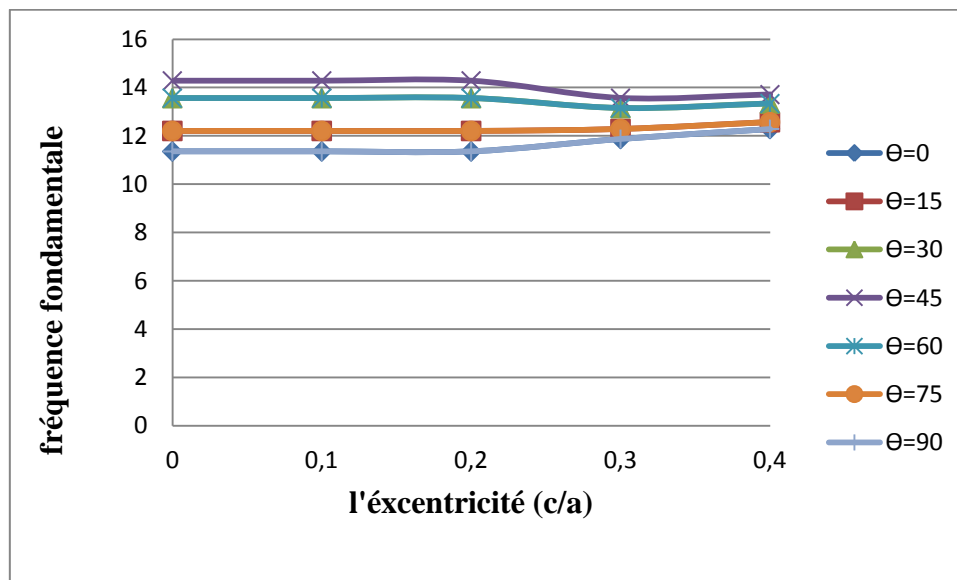


Figure IV-12 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyée (SSSS) ($d/a=0.2$)

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV-13) et la (figure IV-12) on remarque que :

- les valeurs de la fréquence fondamentale sont les mêmes pour les orientations $\theta = 0$ et $\theta = 90$, $\theta = 15$ et $\theta = 75$, $\theta = 30$ et $\theta = 60$.
- Pour les angles $\theta = 0$, $\theta = 15$, $\theta = 90$ et $\theta = 75$ la fréquence fondamentale reste constante dans l'intervalle $[0; 0.2]$ de rapport d'excentricité (c/a), puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité(c/a).
- Pour les angles $\theta = 30$, $\theta = 45$ et $\theta = 60$ la fréquence fondamentale reste constante dans l'intervalle $[0; 0.2]$ de rapport d'excentricité (c/a), puis diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité(c/a) jusqu'à $(c/a)=0.3$, après elle augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité(c/a).

Tableau (IV-14): Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée encadré (EEEE) ($d/a=0.2$) :

	θ						
	0	15	30	45	60	75	90
0	19.416	19	18.439	18.138	18.439	19	19.416
0.1	18.628	18.2756	17.804	17.6068	17.804	18.2756	18.628
0.2	18.628	18.2756	17.804	16.8522	17.804	18.2756	18.628
0.3	17.860	17.2626	16.852	16.733	16.852	17.2626	17.860
0.4	18.439	18.138	17.776	17.6918	17.776	18.138	18.439

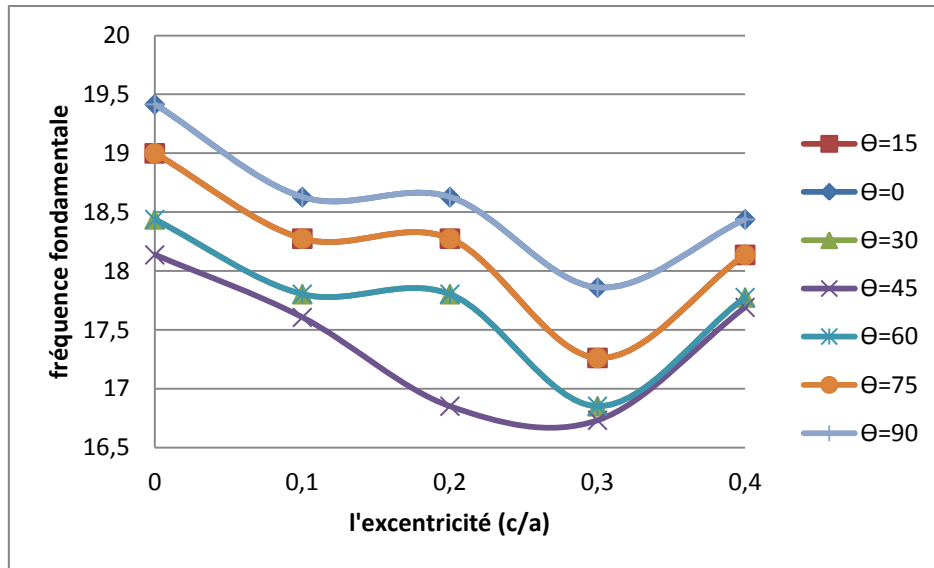


Figure IV-13 : Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité de l'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée encadrée (EEEE)(d/a=0.2)

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV-14) et la (figure IV-13) on remarque que :

- Pour les angles $\theta = 0$ et $\theta = 90$, $\theta = 15$ et $\theta = 75$, $\theta = 30$ et $\theta = 60$ les courbes ont la même allure, par contre pour l'angle $\theta = 45$ la courbe est ressemblable à celle d'une courbe de plaque isotrope encadré.
- Pour les angles $\theta = 0$ et $\theta = 90$, $\theta = 15$ et $\theta = 75$, $\theta = 30$ et $\theta = 60$ la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle $[0 ; 0,1]$ de rapport d'excentricité (c/a), puis reste constante dans l'intervalle $[0,1; 0,2]$ de rapport d'excentricité (c/a), ensuite diminue dans l'intervalle $[0,2 ; 0,3]$ de rapport d'excentricité (c/a), après elle augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- Pour l'angle $\theta = 45$ la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle $[0 ; 0,3]$ de rapport d'excentricité (c/a), puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité.

Tableau (IV.15): Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité d'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée (SSSS) (d/a)=0.4 :

	θ						
	0	15	30	45	60	75	90
0	10.7238	12.3288	14.966	16.124	14.966	12.3288	10.7238
0.1	10.344	11.6189	13.490	14.3178	13.490	11.6189	10.344
0.2	9.949	10.816	12.165	12.806	12.165	10.816	9.949
0.3	10.4403	10.8627	12	12.569	12	10.8627	10.4403

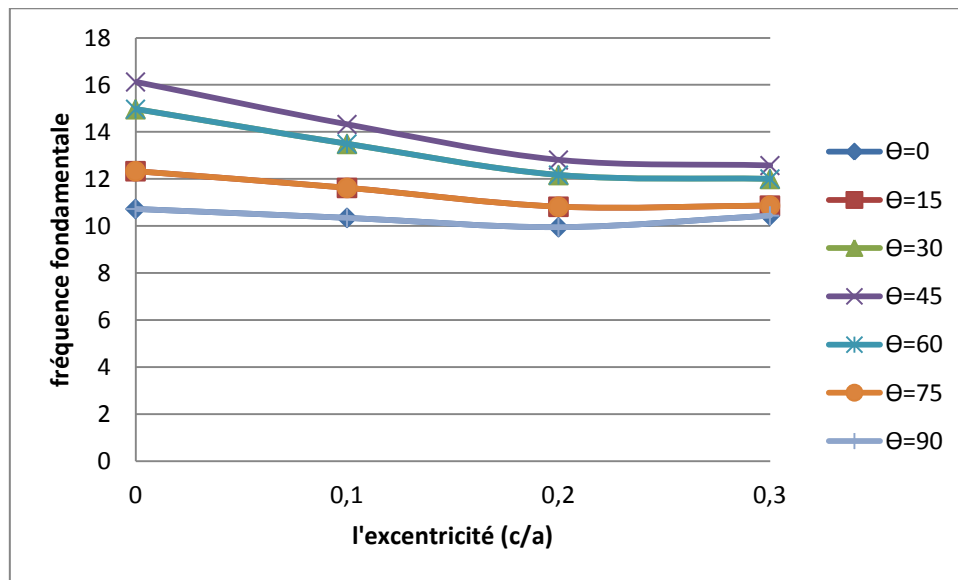


Figure IV.14: Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée simplement appuyée (SSSS) (d/a=0.4)

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV-15) et la (figure IV-14) on remarque que :

- Pour les angles $\theta = 0$ et $\theta = 90$, $\theta = 15$ et $\theta = 75$, la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle $[0 ; 0.2]$ de rapport d'excentricité (c/a), puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- Pour les angles $\theta = 30$, $\theta = 60$ et $\theta = 45$, la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).

Tableau (IV.16): Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité del'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a=0.4) :

	θ						
	0	15	30	45	60	75	90
0	23.366	23.173	23.0217	23.0217	23.0217	23.173	23.366
0.1	20.0748	19.442	18.788	18.493	18.788	19.442	20.0748
0.2	17.578	16.822	16.124	15.811	16.124	16.822	17.578
0.3	19.899	19.773	19.849	19.950	19.849	19.773	19.899

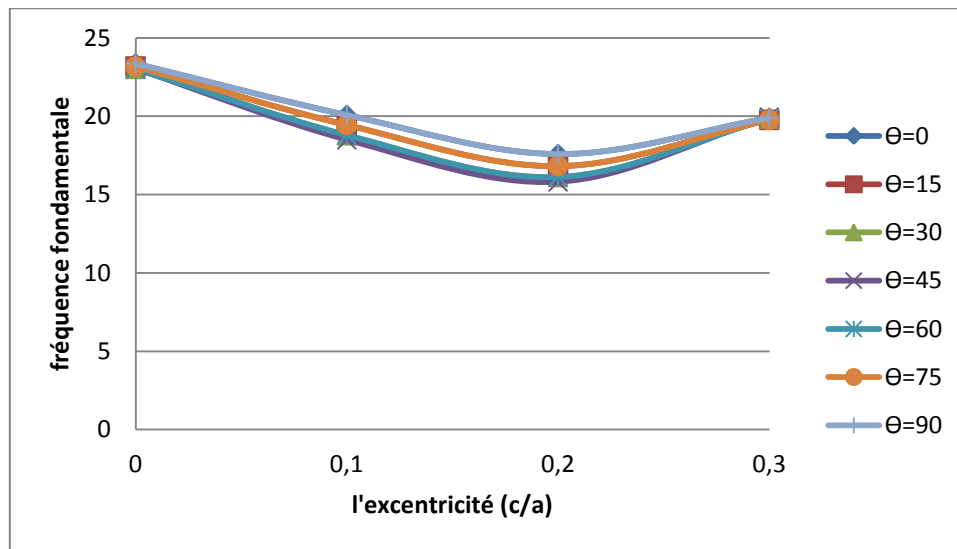


figure IV.15 : Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres et rapport de l'excentricité del'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a=0.4)

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV-16) et la (figure IV-15) on remarque que :

- Les valeurs de la fréquence fondamentale diminuent dans l'intervalle $[0 ; 0,2]$ de rapport d'excentricité, puis augmentent avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a), quelque soit l'orientation des fibres .
- L'allure des courbes est la même.

IV -3-4) Effet du nombre de couches sur la fréquence propre :

Cette section présente l'effet du nombre des couches et l'excentricité sur la fréquence des plaques stratifiées carrée (0/90/.../90/0) avec un rapport d'épaisseur $a/h=10$.

Les caractéristiques mécaniques et physiques d'un pli sont :

$$\frac{E_1}{E_2} = 25 \quad E_2 = 1 \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.5 \quad \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5 \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2 \quad \nu = 0.25 \quad d/a = 0.2$$

Tableau (IV.17) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) (d/a=0.2).

c/a	Nombre des couches		
	3	5	9
0	11.225	11.575	11.747
0.1	11.269	11.662	11.832
0.2	11.445	11.874	12.041
0.3	11.704	12.206	12.369
0.4	12.000	12.449	12.609
plain	12.165	12.609	12.767

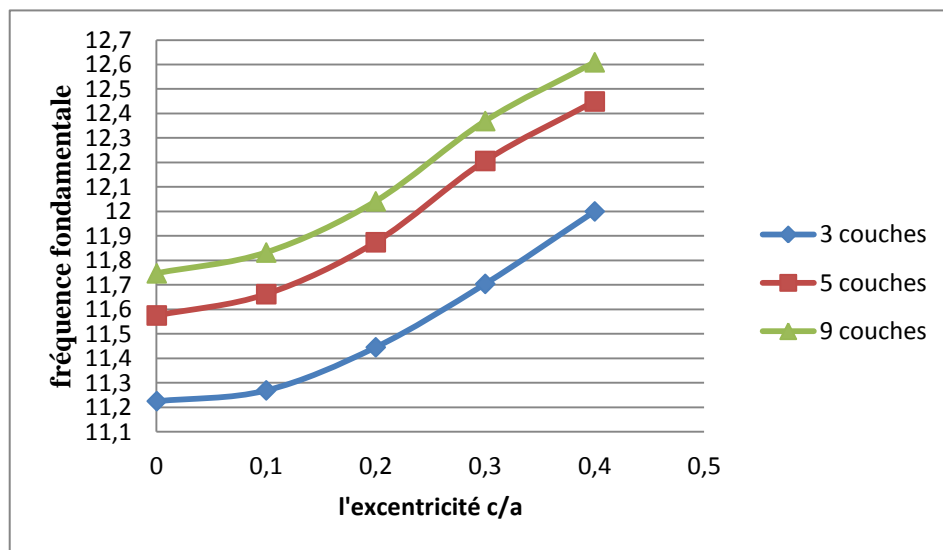


Figure IV.16: Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) (d/a=0.2).

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le tableau (IV.17) et la figure (IV.16) on remarque que :

- Les valeurs de la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a), quelque soit le nombre de couches.
- L'allure des courbes est la même

Tableau (IV.18) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) ($d/a=0.2$).

c/a	Nombre des couches		
	3	5	9
0	18.788	20.075	20.445
0.1	18.138	19.442	19.824
0.2	17.435	18.735	19.105
0.3	17.378	18.654	19
0.4	17.888	19.1833	19.544

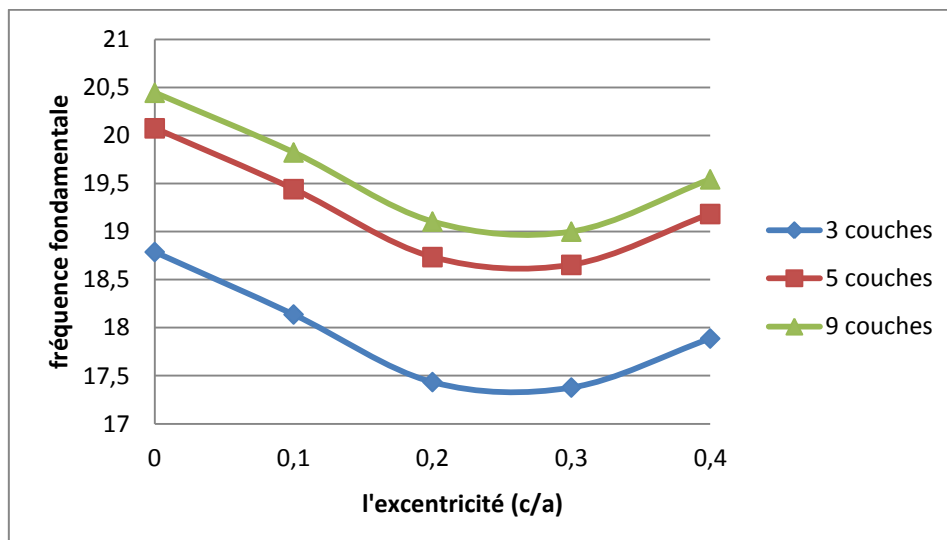


Figure IV.17: Variation de la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) ($d/a=0.2$).

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le tableau(IV.18) et la figure(IV.17) on remarque que :

- Une augmentation parallèle de la fréquence fondamentale avec le nombre des couches .
- L'allure des courbes est la même.
- Les valeurs de la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle $[0 ; 0.3]$ de rapport d'excentricité (c/a), puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a) quelque soit le nombre de couches .

Tableau (IV.19) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS)(d/a = 0.4) .

c/a	Nombre des couches		
	3	5	9
0	10.677	11.045	11.1355
0.1	10.3923	10.8627	11.045
0.2	10.198	10.8627	11.09
0.3	10.677	11.3137	11.5325

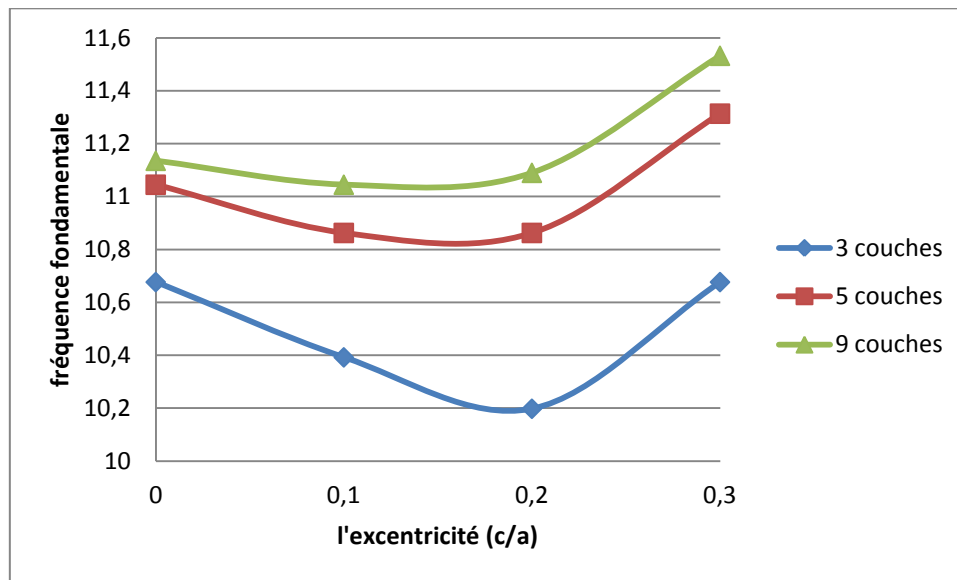


Figure IV.18 : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) (d/a = 0.4) .

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le tableau(IV.19) et la figure (IV.18) on remarque que :

- Les valeurs de la fréquence fondamentale diminuent dans l'intervalle [0 ; 0.2] de rapport d'excentricité, puis augmentent avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a), quelque soit le nombre de couches .

Tableau (IV.20) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a = 0.4) :

c/a	Nombre des couches		
	3	5	9
0	23.537	25.514	26.019
0.1	19.621	21.0238	21.424
0.2	17.175	18.385	18.735
0.3	20.025	21.401	21.748

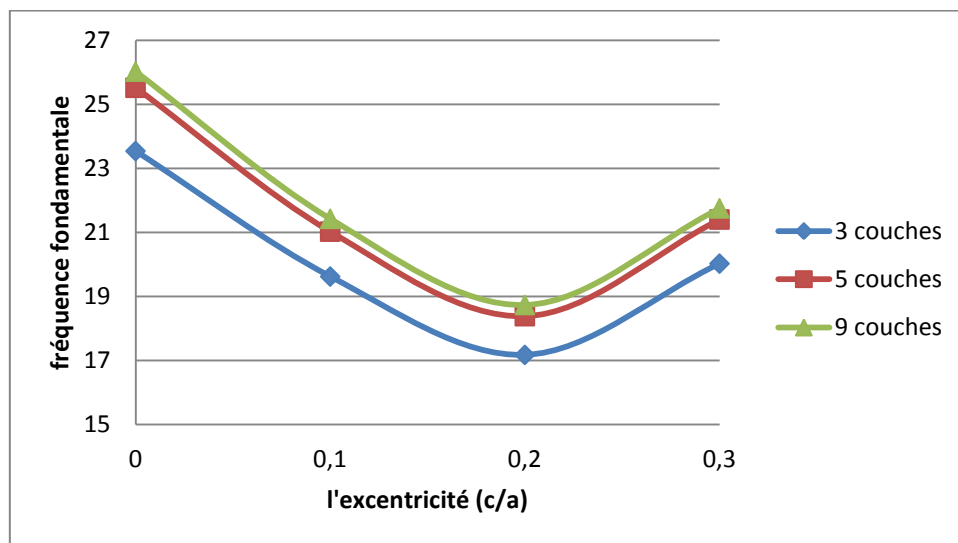


figure IV.19 : Variation la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches et du rapport de l'excentricité (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) (d/a = 0.4) .

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le tableau(IV.20) et la figure(IV.19) on remarque que :

- Les valeurs de la fréquence fondamentale diminuent dans l'intervalle $[0 ; 0.2]$ de rapport d'excentricité, puis augmentent avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a), quel que soit le nombre de couches .
- L'allure des courbes est la même.

IV -3-5) Effet de rapport d'épaisseur sur la fréquence fondamentale:

Dans cette section, on va étudier l'effet de rapport d'épaisseur sur la variation des valeurs de fréquences naturelles, On considère une plaque stratifiée carrée à 4 couches (0/90/90/0).

Les caractéristiques mécaniques et physiques d'un pli sont :

$$\frac{E_1}{E_2} = 25 \quad E_2 = 1 \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.5 \quad \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5 \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2 \quad \nu = 0.25 \quad d/a = 0.2$$

Le rapport d'épaisseur $a/h = \text{Variable}$.

Tableau (IV.21): Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) et rapport de l'ouverture (d/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) ($d/a = 0.2$):

d/a	a/h		
	5	10	100
0	17.029	11.313	1.386
0.1	16.941	11.3578	1.400
0.2	16.852	11.5758	1.442
0.3	17	11.8321	1.4213
0.4	17.349	12.124	1.5066

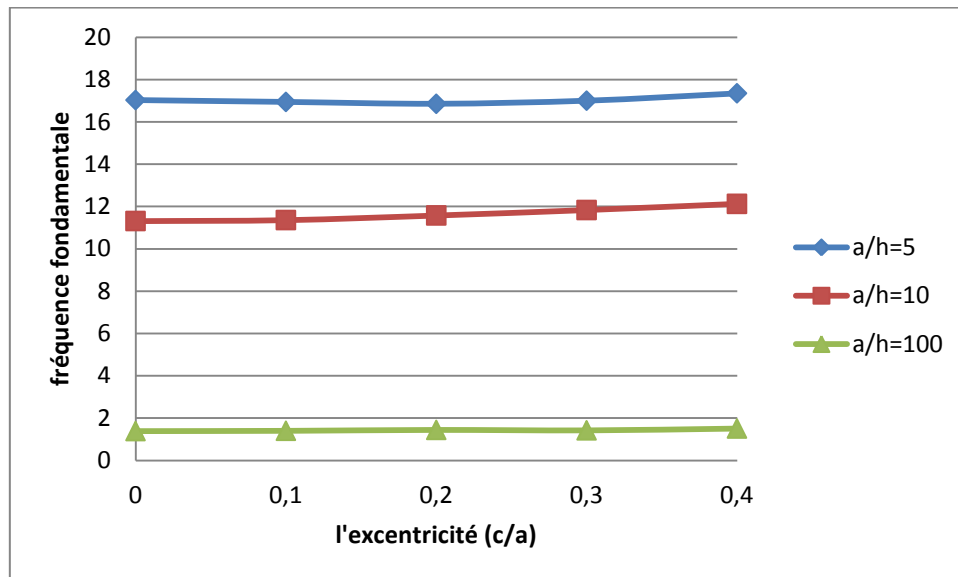


Figure IV.20: Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) et rapport de l'excentricité d'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) ($d/a=0.2$).

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le tableau (IV.21) et la figure (IV.20) on remarque que :

- Pour $a/h = 5$ la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle $[0 ; 0.2]$ de rapport d'excentricité, puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).

- Pour $a/h = 10$ la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- Pour $a/h = 100$ la fréquence fondamentale augmente dans l'intervalle $[0 ; 0.2]$ de rapport d'excentricité (c/a), puis diminue dans l'intervalle $[0.2 ; 0.3]$ de rapport d'excentricité (c/a), puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- La fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport d'épaisseur.

Tableau (IV.22) : Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) et rapport d'excentricité d'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) ($d/a=0.2$).:

d/a	a/h		
	5	10	100
0	23.195	19.255	3.316
0.1	22.450	18.628	3.316
0.2	21.517	17.944	3.316
0.3	21.260	17.860	3.316
0.4	21.886	18.357	3.316

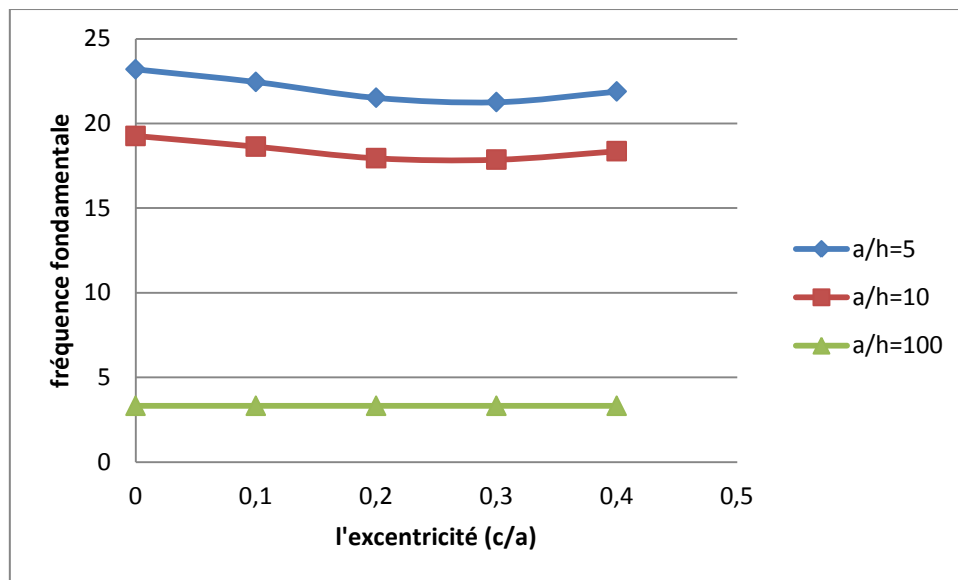


Figure IV.21: Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) et rapport d'excentricité d'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) ($d/a=0.2$).

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV-22) et la (figure IV-21) on remarque que :

- Pour $a/h=5$ et $a/h=10$, la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle $[0 ; 0.3]$ de rapport d'excentricité, puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- Pour $a/h=100$, la fréquence fondamentale reste constante avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- La fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport d'épaisseur.

Tableau (IV.23): Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur a/h et rapport d'excentricité d'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) ($d/a=0.4$) :

d/a	a/h		
	5	10	100
0	16.911	10.8166	1.283
0.1	16.155	10.6301	1.284
0.2	15.588	10.535	1.307
0.3	15.937	10.954	1.367

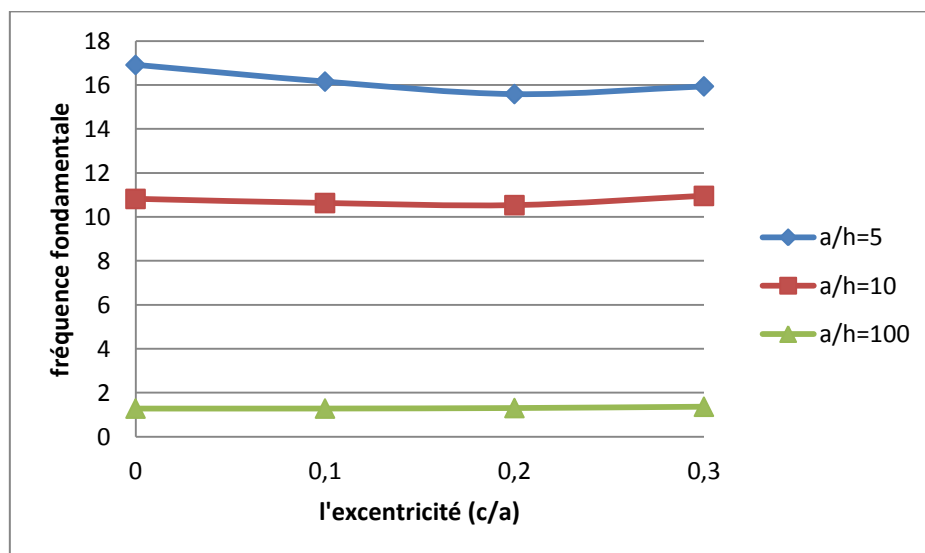


Figure IV.22: Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) et rapport d'excentricité d'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée(SSSS) ($d/a=0.4$).

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le tableau (IV.23) et la (figure IV-22) on remarque que :

- Pour $a/h = 5$ et $a/h = 10$, la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle $[0 ; 0.2]$ de rapport d'excentricité, puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- Pour $a/h = 100$, la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).
- La fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport d'épaisseur.

Tableau (IV.24) : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) et rapport d'excentricité d'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) ($d/a=0.4$) :

d/a	a/h		
	5	10	100
0	28.880	24.774	4.472
0.1	24.351	20.149	3.605
0.2	21.471	17.635	3.071
0.3	23.937	20.688	4.243

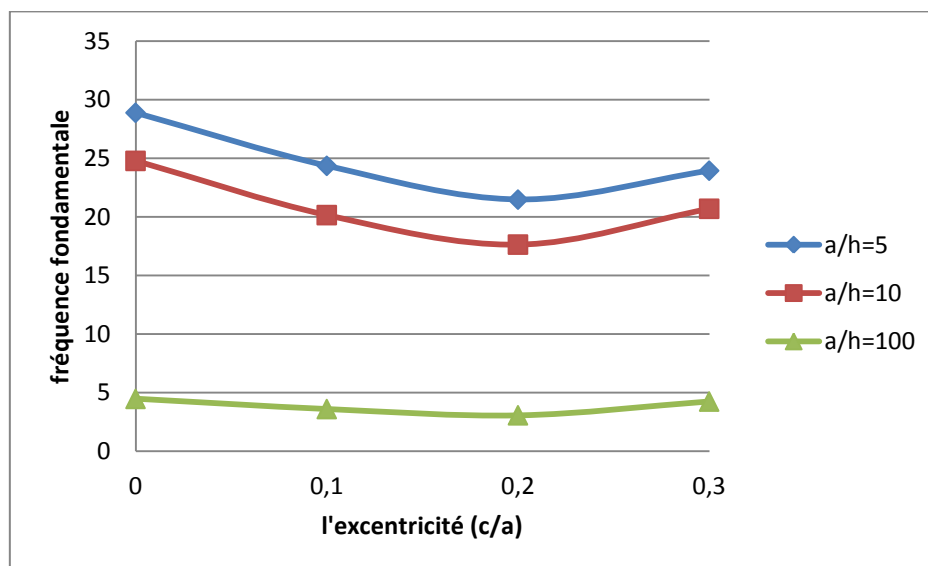


Figure IV.23: Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) et rapport d'excentricité d'ouverture (c/a) pour une plaque stratifiée(EEEE) ($d/a=0.4$).

Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV-24) et la (figure IV-23) on remarque que :

- Les valeurs de la fréquence fondamentale diminuent dans l'intervalle $[0 ; 0.2]$ de rapport d'excentricité, puis augmentent avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a), quelque soit le rapport d'épaisseur a/h .

IV -4) Conclusion :

Ce chapitre concerne une étude paramétrique d'une plaque stratifiée avec ouverture excentrée. L'étude consiste à varier les différents paramètres et à interpréter les variations des résultats obtenus pour voir l'influence de chaque paramètre sur la fréquence fondamentale et l'effet de l'excentricité d'ouverture.

Conclusion générale :

Dans ce travail une analyse de Vibration des plaques stratifiées menues d'ouvertures rectangulaires excentrées, est présentée .

l'élément utilisé est un élément fini rectangulaire à 4 nœuds. chaque noeud possède cinq « 5 » degrés de liberté .

La cinématique adoptée est celle de la théorie de premier ordre de déformation cisaillement qui est l'extension de la théorie de Reissner-Mindlin. Cette théorie tient en compte l'effet de cisaillement transverse.

Une partie de l'étude actuelle concerne la convergence de la fréquence propre dans différentes conditions aux limites en traçant les différents résultats obtenus sous forme de courbes pour faciliter l'interprétation et en comparant avec les résultats analytiques par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. Cette étude a permet de montrer la bonne performance de l'élément utilisé.

Après la validation de l'élément, une étude paramétrique a été considérée pour mettre en évidence l'effet des différents paramètres comme le rapport d'anisotropie, l'orientation des fibres, le nombre de couches et les conditions aux limites rapport d'épaisseur, sur les fréquences naturelles des plaques stratifiées. Les résultats ont montré que la présence d'ouverture dans certaines conditions d'appuis change la valeur de fréquence fondamentale des plaques dans tout les paramètres étudiés.

Cette étude a permet de tirer les remarques suivantes :

- pour une plaque stratifiée carrée simplement appuyée, la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de l'excentricité (c/a). et pour une plaque stratifiée encadrée, la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de l'excentricité (c/a) jusqu'à $(c/a)=0.3$ qui représente point d'inflexion, puis augmente avec l'augmentation de l'excentricité (c/a), le changement de l'allure de cette courbe est probablement dûe au changement du mode de vibration .
- pour une plaque stratifiée carrée avec rapport d'ouverture($d/a=0.2$), la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a)

et pour une plaque stratifiée carrée avec rapport d'ouverture ($d/a=0.4$) la fréquence fondamentale diminue dans l'intervalle $[0; 0.2]$ de rapport d'excentricité (c/a), puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a).

- le rapport d'anisotropie ($E1/E2$) pour une plaque encastree, La valeurs de la fréquence fondamentale diminue jusqu'à un rapport d'excentricité bien déterminé, puis augmente avec l'augmentation de rapport d'excentricité (c/a), quelque soit le rapport d'ouverture ($d/a=0.2$ ou $d/a=0.4$) et le rapport d'anisotropie.
- la fréquence fondamentale est maximum pour l'orientation à $\theta = 45^\circ$, dans le cas d'une plaque stratifiée simplement appuyée la valeur de la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de (c/a) pour $\theta = 45^\circ$ et $\theta = 30^\circ$. Et pour $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 15^\circ$ la valeur de la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de (c/a) jusqu'au rapport c/a bien déterminé, puis augmente avec l'augmentation de (c/a).
- La fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport a/h .
- La valeur de fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation du nombre de couches quelque soit les conditions aux limites.

Références :

- [1] Berthelot J. M. Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures.
- [2] Laurent Gornet. Généralités sur les matériaux composites. Engineering school. 2008.
- [3] Bahlouli, N. (2009). Cours Matériaux Composites. Institut professionnels des sciences et technologies, Université Louis Pasteur, Strasbourg
- [4] Cherifa BELKACEMI .Etude expérimentale du comportement mécanique des stratifiés à renfort végétale. Mémoire de magistère, Université de Boumerdes, 2006
- [5] LAHOUEL, Bahi-Eddine. Vibration des plaques composites trouées. 2015. Thèse de doctorat. Université de Batna 2
- [6] KHERBOUCHE, Laaziz. Introduction aux modélisations et aux méthodes de calcul des matériaux composites. 2010. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammeri.
- [7] Teguaia Mohamed Salah, dynamique des structures composites sandwiches . Mémoire de Magister en génie mécanique, Université Mohamed Khider –Biskra
- [8] Laurent Gornet. Généralités sur les matériaux composites. Engineering school.2008.
- [9] Imen KALLEL-KAMOUN, Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique. Mémoire de Doctorat, Université de Sherbrooke (Canada),30Juin 1999
- [10] Imen KALLEL-KAMOUN, Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique. Mémoire de Doctorat, Université de Sherbrooke (Canada),30 Juin 1999.
- [11] Paramasivam P. Free vibration of square plates with square openings. Journal Sound Vibration 1973;30:173–8.
- [12] Aksu G, Ali R. Determination of dynamic characteristics of rectangular plates with cutouts using a finite difference formulation. Journal Sound Vibr

1976;44:147–58.

[13] RAJAMANI, A. et PRABHAKARAN, R. Dynamic response of composite plates with cut-outs, part I: Simply-supported plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, vol. 54, no 4, p. 549-564.

[14] Sabir AB, Davies GT. Natural frequencies of plates with square holes when subjected to in-plane uniaxial, biaxial or shear loading. *Thin-Walled Struct* 1997;29:312–35.

[15] Merneedi, A., RaoNalluri, M., & Rao, V. S. (2017). Free vibration analysis of a thin rectangular plate with multiple circular and rectangular cut-outs. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 31(11), 5185-5202.

[16] Ali, R., & Atwal, S. J. (1980). Prediction of natural frequencies of vibration of rectangular plates with rectangular cutouts. *Computers & Structures*, 12(6), 819- 823.

[17]Albert William Faria modélisation par éléments finis de plaques composites : contribution a l'étude de l'amortissement ; endommagement et prise en compte d'incertitudes.

[18] Reddy J.N., 2004, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, by CRC press.

[19] BELKAID , k .etude numérique de l'effet de la température sur le comportement du flambage des plaques stratifiées en utilisant un élément fini basé sur la théorie de troisième ordre de Reddy.thèse doctorat LMD en Génie

[20] Phan N., Reddy J., 1985, Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 12, 2201-2219

[21] Tati, A.,et Hessini,M(2014) Analyse du comportement de flambage des plaques minces stratifiées en matériaux composites par la méthode des éléments finis. *Courrier du Savoir – N°09*, Mars 2009, pp.09-15.

[22] Berthelot JM. *Matériaux composites; comportement mécanique et analyse*

des structures (troisième édition). Paris: Technique & Documentation; 1999.

[23] Zine Ali, modélisation d'une plaque rectangulaire en composite en vibration sous effet thermique avec variation linéaire d'épaisseur, mémoire de magister, école doctorale : mécanique & ingénieries des systèmes.

[24] A. J. M. Ferreira ,Matlab codes for Finite Element analysis, Portugal: Springer, 2009

[25] D. J. Dawe and O. L. Roufaeil. Rayleigh-ritz , vibration analysis of mindliplates, Journal of Sound and Vibration, 69(3):345–359, 1980.

[26] K. M. Liew, J. Wang, T. Y. Ng, and M. J. Tan. Free vibration and buckling analyses of shear-deformable plates based on FsdT meshfree method. Journal of Sound and Vibration, 276:997–1017, 2004.

[27] Noor AK, Free vibrations of multilayered composite plates, AIAA J 1973;11(7):1038-9