

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider –Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie civil et d'Hydraulique  
Référence : ...../2019



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
قسم الهندسة المدنية و الري  
المرجع ...../2019

## Mémoire de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structure

Thème

**Effet des efforts membranaires sur la vibration des  
plaques stratifiées en matériaux composite**

L'étudiante :

Layachi Maroua

Encadreur :

Pr. TATI Abdelouahab

Promotion Juillet 2019

## *Dédicace*

*Je dédie ce travail à :*

*Mes chers parents*

*Mon frère et mes sœurs*

*Ma famille et mes cousin(e)s*

*Mes cher(e)s ami(e)s*

*Mes professeurs*

*tous ceux et à toutes celles qui m'ont soutenu pendant ma vie  
et dans mon parcours d'études de près ou de loin.*

## *Remerciements*

*Je tiens à remercier infiniment mon Dieu tout puissant ALLAH qui m'a donné la santé, le courage et la patience pour mener à bien ce modeste travail.*

*Je remercie particulièrement mon encadreur, Monsieur TATJ Abdelouahab, Professeur au département de génie civil université Mohamed Khider de Biskra, d'avoir accepté de diriger ce travail avec de disponibilité et d'efficacité, (son expérience, ses conseils et son encouragement) qu'il a su me prodiguer pendant toute la durée de ce travail.*

*Je tiens à remercier profondément les membres de jury qui auront à évaluer ce travail.*

*Je remercie très chaleureusement Mon père et ma mère et toute la famille.*

*Un grand remerciement à tous les enseignants du département de génie civil université Mohamed Khider de Biskra et mes collègues et tous mes ami(e)s.*

*Je souhaite également remercier chaleureusement le doctorant Aïiki Elhoussine pour ses informations.*

*Finalement, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

## Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire a pour but d'étudier l'effet de la charge critique sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées en utilisant un élément fini rectangulaire à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté par nœud, basé sur la théorie du premier ordre de cisaillement transverse.

Une série d'exemples a été testée sur l'effet des efforts membranaires sur la vibration des plaques isotropes et stratifiées, les résultats obtenus et comparés à ceux disponibles dans la littérature, ont montré la rapidité de convergence et la bonne performance de l'élément.

Une étude paramétrique a été entreprise pour mettre en évidence l'effet de certains paramètres sur la variation de fréquence propres des plaques isotropes et stratifiées soumises à un chargement mécanique.

**Mots clé :** plaques composites stratifiées, effet de la charge membranaire, théorie du premier ordre, élément fini, fréquence propre, charge critique.

## ملخص

يهدف العمل المقدم في هذه المذكرة إلى دراسة تأثير قوى الغشاء على التوترات الذاتية لصفائح مركبة تم استخدام عنصر محدود مستطيل ذو أربعة عقد وبخمس درجات حرية للعقدة الواحدة على أساس نظرية الدرجة الأولى للقص العرضي. بعد إجراء سلسلة من الأمثلة تبين من خلالها أن النتائج المتحصل عليها تتطابق مع تلك الموجودة في المراجع المعتمدة في هذا المجال. حيث أجرينا دراسة لمعرفة تأثير مختلف العوامل على الترددات الذاتية.

الكلمات المفتاحية: الصفائح الطبقيّة، الاهتزاز الحر، نظرية الدرجة الأولى، المواد المركبة

# **Abstract**

In this memoir a set of examples has been considered to study the effect of the critical load on the natural frequency of laminated composites plates, using a rectangular finite element with 4 nodes and five degree of freedom per node, based on the first order shear theory. The obtained results compared with analytic solutions and those obtained by other finite element models available in the literature, showed the good performance and the accuracy of the used model.

This work has been completed by a parametric study to show the effect of different parameters on the natural frequency's variation of laminated plates under critical load loading.

## **Key words:**

Laminated composites plates, effect of the critical.

# SOMMAIRE

Introduction générale.....	I
----------------------------	---

## CHAPITRE I : Recherche bibliographique

I -1) Généralité sur les matériaux composites .....	1
I -1-1) Introduction ..	1
I -1-2) Définition .....	1
I -1-3) Eléments constituant d'un matériau composite : .....	2
I -1-3-1) Renforts .....	2
I -1-3-2) Matrice.....	2
I -1-4) Définitions de base.....	2
I -1-5) Avantages et les inconvénients des matériaux composites .....	2
I -1-5-1) Avantage des matériaux composites .....	2
I -1-5-2) Inconvénients des matériaux composites .....	3
I -1-6) Classification des matériaux composites.....	3
I -1-6-1) Classification selon la forme des constituants.....	3
I -1-6-2) Classification selon la nature des constituants .....	4
I -1-7) stratifiés .....	5
I -2) l'effet du chargement membranaire sur la vibration de plaques stratifiées.....	6
I -2-1) Introduction .....	6
I -2-2) Revue sur la vibration des plaques .....	6
I -2-3) Revue sur vibration et Flambement des plaques composites.....	7

## CHAPITRE II : Loi de comportement des plaques stratifiées selon la théorie du premier ordre

II-1) Introduction .....	9
II-2) Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie de premier ordre .....	9
II-2-1) La théorie classique des stratifiés CLT .....	9
II-2-2) La théorie de déformation en cisaillement de Première Ordre (FSDT).....	10

II-2-3) Théorie de la Déformation de Cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	11
II-3) Caractéristiques mécaniques d'un pli .....	13
II-3-1) Module d'Young longitudinal, $E_1$ ... ..	13
II-3-2) Module d'Young transversal.....	14
II-3-3) Coefficient de poisson longitudinal, $\nu_{12}$ .....	16
II-3-4) Module de cisaillement $G_{12}$ .....	17
II-3-5) Loi de Hooke Généralisée.....	18
II-3-5-1) Etat de contraintes planes.....	20
II-3-5-2) Les efforts résultants en membrane et flexionnelle .....	22
<b>II-3-6) Equation constitutive.....</b>	<b>23</b>
II-4) Comportement dynamiques des plaques stratifiées .....	<b>25</b>
II-4-1) Relations fondamentales .....	25
II-4-1-1) Relations fondamentales relatives aux résultantes en membrane .....	26
II-4-1-2) Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement .....	27
II-4-1-3) Relations fondamentales relatives aux moments .....	28
II-4-2) Résumé des relations fondamentales .....	29
II-4-3) Équations des plaques tenant compte du flambement .....	31
II-4-4) Formulation énergétique du problème de flambement .....	32
II-4-5) Formulation énergétique de la théorie de stratifiée.....	33

### **Chapitre III : Présentation de l'élément finis utilisée**

III.1) Introduction.....	<b>35</b>
III.2) Présentation de l'élément fini utilisé.....	<b>35</b>
III.2.1) Description de l'élément fini utilisé .....	35
III.2.2) Champ des Déplacements et cinématique .....	36
III.2.3) Loi de comportement.....	37
III.2.4) Approximation nodale des déplacements.....	39

III.3) Énergie potentielle totale .....	41
III.4) Présentation du programme .....	45
III.4.1) Introduction .....	45
III.4.2) L'organigramme du programme .....	45
III.4.3) Description les sous-routines du programme .....	52
III.5) Validation de l'élément.....	53
III.5.1) Vibration libre des plaques.....	53
III.5.1.1) Plaques isotrope .....	53
III.5.1.2) Plaque composite stratifiée .....	56
III.5.2) Flambement mécanique.....	58
III.5.2.1) Plaques isotrope .....	58
III.5.2.2) Plaque stratifiée .....	60
III.6) Conclusion .....	64

### **Chapitre IV: Etude paramétrique**

IV-1) Introduction .....	65
IV-2) Effet de la charge critique sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée simplement appuyée.....	65
IV-3) Effet de rapport d'anisotropie sur la charge critique .....	69
IV-4) Effet du nombre des couches.....	73
IV-5) Effet de l'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale .....	75
IV-6) Effet de rapport d'épaisseur sur la fréquence fondamentale .....	78
IV-7) Conclusion :.....	81
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>82</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>.....</b>

## Liste des figures :

Figure I.1 .Matériau composite .....	1
Figure I.2 : Types de renfort.....	4
Figure I.3: Types de matrice.....	5
Figure I.4 : Constitution d'un stratifié .....	5
Figure II.1 : Cinématique de Kirchhoff-Love .....	10
Figure II.2 : Cinématique de Mindlin-Reissner .....	11
Figure II.3 : Essai de traction longitudinale .....	13
Figure II.4 : Essai de traction transversale .....	15
Figure II.5: Essai de cisaillement longitudinal.....	17
Figure II.6 : Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre .....	18
Figure II.7: schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un stratifié .....	22
Figure II.8: Schématisation des résultantes de cisaillement. ....	23
Figure II.9 : Schématisations des moments de flexion et de torsion.....	23
Figure III.1: Géométrie et variables nodales de l'élément.....	35
Figure III.2 : Organigramme du programme.....	51
Figure III.3: Géométrie de la plaque. ....	53
Figure III.4 : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments .....	54
Figure III.5 : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastrée(EEEE), en fonction de nombre des éléments .....	55
Figure (III.6): Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée simplement appuyée en fonction de nombre des éléments .....	57
Figure : (III.7):.Plaque soumise à une charge uniaxiale.....	58
Figure III.8: Variation de Ncr en fonction du nombre des éléments, plaque isotrope .....	59
Figure III.9: Variation de la charge critique uniaxial suivant x d'une plaque isotrope encastrée (EEEE) en fonction du nombre des éléments.....	60

Figure III.10: Variation de la charge critique uniaxial suivant x en fonction du nombre des éléments cas d'une stratifié orthotrope simplement appuyée .....	61
Figure III -11: Variation de la charge critique uniaxial suivant x en fonction du nombre des éléments cas d'une stratifié orthotrope encastéré .....	63
Figure III -12 : Test de convergence de la charge de traction uniaxial suivant x simplement appuyée .....	64
Figure (IV-1) : Effet de la charge critique de compression sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée simplement appuyée .....	66
Figure (IV-2) : Effet de la charge critique de compression sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée encastéré .....	67
Figure (IV-3) : Effet de la charge critique de traction sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée simplement appuyée .....	69
Figure ( IV-4) : l'effet de rapport d'anisotropie $E1/E2$ sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifié simplement appuyé .....	70
Figure (IV-5) : L'effet de rapport d'anisotropie $E1/E2$ sur la fréquence propre d'une plaque stratifiée simplement appuyée .....	71
Figure (IV-6): L'effet de rapport d'anisotropie $E1/E2$ sur la fréquence propre d'une plaque encastéré.....	72
Figure (IV-7) : L'effet de nombre des couches sur la fréquence propre des plaques stratifiées simplement appuyées .....	74
Figure (IV-8): L'effet de nombre des couches sur la fréquence propre des plaques encastérée .....	75
Figure (IV-9) : Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres pour une plaque stratifiée(SSSS).....	77
Figure (IV-10) : Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres pour une plaque stratifiée(EEEE).....	78
Figure (IV-11) : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) pour une plaque stratifiée(SSSS) .....	79
Figure (IV-12) : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) pour une plaque stratifiée (EEEE).....	80

## Liste des tableaux :

Tableau (III.1): Fonctions des sous-routines.....	52
Tableau III.2 : La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée(SSSS)	54
Tableau III.3 : La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encadrée(EEEE). .....	55
Tableau III.4 : La fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de trois couches (0/90/0) simplement appuyée .....	57
Tableau III.5: Test de convergence de la charge critique uniaxiale suivant x simplement appuyée (SSSS) .....	58
Tableau III.6: Test de convergence de la charge critique uniaxiale suivant x encadré (EEEE)	59
Tableau III.7 : Test de convergence de la charge de compression uniaxiale suivant x simplement appuyée (SSSS ) .....	61
Tableau III.8 : Test de convergence de la charge de compression uniaxiale suivant x encadré (EEEE) .....	62
Tableau III.9 : Test de convergence de la charge de traction uniaxiale suivant x simplement appuyée.....	63
Tableau IV.1 : Effet de la charge critique sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée simplement appuyée .....	66
Tableau IV.2 : Effet de la charge critique sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée encadrée.....	67
Tableau IV.3 : Effet de la charge critique de traction sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée simplement appuyée .....	68
Tableau IV-4: L'effet de rapport d'anisotropie $E_1/E_2$ sur la charge critique uniaxiale pour une plaque stratifiée simplement appuyée.....	70
Tableau IV-5 : L'effet de rapport d'anisotropie $E_1/E_2$ sur la fréquence propre pour une plaque stratifiée simplement appuyée.....	71
Tableau IV-6 : L'effet de rapport d'anisotropie $E_1/E_2$ sur la charge critique uniaxiale pour une plaque stratifiée encadrée .....	72
Tableau IV-7 : L'effet de rapport d'anisotropie $E_1/E_2$ sur la fréquence propre pour une plaque stratifiée encadrée.....	72

Tableau IV-8 : l'effet du nombre des couches sur la fréquence des plaques stratifiées simplement appuyées .....	73
Tableau IV-9: l'effet du nombre des couches sur la fréquence des plaques stratifiées encastéré .....	74
Tableau IV-10: L'effet de l'orientation des fibres sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifiée(SSSS).....	76
Tableau IV-11: Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres pour une plaque stratifiée(SSSS).....	76
Tableau IV-12: L'effet de l'orientation des fibres sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifiée(EEEE).....	77
Tableau IV-13: Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres pour une plaque stratifiée(EEEE).....	77
Tableau IV-14: L'effet de rapport d'épaisseur (a/h) sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifiée(SSSS).....	79
Tableau IV-15: Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) pour une plaque stratifiée(SSSS).....	79
Tableau IV-16: L'effet de rapport d'épaisseur (a/h) sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifiée(EEEE).....	80
Tableau IV-17 : Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) pour une plaque stratifiée(EEEE) .....	80

# Introduction général

De nos jours les matériaux composites sont devenus incontournables et commencent peu à peu à être une alternative aux matériaux classiques, grâce aux avantages qu'ils présentent. En effet, leur résistance et leur rigidité spécifiques rendent leur utilisation prend de l'ampleur dans presque tous les domaines de construction et de l'industrie. Cependant ce type de matériaux possède des comportements très complexes dus à leur hétérogénéité et leur anisotropie prononcé.

Lors de la conception des plaques stratifiées qui servent comme éléments de structures, divers comportements sont pris en considération. L'analyse dynamique est parmi les comportements indispensables pour cette fin. En général, la détermination des fréquences naturelles, s'effectue pour des plaques non chargées. Cependant, ces valeurs peuvent s'avérer non réalistes puisque les éléments de structures tels que les plaques et les coques sont toujours sollicités. Pour s'approcher d'avantage à la réalité on doit tenir compte de certaines sollicitations qui peuvent affecter les valeurs des fréquences naturelles de ces éléments de structure, notamment les charges membranaires de compression qui affaiblissent les rigidités flexionnelles des plaques et qui peuvent causer leur flambement.

La description du comportement dynamique des plaques et la connaissance préalables des fréquences propres des plaques sont indispensables lors de leur conception. En général l'analyse dynamique de ce type d'éléments de structure s'effectue pour un environnement sévère qui influe sur leur comportement général et spécialement sur leurs fréquences propres.

## **Objectif :**

L'objectif de ce travail est l'analyse vibratoire des plaques stratifiées en matériaux composites sous l'effet d'un chargement membranaire, en utilisant un élément finis basé sur la théorie de la déformation de Cisaillement de Premier Ordre (FSDT).

## **Organisation des chapitres :**

Notre mémoire est divisé en quatre chapitres :

- 1) **Dans le premier chapitre**, on présente des Généralités sur les matériaux composites et l'effet du chargement membranaire sur la vibration de plaques stratifiées.

- 2) **Dans le deuxième chapitre**, on présente la loi de comportement de plaques stratifiées selon la théorie du premier ordre (FSDT).
- 3) **Le troisième chapitre** est consacré à la présentation de la formulation de l'élément fini utilisé, suivi par la présentation d'un programme en langage Fortran et un autre programme sur Matlab, suivi par la validation de l'élément à partir d'une comparaison des résultats avec les résultats obtenus de la littérature.
- 4) **Le quatrième chapitre** concerne une étude paramétrique pour mettre en évidence l'influence de différents paramètres et la charge membranaire sur la vibration des plaques composites stratifiées.

## CHAPITRE I

### Recherche bibliographique :

#### I -1) Généralités sur les matériaux composites :

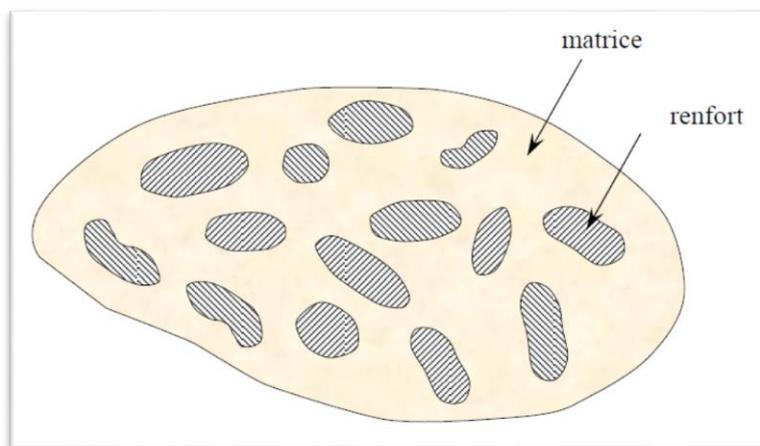
##### I -1-1) Introduction :

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie aérospatiale, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...). Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle.

##### I -1-2) Définition :

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs Phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase Discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée la matrice et la Phase discontinue est appelée le renfort ou matériau renforçant [1].



**Figure I.1 .Matériau composite [1].**

### **I -1-3) Eléments constituant d'un matériau composite :**

#### **I -1-3-1) Renforts :**

Le renfort contribue à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif. [2].

La classification des principaux matériaux de renfort couramment rencontrés est indiquée sur la figure (1-2)

#### **I -1-3-2) Matrice :**

La matrice permet de lier les fibres du renfort fibreux entre elles, ainsi que de répartir les efforts (résistance à la compression ou à la flexion). La matrice est facilement déformable et assure la protection chimique des fibres. Généralement, c'est un polymère ou une résine organique [2].

#### **I -1-4) Définitions de base :**

- **Matériau homogène** : mêmes propriétés physiques en tout point du matériau
- **Matériau hétérogène** : Un matériau est dit hétérogène s'il existe en deux points différents, des propriétés différentes.
- **Matériau isotrope** : mêmes caractéristiques physiques dans toutes les directions
- **Matériau isotrope transverse** : C'est un matériau possédant une direction privilégiée, c'est-à-dire qu'il existe un axe de symétrie par rapport à une droite.
- **Matériau orthotrope** : Les propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux. Deux types d'orthotrope existent :
  - Une orthotrope de géométrie
  - Une orthotrope de matériau
- **Matériau anisotrope** : Les matériaux anisotropes sont des matériaux dont les propriétés varient selon une direction considérée.

#### **I -1-5) Avantages et les inconvénients des matériaux composites :**

**I -1-5-1) Avantage des matériaux composites** : Les matériaux composites sont aujourd'hui principalement utilisés industriellement pour différentes raisons, dont voici une liste :

- Gain de masse
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre

- d'interfaces (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques)
- Grande résistance à la fatigue
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre de l'aluminium et des fibres de carbone)
- Insensibles aux produits chimiques "mécaniques" comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole.

**I-1-5-2) Inconvénients des matériaux composites :** Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

- Coût important du passage matériau métallique à matériau composite, prenant en compte le coût matériau (des constituants) et le coût associé au procédé de fabrication.
- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques
- Forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) constituant des maillons faibles au sein de la structure.
- Dispersion matériau plus importante que les matériaux métalliques induisant un surcoût des campagnes de qualification matériau due aux nombres de répétitions d'essais imposées.
- Sensibilité à l'environnement des matrices organiques entraînant une perte de propriétés mécaniques notables après vieillissement thermique ou hydrique ...

### **I-1-6) Classification des matériaux composites :**

Les matériaux composites peuvent être classés suivant la forme des composites et suivant la nature des composites

#### **I-1-6-1) Classification selon la forme des constituants :**

- a) Composites à fibres : La matière renforçante se présente sous forme de fibres longues, courtes ou coupées, dont l'arrangement et l'orientation déterminent les propriétés mécaniques du matériau permettant une conception adaptée à l'application (conception à la carte) en agissant sur :
  - La nature des constituants ;
  - La proportion de chaque constituant ;
  - L'orientation des fibres
- b) Composites à particules : Dans ce cas le renfort se présente sous forme de particules, qui sont utilisées pour l'amélioration de certaines propriétés mécaniques et physiques

de la matrice (rigidité, tenue à la température, résistance à l'abrasion...) ou simplement pour diminuer le coût de production du matériau sans altérer ses caractéristiques. [3]

### I -1-6-2) Classification selon la nature des constituants :

Selon la nature de la matrice et du renfort on rencontre plusieurs combinaisons possibles :

a) Composites à matrice organique :

Résines et charges associées à :

- Des fibres minérales : verre, carbone, etc. ;
- Des fibres organiques : kevlar, polyamides, etc. ;
- Des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

b) Composites à matrice métallique

Métaux légers et leurs alliages associés à :

- Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC) ;
- Des fibres métalliques : bore ;
- Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de SiC.

c) Composites à matrice minérale

Céramiques associées à :

- Des fibres métalliques : bore ;
- Des particules métalliques : cermets ;
- Des particules minérales : carbures , nitrures, etc.

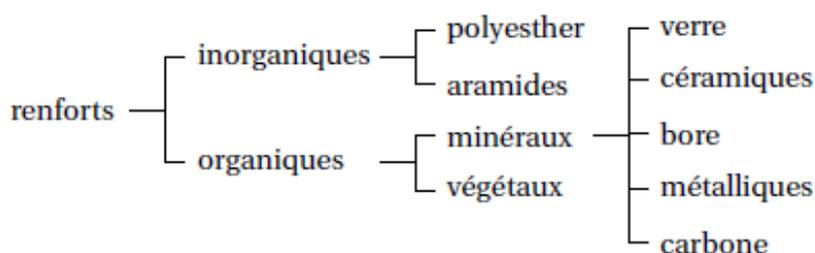
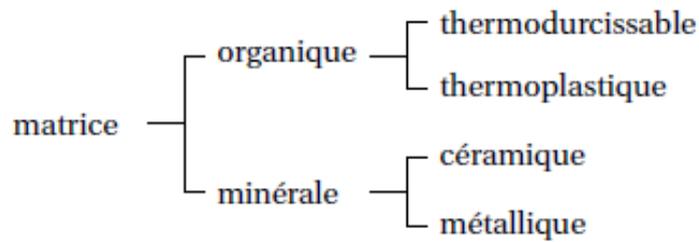
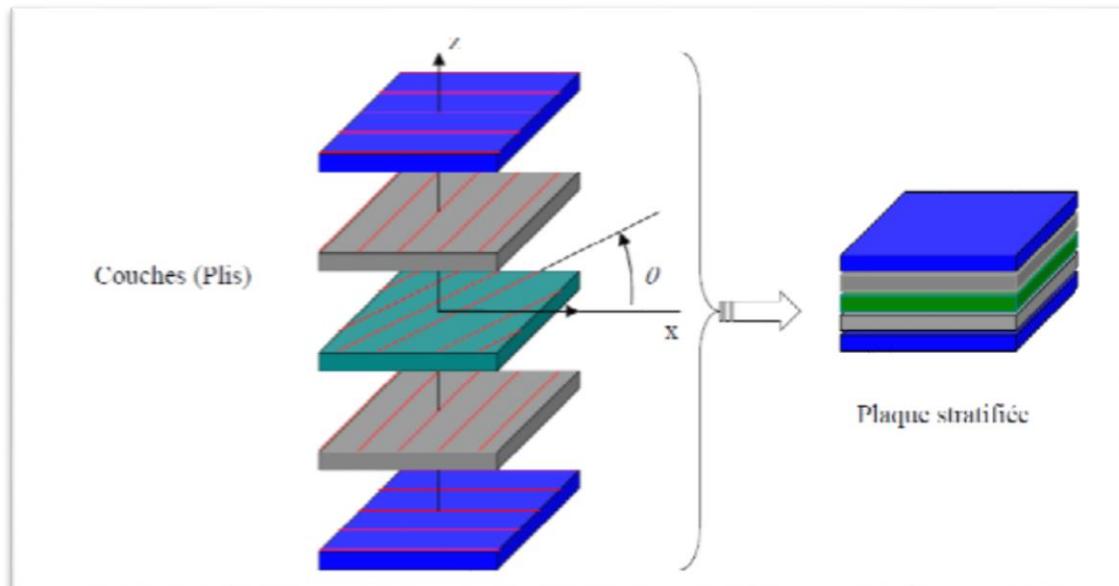


Figure I.2 : Types de renfort [4]



**Figure I.3: Types de matrice [4]**



**Figure I.4 : Constitution d'un stratifié [5].**

### **I -1-7) Les stratifiés :**

Les stratifiés résultent de la superposition de plusieurs couches ou plis, qui peuvent être des nappes unidirectionnelles, de tissus ou des maths, imprégnés de résine. Chaque couche peut avoir une orientation propre.

Le stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié [3].

L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

## **I -2) l'effet du chargement membranaire sur la vibration de plaques stratifiées :**

### **I -2-1) Introduction :**

L'utilisation des plaques stratifiées composites a connu un grand développement durant ces dernières années, Une plaque composite utilisée comme élément structural est souvent soumise à différents types de compression qui peuvent causer le flambement.

La connaissance du comportement critique et post-critique s'avère alors nécessaire dans le dimensionnement de ces plaques.

### **I -2-2) Revue sur la vibration des plaques :**

Un certain nombre de théories existent dans la littérature pour l'analyse des structures composites stratifiées.

Différentes études ont été menées pour déterminer les propriétés dynamiques des composites stratifiés.

**En 1971**, Wu et Vinson [6] ont étudié l'effet des déformations de cisaillement sur la fréquence naturelle fondamentale de plaques composites avec différentes conditions aux limites, Cette solution a été fondée sur la méthode de Galerkin et les fonctions considérées sont analogues à ceux de Warburton ..

**En 1973**, Noor [7] a utilisé la théorie des plaques composites multicouches tridimensionnelles pour étudier l'effet du nombre des couches, le degré de l'anisotropie et le rapport de l'épaisseur sur les fréquences fondamentales des plaques carrées simplement appuyées.

**En 1978**, Bert [8] a présenté l'effet de la déformation de cisaillement sur les vibrations des plaques rectangulaires stratifiées antisymétriques. La formulation en déplacement de la théorie prenant en compte la déformation de cisaillement pour des plaques hétérogènes proposée par Yang, Norris, et Stevsky a été utilisée.

Les résultats numériques sont présentés montrant l'effet paramétrique du rapport longueur sur largeur, du rapport longueur sur épaisseur, du nombre de couches et de l'angle d'orientation des plis , Il a été conclu que :(a) l'effet de la déformation du cisaillement transverse relative sur la fréquence fondamentale est supérieure pour les plaques équilibrées antisymétriques que pour les plaques isotropes homogènes de mêmes dimensions et (b) l'effet du rapport longueur sur largeur de la plaque (a/b) sur la fréquence fondamentale est plus prononcé pour les plaques épaisses (faible rapport a/h) que pour les plaques minces.

**En 1987** Whitney [9], considère une théorie d'ordre supérieur, qui prend en compte l'effet de cisaillement transverse et les déformations d'inertie de rotation.

Son approche est une extension de théories développées par Reissner et Mindlin pour les plaques isotropes homogènes. Des solutions exactes ont été obtenues dans le cas des appuis simples, seulement.

### **I -2-3) Revue sur vibration et Flambement des plaques composites :**

Les expériences montrent que les structures composites qui sont largement utilisées de nos jours, deviennent instables, lorsqu'elles sont soumises à des efforts de compression. Ces efforts de compression axial d'origine mécanique ou thermique peuvent atteindre une valeur critique appelée force critique de flambement,

**En 1957**, Gerard et Becker [10], sont les premiers à étudier l'analyse de flambage des plaques orthotropes et isotropes. Suivi d'un travail général publié en 1987 par Leissa, A. W. sur le flambage des plaques composites stratifiées. Par ailleurs, une revue a été publiée récemment en 2013 par Jifeng Xu Qiao et al sur l'analyse du comportement de flambage et de post-flambement des éléments de structures composites.

**En 1985**, Reddy et Phan [11]. Ont Proposé une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur qui est utilisée pour déterminer les fréquences propres et les charges de flambement des plaques élastiques. La théorie prend en compte la distribution parabolique des efforts de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque et l'inertie rotative. Des solutions exactes de plaques simplement supportées sont obtenues et les résultats sont comparés aux solutions exactes de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, de la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre et de la théorie des plaques classique. La théorie actuelle prédit les fréquences et les charges de flambement avec plus de précision par rapport aux théories de premier ordre et classiques.

**En 1990**, Dhanaraj [12], a présenté les caractéristiques des modes de vibration fondamentaux des plaques stratifiées composites avec différentes conditions aux limites soumises à une contrainte de compression uniaxiale simple, Les stratifiés rectangulaires à plis obliques et croisés, le nombre de couches dans le stratifié a été pris comme paramètre pour l'étude, l'élément fini semiloof est utilisé dans cette formulation, la variation des fréquences avec les contraintes initiales, qu'elles soient totalement linéaires ou linéaires par morceaux, ne dépend pas du rapport de forme de la plaque seulement, mais aussi du rapport d'orthotropie et de

l'angle d'orientation des fibres.

La formulation actuelle prend en compte le moment initial résultant de la définition de la matrice de rigidité géométrique.

Les fréquences vont augmenter ou diminuer en fonction de la nature de la contrainte-tension ou de la compression, respectivement. La fréquence diminue à mesure que la contrainte initiale (de compression) augmente. Lorsque la limite est atteinte, la fréquence devient nulle lorsque la contrainte initiale atteint la valeur de la contrainte de flambage critique.

**En (2003)**, Chakrabarti A., Sheikh A.H., [13] ont proposé un élément triangulaire de six nœuds qui possède sept degrés de liberté pour chaque nœud basé sur la théorie développée de troisième ordre de Reddy pour l'analyse statique et flambage des plaques composites multicouches dans différentes applications pour étudier ses performances. Dans cette théorie des plaques, la contrainte de cisaillement transverse présente une variation parabolique de l'épaisseur et elle est nulle aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

**En (2012)**, Singh S.K, Chakrabarti A. [14] ont proposé également un élément fini développé isoparamétrique de continue C0 à neuf nœuds qui contient sept inconnues nodales par nœud  $u, v, w, \psi_x, \psi_y, w_x, w_y$  sur la base de la théorie de zigzag d'ordre supérieur de Reddy pour l'analyse du flambage des plaques composites stratifiées.

## CHAPITRE II

### Loi de comportement des plaques stratifiées selon la théorie de premier ordre

#### II-1) Introduction :

Les technologies modernes ont besoin de matériaux qui allient à la fois une rigidité, une résistance mécanique et une grande légèreté. Pour atteindre cet objectif il faut nécessairement utiliser un matériau composite, dans ce domaine, les matériaux composites à base de fibres jouent un rôle de plus en plus important dans les techniques avancées. Les propriétés mécaniques des composites fibreux dépendent de la quantité, de la taille et surtout de l'orientation des fibres. [15]

#### II-2) Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie de premier ordre :

Il existe plusieurs théories utilisées pour décrire le comportement mécanique des matériaux multicouches. On peut citer la théorie classique de la plaque stratifiée (CLPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), la théorie d'élasticité à trois dimensions qui est assez précise pour les plaques anisotropes. [16]

#### II-2-1) La théorie classique des stratifiés CLT :

Basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, et qui néglige les déformations de cisaillement transverse et suppose que la normale au feuillet moyen reste normale après déformation. [17]. Selon Reddy (1997), le champ de déplacements de la théorie *CLT* est donné par l'expression suivante:

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z) - zw_{0x}(x, y, t) \\v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, z) - zw_{0y}(x, y, t) \\w(x, y, t) &= w_0(x, y, t)\end{aligned}\tag{2-1}$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z=0$ ).

Puisque cette théorie ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

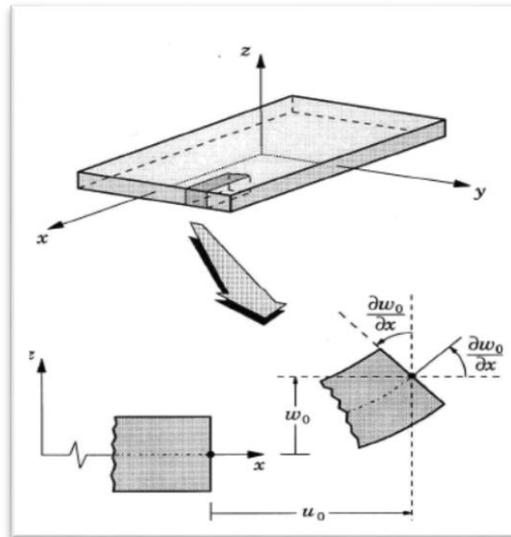


Figure II.1 : Cinématique de Kirchhoff-Love[18]

### II-2-2) Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger . [18]

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \phi_x(x, y) \quad (2-2)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \phi_y(x, y) \quad (2-3)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2-4)$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

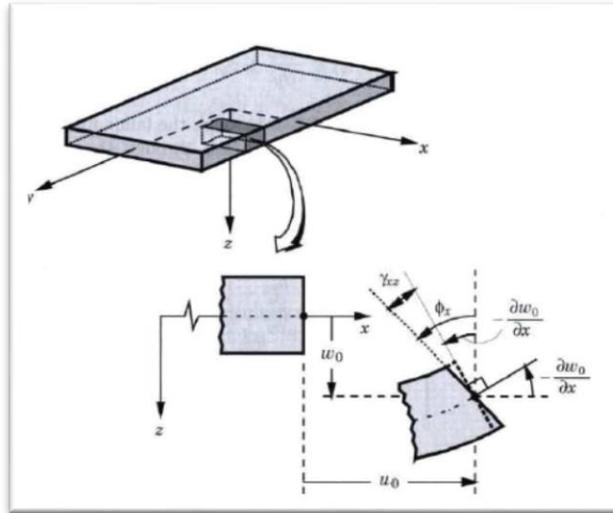


Figure II.2 : Cinématique de Mindlin-Reissner [18]

### II-2-3) Théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

La théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. [18]

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + zu_1(x, y) + z^2u_2(x, y) + z^3u_3(x, y) + \dots \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + zv_1(x, y) + z^2v_2(x, y) + z^3v_3(x, y) + \dots \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + zw_1(x, y) + z^2w_2(x, y) + z^3w_3(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (2-5)$$

$u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  et  $w(x, y, z)$  sont les composantes vectoriels du déplacement,  $u_i(x, y)$ ,  $v_i(x, y)$  et  $w_i(x, y)$  sont des fonctions doivent être déterminés dans le plan  $(x, y)$

Dans ce travail en adoptant la théorie de premier ordre (FSDT).

Le champ des déformations II s'écrit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon_x^0 + zk_x + \varepsilon_x^{nl} \quad (2-6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon_y^0 + zk_y + \varepsilon_y^{nl} \quad (2-7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} + \gamma_{xy}^{nl} \quad (2-8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2-9)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2-10)$$

L'état de déformation en un point quelconque de la plaque globale est donné par les deux vecteurs de déformation suivants :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z \{k\} + \{\varepsilon^{nl}\} \quad (2.11)$$

$$\{\varepsilon^0\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

$\{\varepsilon_0\}$  Les déformations en membrane

$$\{k\} = \left\{ \begin{array}{l} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

La matrice  $\{k\}$  est appelée *matrice des courbures* de la plaque sollicitée en flexion. [19]

Les déformations non linéaires :

$$\{\varepsilon^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^{nl} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

### II-3) Caractéristiques mécaniques d'un pli :

Le problème de détermination des modules d'élasticité d'un matériau composite unidirectionnel consiste à rechercher des expressions de ces modules (5 modules indépendants) en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques des constituants.

La détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à rechercher les expressions de ces modules en fonction des modules d'élasticité de la matrice et des fibres ( $E_m$ ,  $E_f$ ), fraction volumique de la matrice et de fibres ( $V_m$ ,  $V_f$ ), les coefficients de Poisson ( $\nu_m$ ,  $\nu_f$ ), longueur des fibres, etc.

#### II-3-1) Module d'Young longitudinal, $E_1$ :

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinal.

L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme dans la fibre et dans la matrice. Cette hypothèse conduit à la formule suivante :

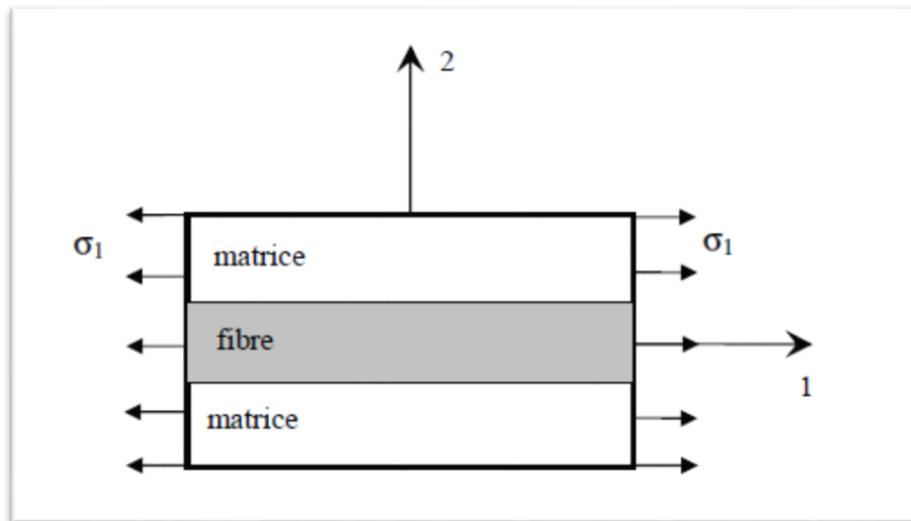


Figure II.3 : Essai de traction longitudinale [20]

Déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice.

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.15)$$

Où  $l$  est la longueur de cellule considérée. L'identité des déformations dans la fibre et dans la matrice impose :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_l \quad (2.16)$$

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\sigma_f = E_f \cdot \varepsilon_l \quad (2.17)$$

$$\sigma_m = E_m \cdot \varepsilon_l \quad (2.18)$$

La charge totale appliquée est :

$$f_1 = \sigma_f \cdot S_f + \sigma_m \cdot S_m \quad (2.19)$$

Où  $S_f$  et  $S_m$  sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice.

Si  $S$  est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne  $\sigma_1 = \frac{F_1}{S}$

s'écrit :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_f \cdot S_f}{S} + \frac{\sigma_m \cdot S_m}{S} \quad (2.20)$$

Donc les fractions volumiques de renfort et de la matrice sont :

$$V_f = \frac{S_f}{S} \quad \text{et} \quad V_m = \frac{S_m}{S}$$

Donc :

$$\sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (2.21)$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young

longitudinal :

$$\sigma_1 = E_L \cdot \varepsilon_l \quad (2.22)$$

La combinaison des relations (2.17), (2.18) à (2.22) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (2.23)$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi des mélanges* pour le module d'Young dans la direction des fibres.

### II-3-2) Module d'Young transversal :

Le module d'Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversale (figure 2.4). Dans cet essai, on suppose que la contrainte transversale est la même dans la fibre et dans la matrice.

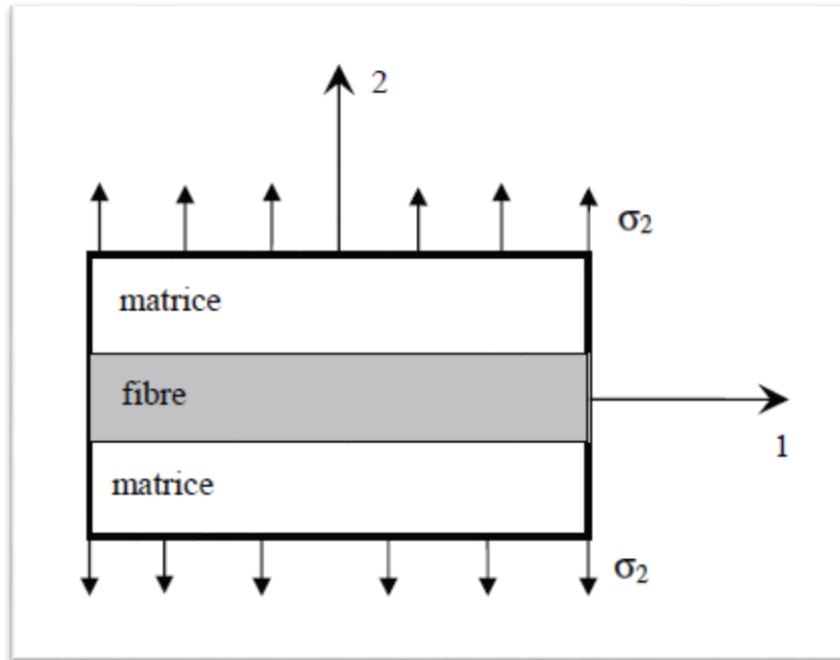


Figure II.4 : Essai de traction transversale [20]

La hauteur des couches doit simplement vérifier :

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad \text{et} \quad 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad (2.24)$$

La charge  $F_2$  imposée suivant la direction transverse est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2 \quad (2.25)$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transverse s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad , \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad (2.26)$$

L'allongement transverse d'une cellule élémentaire résulte des allongements cumulés dans la fibre et la matrice. Soit :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f \cdot h_f + \varepsilon_m \cdot h_m \quad (2.27)$$

Et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad (2.28)$$

Soit :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f \cdot V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \quad (2.29)$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée sur la cellule, par le module transverse :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2 \quad (2.30)$$

La combinaison des expressions (2.26) à (2.30) conduit à l'expression du module transverse :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m} \quad (2.31)$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi inverse des mélanges* et peut être réécrite, en rapportant le module transverse au module d'Young de la matrice, suivant une relation sans dimension sous la forme [1] :

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1}{1 + \left( \frac{E_m}{E_f} - 1 \right) V_f} \quad (2.32)$$

### II-3-3) Coefficient de poisson longitudinal, $\nu_{12}$ :

Le coefficient de Poisson longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinal. En utilisant l'approche du comportement mécanique du matériau,

Les déformations transverses dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\varepsilon_{2m} = -\nu_m \cdot \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2f} = -\nu_f \cdot \varepsilon_1 \quad (2-33)$$

L'allongement transverse de la cellule élémentaire est :

$$\Delta l_t = -\nu_m \varepsilon_1 h_m - \nu_f \varepsilon_1 h_f \quad (2.34)$$

Et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_t}{h_f + h_m} = -[\nu_m (1 - V_f) + \nu_f V_f] \varepsilon_1 \quad (2.35)$$

D'où l'expression du coefficient de poisson :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \quad (2.36)$$

Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal. Les valeurs de  $V_m$  et  $V_f$  sont assez proches (voisines de 0,3). [1].

#### II-3-4) Module de cisaillement $G_{12}$ :

Le module de cisaillement longitudinal  $G_{LT}$  est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la figure 1.9 , Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales, du fait des contraintes  $\tau$  imposées sur la cellule.

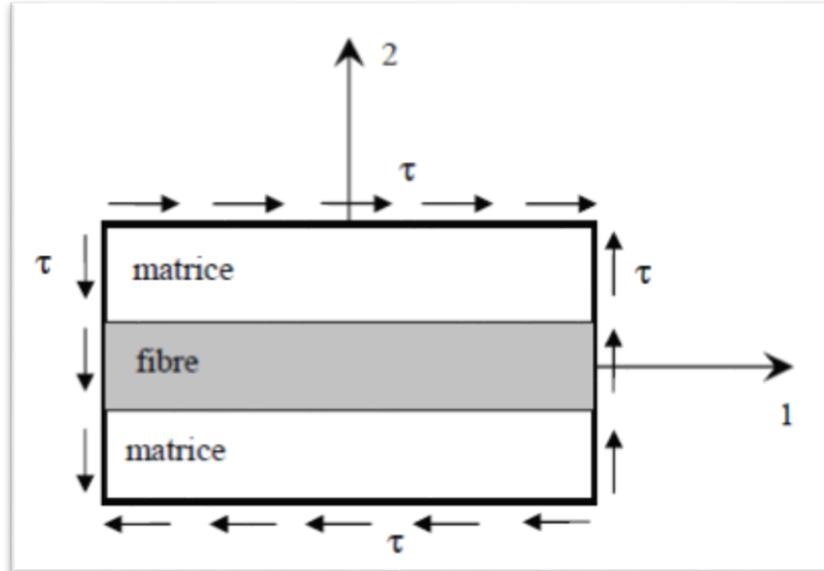


Figure II.5: Essai de cisaillement longitudinal [20]

Les déformations en cisaillement de la fibre et de la matrice s'expriment donc suivant :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{et} \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad (2.37)$$

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice (figure II.5 ) sont :

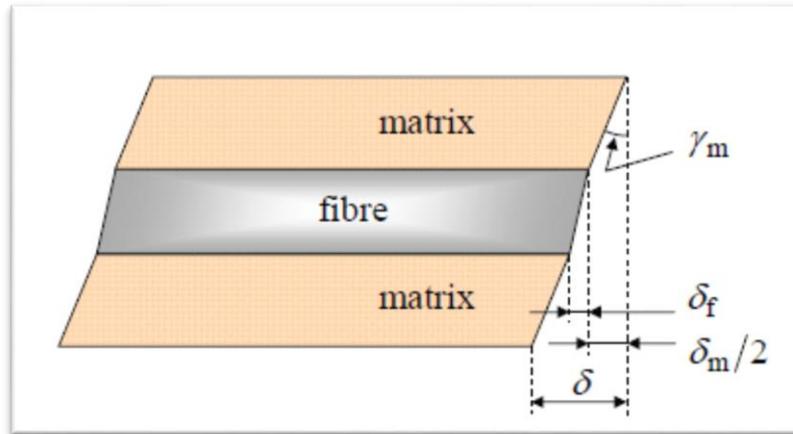
$$\delta_f = h_f \gamma_f \quad \text{et} \quad \delta_m = h_m \gamma_m \quad (2.38)$$

La déformation totale de la cellule (figure 1.9) est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m \quad (2.39)$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f) \quad (2.40)$$



**FIGURE II.6 : Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.**

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement longitudinal  $GLT$  suivant la relation :

$$\gamma = \frac{\tau}{GLT} \quad (2.41)$$

En combinant les expressions (2-37) à (2-41) , nous obtenons :

$$\frac{1}{GLT} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1-V_f}{G_m} \quad (2.42)$$

### II-3-5) Loi de Hooke Généralisée :

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857), qui a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. La loi de Hooke est donc aujourd'hui souvent écrite sous la forme :

$$\sigma = C \cdot \varepsilon \quad (2.43)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Où  $C$  est un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité (les composantes covariantes de ce tenseur sont  $C_{ijkl}$ ).

Les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\varepsilon = S.\sigma \quad (2.45)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Où  $S$  est le tenseur des compliances ou tenseur des complaisances élastiques des matériaux (ses composantes covariantes sont  $S_{ijkl}$ ). [20]

Pour un matériau orthotrope les matrices de rigidité et de souplesse s'écrivent sous la forme :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad C_{12} = \frac{\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} - \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad C_{44} = G_{23},$$

$$C_{55} = G_{13}$$

$$C_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

**Constante de souplesse :**

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}$$

$$S_{12} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$$

$$S_{13} = \frac{\nu_{13}}{E_1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{23} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad S_{33} = \frac{1}{E_3}$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

### II-3-5-1) Etat de contraintes planes :

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de *contrainte plane*, La relation contrainte déformation peut être donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^k \\ \sigma_y^k \\ \tau_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{21}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^k \\ \varepsilon_2^k \\ \gamma_{12}^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1^k \\ a_2^k \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T \quad (2.48)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

$a_1^k$  Et  $a_2^k$  sont les coefficients de dilatation thermique de la k ème couche.

$\Delta T$  Est la température.

Les composantes de la rigidité  $Q_{ij}$  sont données par :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{LT}\nu_{TL}}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}$$

$$Q_{66} = G_{LT} \quad Q_{44} = G_{13} \quad Q_{55} = G_{23}$$

Avec :  $a_x^k = a_{11}^k \cos^2 \theta + a_{22}^k \sin^2 \theta$

$$a_y^k = a_{22}^k \cos^2 \theta + a_{11}^k \sin^2 \theta$$

$$a_{xy}^k = (a_{11}^k - a_{11}^k) \cos \theta \sin \theta$$

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression :

$$[\bar{Q}] = [T^{-1}][Q][T] \quad (2.50)$$

Avec :

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

$$\bar{Q}_{11} = c^4 Q_{11} + s^4 Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2 c^2$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2 c^2 + Q_{12}(c^4 + s^4)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66})s^3 c \quad (2.52)$$

$$\bar{Q}_{22} = s^4 Q_{11} + c^4 Q_{22} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2 c^2$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3 c + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66})sc^3$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66}))s^2 c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)$$

Les relations contraintes-déformations, pour une couche  $k$ , exprimées dans le repère global, est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^k \\ \tau_{yz}^k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{44}^k & \bar{Q}_{45}^k \\ \bar{Q}_{54}^k & \bar{Q}_{55}^k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^k \\ \gamma_{yz}^k \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

Où  $\bar{Q}_{ij}$  sont les coefficients de la matrice de rigidité d'une couche  $k$  donné. [21]

$\theta$  Est l'angle d'orientation de la fibre.

**II-3-5-2) Les efforts résultants en membrane et flexionnelle :**

❖ **Résultantes en membrane :**

Le vecteur résultantes en membrane noté  $N(x, y)$  et défini par :

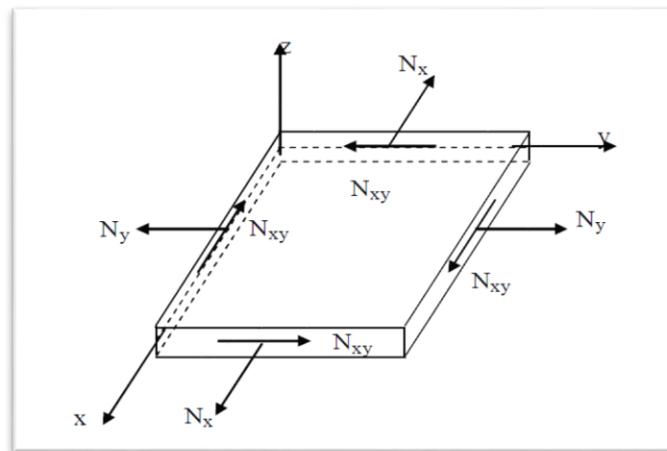
$$N(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_k dz \quad (2.55)$$

Où  $\sigma_k$  est la matrice en membrane  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  dans la couche k

Le vecteur  $N(x, y)$  peut s'écrire :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2.56)$$

$N_x, N_y$  et  $N_{xy}$  Sont les résultantes par unité de longueur des contraintes suivant x, y et des contraintes de cisaillement respectivement,



**Figure II.7: schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un stratifié [21]**

❖ **Résultantes en cisaillement :**

Les résultantes en cisaillement sont définie de la manière par :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad (2.57)$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur. Elles sont schématisées sur la figure (2.8).

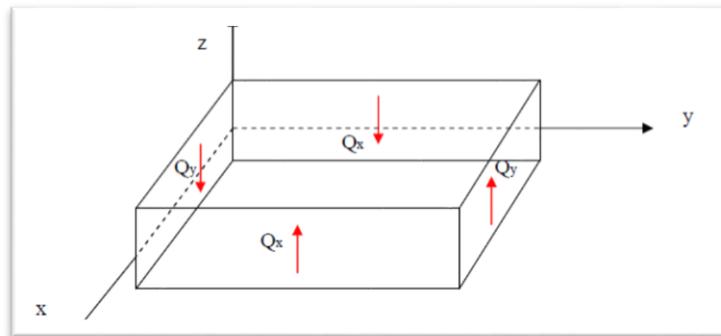


Figure II.8: Schématisation des résultantes de cisaillement [21]

❖ **Moment de flexion et de torsion :**

Les moments de flexion et de torsion sont définies par :

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad (2.58)$$

$M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion et  $M_{xy}$  le moment de torsion, ils sont schématisés sur la figure (2.9).

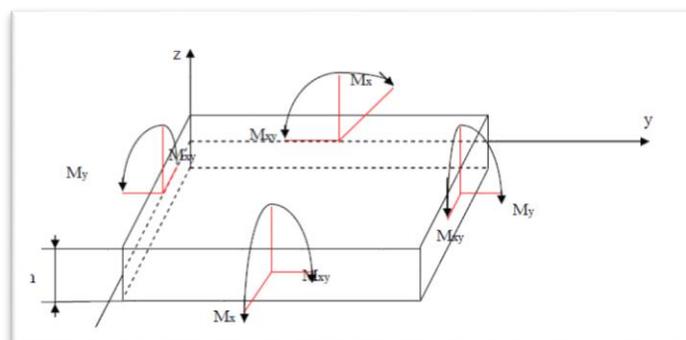


Figure II.9 : Schématisations des moments de flexion et de torsion [21]

**II-3-6) Equation constitutive :**

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures avec prise en compte du cisaillement transverse donnée sous forme matricielle, soit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Avec :

$$N(x, y) = A_{i,j} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} k(x, y) \quad (2.60)$$

Les matrices  $A_{i,j}$  et  $B_{ij}$  s'écrivent :

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}]_k \quad (2.61)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) [\bar{Q}]_k \quad (2.62)$$

Donc :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{x,y} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

$$M(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} k(x, y) \quad (2.64)$$

Alors :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{x,y} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

On a :

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}]_{ij} \quad (2.66)$$

Les efforts résultants au cisaillement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

En modifiée la partie relative aux résultantes en cisaillement transverse et remplaçant les coefficients de rigidité  $F_{ij}$  par de nouveaux coefficients de rigidité en cisaillement  $H_{ij}$  du stratifié :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} K_{44}F_{44} & K_{45}F_{45} \\ K_{54}F_{54} & K_{55}F_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

Avec :  $H_{ij} = k_{ij}F_{ij}$  (2.69)

Les paramètres  $k_{ij}$  sont des facteurs de correction en cisaillement.

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{54} & H_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

Finalement on peut écrire l'équation du comportement mécanique d'un stratifié sous forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \gamma^0 \end{Bmatrix}$$

(2.71)

- ✓ La matrice **A** correspond au comportement de **membrane**,
- ✓ La matrice **D** correspond au comportement de **flexion**,
- ✓ La matrice **B** correspond aux termes de **couplage** entre les comportements de **membrane et de flexion**,
- ✓ La matrice **H** correspond au comportement de **cisaillement transverse**.

Dans le cas où le stratifié est symétrique, le couplage membrane-flexion-torsion est nul ( $B=0$ ).

## II-4) Comportement dynamiques des plaques stratifiées :

### II-4-1) Relations fondamentales :

Les relations fondamentales des plaques stratifiées sont tirées de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\partial x_j + f_i = \rho a_i \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x = \rho a_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + f_y = \rho a_y \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + f_z = \rho a_z$$

Où  $f_i$ ,  $a_i$  et  $\rho$  sont respectivement les forces volumiques, les composantes du vecteur accélération et la masse volumique.

#### II-4-1-1) Relations fondamentales relatives aux résultantes en membrane :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz \quad (2.74)$$

L'intégration des deux premières aboutit aux relations relatives aux résultantes de membrane.

Le premier terme de cette équation s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (2.75)$$

Le deuxième terme de cette équation s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (2.76)$$

Le troisième terme de l'équation s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) \quad (2.77)$$

Où les contraintes  $\sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right)$  et  $\sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right)$  sont les contraintes éventuelles de cisaillement

exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles. Dans le cas où il sera nécessaire d'en tenir compte, nous les noterons :

$$\sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) = \tau_{1x} \quad \text{Et} \quad \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) = \tau_{2x} \quad (2.78)$$

D'où :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \tau_{1x} - \tau_{2x} \quad (2.79)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_x dz = F_x \quad (2.80)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (2.81)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(x, y, z) \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right) dz \quad (2.82)$$

Soit :

$$= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz \quad (2.83)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (2.84)$$

En introduisant :

$$\rho_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz \quad (2.85)$$

$$R = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz \quad (2.86)$$

L'intégration de la première des équations (2.74) conduit donc finalement à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (2.87)$$

De même, l'intégration de la deuxième des équations (2.74) conduit à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \sigma_{yz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{yz} \left( -\frac{h}{2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (2.88)$$

**II-4-1-2) Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement :**

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié du troisième terme des équations (2.74) conduit à :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_z dz \quad (2.89)$$

Le premier terme s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad (2.90)$$

Le deuxième terme :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (2.91)$$

Le troisième terme s'exprime sous la forme :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = q \quad (2.92)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_z dz = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (2.93)$$

Finalement :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (2.94)$$

**II-4-1-3) Relations fondamentales relatives aux moments :**

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par  $z$  les deux premières des équations (2.74), puis en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z a_x dz \quad (2.95)$$

Intégrale par partie :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \left[ z \sigma_{xz} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz = \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) - Q_x \quad (2.96)$$

Soit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x \quad (2.97)$$

Le second membre de l'équation (2.97) s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z a_x dz = R \frac{\partial u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (2.98)$$

En posant :

$$I_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \quad (2.99)$$

La grandeur  $I_{xy}$  est le moment d'inertie au plan moyen ( $Oxy$ ) de l'élément de plaque localisé au point  $(x, y)$  et ayant des côtés égaux à l'unité.

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} \left[ \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) + \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) \right] + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (2.100)$$

En introduisant la composante des moments des forces volumiques exercées :

$$P_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_x dz \quad (2.101)$$

De même, la deuxième équation (2.74) conduit à :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} \left[ \sigma_{yz} \left( \frac{h}{2} \right) + \sigma_{yz} \left( -\frac{h}{2} \right) \right] + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (2.102)$$

#### II-4-2) Résumé des relations fondamentales :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \sigma_{yz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{yz} \left( -\frac{h}{2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} \left[ \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) + \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) \right] + P_x - Q_x &= R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} \left[ \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) + \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) \right] + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

Avec :

$$\rho_s, R, I_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho dz$$

Les grandeurs  $\rho_s, R, I_{xy}$ , se calculent sans difficulté dans le cas où la plaque est constituée de  $n$  couches, la couche  $K$  ayant une masse volumique  $\rho_k$  :

$$\rho_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k dz = \sum_{k=1}^N \rho_k (h_k - h_{k-1}) \quad (2.104)$$

De même :

$$R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.105)$$

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2.106)$$

Les relations fondamentales des stratifiés, tenant compte du cisaillement transverse, sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (2.59) dans les relations fondamentales (2.103) des plaques. Soit :

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\ & = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\ & = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned}
 & H_{55} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x^2} \right) + H_{45} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + H_{44} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 & = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
 & - H_{55} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - H_{45} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
 & = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
 & - H_{45} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - H_{44} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.110}$$

Ces cinq équations permettent en principe de déterminer les cinq fonctions solutions

$u_0(x, y, t)$ ,  $v_0(x, y, t)$ ,  $w_0(x, y, t)$ ,  $\phi_x(x, y, t)$ ,  $\phi_y(x, y, t)$  Ces fonctions doivent vérifier en outre les conditions imposées sur les frontières de la structure étudiée [1].

Dans le cas de stratifiée symétrique,  $B_{ij} = 0$  et  $R=0$ .

### II-4-3) Équations des plaques tenant compte du flambement :

Pour prendre en compte le phénomène de flambement, il est donc nécessaire d'écrire les équations des plaques en tenant compte de la déformation latérale, c'est-à-dire en considérant pour chaque point de la structure les coordonnées après déformation, contrairement à la théorie initiale.

L'équation de flambement : [1]

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \tag{2.111}$$

Les équations fondamentales de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, permettant de formuler le flambement

$$H_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + H_{45} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + H_{44} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (2.112)$$

Où les coefficients  $H_{ij}$  sont les coefficients généraux de cisaillement

#### II-4-4) Formulation énergétique du problème de flambement :

Dans le cas où l'on tient de la déformation latérale les actions exercées sur le stratifié résultent des charges transverses ( $q$ ) été exercées sur les faces inférieures et supérieures du stratifiées et des charges en membrane la variation du travail des actions exercées sur le stratifié s'écrit donc :

$$\delta W = \delta W_f + \delta W_m \quad (2.113)$$

La fonction d'énergie ( $W_m$ ) des actions en membrane s'exprime de la façon suivante :

$$W_m = - \iint (N_x^i \varepsilon'_{xx} + N_y^i \varepsilon'_{yy} + N_{xy}^i \gamma'_{xy}) dx dy \quad (2.114)$$

Où ( $\varepsilon'_{xx}, \varepsilon'_{yy}, \gamma'_{xy}$ ) sont les déformations en membrane résultant de la flèche ( $w_0$ ), dans le cas où l'on tient compte seulement de grandes déformations latérales, les déformations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon_{xx}^0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \longrightarrow \varepsilon_{xx}' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon_{yy}^0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \longrightarrow \varepsilon_{yy}' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 = \gamma_{xy}^0 + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \longrightarrow \gamma_{xy}' = \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.115)$$

Donc l'énergie ( $W_m$ ) s'écrit :

$$W_m = - \frac{1}{2} \iint \left( N_x^i \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y^i \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy}^i \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right) dx dy \quad (2.116)$$

La variation du travail des actions en membrane s'exprime finalement en prenant la variation de (2.116) soit :

$$\delta W_m = - \iint \left( N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \delta w_0 dx dy \quad (2.116)$$

Les formulations variationnelles du problème de flambement sont déduites dans le cas de problèmes statiques et dans le cas de problèmes dynamiques. Elles s'écrivent ici :

- cas de problèmes statiques :  $\delta(U - W_f - W_m) = 0$  (2.117)

- cas de problèmes dynamiques :  $\int_{t_0}^{t_1} \delta(U - W_f - W_m - E_c) dt = 0$  (2.118)

La formulation d'énergie totale :  $\pi = U - W$  (2.119)

$W = W_f + W_m$  (2.120)

U: Energie de déformation

W : Travail des actions exercée sur le stratifié

$W_f$  : Les actions en flexion

$W_m$  Les actions en membrane

**II-4-5) Formulation énergétique de la théorie de stratifiée :**

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse du comportement mécanique des stratifiés à l'aide des éléments finis.

➤ **Énergie de déformation d'un stratifié :**

L'énergie de déformation d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{xy}\gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2.121)$$

Où l'intégration est étendue à l'ensemble du volume du solide. En tenant compte des

hypothèses de la théorie des stratifiés :  $\sigma_{zz} = 0$ ,

En exprimant cette relation en fonction des déplacements  $u_0, v_0$  et  $w_0$  dans le cas de stratifiée symétrique les termes  $B_{ij}$  sont nuls l'expression énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[ \begin{aligned} &A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ &+ A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + (D_{16} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \end{aligned} \right] dx dy \quad (2.122)$$

➤ **Énergie cinétique d'un stratifié :**

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (2.123)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique en un point et l'intégration est étendue à l'ensemble du solide.

Dans le cas de la théorie de premier ordre (FSDT), le champ des déplacements s'écrit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \phi_x(x, y) \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \phi_y(x, y) \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{2.124}$$

En substituant ces relations dans l'expression l'énergie cinétique du stratifié s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz\tag{2.125}$$

## Chapitre III : Présentation de l'élément finis utilisée.

### III.1) Introduction :

La modélisation physique de systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approximée du problème physique. La Méthode des Éléments Finis (MEF) est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature.

La méthode des éléments finis a été établie comme un outil très performant pour la résolution des systèmes d'analyse des structures et les sciences d'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique ..... ) permettent de décrire le comportement de système physique grâce à des équations aux dérivées partielles.

Ce chapitre a pour objectif d'étudier la validation de l'élément utilisé sur la vibration libre et le flambement mécanique des plaques composites isotrope et stratifiées, en utilisant la méthode des éléments finis. Basé sur la théorie du premier ordre, et en utilisant le principe de l'énergie potentielle totale pour trouver le vecteur de forces et la matrice de rigidité globale.

### III.2) Présentation de l'élément fini utilisé :

#### III.2.1) Description de l'élément fini utilisé :

Dans ce travail, l'élément choisit c'est un élément de forme rectangulaire à 4 nœuds, chaque nœud a cinq degré de liberté.

La figure (III-1) montre la géométrie de l'élément rectangulaire utilisé, les dimensions (a et b) et l'épaisseur (h).

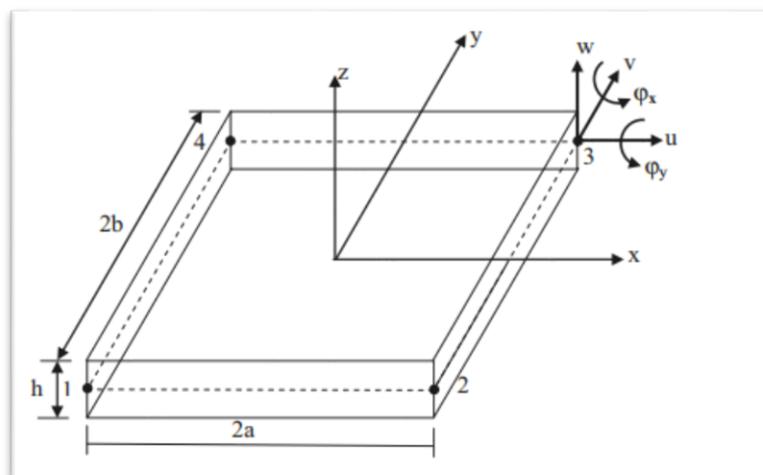


Figure III.1: Géométrie et variables nodales de l'élément

**III.2.2) Champ des Déplacements et cinématique :**

Selon la théorie du premier ordre, le déplacement d'un point de coordonnées (x,y,z) est donnée par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \varphi_x(x, y, t) \quad (3-1)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \varphi_y(x, y, t) \quad (3-2)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (3-3)$$

L'état de déformation à n'importe quel point dans la plaque est donné par :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon_x^0 + z k_x + \varepsilon_x^{nl} \quad (3-4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon_y^0 + z k_y + \varepsilon_y^{nl} \quad (3-5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w \partial w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial w \partial w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} + \gamma_{xy}^{nl} \quad (3-6)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3-7)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3-8)$$

L'état de déformation en un point quelconque de la plaque globale est donné par les vecteurs de déformation suivants :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z \{k\} + \{\varepsilon^{nl}\} \quad (3-9)$$

$$\{\varepsilon^0\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (3-10a)$$

$\{\varepsilon_0\}$  Les déformations en membrane

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3-10b)$$

La matrice  $\{k\}$  est appelée *matrice des courbures* de la plaque sollicitée en flexion. [13]

Les déformations non linéaires :

$$\{\varepsilon^{nl}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3-10c)$$

### III.2.3) Loi de comportement :

La relation contrainte-déformation dans une couche  $k$  est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^k \\ \sigma_y^k \\ \tau_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^k \\ \varepsilon_y^k \\ \gamma_{xy}^k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a_x^k \\ a_y^k \\ a_{xy}^k \end{Bmatrix} \Delta T \quad (3-11)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^k \\ \tau_{yz}^k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{44}^k & \bar{Q}_{45}^k \\ \bar{Q}_{54}^k & \bar{Q}_{55}^k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^k \\ \gamma_{yz}^k \end{Bmatrix}$$

Avec :

$\alpha$  : Coefficient de dilatation thermique

$\Delta t$  : Variation de température.

Dans ce travail la variation de température est négligée

Avec :  $a_x^k = a_{11}^k \cos^2 \theta + a_{22}^k \sin^2 \theta$

$$a_y^k = a_{22}^k \cos^2 \theta + a_{11}^k \sin^2 \theta \quad (3-12)$$

$$a_{xy}^k = (a_{11}^k - a_{11}^k) \cos \theta \sin \theta$$

Ou :

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= c^4 Q_{11} + s^4 Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2 c^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2 c^2 + Q_{12}(c^4 + s^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66})s^3 c \\ \bar{Q}_{22} &= s^4 Q_{11} + c^4 Q_{22} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2 c^2 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3 c + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66})sc^3 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66}))s^2 c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)\end{aligned}\tag{3-13}$$

Les efforts résultants en membrane et flexionnelle est donnée par :

$$\{N \quad M\} = \begin{bmatrix} N_x & M_x \\ N_y & M_y \\ N_{xy} & M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z^k}^{z^{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^k \\ \varepsilon_y^k \\ \gamma_{xy}^k \end{Bmatrix} \{1 \quad z\} dz\tag{3-14}$$

Les résultantes en cisaillement est donnée par :

$$\begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z^k}^{z^{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}^k \\ \tau_{yz}^k \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z^k}^{z^{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44}^k & \bar{Q}_{45}^k \\ \bar{Q}_{54}^k & \bar{Q}_{55}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^k \\ \gamma_{yz}^k \end{Bmatrix} dz\tag{3-15}$$

L'équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \gamma^0 \end{Bmatrix}\tag{3-16}$$

$$\{N\} = \int \{\sigma\} dz = [A]\{\varepsilon_0\} + [B]\{k\}\tag{3-17}$$

$$\{M\} = \int \{\sigma\} z dz = [B]\{\varepsilon_0\} + [D]\{k\}$$

$$\{Q\} = \int \{\tau\} dz = [H]\{\gamma\}\tag{3-18}$$

**III.2.4) Approximation nodale des déplacements :**

Le champ de déplacements d'un point M(x, y) dans l'élément peut être défini par :

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \delta_i \quad (i = 1, 5) \quad (3-19)$$

Où  $\delta_i(x, y)$  est le vecteur de déplacement d'un point donné M (x, y) dans l'élément.

$\delta_i$  et  $N_i(x, y)$  sont vecteur de déplacement et les fonctions de forme bilinéaire de Lagrange associé au nœud  $\alpha$ , respectivement.

$$\delta^\alpha = u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha, \varphi_x^\alpha, \varphi_y^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad (3-20)$$

Pour un nœud on a :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) u_i$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) v_i$$

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) w_i \quad (3-21)$$

$$\varphi_x(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \varphi_{xi}$$

$$\varphi_y(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \varphi_{yi}$$

Où  $u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}$  sont les déplacements au nœud i.

Et :

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4ab} (a-x)(b-y)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{4ab} (a+x)(b-y) \quad (3-22)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{4ab}(a+x)(b+y)$$

$$N_4(x, y) = \frac{1}{4ab}(a-x)(b+y)$$

**Les déformations en *membrane* sont exprimées par :**

$$\{\varepsilon_m\} = [B_m]\{q\} \quad (3-23)$$

Où :

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3-24)$$

$[B_m]$  : La matrice qui relie les déformations à l'intérieur de l'élément et les déplacements aux nœuds.

**Les déformations en flexion et torsion :**

S'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = z.k(x, y) \quad (3-25)$$

Où  $\mathbf{k}$  la matrice de courbure s'écrit :

$$\{k\} = [B_f]\{q\} \quad (3-26)$$

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3-27)$$

**Les déformations en *cisaillement transverse* sont exprimées par :**

$$\{\gamma\} = [B_c]\{q\} \quad (3-28)$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \quad (3-29)$$

### III.3.1) Énergie potentielle totale :

L'énergie potentielle totale de l'élément est donné par :

$$\pi = U - W \quad (3-30)$$

$U$  Est l'énergie potentielle de déformation et  $W$  est le travail des forces extérieures

L'énergie potentielle totale peut être écrite en termes d'efforts résultants et les déformations correspondantes comme suit :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_A \left( \{\varepsilon_0\}^t \{N\} + \{k\}^t \{M\} + \{\gamma_z\}^t \{Q\} \right) dA + \int_A \{\varepsilon_{nl}\}^t \{N\} dA \quad (3-31)$$

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left( \{q\}^t \left( [B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] \right) + [B_c]^T [H] [B_c] \right) \{q\} dx dy \quad (3-32)$$

$$+ \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{1}{2} \{q\}^t [G]^t [N] [G] \{q\} dx dy$$

Avec  $\{q\}$  est le vecteur des déplacements nodaux  $\{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{y4} \end{Bmatrix} \quad (3-33)$

$$\text{Ou : } [N'] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

$N_i$  : Résultants de contraintes normales dus à charge mécanique

La matrice  $[K_e]$  peut être écrite sous la forme :

$$[K_e] = [k_e^m] + [k_e^{c1}] + [k_e^{c2}] + [k_e^f] + [k_e^c] \quad (3-35)$$

Avec :

$$[k_e^m] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_m]^T [A] [B_m]) dx dy$$

$$[k_e^{c1}] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_m]^T [B] [B_f]) dx dy$$

$$[k_e^{c2}] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_f]^T [B] [B_m]) dx dy \quad (3-36)$$

$$[k_e^f] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_f]^T [D] [B_f]) dx dy$$

$$[k_e^c] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_c]^T [H] [B_c]) dx dy$$

$[k_e^m]$  : Matrice de rigidité élémentaire membranaire

$[k_e^{c1}]$  et  $[k_e^{c2}]$  : Matrices de rigidité élémentaire de couplage membrane-flexion

$[k_e^f]$  : Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle.

$[k_e^c]$  : Matrice de rigidité élémentaire de cisaillement transverse

L'annulation de la deuxième variation de l'énergie potentielle totale par rapport au vecteur des déplacements  $\{q\}$  permet d'avoir l'équation suivante :  $\partial^2 \pi = 0$  (Pour déterminer les charges critiques)

$$([K_e] + [K_g^e]) \{q\} = 0 \quad (3-37)$$

Dans ce cas la plaque est soumise à un chargement membranaire et le champ des efforts membranaires dans un élément est donné par :

$$[N^0] = \lambda [N'] = \lambda \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

Avec  $\lambda$  est le paramètre de charge

$$\text{Et : } [K_g^e] = \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a [G]^T [N^0] [G] dx dy \quad (3-39)$$

$[K_g^e]$  : La matrice géométrique élémentaire

L'assemblage des matrices élémentaires,  $[k_e]$  et  $[k_g^e]$  permet d'obtenir le problème aux valeurs propres suivant :

$$[K]\{X\} + \lambda [K_g]\{X\} = 0 \quad (3-40)$$

Cette relation est nulle quelle que soit le vecteur des déplacements  $[X]$  alors sa résolution et sa nulle le déterminant de l'expression c'est-à-dire :

$$DET([K] + \lambda [K_g]) = 0 \quad (3.41)$$

La résolution de l'équation (3.41) permet d'obtenir les valeurs propres  $\lambda_i$ .

La plus petite des valeurs de  $\lambda_i$  correspondre au coefficient de la charge critique  $\lambda_{cr}$ .

### **Vibrations libres d'une plaque soumise aux charges membranaires :**

Le principe de Hamilton :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\pi - T) dt = 0 \quad (3-42)$$

Où  $\pi$  est l'énergie potentielle totale, T est l'énergie cinétique et  $t_1$  et  $t_2$  sont les instants initiaux et finals respectivement.

En utilisant l'équation de Lagrange, l'équation de mouvement peut être exprimé par :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K_T]\{q\} = 0 \quad (3-43)$$

Où  $[M]$  est la matrice masse, et  $[K_T]$  est la matrice de rigidité totale.

$$[K_T] = [K^e] + [K_g^e] \quad (3-44)$$

- **La matrice masse:**

La variation de l'énergie cinétique peut être écrite comme suit:

$$\delta T = \int_V \rho (\ddot{u} \cdot \delta u + \ddot{v} \cdot \delta v + \ddot{w} \cdot \delta w) dV \quad (3-45)$$

Où  $\rho$  et  $V$  sont la densité et le volume de l'élément, respectivement

$$\delta T = \int_A \left( I_0 (\ddot{u}_0 \cdot \delta u_0 + \ddot{v}_0 \cdot \delta v_0 + \ddot{w} \cdot \delta w) + I_1 (\ddot{u}_0 \cdot \delta \varphi_x + \ddot{\varphi}_x \cdot \delta u_0 + \ddot{v}_0 \cdot \delta \varphi_y + \ddot{\varphi}_y \cdot \delta v_0) + I_2 (\ddot{\varphi}_x \cdot \delta \varphi_x + \ddot{\varphi}_y \cdot \delta \varphi_y) \right) dA \quad (3-46)$$

Où:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (1, z, z^2) dz \quad (3-47)$$

La matrice d'inertie est donnée par:

$$[m] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

La matrice masse est donnée par :

$$[M] = \int_{-b-a}^b \int_a^a ([N]^T [m] [N]) dx dy \quad (3-49)$$

En substituant  $\{\ddot{q}\}$  par  $-\omega^2 \{q\}$  dans l'équation précédant on aura le problème de valeur propre suivant :

$$([K_e] + [K_g] - \omega^2 [M]) \{q\} = 0 \quad (3-50)$$

Où  $\omega$  est la fréquence naturelle de vibration de la plaque.

### III.4) Présentation du programme :

#### III.4.1) Introduction :

On a développé les étapes nécessaires à l'obtention la matrice rigidité, et la matrice géométrique. La résolution d'un problème par méthode des éléments finis entraîne le calcul de la matrice rigidité, et la matrice géométrique.

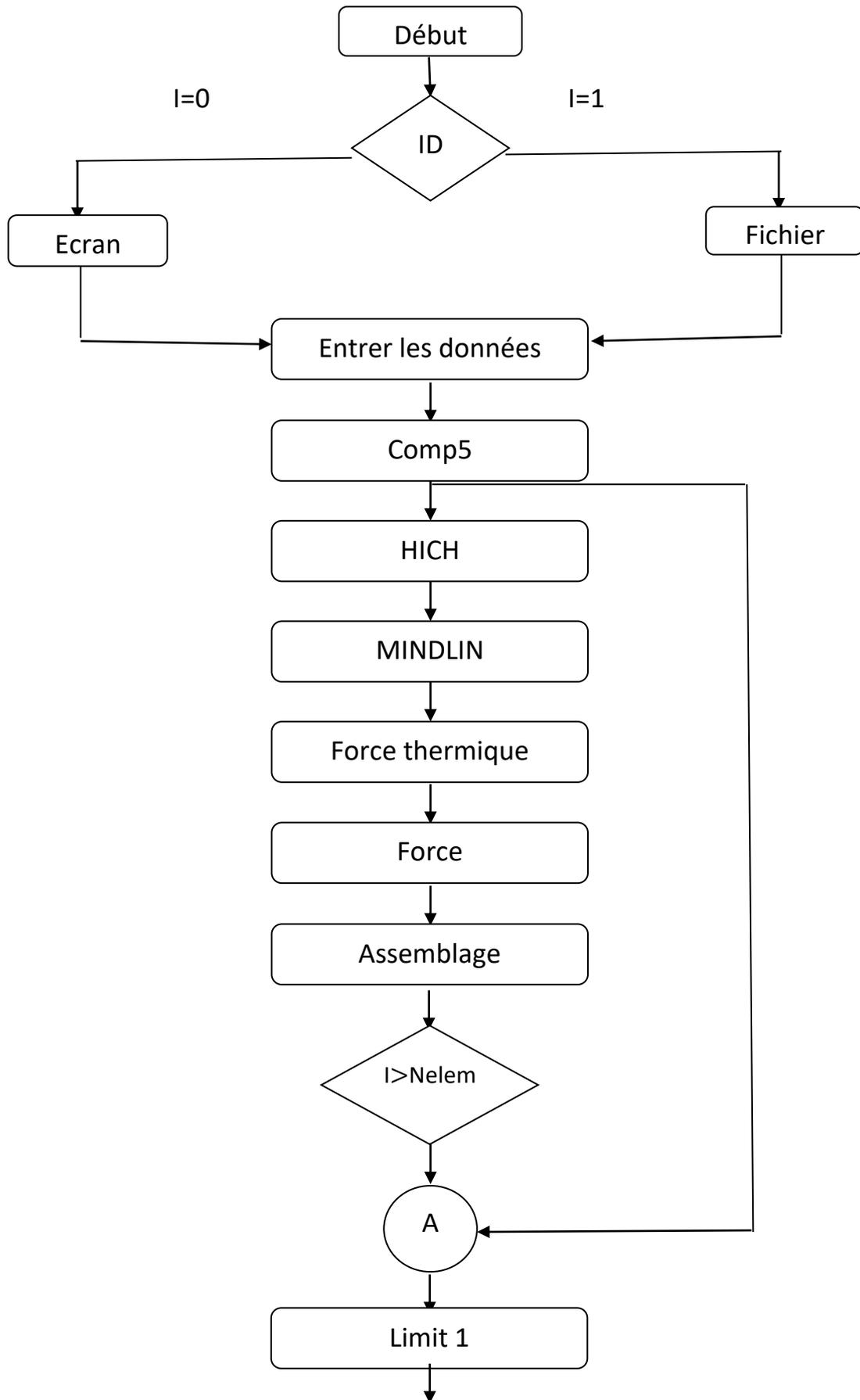
Les valeurs propres 'les charges critiques ' de la structure étaient reliées aux matrices rigidité, et matrice géométrique par l'équation  $([k_e] + [k_g^e])\{q\} = 0$

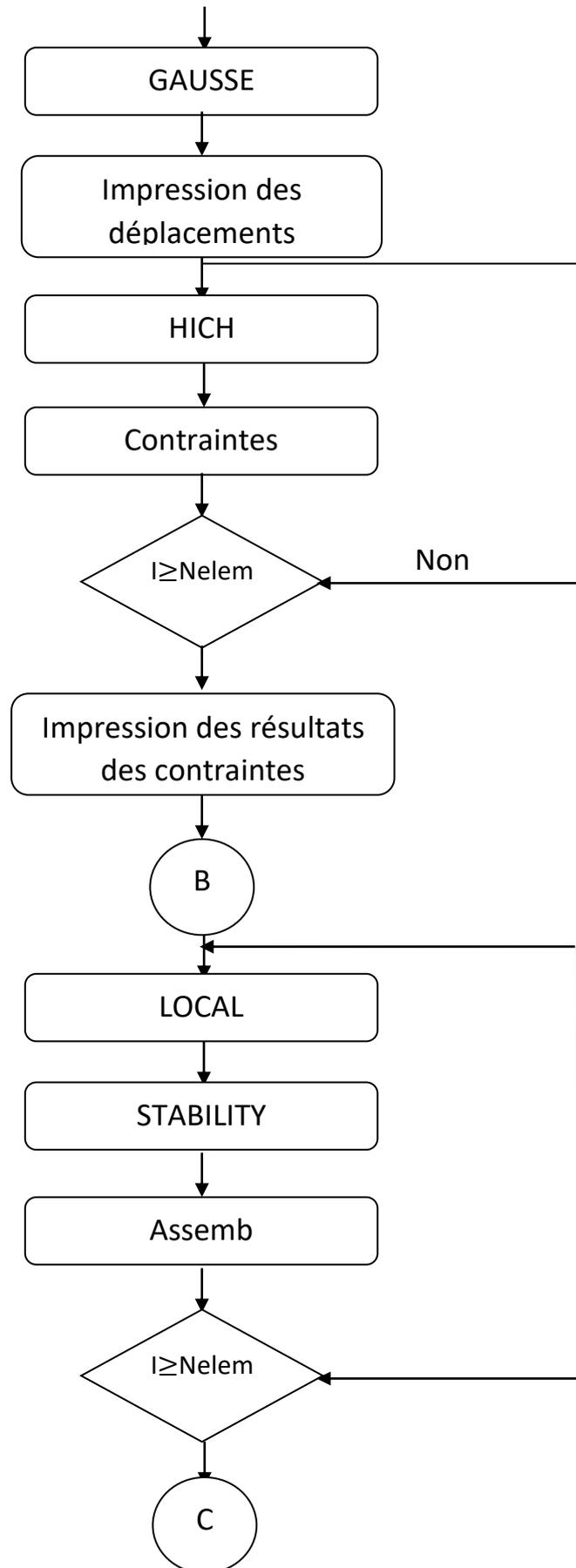
Dans cette méthode, les valeurs inconnues sont les valeurs propres 'les charges critiques' pour le flambage mécanique ( $Ncr$ ).

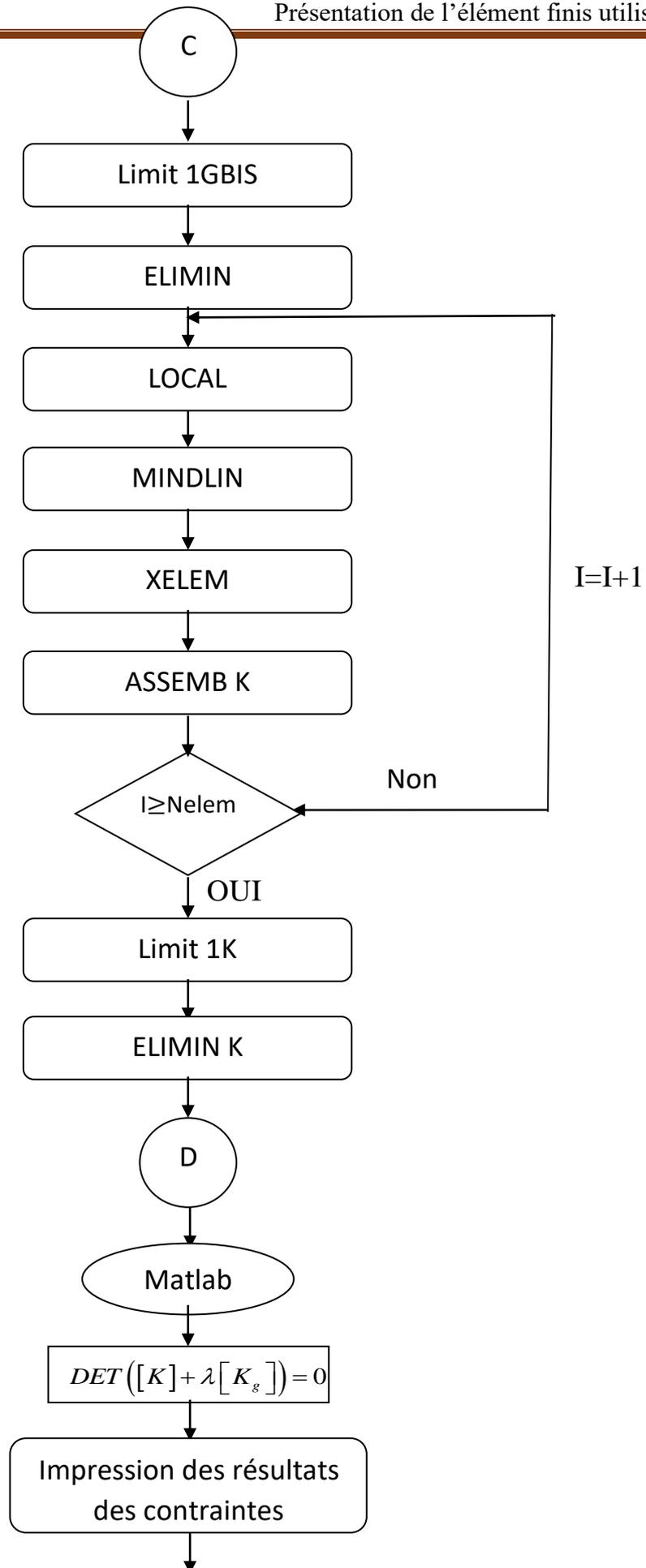
Dans cette étude, on utilise programme en langage **FORTRAN77** et un autre programme en langage **MATLAB** □□le premier programme permet de calculer de la matrice rigidité  $[k_e]$ , et la matrice géométrique  $[k_g^e]$ . Le deuxième programme destiné pour trouver les valeurs propres 'les charges critiques ' à partir de résoudre l'équation suivante :

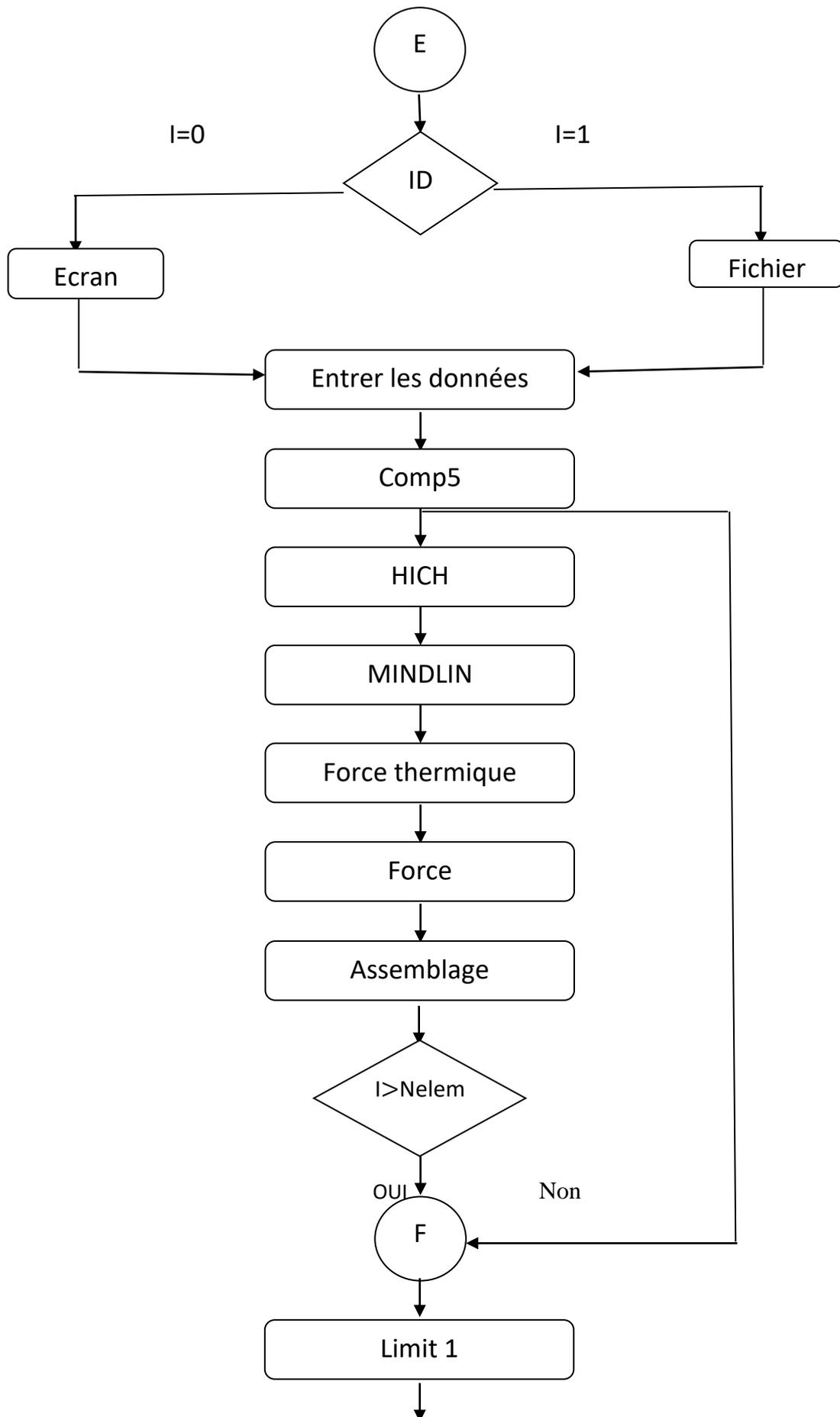
$$DET([K] + \lambda [K_g]) = 0$$

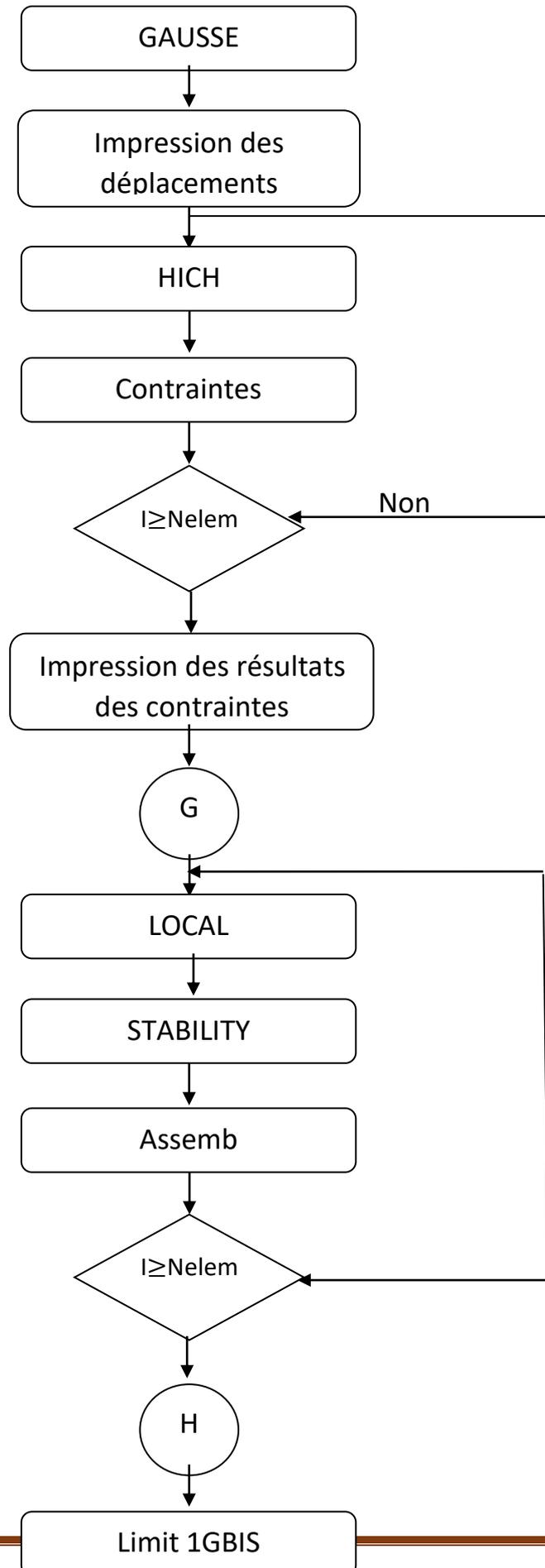
#### III.4.2) L'organigramme du programme :











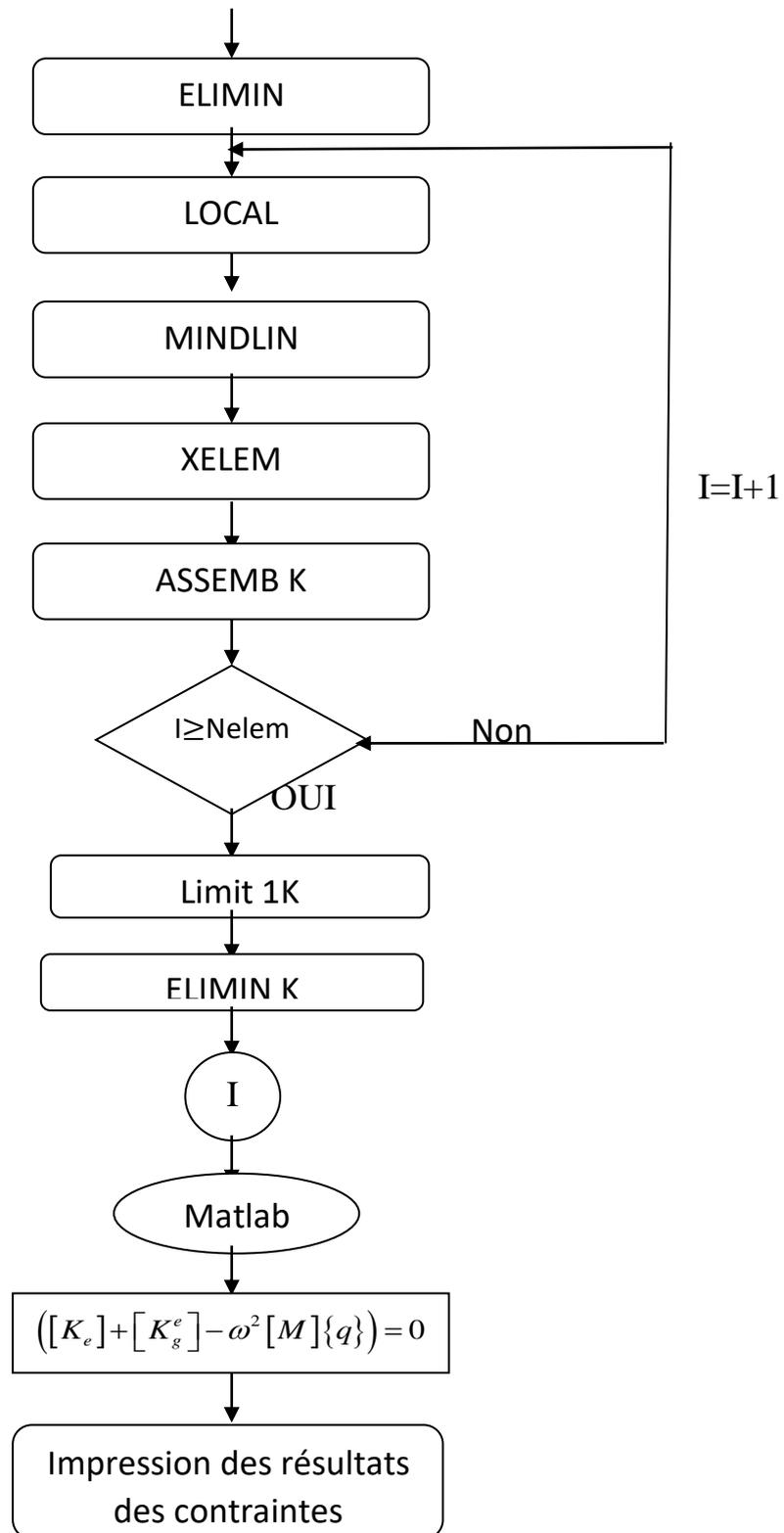


Figure III.2 : Organigramme du programme

**III.4.3) Description les sous-routines du programme :**

<b>Subroutine</b>	<b>Fonction</b>
<b>Comp5</b>	Permet de calculer les caractéristiques mécaniques du stratifié ( $[A],[B],[D]$ et $[H]$ )
<b>HICH</b>	Construction du tableau de localisation.
<b>Mindlin</b>	Construction des matrices de rigidité élémentaires.
<b>Force</b>	Création du vecteur forces élémentaire.
<b>Assemb</b>	d'assembler les matrices de rigidité élémentaires et le vecteur force élémentaire dans la matrice de rigidité et le vecteur force, globaux respectivement.
<b>Limite1</b>	Permet d'introduire les conditions aux limites pour calculer le déplacement.
<b>Gauss</b>	Résolution du système d'équation linéaire et calculer des déplacements à partir de l'équation $F=K \cdot \delta$
<b>Local</b>	Localiser les matrices réduites dans la matrice globale.
<b>Xelem</b>	Réduire la matrice de rigidité élémentaire.
<b>Assemb k</b>	Calcul la matrice géométrique globale.
<b>Limit 1g</b>	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de rigidité géométrique.
<b>Limit 1K</b>	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de rigidité réduite.
<b>Elimin K</b>	Eliminations les lignes et les colonnes de matrice de rigidité réduite dans les éléments sont nulles.
<b>Elimin g</b>	Eliminations les lignes et les colonnes de la matrice géométrique dans les éléments sont nulles.
<b>Stability</b>	Calcul matrice géométrique élémentaire.

### III.5) Validation de l'élément :

Dans cette partie, nous allons étudier la performance de l'élément rectangulaire à quatre nœuds utilisé pour résoudre le problème des efforts membranaires sur la vibration des plaques stratifiées en matériaux composite. Les résultats obtenus seront comparé avec les résultats des solutions analytiques.

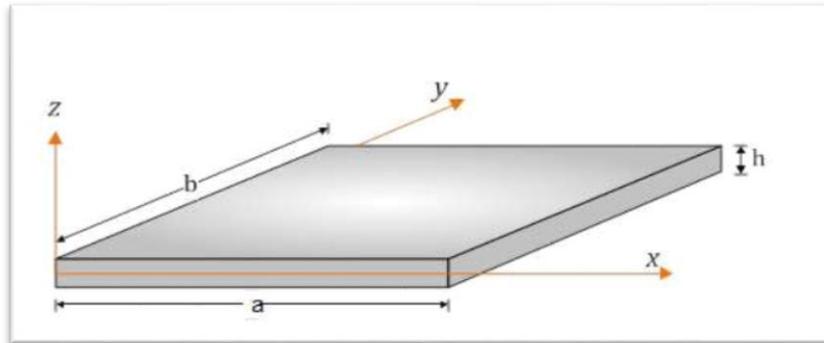


Figure III.3: Géométrie de la plaque.

Les conditions aux limites considérées pour une plaque :

**SSSS**: Plaque simplement appuyée sur les quatre bords

**EEEE**: Plaque encastée sur les quatre bords.

**ESES**: Deux bords opposés encastés et deux autres bords simplement appuyés.

**ELEL**: Deux bords opposés encastés et deux autres bords libres

#### III.5.1) Vibration libre des plaques :

##### III.5.1.1) Plaques isotrope :

Dans cette exemple, On considère une plaque carrée isotrope simplement appuyée, avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 10$ .

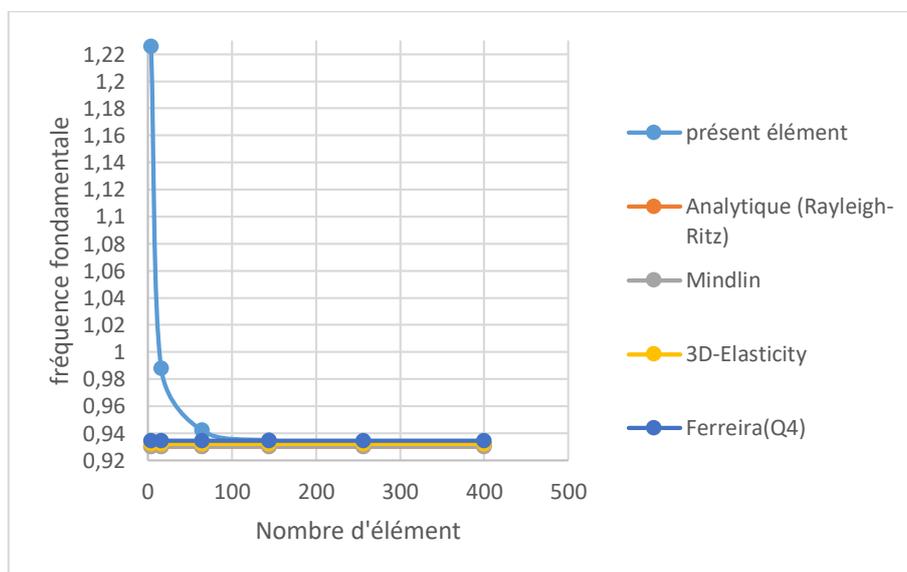
Les caractéristiques mécanique d'un matériau sont :  $E=10.92 \text{ MPa}$  ,  $\nu= 0.3$  ,  $G=4.2 \text{ MPa}$

Le tableau suivant présente les résultats de la fréquence naturelle normalisés par la formule

$$\bar{\omega} = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{G}} .$$

**Tableau III.2 : La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée(SSSS)**

Maillage Référence	fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ (rad/s) <sup>2</sup>	Erreur%
présent élément 2*2	1.2257	31.795
présent élément 4*4	0.9880	6.2365
présent élément 8*8	0.9423	1.3225
présent élément 12*12	0.9347	0.5053
présent élément 16*16	0.9322	0.2365
présent élément 20*20	0.9322	0.2365
Analytique (Rayleigh-Ritz)	0.930	-
Mindlin [16]	0.930	-
3D-Elasticity [16]	0.932	-
Ferreira(Q4) [16]	0.9346	-

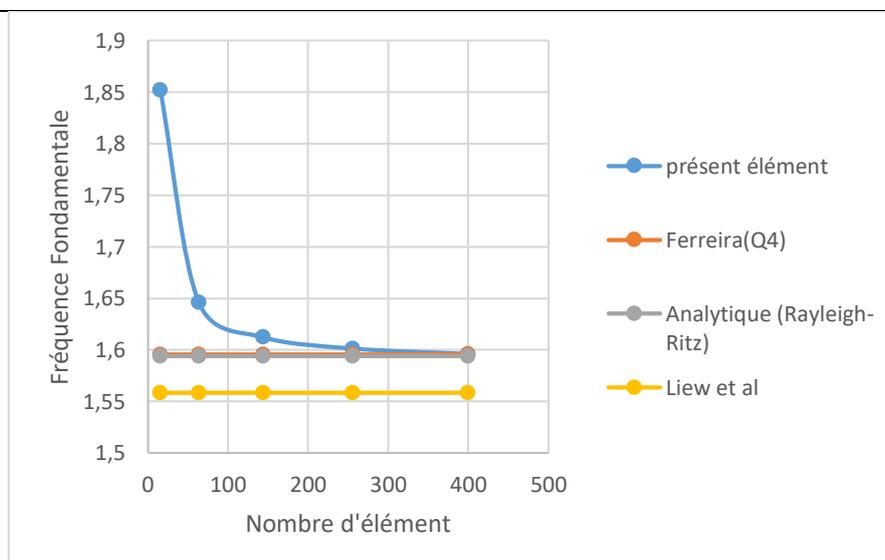


**Figure III.4 : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments**

On considère une plaque carrée isotrope encastéré, avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 10$ . Les caractéristiques mécanique d'un matériau sont :  $E=10.92 \text{ MPa}$  ,  $\nu= 0.3$  ,  $G=4.2 \text{ MPa}$

**Tableau III.3 : La fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastérée(EEEE).**

Maillage Référence	fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ (rad/s) <sup>2</sup>	Erreur%
présent élément 2*2	4.4721	180.29
présent élément 4*4	1.8522	16.089
présent élément 8*8	1.6460	3.1651
présent élément 12*12	1.6124	1.0592
présent élément 16*16	1.6013	0.3635
présent élément 20*20	1.5961	0.0376
Ferreira(Q4)	1.5955	
Analytique (Rayleigh-Ritz) [17]	1.5940	
Liew et al [18]	1.5582	



**Figure III.5 : Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque isotrope encastérée(EEEE), en fonction de nombre des éléments.**

**Interprétation des résultats :**

Les tableaux (III.2 et III.3) et les figure (III.4) et (III.5) montre la convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée simplement appuyée. La comparaison des résultats a été faite avec la solution Analytique et le résultat numérique de Ferreira [18] et Liew et al [19].

D'après les résultats des fréquences fondamentale obtenus on remarque que :

Les résultats convergeant vers le résultat analytique et le résultat numérique de Ferreira [18] avec un maillage (16 x 16).

**III.5.1.2) Plaque composite stratifiée :**

Dans cet exemple, on considère une plaque stratifiée carrée, simplement appuyée, avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 5$ .

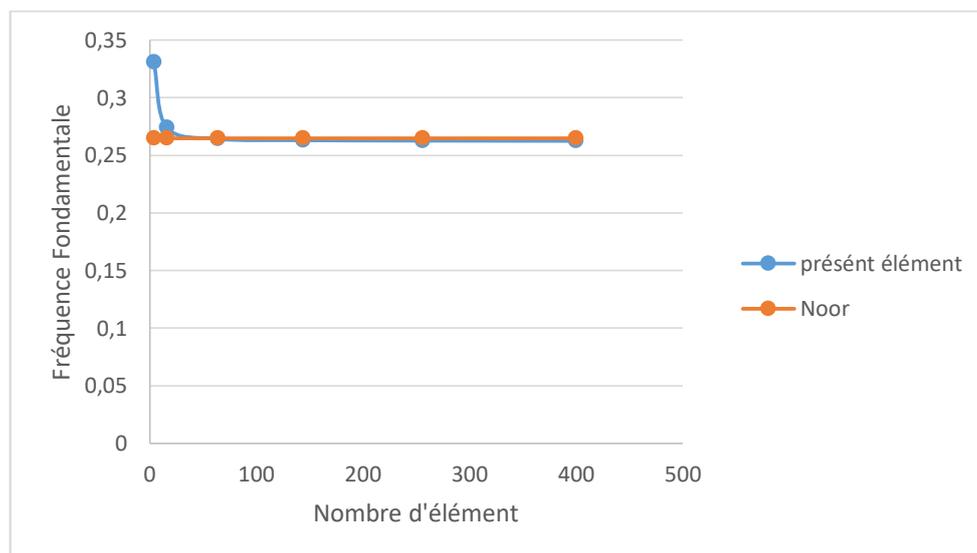
Les caractéristiques mécaniques de chaque couche sont les suivantes :

$$\frac{E_1}{E_2} = 3, \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.6, \quad \frac{G_{13}}{E_2} = 0.6, \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.5, \quad \nu_{12} = 0.25, \quad \rho = 1$$

Les valeurs des fréquences propres sont normalisées par la relation suivante :  $\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho h^2}{E_2}}$

**Tableau III.4 : La fréquence propre fondamentale d'une plaque stratifiée constituée de trois couches (0/90/0) simplement appuyé :**

Maillage Référence	fréquence fondamentale $\bar{\omega}$	Erreur%
présent élément 2*2	0.33075	24.9338
présent élément 4*4	0.27422	3.5808
présent élément 8*8	0.26419	0.207
présent élément 12*12	0.26305	0.6383
présent élément 16*16	0.26267	0.7818
présent élément 20*20	0.26248	0.8536
NOOR [20]	0.26474	



**Figure (III.6):** Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée simplement appuyée en fonction de nombre des éléments

#### Interprétation des résultats :

Le tableau **III.4** et la figure **(III.6)** montre la convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque stratifiée simplement appuyée. La comparaison des résultats a été faite avec la solution d'élasticité de NOOR.

D'après les résultats des fréquences fondamentale obtenus on remarque que :

Les résultats convergent vers la solution analytique NOOR [20] rapidement dans le maillage (8\* 8) et dans le maillage (16\* 16) les résultats restent inchangés.

### III.5.2) Flambement mécanique :

#### III.5.2.1) Plaques isotrope :

- On considère une plaque isotrope carrée, simplement appuyée avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 10$ . Les propriétés mécaniques du matériau sont :  $E = 10.92Mpa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $G = 4.2Mpa$

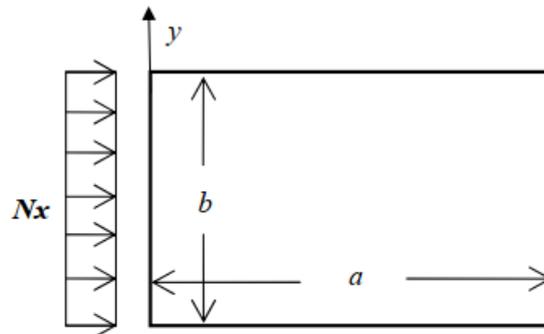
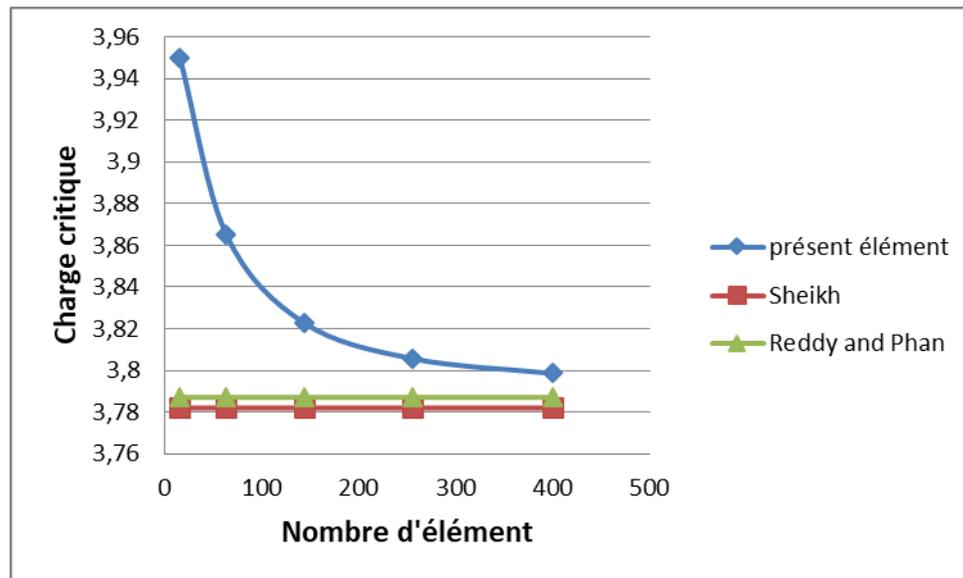


Figure : (III.7):.Plaque soumise à une charge uniaxiale

Tableau III.5: Test de convergence de la charge critique uniaxial suivant x simplement

appuyée (SSSS)  $\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{a^2 D}{\pi^2}$

Maillage	La charge critique $N_{cr}$	La charge critique $\bar{N}_{cr}$	Erreur%
présent élément 4*4	0.39	3.95	4.304
présent élément 8*8	0.3814	3.865	2.059
présent élément 12*12	0.3772	3.8228	0.9453
présent élément 16*16	0.3755	3.8056	0.4911
présent élément 20*20	0.3749	3.7985	0.303
Sheikh		3.782	
Reddy and Phan		3.787	



**Figure III.8: Variation de  $N_{cr}$  en fonction du nombre des éléments, plaque isotrope**

Le tableau III.5 et la figure (III.8) : Représente la variation de la charge critique ( $N_{cr}$ ) en fonction du nombre des éléments avec condition aux limites simplement appuyés pour une plaque isotrope.

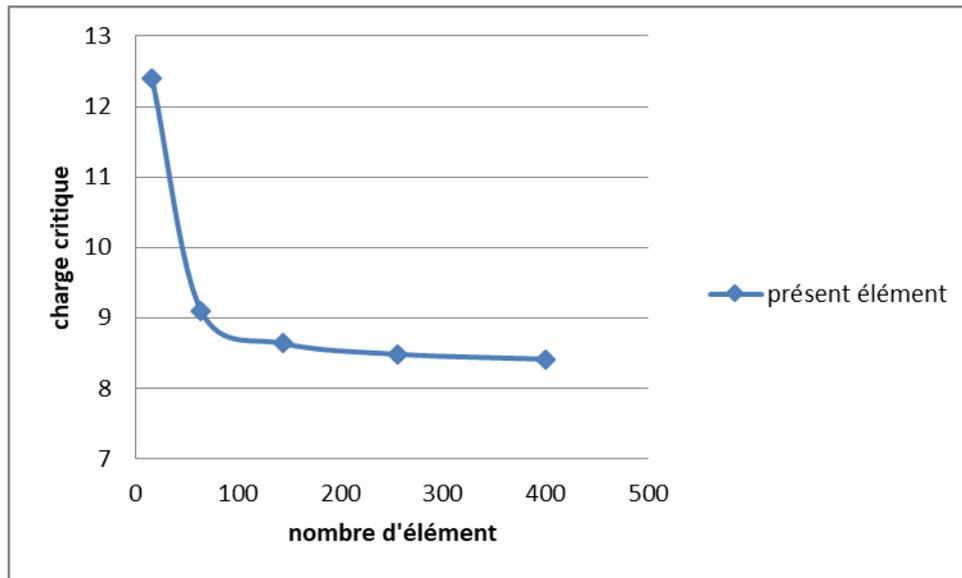
Les résultats montrent que les valeurs obtenues sont très proche l'une à l'autre.

- On considère une plaque isotrope carrée, encadrée avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 10$ . Les propriétés mécaniques du matériau sont :  $E = 10.92 \text{ Mpa}$  ,  $\nu = 0.3$  ,

**Tableau III.6:** Test de convergence de la charge critique uniaxial suivant x encadré (EEEE)

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{a^2 D}{\pi^2}$$

Maillage	La charge critique $N_{cr}$	La charge critique $\bar{N}_{cr}$
présent élément 4*4	1.2238	12.399
présent élément 8*8	0.8978	9.096
présent élément 12*12	0.8523	8.635
présent élément 16*16	0.8372	8.482
présent élément 20*20	0.8303	8.412



**Figure III.9: Variation de la charge critique uniaxial suivant  $x$  d'une plaque isotrope encastrée (EEEE) en fonction du nombre des éléments**

### III.5.2.2) Plaque stratifiée :

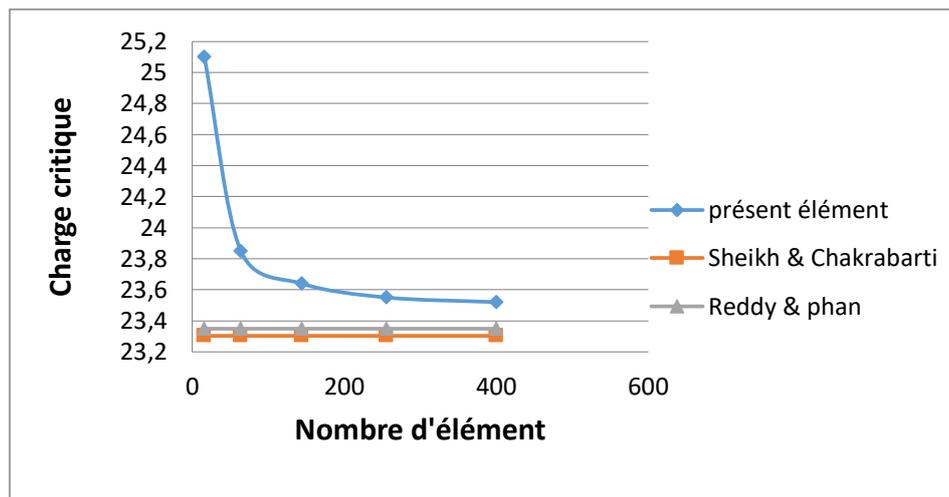
- On considère une plaque stratifiée carrée, simplement appuyée. Le nombre des couches est 4 couches avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 10$ .

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

$$\frac{E_1}{E_2} = 40 \quad , \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 \quad , \quad G_{23} = 0.5E_2 \quad , \quad \nu_{12} = 0.25$$

**Tableau III.7 :** Test de convergence de la charge de compression uniaxial suivant x simplement appuyée (SSSS)  $\overline{N}_{cr} = N_{cr} a^2 / E_2 h^3$

Maillage	La charge critique $N_{cr}$	La charge critique $\overline{N}_{cr}$	Erreur%
présent élément 4*4	0.2510	25.10	7.499
présent élément 8*8	0.2385	23.85	2.1457
présent élément 12*12	0.2364	23.64	1.246
présent élément 16*16	0.2355	23.55	0.86
présent élément 20*20	0.2352	23.52	0.7323
Sheikh & Chakrabarti (16*16)		23.303	
Reddy & Phan		23.349	



**Figure III.10:** Variation de la charge critique uniaxial suivant x en fonction du nombre des éléments cas d'une stratifié orthotrope simplement appuyée

#### Interprétation des résultats :

La figure (III.10) représente la variation de la charge critique ( $N_{cr}$ ) en fonction du nombre des éléments d'une plaque stratifiée simplement appuyée. La comparaison des résultats a été faite avec Sheikh & chakrabarti et Reddy & phan.

On remarque que les valeurs de la charge critique obtenue convergent vers les résultats de Sheikh & chakrabarti et Reddy & phan.

- On considère une plaque carrée, encasté. Le nombre des couches est 4 couches avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 10$ .

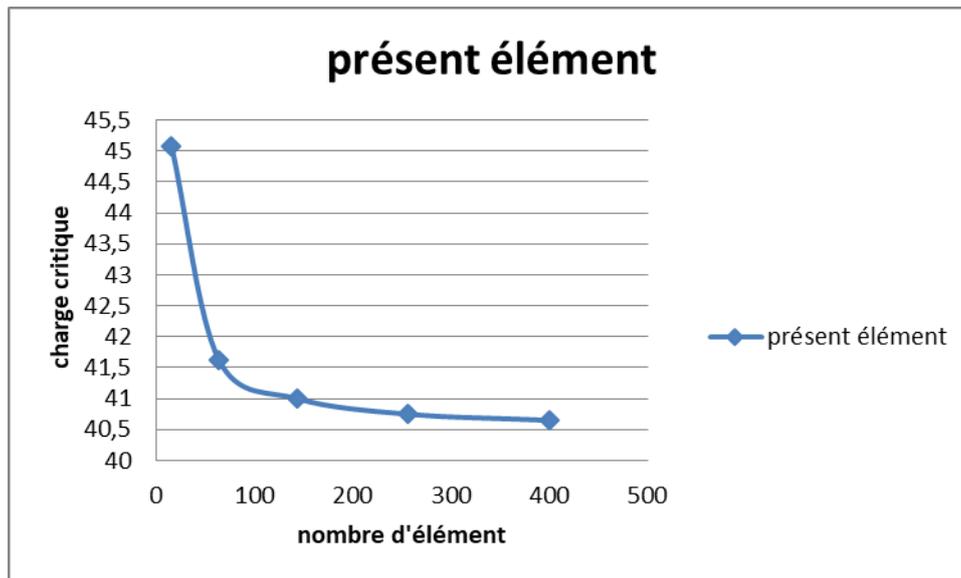
Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

$$\frac{E_1}{E_2} = 40 \quad , \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 \quad , \quad G_{23} = 0.5E_2 \quad , \quad \nu_{12} = 0.25$$

**Tableau III.8** : Test de convergence de la charge de compression uniaxial suivant x encasté

$$(EEEE) \quad \overline{N}_{cr} = N_{cr} a^2 / E_2 h^3$$

Maillage	La charge critique $N_{cr}$	La charge critique $\overline{N}_{cr}$
présent élément 4*4	0.4508	45.08
présent élément 8*8	0.4163	41.63
présent élément 12*12	0.41	41.00
présent élément 16*16	0.4075	40.75
présent élément 20*20	0.4065	40.65

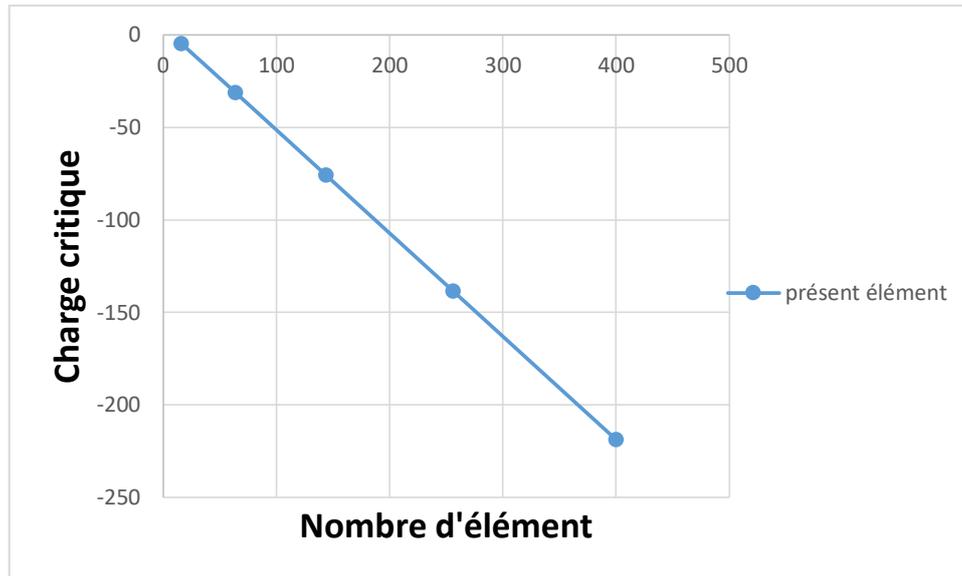


**Figure III -11 : Variation de la charge critique uniaxial suivant x en fonction du nombre des éléments cas d'une stratifié orthotrope encastéré**

- Dans cet exemple on présente l'effet de la charge de traction sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées. On considère une plaque carrée de 4 couche, le rapport d'épaisseur ( $a/h= 10$ )

**Tableau III.9 : Test de convergence de la charge de traction uniaxial suivant x simplement appuyée :**

Maillage Référence	$N_{cr}$ (traction)
<b>présent élément 4*4</b>	<b>-4.7094</b>
<b>présent élément 8*8</b>	<b>-31.3003</b>
<b>présent élément 12*12</b>	<b>-75.95</b>
<b>présent élément 16*16</b>	<b>-138.425</b>
<b>présent élément 20*20</b>	<b>-218.7029</b>



**Figure III -12 : Test de convergence de la charge de traction uniaxial suivant x simplement appuyée**

### III.6) Conclusion :

Dans ce chapitre, on a étudié la validation de l'élément rectangulaire à quatre nœuds, chaque nœud à cinq degré de liberté, pour analyser le comportement dynamique des plaques isotropes et stratifiées, sur la vibration libre et le flambement.

Les résultats obtenus seront comparé avec les résultats des solutions analytiques, et d'autre modèle d'élément finis disponible dans la littérature.

On a présenté notre travaille sous forme des tableaux et des courbes, et on remarque que notre élément est convergé vers les solutions analytiques et d'autre modèle d'élément finis.

## Chapitre IV : Etude paramétrique

### IV -1) Introduction :

Après avoir validé l'élément et d'être assuré de son bon fonctionnement, nous allons passer à une étude paramétrique pour voir l'influence de différents paramètres et la charge membranaire sur la vibration des plaques composites stratifiées, qui consiste à varier différents paramètres et d'interpréter les variations des résultats obtenus. Cette manipulation a pour but de savoir et déterminer l'effet de chaque paramètre sur le comportement dynamique des plaques stratifiées. Les paramètres considérés sont :

- Le rapport de l'anisotropie.
- Le nombre des couches.
- L'orientation des fibres.
- Les conditions aux limites
- Le rapport d'épaisseur ( $a/h$ )

Le maillage adopté pour cette étude est (16×16).

### IV -2) Effet de la charge critique sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée simplement appuyée :

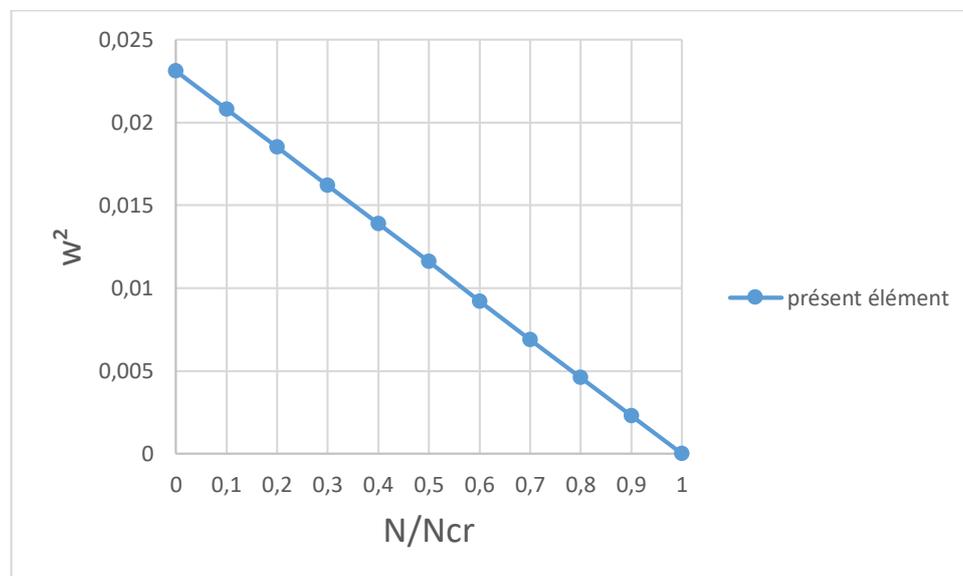
**IV -2-1)** Dans cet exemple, on présente l'effet de la charge critique de compression sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées. On considère une plaque carrée de 4 couche [0, 90, 90, 0] avec les rapports d'épaisseur ( $a/h= 10$ ).

Les caractéristiques mécaniques sont :

$$\frac{E_1}{E_2} = 40 \quad , \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 \quad , \quad G_{23} = 0.5E_2 \quad , \quad \nu_{12} = 0.25$$

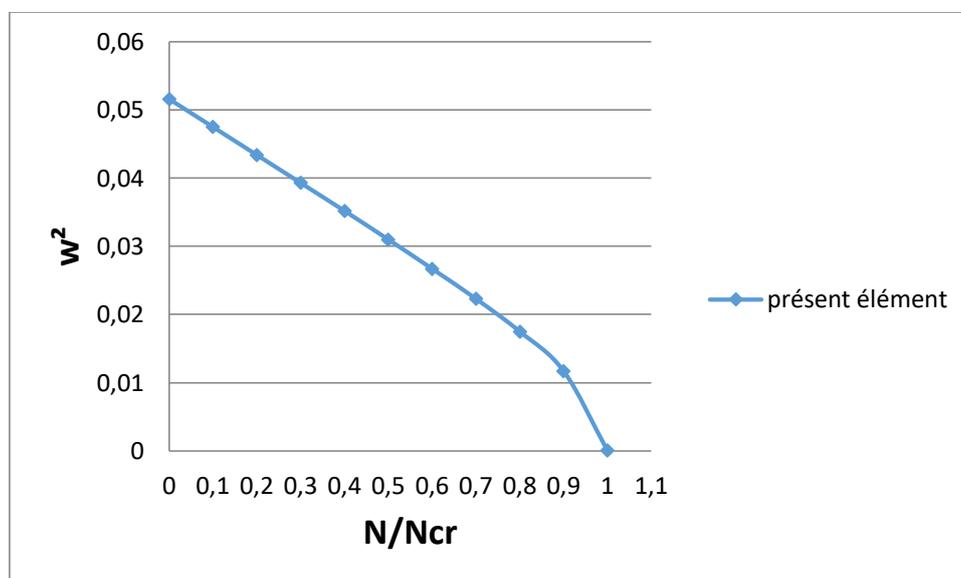
**Tableau IV.1** : Effet de la charge critique sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée simplement appuyée

$\frac{N}{N_{cr}}$	$\omega^2$
	compression
0	0.0231
0.1	0.0208
0.2	0.0185
0.3	0.0162
0.4	0.0139
0.5	0.0116
0.6	0.0092
0.7	0.0069
0.8	0.0046
0.9	0.0023
1	0.0000

**Figure (IV-1)** : Effet de la charge critique de compression sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée simplement appuyée

**Tableau IV.2 :** Effet de la charge critique sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée encastré :

$\frac{N}{N_{cr}}$	$\omega^2$
	compression
0	0.0516
0.1	0.0475
0.2	0.0434
0.3	0.0393
0.4	0.0352
0.5	0.0310
0.6	0.0267
0.7	0.0223
0.8	0.0175
0.9	0.0117
1	0.0002042



**Figure (IV-2) :** Effet de la charge critique de compression sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée encastré

#### Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le tableau IV.1 et figure IV.1 et le tableau IV.2 la figure IV.2 on remarque que :

- Pour une plaque simplement appuyée et encastré, le carré de la fréquence propre de vibration diminue avec l'augmentation de la charge et s'annulent lorsqu'elle atteint la charge critique.

- La variation entre le rapport ( $N/N_{cr}$ ) et la fréquence fondamentale pour une plaque simplement appuyée est linéaire, par contre une plaque encastree est linéaire par morceau.

**IV -2-2)** Dans cet exemple on présente l'effet de la charge critique de traction sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées. On considère une plaque carrée de 4 couche avec [0, 90, 90, 0] les rapports d'épaisseur ( $a/h= 10$ ), on adopte un maillage (16\*16)

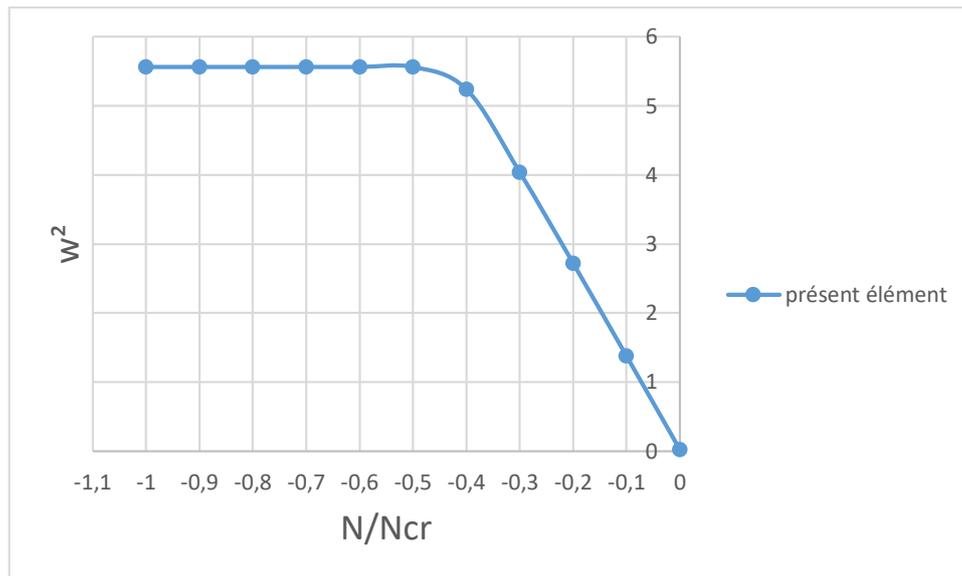
$$N_{cr} = -138.425$$

Les caractéristiques mécaniques sont :

$$\frac{E_1}{E_2} = 40 \quad , \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 \quad , \quad G_{23} = 0.5E_2 \quad , \quad \nu_{12} = 0.25$$

**Tableau IV.3 :** Effet de la charge critique de traction sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée simplement appuyée

$\frac{N}{N_{cr}}$	$\omega^2$
	Traction
0	0.0231
0.1	1.3775
0.2	2.7213
0.3	4.0374
0.4	5.2384
0.5	5.5594
0.6	5.5594
0.7	5.5594
0.8	5.5594
0.9	5.5594
1	5.5594



**Figure (IV-3) :** Effet de la charge critique de traction sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée simplement appuyée

#### Interprétation des résultats :

D'après le tableau **IV.3** et les figures (IV.3) on observe que :

- Pour  $(N/N_{cr})=0$ , Le carré de la fréquence fondamentale pour la charge de traction est la même pour la charge de compression.
- Le carré de la fréquence fondamentale augmente linéairement avec l'augmentation de la charge de traction jusqu'à une valeur égale à moitié de la valeur absolue de la charge critique ( $N/N_{cr}=0,5$ ) pour garder une valeur constante au-delà de ce rapport.

#### IV -3) Effet de rapport d'anisotropie sur la charge critique :

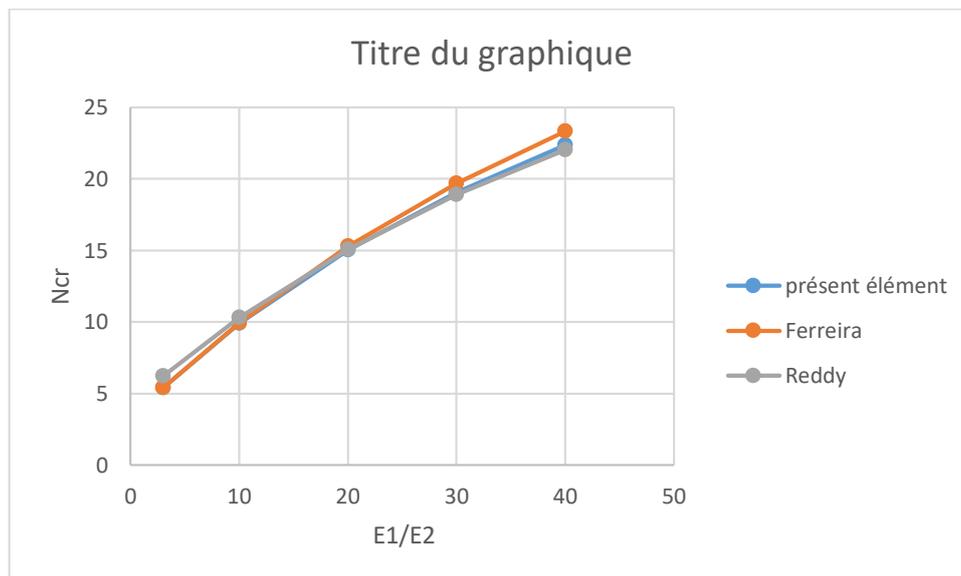
**IV -3-1)** On considère une plaque stratifiée carrée, simplement appuyée. Le nombre des couches est 3 couches avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 10$ . stratification  $[0, 90, 0]$ , on adopte un maillage  $(16*16)$ .

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

$$\frac{E_1}{E_2} = \text{variable} , \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.6 \quad , \quad \frac{G_{13}}{E_2} = 0.6 \quad , \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.5 \quad , \quad \nu_{12} = 0.25$$

Tableau IV-4 : L'effet de rapport d'anisotropie  $E_1/E_2$  sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifié simplement appuyé  $\overline{N}_{cr} = N_{cr} a^2 / E_2 h^3$  :

	$E_1 / E_2$				
	3	10	20	30	40
Elément	5.41	9.9	15.02	19.06	22.35
<b>Ferreira</b>	5.3933	9.9406	15.298	19.674	23.34
<b>Reddy</b>	6.212	10.312	15.07	18.888	22.0338



**Figure ( IV-4) : l'effet de rapport d'anisotropie  $E_1/E_2$  sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifié simplement appuyé**

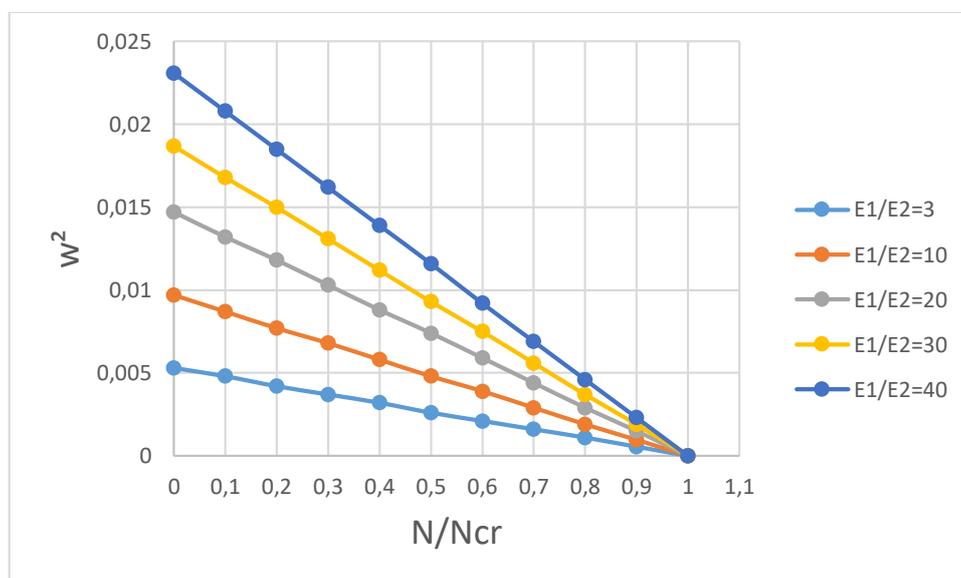
#### Interprétation :

La figure (IV-4) représente l'effet de rapport d'anisotropie  $E_1/E_2$  sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifié simplement appuyé. La comparaison des résultats a été faite avec Ferreira & Reddy.

Les résultats montrent que les valeurs obtenues sont très proche avec résultat de Ferreira and Reddy.

**Tableau IV-5: L'effet de rapport d'anisotropie E1/E2 sur la fréquence propre pour une plaque stratifié simplement appuyé :**

$\frac{N}{N_{cr}}$	$\omega^2$				
	$E_1 / E_2 = 3$	$E_1 / E_2 = 10$	$E_1 / E_2 = 20$	$E_1 / E_2 = 30$	$E_1 / E_2 = 40$
0	0.0053	0.0097	0.0147	0.0187	0.0231
0.1	0.0048	0.0087	0.0132	0.0168	0.0208
0.2	0.0042	0.0077	0.0118	0.0150	0.0185
0.3	0.0037	0.0068	0.0103	0.0131	0.0162
0.4	0.0032	0.0058	0.0088	0.0112	0.0139
0.5	0.0026	0.0048	0.0074	0.0093	0.0116
0.6	0.0021	0.0039	0.0059	0.0075	0.0092
0.7	0.0016	0.0029	0.0044	0.0056	0.0069
0.8	0.0011	0.0019	0.0029	0.0037	0.0046
0.9	$5.27 \cdot 10^{-4}$	$9.64 \cdot 10^{-4}$	0.0015	0.0019	0.0023
1	0.0000	0.0000	$2.5135 \cdot 10^{-6}$	$2.957 \cdot 10^{-6}$	0.0000



**Figure (IV-5) : L'effet de rapport d'anisotropie E1/E2 sur la fréquence propre d'une plaque stratifiée simplement appuyée**

**IV-3-2)** On considère une plaque stratifiée carrée, encadré. Le nombre des couches est 3 couches avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 10$ . stratification  $[0, 90, 0]$ , on adopte un maillage  $(16 \cdot 16)$ .

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

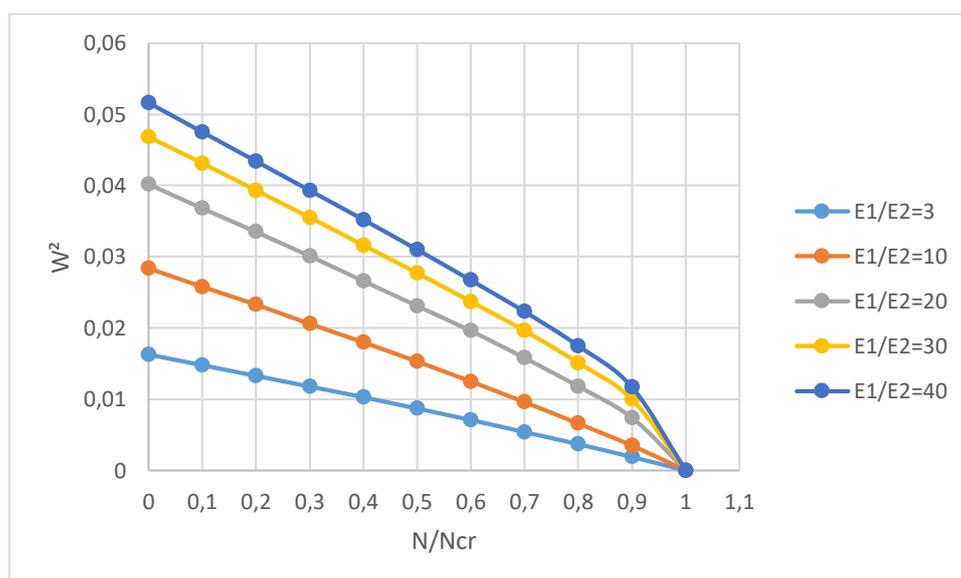
$$\frac{E_1}{E_2} = \text{variable}, \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.6, \quad \frac{G_{13}}{E_2} = 0.6, \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.5, \quad \nu_{12} = 0.25$$

**Tableau IV-6 : L'effet de rapport d'anisotropie E1/E2 sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifié encastéré :  $\overline{N}_{cr} = N_{cr} a^2 / E_2 h^3$  :**

	$E_1 / E_2$				
	3	10	20	30	40
Elément	13.32	24.40	32.73	37.42	40.35

**Tableau IV-7 : L'effet de rapport d'anisotropie E1/E2 sur la fréquence propre pour une plaque stratifié encastéré :**

$\frac{N}{N_{cr}}$	$\omega^2$				
	$E_1 / E_2 = 3$	$E_1 / E_2 = 10$	$E_1 / E_2 = 20$	$E_1 / E_2 = 30$	$E_1 / E_2 = 40$
0	0.0163	0.0284	0.0402	0.0468	0.0516
0.1	0.0148	0.0258	0.0368	0.0431	0.0475
0.2	0.0133	0.0233	0.0335	0.0393	0.0434
0.3	0.0118	0.0206	0.0301	0.0355	0.0393
0.4	0.0103	0.0180	0.0266	0.0316	0.0352
0.5	0.0087	0.0153	0.0231	0.0277	0.0310
0.6	0.0071	0.0125	0.0196	0.0237	0.0267
0.7	0.0054	0.0096	0.0158	0.0196	0.0223
0.8	0.0037	0.0066	0.0118	0.0151	0.0175
0.9	0.0019	0.0035	0.0074	0.010	0.0117
1	$3.2165 \cdot 10^{-6}$	$2.7401 \cdot 10^{-6}$	0.00	0.00	0.00002042



**Figure (IV-6): L'effet de rapport d'anisotropie E1/E2 sur la fréquence propre d'une plaque encastéré**

**Interprétation des résultats :**

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV-5) et (tableau IV-7) la (figure IV-5) et (figure IV-6) on remarque que :

- Le carré de la fréquence propre de vibration diminue avec l'augmentation de la charge et s'annule lorsqu'elle atteint la charge critique ( $N=N_{cr}$ ).
- La variation de rapport d'anisotropie  $E_1/E_2$  sur Le carré de fréquence propre pour une plaque simplement appuyée varie linéairement.
- Le carré de la fréquence propre de vibration augmente avec augmentation de rapport d'anisotropie quel que soit les conditions aux limites (SSSS, EEEE).

**IV-4) Effet du nombre des couches :**

Nous allons présenter l'effet du nombre des couches et la charge critique de compression sur la fréquence des plaques stratifiées carrée (SSSS, EEEE) (0/90/.../90/0) avec un rapport d'épaisseur  $a/h=10$ .

Les caractéristiques mécaniques d'un pli sont :

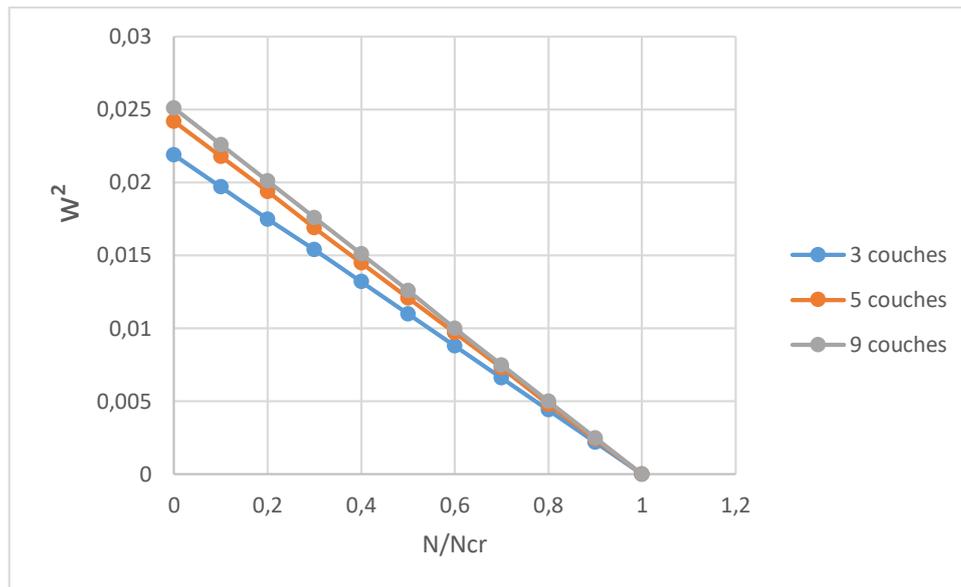
$$\frac{E_1}{E_2} = 40 \quad , \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 \quad , \quad G_{23} = 0.5E_2 \quad , \quad \nu_{12} = 0.25 \quad ,$$

la charge critique pour 5 couches :  $N_{cr} = 0.2465$  , la charge critique pour 9 couches :  $N_{cr} = 0.2555$

**IV-4-1) pour une plaque stratifiée simplement appuyée (SSSS) :**

**Tableau IV-8:** l'effet du nombre des couches sur la fréquence des plaques stratifiées simplement appuyées

$\frac{N}{N_{cr}}$	Nombre des couches		
	3	5	9
0	0.0219	0.0242	0.0251
0.1	0.0197	0.0218	0.0226
0.2	0.0175	0.0194	0.0201
0.3	0.0154	0.0169	0.0176
0.4	0.0132	0.0145	0.0151
0.5	0.0110	0.0121	0.0126
0.6	0.0088	0.0097	0.01
0.7	0.0066	0.0073	0.0075
0.8	0.0044	0.0048	0.005
0.9	0.0022	0.0024	0.0025
1	$2.6002 \cdot 10^{-6}$	$3.6282 \cdot 10^{-6}$	0



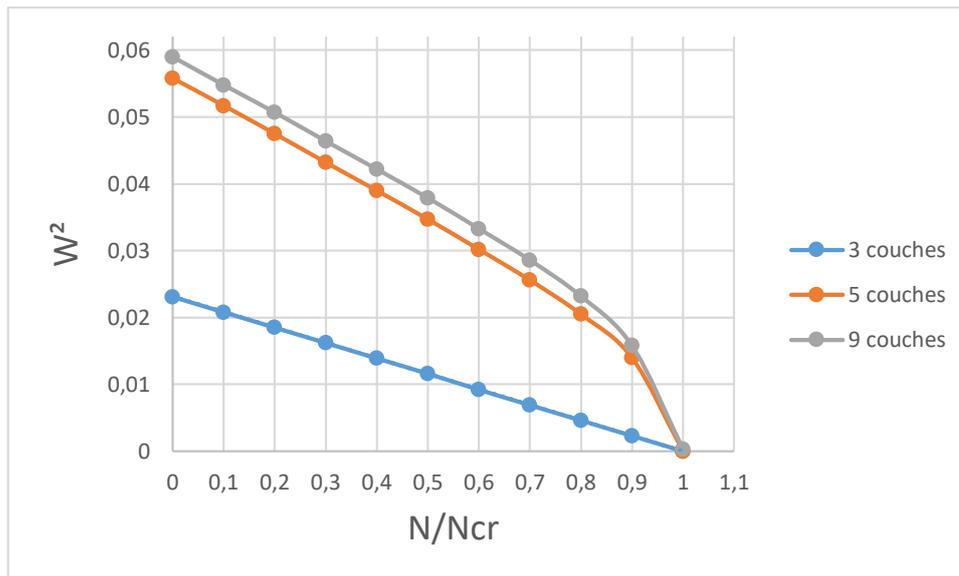
**Figure (IV-7) : L'effet de nombre des couches sur la fréquence propre des plaques stratifiées simplement appuyées**

**IV-4-2) pour une plaque stratifiée encasté (EEEE) :**

la charge critique pour 5 couches :  $N_{cr} = 0.4161$  , la charge critique pour 9 couches :  $N_{cr} = 0.4112$

**Tableau IV-9:** l'effet du nombre des couches sur la fréquence des plaques stratifiées encasté :

$\frac{N}{N_{cr}}$	Nombre des couches		
	3	5	9
0	0.0231	0.0558	0.0590
0.1	0.0208	0.0517	0.0548
0.2	0.0185	0.0475	0.0507
0.3	0.0162	0.0432	0.0464
0.4	0.0139	0.0390	0.0422
0.5	0.0116	0.0347	0.0379
0.6	0.0092	0.0302	0.0333
0.7	0.0069	0.0256	0.0286
0.8	0.0046	0.0205	0.0232
0.9	0.0023	0.0140	0.0158
1	0.0000	$2.22 \cdot 10^{-5}$	$-3.3437 \cdot 10^{-4}$



**Figure (IV-8): L'effet de nombre des couches sur la fréquence propre des plaques encastrée**

#### Interprétation des résultats :

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV-8) et (tableau IV-9) la (figure IV-7) et (figure IV-8) on remarque que :

- Le carré de fréquence propre augmente avec l'augmentation de nombre des couches quel que soit les conditions aux limites (SSSS, EEEE) jusqu'au nombre des couches égale 5 et 9. Le carré de fréquence propre inchangé après ce nombre.
- le carré de la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de la charge et que lorsque la charge atteint sa valeur critique ( $N/N_{cr} = 1$ ), les fréquences propres s'annulent.
- La variation de nombre des couches sur la fréquence propre varié linéairement pour une plaque stratifiée simplement appuyées,
- Pour une plaque encastrée, dont le nombre de couches égale à 3, le carré de fréquences propre varie linéairement.
- L'allure des courbes à 5 couches et à 9 couches est la même.

#### IV-5) Effet de l'orientation des fibres sur la fréquence fondamentale :

Dans cette section, on va étudier l'effet de l'orientation des fibres sur la variation des valeurs de fréquences naturelles pour différents conditions aux limites (SSSS, EEEE), Pour se faire on considère une plaque stratifiée  $(\theta, -\theta, -\theta, \theta)$ , carrée de 4 couches de rapport d'épaisseur  $a/h = 10$ . La valeur de  $\theta$  varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$

Les caractéristiques mécaniques d'un pli sont :

$$\frac{E_1}{E_2} = 40 \quad , \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 \quad , \quad G_{23} = 0.5E_2 \quad , \quad \nu_{12} = 0.25$$

**Tableau IV-10 : L'effet de l'orientation des fibres sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifiée(SSSS)**

	$\theta$					
	0	15	30	45	60	90
$N_{cr}$	0.2221	0.2416	0.2863	0.2801	0.2018	0.0940

**Tableau IV-11 : Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres pour une plaque stratifiée(SSSS)**

$\frac{N}{N_{cr}}$	l'orientation des fibres $\theta$					
	0	15	30	45	60	90
0	0.0218	0.0241	0.0291	0.0315	0.0291	0.0218
0.1	0.0196	0.0217	0.0262	0.0287	0.0271	0.0208
0.2	0.0174	0.0193	0.0234	0.0259	0.0251	0.0199
0.3	0.0152	0.0169	0.0205	0.0231	0.0230	0.019
0.4	0.0131	0.0145	0.0176	0.0202	0.0210	0.0181
0.5	0.0109	0.0121	0.0147	0.0174	0.0189	0.0172
0.6	0.0087	0.0097	0.0118	0.0145	0.0169	0.0146
0.7	0.0065	0.0073	0.0089	0.0116	0.0148	0.0109
0.8	0.0043	0.0049	0.0060	0.0087	0.0126	0.0073
0.9	0.0022	0.0024	0.0030	0.0057	0.0081	0.0036
1	0	$4.3387 \cdot 10^{-6}$	0	0	$4.0648 \cdot 10^{-6}$	0

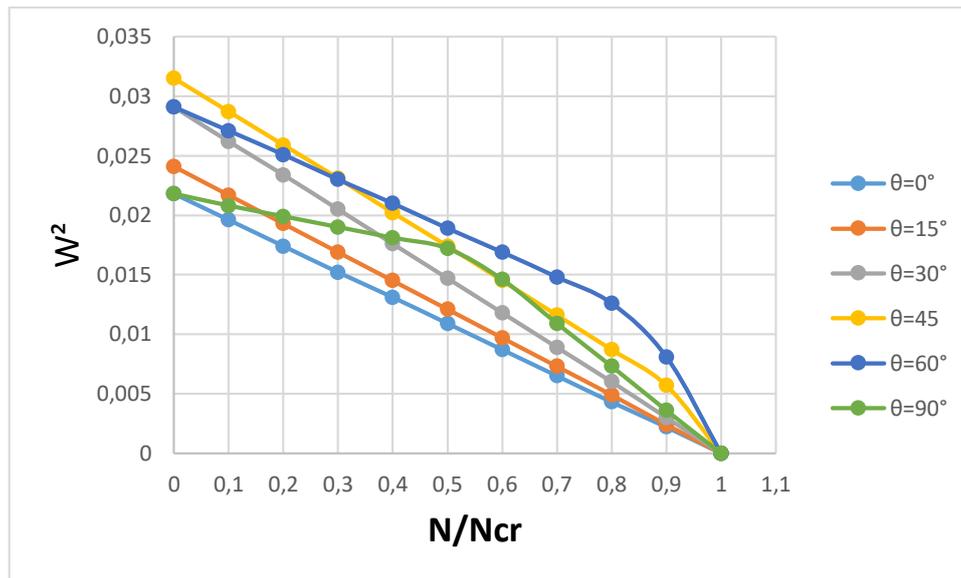


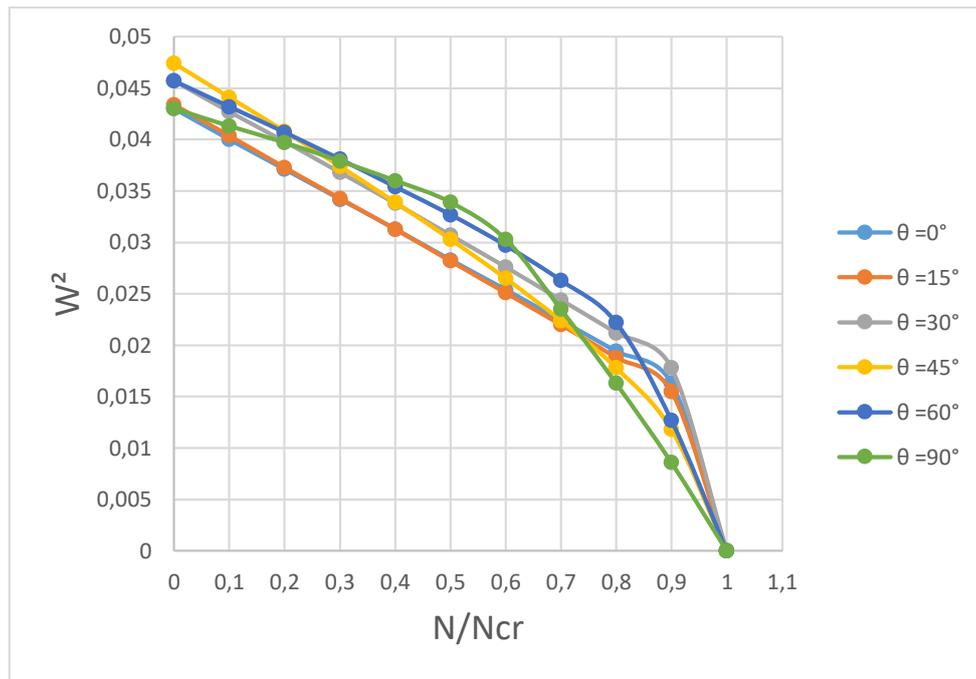
Figure (IV-9) : Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres pour une plaque stratifiée(SSSS).

Tableau IV-12 : L'effet de l'orientation des fibres sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifiée(EEEE) :

	$\theta$					
	0	15	30	45	60	90
$N_{cr}$	0.2929	0.2973	0.2873	0.3139	0.2244	0.1361

Tableau IV-13: Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres pour une plaque stratifiée(EEEE) :

$\frac{N}{N_{cr}}$	l'orientation des fibres $\theta$					
	0	15	30	45	60	90
0	0.0430	0.0434	0.0457	0.0474	0.0457	0.0430
0.1	0.0400	0.0404	0.0427	0.0441	0.0432	0.0413
0.2	0.0371	0.0373	0.0398	0.0408	0.0407	0.0397
0.3	0.0342	0.0343	0.0368	0.0374	0.0381	0.0379
0.4	0.0313	0.0313	0.0338	0.0339	0.0354	0.0360
0.5	0.0283	0.0282	0.0307	0.0303	0.0327	0.0339
0.6	0.0254	0.0251	0.0276	0.0265	0.0297	0.0303
0.7	0.0224	0.0220	0.0244	0.0224	0.0263	0.0235
0.8	0.0194	0.0188	0.0212	0.0178	0.0222	0.0163
0.9	0.0163	0.0155	0.0178	0.0118	0.0127	0.0086
1	0.00	0.0	0.0	$2.462 \cdot 10^{-5}$	0.000	$3.201 \cdot 10^{-5}$



**Figure (IV-10) : Variation la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres pour une plaque stratifiée(EEEE).**

#### **Interprétation des résultats :**

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV-11) et (tableau IV-13) la (figure IV-8) et (figure IV-9) on remarque que :

- le carré de la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de la charge et que lorsque la charge atteint sa valeur critique ( $N/N_{cr}=1$ ), les fréquences propres s'annulent, dans les deux cas des conditions aux limites.
- L'allure des courbes de l'orientation ( $0^\circ$ ,  $15^\circ$  et  $30^\circ$ ) pour une plaque encastree est la même.
- Pour une plaque simplement appuyée les courbes de l'orientation ( $0^\circ$ ,  $15^\circ$  et  $30^\circ$ ) varient linéairement, par contre les courbes de l'orientation ( $45^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$ ) et celles de la plaque encastree présentent un point d'inflexion.

#### **IV-6) Effet de rapport d'épaisseur sur la fréquence fondamentale :**

Dans cette section, On va étudier l'effet de rapport d'épaisseur et la charge critique sur la variation des valeurs de fréquences naturelles pour différents cas d'appuis (**SSSS, EEEE**).

On considère une plaque stratifiée carrée à 4 couches (0/90/90/0).

Les caractéristiques de chaque couche sont :

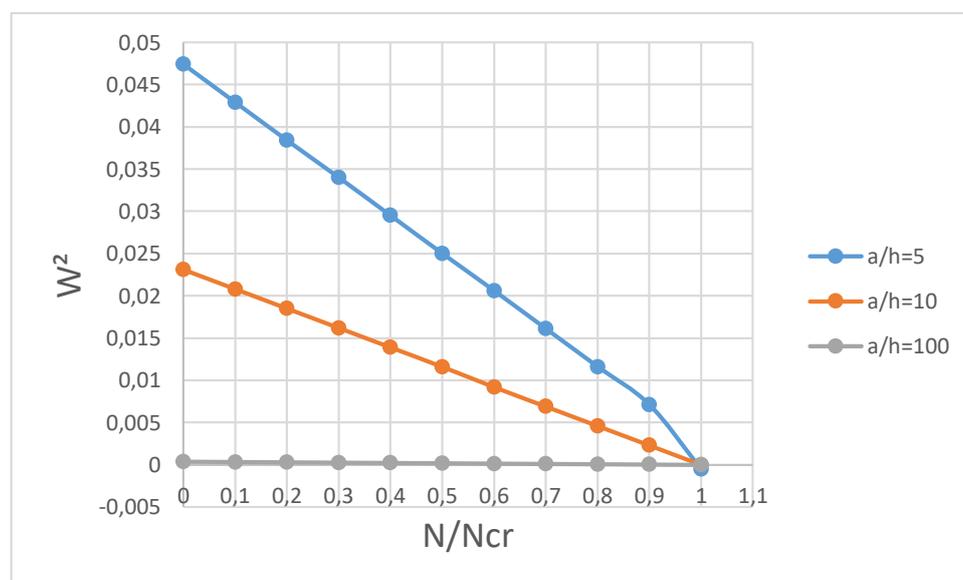
$$\frac{E_1}{E_2} = 40 \quad , \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 \quad , \quad G_{23} = 0.5E_2 \quad , \quad \nu_{12} = 0.25$$

**Tableau IV-14: L'effet de rapport d'épaisseur (a/h) sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifiée(SSSS)**

	a/h		
	5	10	100
$N_{cr}$	0.9195	0.2355	$3.6181 \cdot 10^{-4}$

**Tableau IV-15: Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) pour une plaque stratifiée(SSSS)**

$\frac{N}{N_{cr}}$	a/h		
	5	10	100
<b>0</b>	0.0474	0.0231	$3.5818 \cdot 10^{-4}$
<b>0.1</b>	0.0429	0.0208	$3.2337 \cdot 10^{-4}$
<b>0.2</b>	0.0384	0.0185	$2.8655 \cdot 10^{-4}$
<b>0.3</b>	0.0340	0.0162	$2.5073 \cdot 10^{-4}$
<b>0.4</b>	0.0295	0.0139	$2.1491 \cdot 10^{-4}$
<b>0.5</b>	0.0250	0.0116	$1.7909 \cdot 10^{-4}$
<b>0.6</b>	0.0206	0.0092	$1.4328 \cdot 10^{-4}$
<b>0.7</b>	0.0161	0.0069	$1.0746 \cdot 10^{-4}$
<b>0.8</b>	0.0116	0.0046	$7.1639 \cdot 10^{-5}$
<b>0.9</b>	0.0071	0.0023	$3.5821 \cdot 10^{-5}$
<b>1</b>	$5.414 \cdot 10^{-4}$	$8.1613 \cdot 10^{-7}$	$2.2988 \cdot 10^{-9}$



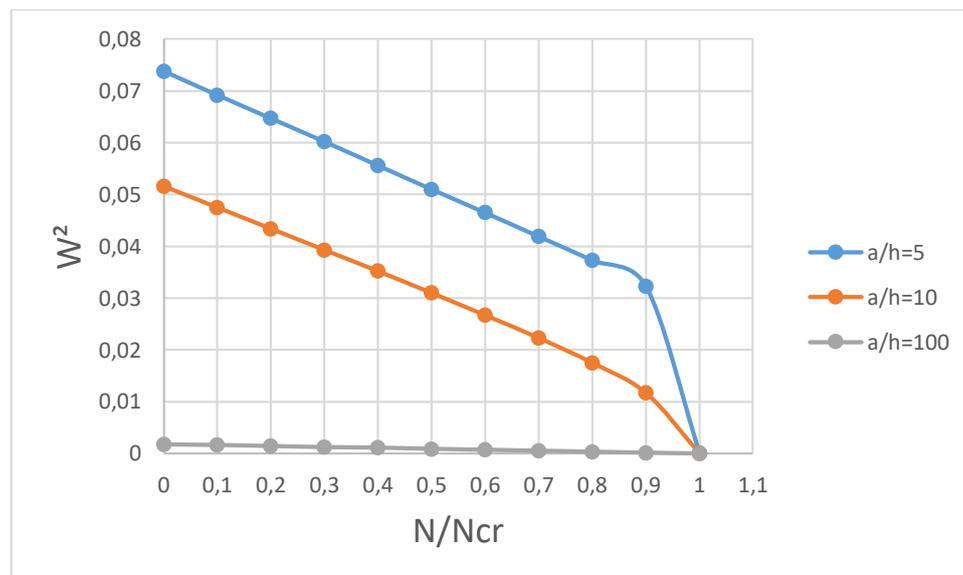
**Figure (IV-11) : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) pour une plaque stratifiée(SSSS)**

**Tableau IV-16: L'effet de rapport d'épaisseur (a/h) sur la charge critique uniaxial pour une plaque stratifiée(EEEE) :**

	a/h		
	5	10	100
$N_{cr}$	0.9195	0.4075	0.0014

**Tableau IV-17: Variation la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) pour une plaque stratifiée(EEEE) :**

$\frac{N}{N_{cr}}$	a/h		
	5	10	100
0	0.0738	0.0516	0.0017
0.1	0.0692	0.0475	0.0016
0.2	0.0647	0.0434	0.0014
0.3	0.0602	0.0393	0.0012
0.4	0.0556	0.0352	0.0011
0.5	0.0510	0.0310	$8.7526 \cdot 10^{-4}$
0.6	0.0465	0.0267	$6.977 \cdot 10^{-4}$
0.7	0.0419	0.0223	$5.1835 \cdot 10^{-4}$
0.8	0.0373	0.0175	$3.3705 \cdot 10^{-4}$
0.9	0.0323	0.0117	$1.5359 \cdot 10^{-4}$
1	$1.5374 \cdot 10^{-4}$	0.00002042	0.00

**Figure (IV-12) : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) pour une plaque stratifiée(EEEE)****Interprétation des résultats :**

D'après les résultats présentés dans le (tableau IV-15) et (tableau IV-17) la (figure IV-11) et (figure IV-12) on remarque que :

- Le carré de fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport  $a/h$  dans les deux cas des conditions aux limites
- La variation de le carré de la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de la charge et que lorsque la charge atteint sa valeur critique ( $N/N_{cr}=1$ ), les fréquences propres s'annulent.
- Pour le rapport d'épaisseur  $(a/h) = 100$  Le carré de fréquence naturelles presque égale 0.

**Conclusion :**

Dans ce chapitre, une étude paramétrique a été faite sur l'effet des efforts membranaires sur la vibration des plaques stratifiées composites. L'étude qui consiste à varier différent paramètres pour voir l'influence de celle-ci.

Dans tous les paramètres, on remarque que la variation de le carré de fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de la charge lorsqu'elle atteint sa valeur critique ( $N/N_{cr}=1$ ), les fréquences propres s'annulent.

Le carré de la fréquence propre varie presque linéairement quel que soit les paramètres et les conditions aux limites.

# Conclusion générale

Dans ce travail une analyse numérique a été présentée afin de déterminer les fréquences propres des plaques stratifiées en matériaux composites soumises à un chargement mécanique.

L'analyse vibratoire des plaques stratifiées en matériaux composites a été étudiée sous l'effet d'un chargement membranaire, en utilisant un élément fini basé sur la théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT) qui est l'extension de la théorie de Reissner-Mindlin. Cette théorie tient en compte de l'effet de cisaillement transverse.

Cette étude concerne la validation de l'élément rectangulaire à quatre nœuds, chaque nœud à cinq degré de liberté, pour analyser le comportement dynamique des plaques isotropes et stratifiées sur la vibration libre et le flambement. Les résultats obtenus seront comparés avec les résultats des solutions analytiques et d'autre modèle d'élément fini disponible dans la littérature. Cette étude a permis de montrer la rapidité de convergence et la stabilité de l'élément utilisé.

Une étude paramétrique a été considérée sur le comportement des efforts membranaires sur la vibration des plaques stratifiées composites, l'étude qui consiste à varier différents paramètres comme le rapport d'anisotropie, l'orientation des fibres, le nombre de couches et les conditions aux limites etc..., pour voir l'influence de celle-ci.

Les résultats ont montré que l'effet de la charge critique sur les fréquences fondamentales dans certaines conditions d'appuis change la valeur de fréquence fondamentale des plaques dans tous les paramètres étudiés.

À partir de cette analyse des remarques sont obtenus :

- Quel que soit le paramètre étudié, les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la charge et s'annulent lorsqu'elle atteint la charge critique.
- Le carré de la fréquence propre varie presque linéairement quel que soit les paramètres et les conditions aux limites.
- Le carré de la fréquence fondamentale augmente linéairement avec l'augmentation de la charge de traction jusqu'à une valeur égale à la moitié de la valeur absolue de la charge critique ( $N/N_{cr}=0,5$ ) pour garder une valeur constante au-delà de ce rapport.

- Le carré de fréquence naturelles augmente avec l'augmentation du nombre des couches quel que soit les conditions aux limites (SSSS, EEEE) jusqu'au nombre des couches égale à 5 et 9, le carré de la fréquence naturelle presque inchangeable après ce nombre.
- Le carré de fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de rapport  $a/h$  dans les deux cas des conditions aux limites.
- Le carré de la fréquence propre de vibration augmente avec augmentation de rapport d'anisotropie.

# Références Bibliographiques

- [1] Berthelot, J. M. (1999). Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures. &, 245, 172.
- [2] Bounadja, A. (2006). Etude expérimentale du comportement mécaniques des stratifiés à renfort métallique sollicités en flexion 3 points (Doctoral dissertation, Université de Boumerdès-M'hamed Bougara).
- [3] Mebarki, A. E. (2009). Analyse dynamique libre des plaques composites multicouches. Mémoire de magistère, Université de Constantine, 2009.
- [4] Laurent Gornet. Generalites sur les materiaux composites. Engineering school. 2008.
- [5] Aguib, S., vibrations des plaques stratifiées, influence de la cinématique, Mémoire de magistère, université de Boumerdes.
- [6] Wu CI, Vinson JR. Nonlinear oscillations of laminated specially orthotropic plates with clamped and simply supported edges. Journal of Acoustical Society of America 1971; 49(5):1561–8.
- [7] Noor AK, Free vibrations of multilayered composite plates, AIAA J 1973;11(7):1038-9
- [8] Bert CW, Chen TC. Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plate. Institute Journal of Solid Structures 1977; 14:265–473
- [9] Whitney JM. Structural analysis of laminated anisotropic plates, 1st ed. Western Hemisphere. Technical Publishing Company; 1987, p. 263–95.
- [10] Gerard G., Becker H., 1957, Handbook of structural stability part III: buckling of curved plates and shells, New York University
- [11] Reddy J., Phan N., 1985, Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory, Journal of Sound and Vibration, **98**, 2, 157-170
- [12] DHANARAJ, R., et al. Free vibration of initially stressed composite laminates. Journal of sound and vibration, 1990, vol. 142, no 3, p. 365-378.

- [13] Chakrabarti A., Sheikh A.H., 2003, Buckling of laminated composite plates by a new element based on higher order shear deformation theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **10**, 4, 303-317
- [14] Singh S.K., Chakrabarti A., 2012, Buckling analysis of laminated composite plates using an efficient C0 FE model, *Latin American Journal of Solids and Structures*, **9**, 1-13
- [15] Lakhdar SEDIRA .Contribution à la Modélisation de Composites 2D/3D à l'Aide d'Éléments Finis Spéciaux. THÈSE EN CO-TUTELLE, université de Biskra ,2013
- [16] L. BOUYAYA, **Etude théorique et numérique du comportement dynamique D'un stratifié composite unidirectionnel**, 21ème Congrès Français de Mécanique. Bordeaux, 26 au 30 août 2013.
- [17] TATI, A., & HESSINI, M. (2014).Analyse du comportement de flambage des Plaques minces stratifiées en matériaux composites par la méthode des éléments finis. *Courrier du Savoir – N°09*, Mars 2009, pp.09-15, 9.Revues.univ-biskra.dz
- [18] BOUKHARI Ahmed. Application des théories à ordre élevé de déformation de cisaillement pour l'étude du comportement mécanique des plaques épaisses. THESE DE DOCTORAT EN 3ème cycle, UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES.2016
- [19] TATI, Abdelouahab, BOUADJADJA, Souhia, et BADA, Yassine. Free Vibration of Thermally Stressed Angle-Ply Laminated Composite Using First-Order Shear Deformation Theory Model with Assumed Natural Shear Strain. *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*, 2018, p. 1-11
- [20] Taylor & Francis Group, LLC , *Mechanics Composite Materials* seconde edition 2006
- [21] Mokhtari Salim. Instabilité par flambage élastique de plaques stratifiées munies d'une singularité géométrique.2007. Mémoire de Magister. Université 20 Aout - Skikda .
- [22] A. J. M. Ferreira ,*Matlab codes for Finite Element analysis*, Portugal: Springer, 2009
- [23] D. J. Dawe and O. L. Roufaeil. Rayleigh-ritz , vibration analysis of mindliplates, *Journal of Sound and Vibration*, 69(3):345–359, 1980
- [24] K. M. Liew, J. Wang, T. Y. Ng, and M. J. Tan. Free vibration and buckling analyses of shear-deformable plates based on Fsdtd meshfree method. *Journal of Sound and Vibration*, 276:997–1017, 2004.