جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم علوم المادة

مذكرة ماستر

علوم مادة

فيزياء

فيزياء المادة المكثفة

رقم: أدخل رقم تسلسل المذكرة

إعداد الطالب:

مهني رياض – عزي لحسن

يوم:25/09/2020

حل معادلة شرودنغر مع كمون كراتزر بالإضافة إلى ثنائي القطب في الفضاء المشوه (ديسيترو ديسيترالمضاد) ثنائي الأبعاد

لجنة المناقشة:

خايف حايف وناسة	أمحاضرب	بسكرة	رئيسا
هدارمبارك	أ مساعد أ	بسكرة	مقررا
بلعمري جمال	أمحاضر أ	بسكرة	ممتحنا

السنة الجامعية:2019/2020

إهداء

أحمد الله عز وجل على منه و عونه لإتمام هذا العمل.

إلى الذي وهبني كل ما يملك حتى أحقق له آماله، إلى من كان يدفعني قدما نحو الأمام لنيل المبتغى ، إلى مدرستي الأولى في الحياة ، إلى التي صبرت على كل شيء، التي رعتني حق الرعاية و كانت سندي في الشدائد، و كانت دعواها لي بالتوفيق، تتبعتني خطوة خطوة في عملي ، إلى من ارتحت كلما تذكرت ابتسامتها في وجهي نبع الحنان **أمي** أعز ملاك على القلب و العين جزاها الله خير الجزاء في الدارين؛**أبي** الغالي على قلبي أطال الله في عمره؛إليهما أهدي هذا العمل المتواضع أتمنى أن أُدخل على قلبهما شيئا من السعادة إلى **إخوتي و أخواتي** الذين تقاسموا معي عبء الحياة ؛

كما أهدي ثمرة جهدي لأستاذي الكريم الدكتور :**هدار مبارك** الذي كلما تظلمت الطريق أمامي لجأت إليه فأنارها لي و كلما دب اليأس في نفسي زرع فيا الأمل لأسير قدما و كلما سألت عن معرفة زودني بها و كلما طلبت كمية من وقته الثمين وفره لي بالرغم من مسؤولياته المتعددة؛ إلى كل أساتذة قسم **علوم المادة**

في تكون أن قبل أنفسنا في و ذواتنا في هي التغيير نجاح بذور بأن يؤمن من كل إلى و أشياء أخرى...

إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل

شكر و عرفان:

قال رسول الله صلى الله عليه و سلم:

"من لم يشكر الناس لم يشكر الله"

صدق رسول الله صلى الله عليه و سلم

الحمد لله على إحسانه و الشكر له على توفيقه و امتنانه و نشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له تعظيما لشأنه و نشهد أن سيدنا و نبينا محمد عبده و رسوله الداعي إلى رضوانه صلى الله عليه و على آله و أصحابه و أتباعه و سلم.

بعد شكر الله سبحانه و تعالى على توفيقه لنا لإتمام هذا البحث المتواضع أتقدم بجزيل الشكر إلى الوالدين العزيزين الذين أعانوني و شجعوني على الاستمرار في

مسيرة العلم و النجاح، و إكمال الدراسة الجامعية و البحث؛ كما أتوجه بالشكر الجزيل إلى من شرفني بإشرافه على مذكرة بحثي الأستاذ الدكتور " **هدار مبارك** " الذي لن تكفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه بصبره الكبير علي، ولتوجيهاته العلمية التي لا تقدر بثمن؛ و التي ساهمت بشكل كبير في إتمام و استكمال هذا العمل؛ إلى كل أساتذة علوم المادة كما أتوجه بخالص شكري و تقديري إلى كل من ساعدني من قريب أو من بعيد على إنجاز و إتمام هذا العمل.

"رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي و على والدي و أن أعمل صالحا ترضاه و أدخلني برحمتك في عبادك الصالحين"

الفهرس	الرقم
إهداء شكر وعرفان جدول المحتويات	
مقدمة عامة..	01
الفصل الأول : مفهوم فضاء دي سيتر وفضاء مضاد دي سيتر والكمونات غير المركزية	
1.1 مقدمة..	03
2.1الفضاء المشوه (de Sitter و anti de Sitter)	03
3.1 الكمونات غير المركزية........................	06
الفصل الثاني :الحل الدقيق لمعادلة شرود نجر مع كمون كراتزر بالإضافة إلى ثنائي القطب لديه بعدين اثنين في الفضاء العادي	
1-2 المقدمة...	10
2-2 كمونات كراتزر غير المركزية	11
3-2 الحل الدقيق لمعادلة شرود نجر مع كمون كراتزر بالإضافة إلى ثنائي القطب في الإحداثيات القطبية..	13
الفصل الثالث: الحل الدقيق لمعادلة شرودنغر مع كمون كراتزر بالإضافة إلى ثنائي القطب له بعدان في الفضاء المشوه	
1−3 المقدمة...	27
2−3 الحل الدقيق لمعادلة شرودنغر مع كمون كراتزر بالإضافة إلى ثنائي القطب في حالة نظام ثنائي الأبعاد في الفضاء المشوه..............	29
خاتمة عامة..	49
المراجع	

مقدمة عامة

مقدمة عامة

منذ طرح لفكرة ميكانيكا الكم من طرف بلانك في 14 ديسمبر 1900 ميكانيكا الكم تطور يوم بعد يوم مرورا بصرح أينشتاين للمفعول الكهرو ضوئي لاستعمال فكرة بلانك إلى موجة ديبروغلي وصولا إلى معادلة شرودنغر التي تصف سلوك جسم كمي وأعطت نتائج جيدة تشرح طيف الإصدار والامتصاص للهيدروجين.

وتطورت النظرية الكمية في اتجاهين في الاتجاه الرياضي وهو إيجاد طرق رياضية جديدة لحل معادلة شرودنغر وفي الاتجاه الفيزيائي في تفسير بعض الظواهر الفيزيائية والكيميائية

ونظرا لعدم تناظر الظواهر المدروسة كذرة الهيدروجين التي لها تناظر كروي كالجزيئات والانوية المشوهة و الذرات متعددة الالكترونات أدى بالفيزيائيين إلى طرح فكرة الكمونات غير المركزية التي ليس لها تناظر مركزي أي لا تتعلق فقط بنصف القطر إنما تتعلق بمعاملات أخرى كالزوايا .

من بين هذه الكمونات الكمون ثنائي القطب الكهربائي الذي له تطبيقات كثيرة في الكيمياء الجزيئية والبيولوجيا ومن جهة أخرى اهتم العلماء بتوسيع ميكانيكا الكم إلى الفضاء المنحني وتعتبر من أول المحاولات لدراسة الجاذبية الكمية وكان هذا عن طريق توسيع مبدأ الشك لهايزنبرغ وما شجع على ذلك أعمال أخرى كالنسبية الخاصة المزدوجة ونظرية الحبال ونظرية الهندسة اللاتبادلية. يأتي الاهتمام بالأنظمة ثنائية الأبعاد من الشعبية الكبيرة للجرافين وأيضاً من الإنجازات التجريبية في تحويل غازات الكم بأبعاد منخفضة[1] [2] .

للوصول إلى هدفنا في هدا العمل جاءت المطبوعة في الشكل متكونة من ثلاث محاور المحور الأول كرس لشرح الفضاء المشوه و الكمونات اللامركزية في الفصل الثاني قمنا بإجراء دراسة غير نسبية لكمون كراتزر مع كمون ثنائي القطب وهذا بحل معادلة شرودنغر حيث استخرجنا طيف الطاقة ودالة الموجة .

في الفصل الثالث والأخير قمنا بنفس الدراسة في الفصل الثاني لكن في الفضاء المشوه حيث استخرجنا عبارة الطاقة المشوهة وداله الحالة المشوهة.

الفصل الأول:

مفهوم فضاء دي سيتر(deSitter)وفضاء دي سيترالمضاد(Anti deSitter)والكمونات غير المركزية

الفصل الأول: مفهوم فضاء دي سيتر(deSitter)وفضاء دي سيتر المضاد(Anti deSitter)والكمونات غير المركزية

1.1 مقدمة:

في ميكانيكا الكم ، معادلة شرودنجر هي عبارة معادلة تفاضلية جزئية تصف كيف تتغير الحالة الكمية للنظام الفيزيائي عبر الزمن ،في عام 1925 قام اروين شرودنجر بتطوير المعادلة التي تصف سلوك الموجة الميكانيكية بناءا على فرضية دي برولي ونشرها عام 1926بعد فترة وجيزة من اختراع هايزنبرغ لميكانيكا المصفوفة[3]. يطلق عليها معادلة شرودنجر نسبة إلى للعالم الذي اكتشفها ولها أهمية كبيرة خاصة في ميكانيكا الكم،

تم تخصيص قدر كبير من الجهد لتوسيع دراسة ميكانيكا الكم في نموذج سنايدر للفضاء المسطح إلى الجبر المعمم في الزمان والمكان. الفكرة وراء هذا الامتداد هي مراعاة تعديل معيار الجبر هايزنبرغ عن طريق إضافة تصحيحات صغيرة إلى علاقات التبديل الأساسية مثل تعميم علاقات مبدأ الشكGUR [4] ومبدأ عدم اليقين المعدل EUP [5] .في هذا الفصل نقوم بدراسة مفاهيم الفضاء المشوه سيتر ومضاد سيتر بعد ذلك نقوم بشرح موجز للكمونات غير المركزية لتسهيل العمل في الفصول الأخرى .

2.1الفضاء المشوه (de Sitter وanti de Sitter) :

من أجل دمج الهندسة غير التبادلية وتأثير الجاذبية ،على التوالي في ميكانيكا الكم.في الآونة الأخيرة ، على مستوى ميكانيكا الكم النسبية وغير النسبية ، تم حل بعض المشاكل في هذا الإطار ؛على سبيل المثال ، تم حل معادلة شرودنغر تمامًا باستخدام الجسيم الحر والمذبذب التوافقي ومذبذب ديراك في نموذج سنا يدر المنحني[6] [7].

في الفضاء ثلاثي الأبعاد ، يتم تحديد مبدأ هايزنبرغ المشوه الذي يؤدي إلى مبدأ الشك المعدل EUP بعلاقات التبديل التالية [8] [9] :

$$[X_i, X_j] = 0 \quad , \quad [P_i, P_j] = i\hbar\tau\lambda\epsilon_{ijk}L_k \; , \; [X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} - \tau\lambda X_i X_j) \qquad (1.2.1)$$

بحيث : $\tau = -1, +1$

حيث λ هو معامل التشوه ويكون صغير جدا لأنه في حالة الجاذبية الكمية ، يتم تحديد معامل EUP باعتباره ثابتًا أساسيًا مرتبطًا بعامل المقياس للكون الممتد ويتناسب مع الثابت الكوني $\Gamma = 3\tau\lambda = \frac{3\tau}{a^2}$.

حيث: a هو نصف قطر Sitter [10] ،وL_k هو العزم الزاوي ونعبر عنه كالتالي :

$$L_k = \epsilon_{ijk} X_i P_j \qquad (2.2.1)$$

وإشباع الجبر المعتاد:

$$[L_i, P_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}P_k \quad , \quad [L_i, X_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}X_k \; , \; [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \qquad (3.2.1)$$

كما هو الحال في ميكانيكا الكم العادية ،علاقة التبديل تؤدي إلى علاقة مبدأ الشك لهايزنبرغ [2]:

$$\Delta X_i \Delta P_i \geq \frac{\hbar}{2}(1 - \tau\lambda(\Delta X_i)^2) \qquad (4.2.1)$$

حيث نضع: $\langle X_i \rangle = 0$

حسب قيمة τ نحن نميز نوعين من الجبر الفرعي .

من أجل $\tau = -1$ ، يتميز الجبر المشوه بوجود حد أدنى غير صفري من مبدأ الشك في

العزم ويسمى هذا النموذج مضادSitter . من اجل التبسيط نفترض مبدأ الشك المتماثل:

$$\mathrm{X_i = X} \qquad (5.2.1)$$

وهذا يسمح لنا بكتابة الحد الأدنى من عدم اليقين للعزم في نموذج AdS :

$$(\Delta P_i)_{\min} = \hbar\sqrt{\tau\lambda} \qquad (6.2.1)$$

في نموذج Sitter لدينا $\tau = +1$ ، العلاقة 4 لا تمثل القيمة الدنيا غير صفرية من عدم

اليقين في العزم. ويظهر ذلك في العبارة الأولى.

حيث علاقة مبدأ الشك لهايزنبرغ تم رسمها وفقا للعلاقة المعدلة 4. منطقة تحاك الموجودة هي المنطقة الممنوعة لقياسات الموضع والعزم في فضاء AdS .

من الآن فصاعدًا ، سنستخدم المؤثرات غير التبادلية X_iو P_i لإشباع الجبر المعدل1 الذي

يؤدي إلى تأكيد مبدأ الشك 4 في فضاء العزم. من أجل دراسة الحلول الدقيقة لمعادلة

شرودنغر المشوهة:

نمثل هذه المؤثرات كدوال للمؤثرينx_iو p_i التي تعوض بعلاقات الاستبدال المعتادة

يتم ذلك بوجود التحولات التالية:

$$X_i = \frac{x_i}{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}} \qquad (7.2.1)$$

$$P_i = -i\hbar\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\,\partial x_i \qquad (8.2.1)$$

$\tau=-1$ ، لما المتغير r يختلف في المجال $\left]\frac{-1}{\sqrt{\lambda}},\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right[$

3.1 الكمونات غير المركزية :

في حالة تحرك الجسيم في الكمونات غير مركزية ، من الأفضل استخدام نظام الإحداثيات الكروية(ثلاثي أبعاد) لحل معادلة شرودنغر.

تم طرح سؤال ذو صلة بطريقة طبيعية: ما هي الكمونات غير المركزية؟ للإجابة على هذا السؤال ، من الضروري تحديد الكمونات المركزية. باختصار ، الكمون المركزي $V(r)$ هو

جهد يعتمد فقط على المسافة r في أصل الإحداثيات . لذلك يسمح لنا هذا التعريف

بالقول أن الكمونات غير المركزية هي دوال تعتمد على نصف القطر $\boldsymbol{r}$ ،من الزاوية القطبية

$\boldsymbol{\theta}$، من الزاوية φ ، إلى ثلاثي الأبعاد.

الاعتماد على الكمونات غير المركزية$\mathrm{V}(\mathrm{r},\theta,\varphi)$ في ثلاثة متغيرات تؤدي إلى دراسة

معادلة شرودنغر لإعطاء القارئ على الأقل فكرة عما سيأتي لاحقًا في هذا الفصل

التمهيدي. في هذا النظام وضعنا الشكل العام للهاملتون لجسيم الكتلةm والزخم p المتحرك

في جهد من النوع غير المركزي$\mathrm{V}(\mathrm{r},\theta,\varphi)$ ، ومستقلة عن الزمن.

تكتب الهاملتون بالشكل التالي :

$$\mathrm{H}=\frac{\mathrm{P}^2}{2\mathrm{m}}+\mathrm{V}(\mathrm{r},\theta) \qquad (9.2.1)$$

2.3.1 أمثلة على الكمونات غير المركزية:

هناك أنواع مختلفة من الكمونات غير المركزية التي تمت دراستها باستخدام طريقة تغيير

المتغير، نذكر من بينها:

كمون ماكاروف:

يمكن استخدام هذه الإمكانات في كيمياء الكم والفيزياء النووية لوصف الجزيئات على شكل رنين، مثل البنزين والتفاعلات بين أزواج الانوية المشوهة. في الإحداثيات الكروية ، تكتب كمونات ماكاروف بالشكل التالي:

$$V(r,\theta) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2 sin^2\theta} + \frac{c\cos\theta}{r^2 sin^2\theta} \qquad (10.2.1)$$

كمون هارتمان:

في الإحداثيات الكروية نعرف كمون هارتمان كما يلي:

$$V(r,\theta) = V_0\left(\frac{2r_0}{r} - \frac{r_0^2}{r^2 sin^2\theta}\right) \qquad (11.2.1)$$

حيث V_0 الحد الأدنى للكمون و r_0 البعد الشعاعي.

جهد التذبذب شبه التوافقي على شكل حلقة:

الكمونات الجزيئية على شكل حلقة هي كمونات غير مركزية ، تتكون من كمونات المذبذب التوافقي الكروي و كمونات إضافية أخرى . يمكن استخدام هذه الكمونات لوصف نموذج جزيئي على شكل رنين مثل البنزين الجزيئي والتفاعل بين النواة المشوهة. وهي تستخدم في كيمياء الكم والفيزياء النووية. في السنوات الأخيرة التأثير النسبي للجسيمات الدقيقة في مجالات الكمونات للمذبذب التوافقي غير الكروي أثار اهتماما كبيرا في الفيزياء وتم الحصول على نتائج مهمة . تتكون كموناته من التراكب بين كمونات المذبذب التوافقي وكمونات دالة القوة السلبية ، ثم أربع كمونات، بالإضافة إلى اثنين من الكمونات غير المركزية .

ونكتب هذا الكمون بالشكل التالي [11] :

$$V(r,\theta)=\frac{K}{2}r^2+\frac{A}{r^2}+\frac{b}{r^2 sin^2\theta}+\frac{c\,cos^2\theta}{r^2 sin^2\theta} \qquad (12.2.1)$$

حيث c، b، A، K هي معاملات حقيقية بدون أبعاد.

كمون Hautot :

يعرف كما يلي :

$$V(r,\theta)=V(r)+\frac{f(\theta)}{r^2} \qquad (13.2.1)$$

$f(\theta)$ يمكن أن يكون لها على الأقل ثلاثة تعبيرات مختلفة اعتمادًا على θ في ثلاثة أبعاد،

وسبعة تعبيرات إذا كانت ثنائية الأبعاد.

كمون كراتزر على شكل حلقة مزدوجة:

تلعب كمونات كراتزر دورا مهما في تاريخ الكيمياء الجزيئية والكمية وقد تم استخدامها لوصف البنية والتفاعلات الجزيئية. بسبب أهميتها في مجال الفيزياء الجزيئية ،كانت كمونات كراتزر موضوع العديد من الدراسات منذ تقديمها من قبل كراتزر في عام 1920.

تلعب طاقات الاهتزاز المركزية k وطاقات الاهتزاز غير المركزية v للحالات الجزيئية ثنائية الذرة دورًا مهمًا في دراسة حالات وهياكل الاهتزازات للأنظمة ثنائية الذرة [12] .

في الإحداثيات الكروية، كمون كراتزر على شكل حلقة مزدوجة،الذي يصف الحركة الدورانية غير المركزية للجزيئات ، يتم تعريفه على النحو التالي[12] :

$$V(r,\theta) = -2D_e\left(\frac{r_e}{r} - \frac{1}{2}\frac{r_e^2}{r^2}\right) + \frac{b}{r^2 sin^2\theta} + \frac{a}{r^2 cos^2\theta} \qquad (14.2.1)$$

D_e هي طاقة التفكك

r_e هو الفصل بين النوى في حالة التوازن

a و b هي معاملات بدون أبعاد .

الفصل الثاني:

حل معادلة شرودينغر لكمون كراتزر زائد ثنائي القطب في الفضاء العادي ثنائي البعد

2-1المقدمة :

معادلة شرودينغر مهمة جد الدراسة الذرات والجزيئات. ومع ذلك،فإن عدد الأنظمة التي توجد لها حلول تحليلية بواسطة معادلة شرودينغر محدود للغاية.حفز هذا الفيزيائيين للبحث عن نماذج تقريبية لهذه الأنظمة الفيزيائية مما أدى إلى العديد من الدراسات حول الكمونات الكروية.على الرغم من هذه التقريبات ،لم يتم حل سوى القليل من الكمونات بشكل تحليلي . إلى جانب ذلك،نادرًا ما تظهر الأنظمة الفيزيائية الحقيقية،مثل الذرات والجزيئات ،تناظرًا كرويًا بسيطًا مثل ذرة الهيدروجين[13].بل الكثير منها لها كمونات غير مركزية .

الكمون غير المركزي الأبسط هو ثنائي القطب الكهربائي $V(r,\theta)=\frac{D_\theta \cos\theta}{r^2}$ وقد جذب الانتباه في وقت مبكر جدًا نظرًا لوجود أدلة تجريبية على أنه لا يمكن أن نتحصل على حالات مرتبطة بهذا الكمون إلا إذا كان المعامل D_θ اكبر من قيمة حرجة. اتبعت الدراسات التجريبية هذه النتائج وأكدتها على الرغم من عدم وجود حلول تحليلية لهذا النظام. جذبت هذه الكمونات الانتباه أيضًا في الكيمياء نظرًا لتطبيقاتها ضمن الحدود الأيونية للجزيئات القطبية. أيضًا في علم الأحياء الجزيئي في دراسة آليا تربطا لإلكترون في الحمض النووي والحمض النووي الريبي DNA وRNA [13].

في هذا العمل ،سنقوم بدراسة الحل الدقيق لمعادلة شرودينغر مع كمونات كراتزر زائد ثنائي القطب في الفضاء العادي ثنائي البعد،في الجزء الأول نكتب معادلة شرودينغر للكمون غير المركزي الذي يجمع بين كمون كراتزر وكمون ثنائي القطب،الذي نسميه باختصار كمون كراتزر غير المركزي أما في الجزء الثاني نقوم بحل معادلة شرودينغر من أجل إيجاد عبارة الطاقة وعبارة دالة الموجة.

2.2 كمونات كراتزر غير المركزية

نعتبر نظامًا يتألف من نقطة مشحونة q في كمون كهربائي ناتج من الشحنة Q الموزعة في الفضاء حيث الشحنة $\boldsymbol{Q} = \int \boldsymbol{dq}$ مجموعة من النقاط المشحونة (dq) مثل أيون وجسيمات مشحونة. توزيع الشحنةQ ينتج كمون كولومبي في موضع الشحنة المدروسة q وهو عبارة عن مجموع الكمونات العنصرية كما يلي[13]:

$$V(\vec{r}) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_a}{r_a} \qquad (1.2.2)$$

نختار مبدأ الفضاء O منطبق على مركز توزيع الشحنة Q

M هي موضع الشحنة المدروسةq و$\vec{r}$هو شعاع الموضع الموافق

Aهو موضع الشحنة العنصرية dq و $\vec{a}$ هو شعاع موضعها

وبالتالي فان الموضع النسبي للشحنة العنصرية والشحنة المدروسة هو

$\overrightarrow{\boldsymbol{r_a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}}$ [13] .

حيث يمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل التالي:

$$V(r) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_a}{\|\vec{r}-\vec{a}\|} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} dq_a[(\vec{r}-\vec{a})^2]^{-1/2} \qquad (2.2.2)$$

بعد حساب المربع نجد

$$V(r) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} dq_a[\vec{r}^2 - 2\vec{r}.\vec{a} + \vec{a}^2]^{-1/2} \qquad (3.2.2)$$

بالقسمة على$\vec{r}^2$ نجد

$$V(r) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_a}{\vec{r}}\left(1 - \frac{2\vec{r}.\vec{a}}{\vec{r}^2} + \frac{\vec{a}^2}{\vec{r}^2}\right)^{-1/2} \qquad (4.2.2)$$

بما أن$\|\vec{a}\|$صغيرة مقارنة بالنظام الكامل الذي يمثله $\|\vec{r}\|$،يمك استعمال التقريب التالي بواسطة نشر تايلور تصبح المعادلة من الشكل [13]:

$$\left(1-\frac{2\vec{r}.\vec{a}}{\vec{r}^2}+\frac{\vec{a}^2}{\vec{r}^2}\right)^{-1/2}=1+\frac{\vec{r}.\vec{a}}{\vec{r}^2}+0\left(\frac{\vec{a}^2}{\vec{r}^2}\right) \qquad (5.2.2)$$

نستعمل هذا التقريب الأخير لحساب التكامل السابق :

$$V(\vec{r})=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_a}{r}\left(1+\frac{\vec{r}.\vec{a}}{\vec{r}^2}\right) \qquad (6.2.2)$$

ومنه :

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int\frac{dq_a}{r}+\int\frac{dq_a}{r}\frac{\vec{r}.\vec{a}}{\vec{r}^2}\right) \qquad (7.2.2)$$

يمكن تبسيطها على النحو التالي:

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\int dq_a+\frac{1}{r^2}\int a\cos\theta_a dq_a\right) \qquad (8.2.2)$$

حيث$Q=\int dq_a$ و $D_r=\int a\cos\theta_a dq_a$ويصبح الكمون من الشكل:

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{D_r}{r^2} \qquad (9.2.2)$$

$\boldsymbol{D_r}$ يمثل طاقة التفكك للجزيء.

العلاقة السابقة تعادل تعبير كراتزر المعرفة كما يلي :

$$V_k=d_e\left(\frac{{r_e}^2}{r^2}-\frac{2r_e}{r}\right) \qquad (10.2.2)$$

حيث نعتبر$\boldsymbol{d_e}$هي الطاقة التفكك و$\boldsymbol{r_e}$البعد بينا لذرات عند التوازن في الجزيء.

نرى أن الكمونات المركزية لا يمكن أن تعكس الواقع لأن التوزيع عمومًا ليس متماثلً تمامًا.

لذلك علينا أن نأخذ بعين الاعتبار احتمال تباين في توزيع الشحنة.للقيام بذلك ، نعتبر أن مراكز الشحن السلبية والإيجابية لا ينطبق هذا التأثير المتباين على الشحنة المدروسة من طرف شحنتين متعاكستين ينتج كمون ثنائي القطب $\left(\frac{D\cos\theta}{r^2}\right)$.

المعامل D_θ يتناسب مع المسافة بين مركزي الشحن والزاوية θ تحدد اتجاه الموضع $\vec{r}$(موضع الشحنة المدروسة)وفقًا لمحور ثنائي القطب المحدد بواسطة $\vec{a}_+$ و $\vec{a}_-$(اشعة موضعي الشحنة الموجة والسالبة).نسمي مصطلح ثنائي القطب الزاوي لتمييزه عن ثنائي القطب الشعاعي.

لذلك عندما نضيف جميع الشروط معا يعطينا كمون كولوم مع ثنائي القطب ويسمى كمون كراتزر غير المركزي [13] .

$$V(r,\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0}}\left(\frac{Q}{r} + \frac{D_r}{r^2} + \frac{D\cos\theta}{r^2}\right) \qquad (11.2.2)$$

3.2الحل الدقيق لمعادلة شرودينغر ثنائية البعد مع كمون كراتزر زائد ثنائي القطب:

في هذا القسم ، نوضح تأثير الفضاء العادي على القيم الذاتية للطاقة والدوال الذاتية للنظام

في وجود الكمون غير المركزي $V(r,\theta)$:

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{D_r}{r^2} + \frac{\boldsymbol{D_\theta}\cos\theta}{r^2}\right)$$

معادلة شرودنغر لجسم شحنتهq يدور تحت تأثير كمون V في الفضاء ثنائي البعد تكتب كما يلي:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta + \boldsymbol{q}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})\right]\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}) \qquad (1.3.2)$$

باستعمال الإحداثيات القطبية المعادلة السابقة تصبح:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)+qV(r,\theta)\right]\Psi(r,\theta)=E\Psi(r,\theta) \qquad (2.3.2)$$

بتعويض عبارة الكمون غير المركزي في معادلة شرودينغر العامة نجد:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}+\frac{D_r}{r^2}+\frac{D_\theta\cos\theta}{r^2}\right)\right]\Psi(r,\theta)=E\Psi(r,\theta) \qquad (3.3.2)$$

بتبسيط المعادلة نجد:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}-\frac{2m_eqD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{2m_eqD_\theta}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\cos\theta\right)\right]\Psi(r,\theta)=E\Psi(r,\theta) \qquad (4.3.2)$$

لحل هذه المعادلة نستعمل طريقة فصل المتغيرات وهذا بكتابة دالة الحالة بالشكل التالي:

$$\Psi(r,\theta)=u(r)\Phi(\theta)=r^{-\frac{1}{2}}R(r)\Phi(\theta) \qquad (5.3.2)$$

بالتعويض في المعادلة(2.3.2) نجد:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}-\frac{2m_eqD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{2m_eqD_\theta}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\cos\theta\right)\right]r^{-\frac{1}{2}}R(r)\Phi(\theta)=$$
$$Er^{-\frac{1}{2}}R(r)\Phi(\theta) \qquad (6.3.2)$$

نقوم الآن بحساب المشتقات في المعادلة السابقة:

المشتقة الثانية بالنسبة ل θ

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(r^{-\frac{1}{2}}R(r)\Phi(\theta)\right)=r^{-\frac{1}{2}}R(r)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Phi(\theta) \qquad (7.3.2)$$

المشتقة الأولى بالنسبة لr

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-\frac{1}{2}}R(r)\Phi(\theta)\right)=-\frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}R(r)\Phi(\theta)+r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\Phi(\theta) \qquad (8.3.2)$$

المشتقة الثانية بالنسبة لr

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^{-\frac{1}{2}}R(r)\Phi(\theta)\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}R(r)\Phi(\theta)+r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\Phi(\theta)\right)=$$
$$\frac{3}{4}r^{-\frac{5}{2}}R(r)\Phi(\theta)-r^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\Phi(\theta)+r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)\Phi(\theta) \qquad (9.3.2)$$

بالتعويض بهذه المشتقات في المعادلة السابقة نجد

$$\frac{3}{4}r^{-\frac{5}{2}}R(r)\Phi(\theta)-r^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\Phi(\theta)+r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)\Phi(\theta)+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}R(r)\Phi(\theta)+\right.$$
$$\left.r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\Phi(\theta)\right)-\left(\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}+\frac{2m_eq\boldsymbol{D_r}}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r^2}\right)r^{-\frac{1}{2}}R(r)\Phi(\theta)+\frac{1}{r^2}\left(r^{-\frac{1}{2}}R(r)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Phi(\theta)-\right.$$
$$\left.\frac{2m_eq\boldsymbol{D_\theta}}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}r^{-\frac{1}{2}}R(r)\Phi(\theta)\right)=\boldsymbol{E}r^{-\frac{1}{2}}R(r)\Phi(\theta) \qquad (10.3.2)$$

بقسمة المعادلة السابقة على $(r)\Phi(\theta)$ ثم ضربها في $r^{-\frac{5}{2}}$نجد

$$\frac{r^2}{R(r)}\left(\frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{4}r^{-2}R(r)+\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}R(r)+\frac{2m_eq\boldsymbol{D_r}}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r^2}R(r)+\frac{2m_e}{\hbar^2}ER(r)\right)=\frac{1}{\Phi(\theta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Phi(\theta)-\right.$$
$$\left.\frac{2m_eq\boldsymbol{D_\theta}}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}\Phi(\theta)\right) \qquad (11.3.2)$$

بوضع طرفي المعادلة السابقة يساوي E_θنتحصل على معادلتين المعادلة الأولى تمثل الجزء الزاوي و المعادلة الثانية تمثل الجزء الشعاعي:

الجزء الزاوي:

$$\frac{1}{\Phi(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Phi(\theta)-\frac{2m_eq}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}D\cos\theta=E_\theta \qquad (12.3.2)$$

بالتبسيط نجد:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{2m_eq\boldsymbol{D_\theta}}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}cos\theta\right)\Phi(\theta)=E_\theta\Phi(\theta) \qquad (13.3.2)$$

الجزء الشعاعي:

$$\frac{r^2}{R(r)}\left(\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{4}r^{-2}R(r)+\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}R(r)+\frac{2m_eq\boldsymbol{D_r}}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r^2}R(r)+\frac{2m_e}{\hbar^2}ER(r)\right)=E_\theta \qquad (14.3.2)$$

بالضرب في($R(r)$)وبالقسمة على (r^2) فتصبح كالتالي:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{2m_eqD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{r^2}-\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 r}+\frac{2m_eE}{\hbar^2}\right]R(r)=\frac{E_\theta}{r^2}R(r) \qquad (15.3.2)$$

إذا تمكنا من فصل معادلة شرودينغر الى جزئين حيث E_θهو ثابت الفصل :

الجزء الزاوي :

$$\frac{\partial^2\Phi(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta^2}-\left(E_\theta+\frac{2m_eqD}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}cos\boldsymbol{\theta}\right)\Phi(\boldsymbol{\theta})=0$$

الجزء الشعاعي:

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\left[\left(E_\theta+\frac{1}{4}-\frac{2m_eqD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{r^2}-\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 r}+\frac{2m_eE}{\hbar^2}\right]R(r)=0 \qquad (16.3.2)$$

لاستخراج القيم الذاتية للطاقةE والدوال الذاتية$\Psi(r,\theta)$ نقوم أولا بحل معادلة الجزء الزاوي لإيجاد ثابت الفصل E_θ ثم نعوضها في معادلة الجزء الشعاعي .

حل معادلة الجزء الزاوي:

لدينا:

$$\frac{\partial^2\Phi(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta^2}-\left(E_\theta+\frac{2m_eqD}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}cos\boldsymbol{\theta}\right)\Phi(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{0}$$

يمكن ببساطة إعادة كتابة هذه المعادلة على شكل معادلة ماثيوMathieu وهذا باستعمال استبدال المتغيرات التالية [13] :

$$\theta = 2z, a = -4E_{\theta}, p = \frac{m_e qD}{\pi\varepsilon_0\hbar^2}$$

تتحول المعادلة وتصبح كالتالي:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2\Phi(z)}{\partial z^2} + \left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p\cos 2z\right]\Phi(z) = 0$$

بضرب المعادلة في (4) نجد:

$$\frac{\partial^2\Phi(z)}{\partial z^2} + [a - 2p\cos 2z]\Phi(z) = 0 \qquad (17.3.2)$$

حلول هذه المعادلة هي دوال جيب التمام الناقص$ce_{2m}(z)$وجيب الناقص$se_{2m+2}(z)$.

حيث m عدد طبيعي،حلول معادلة ماثيو دورية بسبب z لها دورة π(لان دورة من**θ** هي$\boldsymbol{2\pi}$)،

التي تقودنا إلى النظر في نظرية بلوخ. تنص هذه النظرية على انه للحصول على قيمة

$\boldsymbol{a}$ ،الحل دوري فقط لقيم معينة من المتغيرات الأخرى $\boldsymbol{p}$معينة للمتغير

نسمي القيم المميزة$a(2m,p)$او$a_{2m}(p)$لحلول جيب التمام و $b(2m,p)$ او $b_{2m}(p)$ لحلول جيب[13] .

لايوجد تعبير تحليلي للقيم المميزة لماثيو$a_{2m}(p)$و$b_{2m}(p)$،وبالتالي فهي تعطى عموما بيانيا أو عدديا.رغم كل شيء،يمكننا كتابة تعبيرات تحليلية تقريبية للقيم الصغيرة والكبيرة ل p.

للقيم صغيرة منp،يمكننا التعبير عن aو b ل $\boldsymbol{m} > 3$ كالتالي[13]:

$$a_{2m} = b_{2m} \approx 4m^2 + \frac{1}{2(4m^2-1)}p^2 + \frac{20m^2+7}{32(4m^2-1)^3(4m^2-4)}p^4 + \frac{36m^4+232m^2+29}{64(4m^2-1)^5(4m^2-4)(4m^2-9)}p^6 + \mathcal{O}(p^8) \qquad (18.3.2)$$

حيث أن معاملات سلسلة الطاقة$a_{2m}(p)$ و $b_{2m}(p)$هي نفسها حتى الشروطp^{-2m-2} ،

بالإضافة إلى ذلك،لدينا كثير الحدود مماثل من اجل$m \leq 3$لكن مع معاملات مختلفة لـ $a's$

و$b's$[13].

نلاحظ هنا، لا يوجد حل جيبي من اجل $m = 0$لذلك لا يوجد$b\ (m = 0)$[13] .

من اجل قيم كبيرة منp ،نحصلعلىكثيرالحدودآخر$(k = 2n + 1)$:

$$a_n = b_{n+1} \approx -2p + kp^{1/2} - \frac{1}{8}[k^2 + 1] - \frac{1}{2^7 p^{1/2}}[k^3 + 3k] - \frac{1}{2^{12} p}[5k^4 + 34k^2 + 9] + \boldsymbol{O}(\boldsymbol{p}^{-3/2}) \quad (19.3.2)$$

أخيرا ، من الآن لتبسيط الكتابة ،سوف نستخدم نفس الرمز $c_{2m}(p)$ من اجل القيم المميزة

$a_{2m}(p)$ و $b_{2m}(p)$[13].

أيضا باستخدام العبارات المميزة والعلاقات السابقة$p = \frac{m_e q D_\theta}{\pi \varepsilon_0 \hbar^2}$و $a = -4E_\theta$،

نحصل على قيم ثابت الفصلE_θبدلالة معامل ثنائي القطبD_θ[13].

$$\mathrm{E}_\theta^{(2m)} = -\frac{1}{4} \mathrm{c}_{2m} \left(\frac{\mathrm{mq}}{\pi \varepsilon_0 \hbar^2} \mathrm{D}_\theta \right) \quad (20.3.2)$$

نرى ذلك في الحد$\mathrm{D}_\theta \longrightarrow 0$او $p \longrightarrow 0$

نتحصل على$a = 4m^2$

القيم المميزة يمكن أن تكتب :

$$a_{2m} = 4m^2 + P_m(p) \quad (21.3.2)$$

هو نفسه بالنسبة للقيم الذاتية الزاوية،لدينا:

$$E_\theta^{(2m)} = -m^2 + P_m(D_\theta) \qquad (22.3.2)$$

حيث $P_m(p)$و$P_m(D_\theta)$ كثير حدود التي تكتب من نفس القوى منp و D[3]

بعد ذلك،نستخدم$E_\theta^{(2m)}$ من أجل حل المعادلة الشعاعية.

الحل الشعاعي للمعادلة :

نعيد كتابة المعادلة الشعاعية من اجل $E_\theta^{(m)}$على النحو التالي:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(E_\theta^{(m)} + \frac{1}{4} - \frac{2m_e q D_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{r^2} - \frac{2m_e qQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 r} + \frac{2m_e E}{\hbar^2}\right]R(r) = 0 \qquad (23.3.2)$$

نستخدم التحويل التالي:

$$R(r) = r^\lambda e^{-\beta r} f(r) \qquad (24.3.2)$$

بالاشتقاق نجد:

المشتق الأول

$$\frac{dR(r)}{dr} = r^\lambda e^{-\beta r}\left[\frac{df(r)}{dr} + \left(\frac{\lambda}{r} - \beta\right) f(r)\right] \qquad (25.3.2)$$

المشتق الثاني:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} = r^\lambda e^{-\beta r}\left[\frac{d^2f(r)}{dr^2} + \left(\frac{2\lambda}{r} - 2\beta\right)\frac{df(r)}{dr} + \left(\frac{\lambda}{r^2}(\lambda-1) - \frac{2\lambda\beta}{r} + \beta^2\right) f(r)\right] \qquad (26.3.2)$$

بتعويض المشتقات الأولى(25.3.2) والثانية(26.3.2) والتحويل(24.3.2) في المعادلة(23.3.2)، نتحصل على المعادلة التالية :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\left(\frac{2\lambda}{r}-2\beta\right)\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^2}\left(\lambda(\lambda-1)+\mathrm{E}_{\theta}^{(m)}+\frac{1}{4}-\frac{2m_eqD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}+2\lambda\beta\right)+\beta^2+\frac{2m_eE}{\hbar^2}\right]f(r)=0 \qquad (27.3.2)$$

لتحويل هذه المعادلة الى معادلة معروفة نستعمل التحويلات التالية :

$$\beta^2=-\frac{2m_eE}{\hbar^2} \text{ و } \lambda(\lambda-1)+\mathrm{E}_{\theta}^{(m)}+\frac{1}{4}-\frac{2m_eqD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}=0$$

المعادلة الأخيرة تعطي حلين لλهما:

$$\lambda=\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\mathrm{E}_{\theta}^{(m)}+\frac{2m_eqD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}} \qquad (28.3.2)$$

قيمة λ المقبولة هي القيمة التي تجعل $f(r)$فردية عند القيمة $r\ =\ 0$ هي :

$$\lambda=\frac{1}{2}+\sqrt{-\mathrm{E}_{\theta}^{(m)}+\frac{2m_eqD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}} \qquad (29.3.2)$$

في هذه الحالة ،تصبح المعادلة كما يلي:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\left(\frac{2\lambda}{r}-2\beta\right)\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\left(\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}+2\lambda\beta\right)\right]f(r)=0 \qquad (30.3.2)$$

ويمكن إعادة كتابتها بالشكل التالي:

$$\left[r\frac{d^2}{dr^2}+(2\lambda-2\beta r)\frac{d}{dr}-\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}-2\lambda\beta\right]f(r)=0 \qquad (31.3.2)$$

لحل هذه المعادلة نستبدل المتغير كما يلي:

$$Z=2\beta r \qquad \Longrightarrow dZ\ =\ 2\beta dr$$

بالتعويض في المعادلة(30.3.2) نجد:

$$\left[\frac{Z}{2\beta}(2\beta)^2\frac{d^2}{dz^2}+(2\lambda-z)2\beta\frac{d}{dz}-\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}-2\lambda\beta\right]f(z)=0 \qquad (32.3.2)$$

بقسمة هذه المعادلة على 2β نجد:

$$\left[z\frac{d^2}{dz^2}+(2\lambda-z)\frac{d}{dz}-\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{\beta}+\lambda\right]f(z)=0 \qquad (33.3.2)$$

الآن،من أجل الحصول على حل كثير الحدود للمعادلة،يجب أن نفرض الشروط على معامل دالة الموجة $f(r)$التالية:

$$u+1=2\lambda \; et \; n_r=-\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{\beta}+\lambda$$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$$\left[z\frac{d^2}{dz^2}+\left((u+1)-z\right)\frac{d}{dz}+n_r\right]f(z)=0 \qquad (34.3.2)$$

المعادلة الأخيرة هي من النوع (:hypergéométrique) وبالتالي حلها هو دالة (hypergéométrique) من الشكل:

$$f(z)={}_1F_1(-n_r,(u+1)-z) \qquad (35.\,3.2)$$

الآن دالة الموجة الشعاعية تكتب كالتالي:

$$R(r)=r^{\lambda}e^{-\beta r}f(r) \qquad (36.3.2)$$

مع:

$$f(r)=N\;{}_1F_1\left(\left(\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{\beta}+\lambda\right),2\lambda,2\beta r\right) \qquad (37.3.2)$$

و منه نجد:

$$R(r)=Nr^{\lambda}e^{-\beta r}\;{}_1F_1\left(\left(\frac{2m_eqQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{\beta}+\lambda\right),2\lambda,2\beta r\right) \qquad (38.3.2)$$

حيثN هو ثابت التقنين،والذي يمكن تحديده من خلال شرط التقنين:

$$\int |\Psi(r,\theta)|^2 \, r dr d\theta = 1 \qquad (39.3.2)$$

مع: $\Psi(r,\theta) = r^{-\frac{1}{2}} R(r) \Phi(\theta)$

$$\int_0^{+\infty} \left| r^{-1/2} R(r) \right|^2 r dr \int_0^{2\pi} |\Phi(\theta)|^2 \, d\theta = 1 \qquad (40.3.2)$$

حيث دالة ماثيو مقننة بالتعريف :

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(\theta)|^2 \, d\theta = \pi^2$$

ومنه شرط التقنين يصبح كالاتي:

$$\pi^2 \int_0^{+\infty} \left| N r^{\lambda} e^{-\beta r} \; {}_1F_1\left(\left(\frac{2m_e qQ}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{\beta} + \lambda \right), 2\lambda, 2\beta r \right) \right|^2 \mathrm{dr} = 1 \qquad (41.3.2)$$

أو:

$$|N|^2 \pi^2 \int_0^{+\infty} r^{2\lambda} e^{-2\beta r} \left| \; {}_1F_1\left(\left(\frac{2m_e qQ}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{\beta} + \lambda \right), 2\lambda, 2\beta r \right) \right|^2 \mathrm{dr} = 1 \qquad (42.3.2)$$

نطبق العلاقة بين كثير الحدود لLaguerreوالدالةhypergéométrique:

$$L_{n_r}^{2\lambda-1}(2\beta r) = \frac{(n_r+2\lambda-1)!}{n_r!(2\lambda-1)!} \; {}_1F_1\left(\left(\frac{2m_e qQ}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{\beta} + \lambda \right), 2\lambda, 2\beta r \right) \qquad (43.3.2)$$

لذلك تصبح المعادلة:

$$|N|^2\pi^2\int_0^{+\infty} r^{2\lambda}e^{-2\beta r}\left|\frac{(n_r+2\lambda-1)!}{n_r!(2\lambda-1)!}L_{n_r}^{2\lambda-1}(2\beta r)\right|^2 dr=1 \qquad (44.3.2)$$

والتي يمكن إعادة صياغتها:

$$|N|^2\left(\frac{n_r!(2\lambda-1)!}{(n_r+2\lambda-1)!}\right)^2\pi^2\int_0^{+\infty} r^{2\lambda}e^{-2\beta r}\left|L_{n_r}^{2\lambda-1}(2\beta r)\right|^2 dr=1 \qquad (45.3.2)$$

باستعمال استبدال المتغير:

$$\left[Z=2\beta r\Rightarrow r=\frac{1}{2\beta}Z\Rightarrow dr=\frac{1}{2\beta}dZ\right] \qquad (46.3.2)$$

نجد:

$$|N|^2\left(\frac{n_r!(2\lambda-1)!}{(n_r+2\lambda-1)!}\right)^2\pi^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2\beta}Z\right)^{2\lambda}e^{-2\beta\left(\frac{1}{2\beta}Z\right)}\left|L_{n_r}^{2\lambda-1}\left(2\beta\left(\frac{1}{2\beta}Z\right)\right)\right|^2\left(\frac{1}{2\beta}\right)dZ=1 \qquad (47.3.2)$$

يمكن تبسيط المعادلة على النحو التالي:

$$|N|^2\left(\frac{n_r!(2\lambda-1)!}{(n_r+2\lambda-1)!}\right)^2\left(\frac{1}{2\beta}\right)^2\pi^2\int_0^{+\infty} z^{2\lambda}e^{-Z}\left|L_{n_r}^{2\lambda-1}(z)\right|^2 dZ=1 \qquad (48.3.2)$$

خاصية كثيرالحدودLaguerre:

$$\int_0^{+\infty} q^{k+1}e^{-q}\left[L_{n_r}^{2\lambda}(q)\right]^2 dq=\frac{(n_r+k)!}{n_r!}(2n_r+k+1) \qquad (49.3.2)$$

ومنه:

$$\int_0^{+\infty} z^{2\lambda} e^{-Z} \left|L_{n_r}^{2\lambda-1}(z)\right|^2 dZ = \frac{(n_r+2\lambda-1)!}{n_r!}(2n_r+2\lambda) \qquad (50.3.2)$$

تصبح المعادلة من الشكل التالي:

$$|N|^2 \left(\frac{n_r!(2\lambda-1)!}{(n_r+2\lambda-1)!}\right)^2 \left(\frac{1}{2\beta}\right)^2 \frac{(n_r+2\lambda-1)!}{n_r!}(2n_r+2\lambda)\pi^2 = 1 \qquad (51.3.2)$$

أو بالصيغة التالية الدقيقة :

$$|N|^2 = \frac{1}{\left(\frac{n_r!(2\lambda-1)!}{(n_r+2\lambda-1)!}\right)^2 \left(\frac{1}{2\beta}\right)^2 \frac{(n_r+2\lambda-1)!}{n_r!}(2n_r+2\lambda)\pi^2} \qquad (52.3.2)$$

إذن يمكن إعادة كتابة ثابت التقنين على النحو التالي:

$$N = \frac{2^\lambda \beta^{\lambda+\frac{1}{2}}}{(2\lambda-1)!\pi}\left[\frac{(n_r+2\lambda-1)!}{n_r!(n_r+2\lambda)}\right]^{1/2} \qquad (53.3.2)$$

أخيرًا،يتم إعطاء الحل الدقيق لمعادلة شرودينغر ثنائية الأبعاد في وجود كمونات مركزية من نوع كراتزر وكمونات غير مركزية من نوع ثنائي القطب من خلال إتباع دالة التقنين:

$$\Psi(r,\theta) = \frac{2^\lambda \beta^{\lambda+\frac{1}{2}}}{(2\lambda-1)!\pi}\left[\frac{(n_r+2\lambda-1)!}{n_r!(n_r+2\lambda)}\right]^{1/2} r^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-\beta r}\left(\frac{n_r!(2\lambda-1)!}{(n_r+2\lambda-1)!}\right) L_{n_r}^{2\lambda-1}(2\beta r)\Phi(\theta) \qquad (54.3.2)$$

من جهة أخرى ، وفقا للشرط$\left(n_r = \left(-\frac{2m_e qQ}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{\beta}+\lambda\right)\right)$ والقيم (β)و (λ)،يمكننا التعبير عن طاقة الطيف كالتالي:

$$\beta^2 = \left[\frac{2m_e qQ}{-(n_r+\lambda)4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right]^2 = -\frac{2m_e E}{\hbar^2} \Rightarrow E_{n_r,m} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\left[\frac{2m_e qQ}{(n_r+\lambda)4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right]^2 \qquad (55.3.2)$$

نستعمل العبارة $\lambda = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{-\mathrm{E}_\theta^{(\mathrm{m})} + \frac{2m_e qD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}}\right)$ نجد

$$E_{n_r,m} = -\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{2m_e qQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_e}}\right)\left(n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{-\mathrm{E}_\theta^{(\mathrm{m})} + \frac{2m_e qD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}}\right)\right]^{-2} \qquad (56.3.2)$$

من خلال هذا التعبير،يمكننا الحصول على حلول كمون كراتزر ثنائي الأبعاد،من خلال

أخذ الحد $D_\theta \to 0$من المعادلة25،إذن $P_m(D_\theta) \to 0$أي $\mathrm{E}_\theta^{(\mathrm{m})} = -m$، وبالتالي:

$$E_{n_r}^{(kratzer)} = -\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{2m_e qQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_e}}\right)\left(n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{m + \frac{2m_e qD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}}\right)\right]^{-2} \qquad (57.3.2)$$

من ناحية أخرى،إذا أضفنا الحد$D_r \to 0$نحصل على حلول كمون كولوم ثنائي الأبعاد:

$$E_{n_r}^{(coulomb)} = -\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{2m_e qQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_e}}\right)\left(n_r + \frac{1}{2} + |m|\right)\right]^{-2} \qquad (58.3.2)$$

بالمقارنة هذه النتائج،مع نموذج ذرة الهيدروجين ثنائية الأبعاد نجد:$n = n_r + |m|$

ومنه:

$$E_{n_r,m} = -\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{2m_e qQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_e}}\right)\left(n - |m| + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}c_{2m}\left(\frac{mq}{4\pi\varepsilon_0}D_\theta\right) + \frac{2m_e qD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}}\right)\right]^{-2} \qquad (59.3.2)$$

حيثn هو العدد الكمي الأساسي و m هو العدد الكمي الثانوي

باستعمال الوحدات الذرية (وحدات هارتريHartree) $\hbar^2 = e = m_e = 4\pi\varepsilon_0 = 1$

نجد عبارة الطاقة كما يلي

$$E_{n_r,m} = -\left[2\left(n - |m| + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}c_{2m}(D_\theta) + D_r}\right)\right]^{-2} \qquad (60.3.2)$$

المناقشة

نلاحظ من عبارة الطاقة انه يمكننا الحصول على قيم معرفة للطاقة في حالة تحقق الشرط التالي$\frac{1}{4}c_{2m}(D_\theta) + D_r \geq 0$هذا الشرط يستلزم وجود قيم حدية لـD_θ وهذه القيم الحدية تتغير بتغير D_r

الفصل الثالث :

حل معادلة شرودينغر لكمون كراتزر زائد ثنائي القطب في الفضاء المشوه ثنائي البعد

1-3 مقدمة :

على المستوى الميكروسكوبي وفي الطاقات العليا كثير من الاقتراحات قدمت لدراسة تأثير الفضاء على ميكانيكا الكم وهذا لملاحظة تأثير الجاذبية، بالإضافة إلى ذلك هناك اهتمام كبير بدراسة الفضاء المنحني الذي له تطبيقات مهمة في علم الفلك والنسبية العامة، أين تعرف الجاذبية على أنها من خواص الفضاء ودراسة ميكانيكا الكم في الفضاء المنحني يعد نوع جديد من التفاعل بين ميكانيكا الكم والجاذبية ولإدخال هذا التأثير من الفضاء من بين

الاقتراحات هو إجراء تغيير على مبدأ الشك لهايزنبرغ بإدخال تغيير طفيف على علاقة التبادل ،وهذا يودي إلى تغيير طفيف في إحداثيات الموضع والعزم وهو نفسه تعريف الفضاء المشوه ديسيتر و ديسيتر المضاد .في هذا الفصل نقوم بحل معادلة شرودنغر لكمون كراتزر زائد كمون ثنائي القطب في الفضاء المشوه ثنائي البعد وهذا باستعمال طريقة Nikiforov−Uvarov،حيث نتحصل على طيف الطاقة المشوهة ودالة الموجة المشوهة لملاحظة تأثير التشوه على الطاقة ودالة الحالة .

2-3 طريقة نيكيفوروف -افاروف:Nikiforov−Uvarov

تم تطوير طريقة نيكيفوروف-يوفاروف على أساس المعادلة التفاضلية الهندسية الفائقة.تحول الصيغ المستخدمة في طريقةNU المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية إلى النوع الهندسي الفائق مع تحويل إحداثيات مناسب:$s = s(x)$

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s) = 0 \qquad (1.2.3)$$

حيث أن $\sigma(s)$ و$\tilde{\sigma}(s)$هي كثيرات الحدود من الدرجة الثانية على الأكثر ودرجة كثيرات الحدود $\tilde{\tau}(s)$هي اقل تماما من الدرجة الثانية.إذا أخذنا العوامل التالية:

$$\psi(s) = \phi(s)y(s) \qquad (2.2.3)$$

تصبح العلاقة (1.2.3) كالتالي :

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \Lambda\, y(s) = 0 \qquad (3.2.3)$$

حيث :

$$\pi(s) = \sigma(s)\frac{d}{ds}\big(ln\phi(s)\big), \tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \qquad (4.2.3)$$

Λ يعرف بالعلاقة التالية :

$$\Lambda_n + n\tau' + \frac{n(n-1)\sigma''}{2} = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (5.2.3)$$

ويتم حساب قيم الطاقة الذاتية من المعادلة أعلاه.علينا أولا أن نحدد$\pi(s)$وΛحيث نعرف:

$$k = \Lambda - \pi'(s) \qquad (6.2.3)$$

بحل معادلة من الدرجة الثانية ل$\pi(s)$بالعلاقة (6.2.4)نجد:

$$\pi(s) = \left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + \sigma k} \qquad (7.2.3)$$

هنا $\pi(s)$ يعتبر كثير حدود s كمعامل بينما يشير الشرط الرئيسي إلى المشتق الأول.

يجب أن نعرف أن تحديد kهو النقطة الأساسية لحساب$\pi(s)$و يتم تعريفه ببساطة من خلال الإشارة إلى أن التعبير الموجود أسفل الجذر التربيعي في العلاقة (7.2.4)يجب أن يكون مربعًا لكثير الحدود، هذا يعطينا معادلة تربيعية عامة لـk.

لتحديد حلول كثير الحدود$y_n(s)$، نستخدم العلاقة(4.2.4)وعلاقة رودريغز:

$$y_n(s) = \frac{c_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}[\sigma^n(s)\rho(s)] \qquad (8.2.3)$$

حيث c_nهو ثابت التقنين ودالة الوزن$\rho(s)$تتوافقمعالعلاقةالتالية:

$$\frac{d}{ds}[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s) \qquad (9.2.3)$$

تشير هذه المعادلة الأخيرة إلى كثيرات الحدود المتعامدة الكلاسيكية التي تحتوي على العديد من الخصائص المهمة وخاصة التعامد المحدد من خلال:

$$\int_a^b y_n(s) y_m(s)\, \rho(s) ds = 0 \;\; , \; m \neq n \qquad (10.2.3)$$

3-3 الحل الدقيق لمعادلة شرودنغر مع كمون كراتزر بالإضافة إلى ثنائي القطب في حالة نظام ثنائي الأبعاد في الفضاء المشوه :

من أجل كتابة معادلة شرودنغر في الفضاء المشوه (ديسيترورديسيترالمضاد) نستعمل التحولات التالية :

$$P_i = -i\hbar\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\partial x_i \quad \Rightarrow \qquad P_i = \sqrt{1+\tau\lambda r^2}p_i \qquad (1.3.3)$$

$$X_i = \frac{x_i}{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{r}}{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}} \qquad (2.3.3)$$

نبحث الآن على عبارة مربع العزم في الفضاء المشوه:

$$P^2 \longrightarrow \left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\vec{p}\right)^2 = \left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\vec{p}\right)\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\vec{p}\right) \qquad (3.3.3)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\vec{p} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} \;\; , \;\; r = x + y$$

بالتعويض في تحويلP^2نجد :

$$\mathrm{P}^2 = \left[\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\right)\right]\left[\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\right)\right] \qquad (4.3.3)$$

بتوزيع الضرب نجد:

$$\mathrm{P}^2 = \left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{\imath} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{\jmath}\right)$$
$$+\left[\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{\jmath}\right)\right]$$

(5.3.3)

بالاشتقاق والاختزال نجد:

$$\mathrm{P}^2 = (1+\tau\lambda r^2)P^2 + \left[\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\left(\frac{2\tau\lambda x}{2\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{2\tau\lambda y}{2\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\right)\right] \qquad (6.3.3)$$

وبالتالي:

$$\mathrm{p}^2 = (1+\tau\lambda r^2)p^2 + \left(\tau\lambda x\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \tau\lambda y\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\right)$$

$$p^2 = (1+\tau\lambda r^2)p^2 + \tau\lambda r p \qquad (7.3.3)$$

في هذا القسم ،نوضح تأثير الفضاء المشوه على القيم الذاتية للطاقة والوظائف الذاتية لنظام غير نسبي في وجود كمونات غير مركزية$V(r,\theta)$المعرفة كالتالي:

$$V(r,\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\left(\frac{\mathrm{Q}}{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{D_r}}{\boldsymbol{r^2}} + \frac{\boldsymbol{D\cos\theta}}{\boldsymbol{r^2}}\right)$$

نعتبر معادلة شرودنجر الثابتة التالية مع كمون كراتزر من نوع N-C :

$$\left[\frac{\mathrm{P}^2}{2m_e} + \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\left(\frac{\mathrm{Q}}{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{D_r}}{\boldsymbol{r^2}} + \frac{\boldsymbol{D\cos\theta}}{\boldsymbol{r^2}}\right)\right]\Psi(\mathrm{r},\theta) = \mathrm{E}\Psi(\mathrm{r},\theta) \qquad (8.3.3)$$

باستخدام التحويلات السابقة تصبح المعادلة كالتالي :

$$\left[\frac{\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\vec{p}\right)^2}{2m_e}+\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\mathrm{Q}}{\boldsymbol{r}}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)\boldsymbol{D_r}}{\boldsymbol{r^2}}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)\boldsymbol{D\cos\theta}}{\boldsymbol{r^2}}\right)\right]\Psi(\mathrm{r},\theta)=\mathrm{E}\Psi(\mathrm{r},\theta)\quad(9.3.3)$$

بالتعويض بالعلاقة نجد :

$$\left[\frac{1}{2m_e}\left((1+\tau\lambda r^2)p^2+\tau\lambda rp\right)+\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\mathrm{Q}}{\boldsymbol{r}}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)\boldsymbol{D_r}}{\boldsymbol{r^2}}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)\boldsymbol{D\cos\theta}}{\boldsymbol{r^2}}\right)\right]\Psi(\mathrm{r},\theta)=\mathrm{E}\Psi(\mathrm{r},\theta)$$
$$(10.3.3)$$

باستعمال الإحداثيات القطبية تتم كتابة معادلة شرودنغر في الفضاء المشوه بالشكل التالي:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)(1+\tau\lambda r^2)+\tau\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\right]+\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\mathrm{Q}}{\boldsymbol{r}}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)\boldsymbol{D_r}}{\boldsymbol{r^2}}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)\boldsymbol{D\cos\theta}}{\boldsymbol{r^2}}\right)\right]\Psi(\mathrm{r},\theta)=$$
$$\mathrm{E}\Psi(\mathrm{r},\theta)\quad(11.3.3)$$

بالقسمة على$\frac{\hbar^2}{2m_e}$نجد:

$$\left[\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)(1+\tau\lambda r^2)+\tau\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\right]-\frac{m_e\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_0}\hbar^2}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\mathrm{Q}}{\boldsymbol{r}}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)\boldsymbol{D_r}}{\boldsymbol{r^2}}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)\boldsymbol{D_\theta\cos\theta}}{\boldsymbol{r^2}}\right)\right]\Psi(\mathrm{r},\theta)=$$
$$-\frac{2\mathrm{m}}{\hbar^2}\Psi(\mathrm{r},\theta)\quad(12.3.3)$$

نضع المعادلة بالشكل أكثر تبسيطا :

$$\left[\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m_eq}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\mathrm{Q}}{r}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)D_r}{r^2}\right)+\frac{(1\pm\lambda r^2)}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{m_eqD_\theta}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\cos\theta\right)\right]\Psi(\mathrm{r},\theta)=-\frac{2\mathrm{m}}{\hbar^2}\mathrm{E}\Psi(\mathrm{r},\theta)\quad(13.3.3)$$

لفصل هذه المعادلة إلى جزأين جزء زاوي وأخر شعاعي نعوض دالة الموجة بالشكل التالي

$$\Psi(\mathrm{r},\theta)=\mathrm{R}(\mathrm{r})\Phi(\theta)\quad(14.3.3)$$

تصبح لدينا معادلتين منفصلتين زاوية وشعاعية:

المعادلة الزاوية هي:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{m_e \boldsymbol{q} \boldsymbol{D_\theta}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_0}\hbar^2}\cos\boldsymbol{\theta} - E_\theta\right)\Phi(\theta) = \boldsymbol{0} \qquad (15.3.3)$$

المعادلة الشعاعية هي:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)^2 + \frac{(1+\tau\lambda r^2)}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}} + \frac{(1\pm\lambda \mathrm{r}^2)}{\mathrm{r}^2}\mathrm{E}_\theta - \frac{m_e \boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_0}\hbar^2}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\mathrm{Q}}{\boldsymbol{r}} + \frac{(1+\tau\lambda r^2)\boldsymbol{D_r}}{\boldsymbol{r^2}}\right) + \frac{2\mathrm{m_e E}}{\hbar^2}\right]\mathrm{R(r)} = 0$$

$$(16.3.3)$$

حيثE_θهو ثابت الفصل.

الآن علينا حل هذه المعادلات.

الجزء الزاوي:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{m_e \boldsymbol{q} \boldsymbol{D_\theta}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_0}\hbar^2}\cos\boldsymbol{\theta} + E_\theta\right)\Phi(\theta) = \boldsymbol{0}$$

نلاحظ أن هذه المعادلة هي نفسها في حالة الفضاء العادي للفصل الثاني وحلها هو نفس الحل .

$$\mathrm{E}_\theta^{(2\mathrm{m})} = -\frac{1}{4}\mathrm{c}_{2\mathrm{m}}\left(\frac{\mathrm{mq}}{\pi\varepsilon_0\hbar^2}\mathrm{D}_\theta\right) \qquad (17.3.3)$$

والجزء الزاوي من دالة الموجة هو دالة ماثيو .

الجزء الشعاعي:

الآن سنحل المعادلة الشعاعية:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)^2+\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{(1\pm\lambda r^2)}{r^2}E_\theta-\frac{m_e\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_0}\hbar^2}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}Q}{\boldsymbol{r}}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)\boldsymbol{D_r}}{\boldsymbol{r^2}}\right)+\frac{2m_eE}{\hbar^2}\right]R(r)=0 \quad (18.3.3)$$

بالتبسيط نجد:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)^2+\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r^2}\left(E_\theta-\frac{m_e\boldsymbol{qD_r}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_0}\hbar^2}\right)-\frac{m_e\boldsymbol{q}Q}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_0}\hbar^2}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}{\boldsymbol{r}}\right)+\frac{2m_eE}{\hbar^2}\right]R(r)=0 \quad (19.3.3)$$

من أجل حل الجزء الشعاعي نستعمل طريقة نيكيفوروف يوفاروف ،نستخدم التحولات التالية:

$$S=\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r}\Longrightarrow S^2=\frac{1+\tau\lambda r^2}{\lambda r^2} \quad (20.3.3)$$

نبحث عن r:

$$r^2=\frac{1}{\lambda(S^2-\tau)}\Longrightarrow\ r=\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{(S^2-\tau)}} \quad (21.3.3)$$

لدينا:

$$\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r}=\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\frac{\partial}{\partial s} \quad (22.3.3)$$

باستعمال تحويل المتغير:

$$\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{\frac{\tau 2\lambda r\sqrt{\lambda}r}{2\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}-\sqrt{\lambda}\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}{\lambda r^2}\Longrightarrow\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{-1}{\sqrt{\lambda}r^2\sqrt{1+\tau\lambda r^2}} \quad (23.3.3)$$

بالتعويض نجد :

$$\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r}=\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\left(\frac{-1}{\sqrt{\lambda}r^2\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}\right)\frac{\partial}{\partial s}=-\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r^2 r}\frac{\partial}{\partial s} \quad (24.3.3)$$

بالتبسيط نجد :

$$\frac{(1+\tau r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{s}{r^2}\frac{\partial}{\partial s} \qquad (25.3.3)$$

ومنه تصبح كالتالي:

$$\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r} = -s(s^2-\tau)\lambda\frac{\partial}{\partial s} \qquad (26.3.3)$$

لدينا :

$$\left(\sqrt{(1+\tau\lambda r^2)}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 = \left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}r^2\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}\right)\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda(S^2-\tau)}\right)}\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 \qquad (27.3.3)$$

بالتبسيط نجد :

$$\left(\sqrt{(1+\tau\lambda r^2)}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 = \left(-(s^2-\tau 1)\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 \qquad (28.3.3)$$

ننشر العبارة:

$$\lambda\left[-(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\right]^2 = \lambda\left[-(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\right]\left[-(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\right]$$

$$\left(\sqrt{(1+\tau\lambda r^2)}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 = -\lambda(s^2\mp 1)^2\frac{\partial}{\partial s}^2 - \lambda(s^2\mp 1)\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(-(s^2\mp 1)\right)\right)\frac{\partial}{\partial s}$$

في الأخير تصبح العبارة كالتالي :

$$\left(\sqrt{(1+\tau r^2)}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 = \lambda\left[\left(s^2-\tau\right)^2\frac{\partial}{\partial s}^2 + 2s\left(s^2-\tau\right)\frac{\partial}{\partial s}\right] \qquad (29.3.3)$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$\left[\lambda\left((s^2-\tau)^2\frac{\partial}{\partial s}^2 + 2s(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s} - s(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\right) + \lambda s^2\left(E_\theta - \frac{m_e \boldsymbol{q} \boldsymbol{D_r}}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right) - \sqrt{\lambda}s\frac{m_e \boldsymbol{q} Q}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2} + \frac{2m_e E}{\hbar^2}\right]R(s) = 0 \qquad (30.3.3)$$

بالتبسيط والقسمة على λنجد:

$$\left[\left((s^2-\tau)^2\frac{\partial}{\partial s}^2+2s(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}-s(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\right)+s^2\left(E_\theta-\frac{m_e\boldsymbol{q}\boldsymbol{D_r}}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-s\frac{m_e\boldsymbol{q}Q}{2\sqrt{\lambda}\pi\varepsilon_0\hbar^2}+\frac{2m_eE}{\lambda\hbar^2}\right]R(s)=0 \qquad (31.3.3)$$

بحيث: $\eta=\frac{m_e\boldsymbol{q}Q}{2\sqrt{\lambda}\pi\varepsilon_0\hbar^2},\ \varepsilon=\frac{2m_eE}{\lambda\hbar^2}$

تصبح المعادلة من الشكل التالي:

$$\left[(\tau-s^2)^2\frac{\partial}{\partial s^2}^2-s(\tau-s^2)\frac{\partial}{\partial s}+s^2\left(E_\theta-\frac{m_e\boldsymbol{q}\boldsymbol{D_r}}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-\eta s+\varepsilon\right]R(s)=0 \qquad (32.3.3)$$

بقسمة المعادلة على $(\tau-s^2)^2$ تصبح كالتالي:

$$\left[\frac{\partial}{\partial s^2}^2-\frac{s}{(\tau-s^2)}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{s^2}{(\tau-s^2)^2}\left(E_\theta-\frac{m_e\boldsymbol{q}\boldsymbol{D_r}}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-\eta s+\varepsilon\right]R(s)=0 \qquad (33.3.3)$$

حل المعادلة الشعاعية في فضاء دي سيتر:

لدينا في فضاء ديسيتر deSitter$(\tau=1)$ومنه المعادلة الشعاعية تصبح:

$$\left[\frac{\partial}{\partial s^2}^2-\frac{s}{(1-s^2)}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{s^2}{(1-s^2)^2}\left(E_\theta-\frac{m_e\boldsymbol{q}\boldsymbol{D_r}}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-\eta s+\varepsilon\right]R(s)=0 \qquad (34.3.3)$$

بمقارنة المعادلة الشعاعية مع المعادلة (3.2.4)نجد :

$$\sigma(s)=(1-s^2)\ ,\ \tilde{\tau}(s)=-s\ \ ,\tilde{\sigma}(s)=\left(E_\theta-\frac{m_e\boldsymbol{q}\boldsymbol{D_r}}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)s^2-\eta s+\varepsilon$$

بالتعويض في العلاقة (7.2.4)نجد:

$$\pi(s)=\frac{-s}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}-\left(E_\theta-\frac{m_e\boldsymbol{q}\boldsymbol{D_r}}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-k\right)s^2+\eta s+k-\varepsilon} \qquad (35.3.3)$$

لإيجاد الطاقة يجب حساب قيمة k حيث يتم تحديد الثابت k بوضع تحت الجذر تساوي مربع كامل من الدرجة الأولى من كثير الحدود،نحصل عليه:

$$\left(\frac{1}{4}-\left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-\mathrm{k}\right)\mathrm{s}^2+\eta\mathrm{s}+\mathrm{k}-\varepsilon=(s-s_0)^2 \qquad (36.3.3)$$

ولدينا:

$$\pi(s)=\frac{-s}{2}\pm(s-s_0) \qquad (37.3.3)$$

لذلك،يُعطى مميز كثير الحدود تحت الجذر الذي يجب أن يكون يساوي الصفر.

$$\eta^2-4\left(\frac{1}{4}-\left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-\mathrm{k}\right)(\mathrm{k}-\varepsilon)=0 \qquad (38.3.3)$$

نكتب المعادلة الأخيرة كمعادلة جبرية من الدرجة الثانية بالنسبة إلىk :

$$4\mathrm{k}^2-\left(1-4\left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)+4\varepsilon\right)\mathrm{k}+\left(1-4\left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)\right)\varepsilon+\eta^2=0 \qquad (39.3.3)$$

نحسب المميز دلتا :

$$\Delta=\left(\varepsilon-\frac{1}{4}+\left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)\right)^2-\eta^2 \qquad (40.3.3)$$

بما أن المميز اكبر من الصفر فان للمعادلة حلان k_1 وk_2:

$$k\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - \left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right) + \sqrt{\Delta}\right] \\ k_2 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - \left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right) - \sqrt{\Delta}\right] \end{cases} \tag{41.3.3}$$

نضع :

$$\delta_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right) - k_{1,2}} \tag{42.3.3}$$

s_0هو حل مزدوج لمعادلة جبرية من الدرجة الثانية:

$$s_0 = \frac{\eta}{2\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right) - k_{1,2}}} \tag{43.3.3}$$

بالتبسيط نجد:

$$s_0 = \frac{\eta}{2\delta_{1,2}} \tag{44.3.3}$$

بالتعويض في عبارة $\pi(s)$نجد :

$$\pi(s) = \begin{cases} \pi_{1,2} = \left(\frac{-1}{2} \pm \delta_1\right) s \pm \frac{\eta}{2\delta_1} \\ \pi_{3,4} = \left(\frac{-1}{2} \pm \delta_2\right) s \pm \frac{\eta}{2\delta_2} \end{cases} \tag{45.3.3}$$

من اجل:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - \left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right) + \sqrt{\Delta}\right] \\ k_2 &= \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - \left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right) - \sqrt{\Delta}\right] \end{aligned} \tag{46.3.3}$$

حيث:

$$\delta_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\mathrm{E}_{\theta}^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0 \hbar^2}\right) - k_{1,2}} \qquad (47.3.3)$$

نختار القيم الذاتية π_1التي تعطينا نفس نتائج الفضاء العادي ونعوض في المعادلة التالية:

$$\tau(s) = \bar{\tau}(s) + 2\pi(s)$$

بالتعويض نجد:

$$\tau(s) = -s + 2\left[\left(\frac{-1}{2} + \delta_1\right)s + \frac{\eta}{2\delta_1}\right] \qquad (48.3.3)$$

تصبح كالتالي :

$$\tau(s) = 2(\delta_1 - 1)s + \frac{\eta}{\delta_1} \qquad (49.3.3)$$

من العلاقة (6.2.3)نجد :

$$\Lambda = k_1 + \pi_1'(s) \qquad (50.3.3)$$

هناك مشتق سالب. بالتعويض تصبح العلاقة كالتالي:

$$\Lambda = -\mathrm{n}\pi' - \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\sigma''}{2} = -2\mathrm{n}(\delta_1 - 1) - \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(-2)}{2} = \mathrm{n}(\mathrm{n} + 1 - 2\delta_1) \qquad (51.3.3)$$

ومنه:

$$\Lambda = \mathrm{k}_1 - \frac{1}{2} + \delta_1 = n(n + 1 - 2\delta_1) \qquad (52.3.3)$$

نبحث عن k_1 في المعادلة الأخيرة :

$$\mathrm{k}_1 = \frac{1}{2} - \delta_1(2n + 1) + \mathrm{n}(\mathrm{n} + 1) \qquad (53.3.3)$$

من اجل الحصول على القيم الذاتية للطاقة نعوض في k_1 :

$$k_1 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - \left(E_\theta^{(2m)} - \frac{2m^2 D_r}{\hbar^2}\right) + \sqrt{\left(\varepsilon - \frac{1}{4} + \left(E_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0 \hbar^2}\right)\right)^2 - \eta^2}\right] \quad (54.3.3)$$

ولدينا :

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(E_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0 \hbar^2}\right) - k_1}$$

لدينا أيضا:

$$k_1 = \frac{1}{2} - \delta_1(2n+1) + n(n+1)$$

بالتعويض نجد:

$$k_1 = \frac{1}{2} - (2n+1)\sqrt{\frac{1}{4} - \left(E_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0 \hbar^2}\right) - k_1} + n(n+1) \quad (55.3.3)$$

ومنه:

$$\left[k_1 - n(n+1) - \frac{1}{2}\right]^2 = \left[(2n+1)\sqrt{\frac{1}{4} - \left(E_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0 \hbar^2}\right) - k_1}\right]^2 \quad (56.3.3)$$

في الأخير نحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثانية لk_1:

$$k_1^2 + (2n^2 + 2n)k_1 + n^2(n^2 + 2n + 1) - \left(E_\theta^{(2m)} - \frac{2m^2 D_r}{\hbar^2}\right)(2n+1)^2 = 0 \quad (57.3.3)$$

بالتبسيط نجد:

$$k_1^2 + (2n^2 + 2n)k_1 + n^2(n+1)^2 - \left(E_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0 \hbar^2}\right)(2n+1)^2 = 0 \quad (58.3.3)$$

نحل المعادلة الأخيرة ونجد لها حلين بما أن المميز اكبر من الصفر:

$$k_1' = \frac{-(2n^2+2n)-2(2n+1)\sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}}{2} \qquad (59.3.3)$$

$$k_1'' = \frac{-(2n^2+2n)+2(2n+1)\sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}}{2} \qquad (60.3.3)$$

بالتبسيط نجد :

$$k_1' = -n(n+1)-(2n+1)\sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)} \qquad (61.3.3)$$

$$k_1'' = -n(n+1)+(2n+1)\sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)} \qquad (62.3.3)$$

نختار الحل k_1' .

لدينا :

$$k_1 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon+\frac{1}{4}-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{2m^2 D_r}{\hbar^2}\right)+\sqrt{\left(\varepsilon-\frac{1}{4}+\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)\right)^2-\eta^2}\right] = n(n+1)-(2n+1)\sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)} \qquad (63.3.3)$$

ومن هنا نتمكن من الحصول على القيم الذاتية للطاقة :

$$E_n = -\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{2m_e qQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_e}}\right)\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}\right)^{-2}-\frac{\lambda\hbar^2}{8m}\left[(2n+1)\left(2n+1+4\sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}\right)-1\right] \qquad (64.3.3)$$

حيث n=1,2,3,...

دالة الموجة$\Psi_n(x)$نحصل عليها من العلاقة (2.2.4) وبأخذالقيمة$\pi_1(s)$نجد:

$$\pi(s) = \pi_1(s) = \sigma(s)\frac{d}{ds}\left(ln\phi(s)\right) \Rightarrow \phi(s) = \text{Exp}\left(\int \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} ds\right) \qquad (65.3.3)$$

بتعويض قيم $\pi_1(s)$و$\sigma(s)$نجد :

$$\phi(s) = \text{Exp}\left(\int \frac{\left(\frac{-1}{2}+\delta_1\right)s+\frac{\eta}{2\delta_1}}{(1-s^2)} ds\right) \qquad (66.3.3)$$

بالتبسيط نجد:

$$\phi(s) = \text{Exp}\left(\left(\frac{-1}{2}+\delta_1\right)\int \frac{s}{(1-s^2)}\text{ds} + \frac{\eta}{2\delta_1}\int \frac{1}{(1-s^2)}\text{ds}\right) \qquad (67.3.3)$$

بعد حساب التكامل نحصل على:

$$\phi(s) = \text{Exp}\left(ln(1+s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{n}{\delta_1}\right)}(1-s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{n}{\delta_1}\right)}\right) \qquad (68.3.3)$$

في الأخير تصبح الدالة $\phi(s)$ كالتالي:

$$\phi(s) = (1+s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{n}{\delta_1}\right)}(1-s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{n}{\delta_1}\right)} \qquad (69.3.3)$$

نستخدم العلاقة التالية لإيجاد دالة الوزن:

$$\frac{d}{\text{ds}}[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s) \qquad (9.2.4)$$

نستخرج دالة الوزن:

$$\sigma(s)\frac{d\rho(s)}{\text{ds}} + \frac{\text{d}\sigma(s)}{\text{ds}}\rho(s) = \tau(s)\rho(s) \Rightarrow \tau(s) = \sigma(s)\frac{d\rho(s)}{\rho(s)\text{ds}} + \frac{\text{d}\sigma(s)}{\text{ds}} \qquad (70.3.3)$$

بالتبسيط نجد:

$$ln\rho(s) = \int\left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - \frac{\text{d}\sigma(s)}{\sigma(s)\text{ds}}\right)ds \qquad (71.3.3)$$

لتبسيط العبارة أكثر ندخل Exp:

$$\rho(s) = \mathrm{Exp}\left[\int\left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - \frac{d\sigma(s)}{\sigma(s)ds}\right)ds\right] \qquad (72.3.3)$$

لدينا:

$$\tau(s) = -s + 2\left[\left(\frac{-1}{2} + \delta_1\right)s + \frac{\eta}{2\delta_1}\right] = 2(\delta_1 - 1)s + \frac{\eta}{\delta_1} \qquad (73.3.3)$$

بتعويض قيم $\tau(s)$ و$\sigma(s)$ نجد :

$$\rho(s) = \mathrm{Exp}\left[\int\left(\frac{2(\delta_1-1)s+\frac{\eta}{\delta_1}}{(1-s^2)} - \frac{-2s}{(1-s^2)}\right)ds\right] \qquad (74.3.3)$$

نكتب العبارة بشكل أكثر تبسيطا:

$$\rho(s) = \mathrm{Exp}\left[2\delta_1\int\left(\frac{s}{(1-s^2)}\right)ds + \frac{n}{\delta_1}\int\left(\frac{1}{(1-s^2)}\right)ds\right] \qquad (75.3.3)$$

بعد حساب التكامل نجد:

$$\rho(s) = \mathrm{Exp}\left(ln(1-s)^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}\right)}(1+s)^{\left(-\delta_1 + \frac{\eta}{2\delta_1}\right)}\right) \qquad (76.3.3)$$

ومنه:

$$\rho(s) = ln(1+s)^{\left(-\delta_1 + \frac{\eta}{2\delta_1}\right)}(1-s)^{-\left(\delta_1 + \frac{\eta}{2\delta_1}\right)} \qquad (77.3.3)$$

لإيجاد $y_n(s)$ نستخدم علاقة رودريغز:

$$y_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}[(1-s^2)^n\rho(s)] \qquad (78.3.3)$$

حيث :

$$\rho(s) = (1+s)^{\left(-\delta_1 + \frac{2}{2\delta_1}\right)}(1-s)^{-\left(\delta_1 + \frac{2}{2\delta_1}\right)} \qquad (79.3.3)$$

بالتعويض نجد :

$$y_n(s)=\frac{C_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}\left[(1-s^2)^n ln(1+s)^{\left(-\delta_1+\frac{n}{2\delta_1}\right)}(1-s)^{-\left(\delta_1+\frac{n}{2\delta_1}\right)}\right] \qquad (80.3.3)$$

العلاقة الأخيرة تعتمد على كثير الحدود جاكوبي كما يلي :

$$y_n(s)=P_n^{\left(-\delta_1+\frac{\eta}{2\delta_1},-\delta_1-\frac{\eta}{2\delta_1}\right)}(s) \qquad (81.3.3)$$

ومنه يمكن كتابة $\mathrm{R}_1(s)$بالشكل التالي:

$$\mathrm{R}_1(\mathrm{s})=C_\mathrm{n}(1-s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{\eta}{\delta_1}\right)}(1+s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{\eta}{\delta_1}\right)}P_n^{\left(-\delta_1+\frac{\eta}{2\delta_1},-\delta_1-\frac{\eta}{2\delta_1}\right)}(s) \qquad (82.3.3)$$

يمكنناالآن كتابة الصيغة العامة لدالة الموجة Ψكالآتي:

$$\Psi_n(r,\theta)=C_\mathrm{n}\left(1-\frac{\sqrt{1+\lambda \mathrm{r}^2}}{\sqrt{\lambda}\mathrm{r}}\right)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1-\frac{\eta}{\delta_1}\right)}\left(1+\frac{\sqrt{1+\lambda \mathrm{r}^2}}{\sqrt{\lambda}\mathrm{r}}\right)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{\eta}{\delta_1}\right)}P_n^{\left(-\delta_1+\frac{2}{2\delta_1},-\delta_1-\frac{2}{2\delta_1}\right)}\frac{\sqrt{1+\lambda \mathrm{r}^2}}{\sqrt{\lambda}\mathrm{r}}\Phi(\theta) \qquad (83.3.3)$$

حيثC_nهو ثابت التقنين .

حل المعادلة الشعاعية في الفضاء ديسيتر المضادAnti de Sitter$(\tau=-1)$:

في هذه الحالة المعادلة الشعاعية تصبح

$$\left[\frac{\partial}{\partial s}^2+\frac{s}{(1+s^2)}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{s^2}{(1+s^2)^2}\left(E_\theta-\frac{m_e qD_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-\eta s+\varepsilon\right]R(s)=0 \qquad (84.3.3)$$

بنفس الطريقة نقارن المعادلة الشعاعية مع المعادلة (3.2.4):

$$\sigma(s)=(1+s^2)\ ,\ \tilde{\tau}(s)=s\ \ ,\tilde{\sigma}(s)=s^2\left(E_\theta-\frac{m_e qD_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-\eta s+\varepsilon$$

بالتعويض في العلاقة (7.2.4)نجد:

$$\pi(s)=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\left(k+\frac{1}{4}-\left(E_\theta-\frac{m_e qD_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)\right)s^2+\eta s+k-\varepsilon} \qquad (85.3.3)$$

يتمتحديدالثابتkبنفسالطريقةلذلك،نحصلعليه:

$$\pi(s)=\begin{cases}\pi_{1,2}=\left(\frac{1}{2}\pm\delta_1'\right)s\pm\frac{\eta}{2\delta_1'}\\ \pi_{3,4}=\left(\frac{1}{2}\pm\delta_2'\right)s\pm\frac{\eta}{2\delta_2'}\end{cases} \qquad (86.3.3)$$

من اجل:

$$k_1'=\frac{1}{2}\left[\varepsilon-\frac{1}{4}-\left(\mathrm{E}_\theta^{(2m)}-\frac{m_eqD_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)+\sqrt{\Delta'}\right] \qquad (87.3.3)$$

$$k_2'=\frac{1}{2}\left[\varepsilon-\frac{1}{4}-\left(\mathrm{E}_\theta^{(2m)}-\frac{m_eqD_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-\sqrt{\Delta'}\right]$$

حيث:

$$\Delta'=\left(\varepsilon+\frac{1}{4}-\left(\mathrm{E}_\theta^{(2m)}-\frac{m_eqD_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)\right)^{\mathbf{2}}+\eta^2 \qquad (89.3.3)$$

$$\delta_{1,2}'=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\mathrm{E}_\theta^{(2m)}-\frac{m_eqD_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)+k_{1,2}'} \qquad (90.3.3)$$

نختار القيم الذاتية π_2 ونعوض في :

$$\tau(s)=\bar{\tau}(s)+2\pi(s)$$

تصبح كالتالي :

$$\tau(s)=2(1-\delta_1')s+\frac{\eta}{\delta_1'}$$

من العلاقة (6.2.4)نجد :

$$\Lambda=\mathrm{k}+\pi'(s)$$

هناك مشتق سالب. بالتعويض تصبح العلاقة كالتالي:

$$\Lambda = k_1' + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \left(E_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0 \hbar^2}\right) + k_1'} = -n\left(n + 1 - 2\sqrt{\frac{1}{4} - \left(E_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0 \hbar^2}\right) + k_1'}\right)$$

(91.3.3)

ومن هنا تمكن الحصول على القيم الذاتية للطاقة :

$$E_n = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}\right)^{-2} - \frac{\lambda\hbar^2}{8m}\left[(2n+1)\left(2n+1+4\sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}\right) - 1\right] \quad (92.3.3)$$

نرى أن التعبير عن طيف الطاقة للنظام المدروس يعتمد على معامل التشوه. يمكننا أيضًا أن نرى أن طيف الطاقة في فضاءSitterأصغر من الطاقة الموجودة في الفضاء المضاد ديسيتر (anti–de Sitter).

لاستنتاج التعبير الكامل لدالة الموجة$\Psi_n(x)$،نستخدم علاقات$\pi_2(s)$نحصل أولا:

$$\phi(s) = (1+s^2)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta_1'\right)} e^{\frac{n}{2\delta_1'}\tan^{-1}(s)} \quad (93.3.3)$$

باستخدام المعادلات (8.2.4)(7.2.4) و (9.2.4)نجد:

$$y_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}\left[(1+s^2)^n \rho(s)\right]$$

حيث: $\rho(s) = (1+s^2)^{-\delta_1'} e^{\frac{n}{\delta_1'}\tan^{-1}(s)}$

العلاقة الأخيرة تعتمد على كثير حدود رومانوفسكي [Quesn]:

$$y_n(s) = R_n^{\left(\delta_1', \frac{n}{\delta_1'}\right)}(s) = \frac{C_n}{(1+s^2)^{-\delta_1'} e^{\frac{n}{\delta_1'}\tan^{-1}(s)}}\frac{d^n}{ds^n}\left[(1+s^2)^{n-\delta_1'} e^{\frac{n}{\delta_1'}\tan^{-1}(s)}\right] \quad (94.3.3)$$

ومنه يمكن كتابة $R_1(s)$بالشكل التالي:

$$R_2(s) = C_n(1+s^2)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta_1'\right)} e^{\frac{n}{2\delta_1'}\tan^{-1}(s)} R_n^{\left(\delta_1', \frac{n}{\delta_1'}\right)}(s) \qquad (95.3.3)$$

يمكننا الآن كتابة الجزء الشعاعي لدالة الموجة كالآتي:

$$\Psi_n(r,\theta) = C_n'\left(1+\frac{1-\lambda r^2}{\lambda r}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta_1'\right)} e^{\frac{n}{2\delta_1'}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda} r}\right)} R_n^{\left(\delta_1', \frac{n}{\delta_1'}\right)}\left(\frac{\sqrt{1-\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda} r}\right)\Phi(\theta) \qquad (96.3.3)$$

C_n'هو ثابت التقنين .

لما λتؤول إلى الصفر سنكون في الحالة العادية طاقة المعادلة تصبح هي نفس طاقة الجسيم المشحون تحت تأثير كمون كراتزر غير المركزي .

$$E_n = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}\right)^{-2} \qquad (97.3.3)$$

عبارة الطاقة وداله الموجة :

الآن نكتب الشكل النهائي للطاقة ودالة الموجة:

حالة فضاء ديسيتر:

نعوض ثابت الفصل المتحصل عليه في الفصل الثاني العادلة في عبارة الطاقة المشوهة المعدلة نجد العبارة النهائية للطاقة المشوهة :

$$E_n == -\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{2m_e qQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_e}}\right)\left(n-|m|+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}c_{2m}\left(\frac{mq}{4\pi\varepsilon_0}D_\theta\right)+\frac{2m_e q D_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}}\right)\right]^{-2} + \frac{\lambda\hbar^2}{8m}\Big[(2(n-|m|)+1)\left(2(n-|m|)+1+4\sqrt{-\left(c_{2m}\left(\frac{mq}{4\pi\varepsilon_0}D_\theta\right)-\frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}\right)-1\Big] \qquad (98.3.3)$$

n هو الرقم الكمي الرئيسي وm هو الرقم الكمي الثانوي .

من العلاقة$\left(\Psi(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)\right)$ وباستعمال دالة ماثيو والعلاقة نجد:

$$\Psi_n(r,\theta)=$$
$$N_n\left(1-\frac{\sqrt{1+\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r}\right)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1-\frac{\eta}{\delta_1}\right)}\left(1-+\frac{\sqrt{1+\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r}\right)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{\eta}{\delta_1}\right)}P_n^{\left(-\delta_1+\frac{2}{2\delta_1},-\delta_1-\frac{2}{2\delta_1}\right)}\frac{\sqrt{1+\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r}\Phi(\theta)$$
(99.3.3)

حيث$\Phi(\theta)$دالة ماثيو و $\eta=\frac{m_e\boldsymbol{q}Q}{\boldsymbol{2\sqrt{\lambda}\pi\varepsilon_0}\hbar^2}$

$$\delta_1=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_eqD_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{-\left(E_\theta^{(2m)}-\frac{m_eqD_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}}\quad(100.3.3)$$

حالة فضاء ديسيتر المضاد:

نعوض ثابت الفصل المتحصل عليه في الفصل الثاني المعدلة في عبارة الطاقة المشوهة المعدلة نجد العبارة النهائية للطاقة المشوهة :

$$E_n==-\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{2m_eqQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_e}}\right)\left(n-|m|+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}c_{2m}\left(\frac{mq}{4\pi\varepsilon_0}D_\theta\right)+\frac{2m_eqD_r}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}}\right)\right]^{-2}-\frac{\lambda\hbar^2}{8m}\left[(2(n-|m|)+1)\left(2(n-|m|)+1+4\sqrt{-\left(c_{2m}\left(\frac{mq}{4\pi\varepsilon_0}D_\theta\right)-\frac{m_eqD_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}\right)-1\right]$$
(101.3.3)

n هو الرقم الكمي الرئيسي وm هو الرقم الكمي الثانوي .

من العلاقة$\left(\Psi(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)\right)$ وباستعمال دالة ماثيو نجد:

$$\Psi_n(r,\theta)=N_n\left(1+\frac{1-\lambda r^2}{\lambda r}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta_1'\right)}e^{\frac{\eta}{2\delta_1'}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r}\right)}R_n^{\left(\delta_1',\frac{\eta}{\delta_1'}\right)}\left(\frac{\sqrt{1-\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r}\right)\Phi(\theta)$$
(102.3.3)

حيث$\Phi(\theta)$دالة ماثيو و $\eta = \frac{m_e \boldsymbol{q} Q}{\mathbf{2}\sqrt{\lambda}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}\hbar^2}$.

$$\delta_1' = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\mathrm{E}_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right) - n(n+1) - (2n+1)\sqrt{-\left(\mathrm{E}_\theta^{(2m)} - \frac{m_e q D_r}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)}} \quad (103.3.3)$$

المناقشة:

نلاحظ أن عبارة طيف الطاقة تحتوي على تصحيح إضافي، الذي يعتمد على معامل التشوه ويزداد انحرافه بسرعة معn^2 . هذا التأثير راجع إلى تعديل مبدأ هايزنبرغ .بالإضافة إلى أن في فضاء ديسيتر الطاقة تزداد بشكل طفيف أما في فضاء ديسيتر المضاد الطاقة تنقص بشكل طفيف أي الطاقة في فضاء ديسيتر اكبر من الطاقة في فضاء ديسيتر المضاد

تظهر خاصية أخرى مثيرة للاهتمام في نتائجنا عند حساب الفرق في الطاقةΔE.يصبح هذا الاختلاف ثابتًا عند القيم الكبيرة لـn .

الخاتمة :

في هذا العمل ، درسنا بشكل تحليلي معادلة شرودنغر للأنظمة ثنائية الأبعاد باستخدام فصل المتغيرات ومعادلات ماثيو للجزء الزاوي.لقد تبين لنا أن هذا الكمون قابل للتطبيق على أيون ثنائي القطب في مستوى إقليدي ثنائي الأبعاد ،وأن هذا هو التقريب من الدرجة الأولى الناتج عن تأثير التوزيع غير المتماثل للشحنات.تقارب حلولنا إلى حلول كولوم في نظام ثنائي الأبعاد عندما يختفي تأثير ثنائي القطب.لقد قدمنا تعبيرات عن الطاقة الذاتية والدوال الذاتية ودرسنا اعتمادها على عزم ثنائي القطب. تُظهر الطاقات أنها تزداد مع زيادة العزم ثنائي القطب إلى أقصى قيمة ثم تبدأ في التناقص.يطابق سلوك هذه الحلول سلوك القيم المميزة لدوال ماثيو.

يجب أن تكون الطاقات $E_{n,m}$حقيقية يعني أن عزم ثنائي القطب يجب ألا يتجاوز القيمة القصوى ، وإلا تختفي حالات الحد الموافقة.تعتمد هذه القيم الحرجة فقط على عدد الكم المغناطيسي m . وبالتالي يتم تصنيفها $\mathrm{D}_{\mathrm{crit}}^{\mathrm{m}}$. هذه النتيجة مشابهة لتلك التي وجدها الحيدري في حالة ثلاثية الأبعاد [14].كما أنه يتناقض مع حالة ثنائي القطب النقي على سبيل المثال عدم وجود مصطلح كولوم ، حيث انه من الضروري أن يتجاوز عزم ثنائي القطب الحد الأدنى للقيمة من أجل وجود حالات مرتبطة [15] .يمكن تفسير ذلك من خلال حقيقة أن " ثنائي القطب يجذب الشحنة في بعض الاتجاهات ، لكنه ينفر في الاتجاهات الأخرى، و هذا قد يزعزع استقرار حالات النظام إذا أصبح العزم ثنائي القطب كبيرا جدًا.

أما فيما يخص الفضاء المشوه نلاحظ انه في حالة ديسيتر يقوم بزيادة في قيمة الطاقة وفي حالة ديسيتر المضاد يقوم بإنقاص في قيمة الطاقة.

المراجع

قائمة المراجع

[1] G¨orlitz A;. et al.; Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions, Phys. Rev. Lett. 87, 130402 (2001)

[2] Martiyanov K., Makhalov V. and Turlapov A.; Observation of a Two-Dimensional Fermi Gas of Atoms, Phys. Rev. Lett. 105, 030404 (2010)

[3] J David. Griffiths, Introduction à la mécanique quantique, et édition, Éducation Pearson-Sec 4.1. (2005).

[4] S.Mignemi, Phys. Rev. 84 (2011) 025021.

[5] S. rGhosh and S. Mignemi, Int. J. Theor. Phys. 50 (2011) 1803.

[6] S. Mignemi Class. Quantum Grav. 29 (2012) 215019.

[7] M.M.Stetsko, J. Math. Phys. 56 (2015) 012101.

[8] S. Mignemi, Classical and quantum mechanics of the non relativistic Snyder model in curved space, Class. Quant. Grav. 29, 215019 (2012)

[9] M. M. Stetsko, Dirac oscillator and non relativistic Snyder-de Sitter algebra, J. Math. Phys. 56, 012101 (2015)

[10] B. Bolen and M. Cavagli`a, (Anti-)de Sitter black hole thermodynamics and the generalized uncertainty principle, Gen. Relativ. Gravit. 37, 1255-1262 (2005)

[11] A. Durmus, F. Yasuk, J. Chem. Phys. 126, 074108 (2007)

[12] Chang-Yuan Chen. Cheng-Lin Liu. Dong-Sheng Sun, The normalized wavefunctions of the Hartmann potential and explicit expressions for their radial average values, Physics Letters A 305 (2002) 341–348.

[13] M. Moumni, M. Falek. arXiv:1506.07812v4 [quant-ph] 13 May 2016.

[14] AlHaidari A.D., Analytic Solution of the Schrödinger Equation for an Electron in the Field of a Molecule with an Electric Dipole Moment, Ann. Phys. 323 1709 (2008).

[15] Fermi E. and Teller E., The Capture of Negative Mesotrons in Matter, Phys. Rev. 72 399 (1947)

الملخص

في هذا العمل قمنا بإجراء دراسة كمية لكمون لا مركزي متكون من كمون كراتزر و كمون ثنائي القطب وهذا في الحالة غير النسبية أي معادلة شرودنغر وهذه الدراسة تمت في حالتين الحالة الأولى وهي في الفضاء العادي ثنائي البعد حيث تحصلنا على عبارة الطاقة ودالة الموجة للنظام أين وجدنا شرط للحصول على الطاقة وهو عدم تجاوز عزم ثنائي القطب قيمة حدية معينة وهذه القيمة تتغير حسب قيمة معامل التفكك في كمون كراتزر وفي الحالة الثانية درسنا نفس المعدلة بنفس الكمون لكن في الفضاء المشوه ثنائي البعد فضاء(ديسيتر وفضاء ديسيتر المضاد)حيث وجدنا أن هذا التشوه يوثر على الطاقة حيث تزداد في حالة فضاء ديسيتر وتنقص في حالة فضاء ديسيتر المضاد.

Abstract

In this work we conducted a quantitative study of a non-central potential that is composed of Kratzer potential and dipole potential, and this is in the non-relative case, i.e. the Schrodinger equation, and this study was carried out in two cases. The first case is in the two-dimensional ordinary space where we obtained the expression of energy and the wave function of the system where we found a condition to obtain Energy, which is that the moment of the dipole does not exceed a critical value, and this value changes according to the value of the dissociation parameters in the Kratzer potential, and in the second case we studied the same equation with the same potential, but in the two-dimensional deformed space is a space (de Sitter and Anti de Sitter space) where we found this deformation affects the energy It increases in the de Sitter space state and decreases in the Anti de Sitter space state.

Résumé

Dans ce travail, nous avons mené une étude quantitative d'un potentiel non-central qui est composé du potentiel de Kratzer et du potentiel dipolaire, et c'est dans le cas non relatif, c'est-à-dire l'équation de Schrödinger, et cette étude a été réalisée dans deux cas. Le premier cas est dans l'espace ordinaire bidimensionnel où nous avons obtenu l'expression de l'énergie et la fonction d'onde du système où nous avons trouvé une condition pour obtenir l'énergie, qui est que le moment du dipôle ne dépasse pas une valeur critique, et cette valeur change en fonction

de la valeur des paramètres de dissociation dans le potentiel de Kratzer, et dans le second cas nous avons étudié la même équation avec le même potentiel, mais dans l'espace déformé bidimensionnel se trouve un espace (espace de Sitter et Anti de Sitter) où nous avons constaté que cette déformation affecte l'énergie Elle augmente dans l'état de l'espace de Sitter et diminue dans l'état de l'espace Anti de Sitter.