جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعية والحياة
علوم المادة

مذكرة ماستر

علوم المادة
فيزياء
فيزياء المادة المكثفة

رقم: أدخل رقم تسلسل المذكرة

إعداد الطالب:
صبايحي أميرة – شنيتي صورية

يوم: 20/09/2020

الدراسة الكمية لمعادلة شرودنغر لهزاز توافقي في فضاء مشوه في إطار ميكانيك الكم غير النسبي

لجنة المناقشة:

محمدي فرحات	أ. د.	جامعة محمد خيضر-بسكرة	رئيس
بلعمري جمال	أ. مح ب	جامعة محمد خيضر-بسكرة	مقرر
مومني مصطفى	أ. د.	جامعة محمد خيضر-بسكرة	مناقش

السنة الجامعية : 2020 - 2019

"عقلنا لديه فقط تلك الحدود التي ندركها فيه"

نابليون هيل

بسم الله الرحمن الرحیم

إهداء

إلى نفسي أنا

إلى من لم أنسى يوما فضلهما طيلة حياتي "والديا" قرة عيني أطال الله عمركما،

إلى اخوتي الذين كانوا سندالي: "صبرين، بثينة، اميمة، أكرم وعبد الحفيظ" حفظكم الله،

إلى من له مكانة خاصة في قلبي،

إلى صديقتاي "إلهام وأميمة" رفيقاتي طوال خمس سنين حيث رسموا في عقلي أجمل الذكريات،

إلى زميلتي التي تشاركت معها هذا العمل: "صورية"

إلى زملائي في دفعة 2020

وإلى كل الأحباب دون استثناء

إلى كل من كان لي الشرف بلاقاتهم والتعرف عليهم طيلة سنوات دراستي

إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل بفائق التواضع ونسأل الله أن يوفقنا في تحقيق الأماني والناجحات

أحبكم في الله.

ص.أميرة

الحمد الله وكفى والصلاة على الحبيب المصطفى وأهله ومن وفى أما بعد

الحمد الله الذي وفقني لتثمين هذه الخطوة في مسيرتي الجامعية بمذكرتي هذه ثمرة جهد ونجاح بفضله تعالى مهداة إلى

الوالدين حفظهما الله وأدامهما نور لدربي وإلى كل عائلة الكريمة التي ساندتني "عبد المؤمن، عائشة، مهدي، بشير،

فاروق،

وإلى رفيقات المشواري "أميرة، لمياء، نور، جهاد

صورية

كلمة شكر

هذا العمل هو إنجاز منطقي لدورتنا الجامعية

نشكر الله تعالى على فضله الكريم لمنح العون لنا في إنجاز هذا العمل،

فالحمد له أولا وأخيرا

كما نتقدم بجزيل الشكر إلى أستاذنا المحترم بلعمري جمال الذي تفضل بالإشراف على البحث

وعلى كل ما قدمه لنا من مساعدة في تقديمه لنصائح وتوجيهات رغم كل الظروف الصعبة التي أحاطت بنا،

كما نتقدم بشكر أيضا إلى أستاذنا المحترم فالق مختار على مساعدته لنا لإتمام هذا العمل.

كما نود شكر أعضاء لجنة المناقشة الذين بذلوا جهد مراجعة هذا العمل المتواضع، الأستاذ مجدي فرحات الذي ترأس

اللجنة والأستاذ مومني مصطفى الذي تشرف بالمناقشة

أخيرًا، شكراً جزيلاً لجميع أفراد عائلتنا وكل من هو قريب على قلوبنا.

الفهرس

مقدمة

مقدمة

ميكانيك الكم هو مجموعة من النظريات الفيزيائية التي ظهرت في القرن العشرين وخلقت مصطلح الازدواجية (موجة –جسيم)، والتي تتمثل في الخاصية الموجية والخاصية الجسيمية، ظهرت لتفسير الظواهر على مستوى الذرة والجسيمات دون الذرة، وكذلك للبحث عن الحلول الدقيقة لمعادلات الموجة في الإطار النسبي وغير النسبي.

تعد ميكانيك الكم على أنها النظرية التي نتعامل بها مع الأنظمة الذرية والنووية، تطورت هذه النظرية من خلال الميكانيك الكلاسيكية وعلى وجه الخصوص ميكانيك نيوتن والنظرية الكهرومغناطيسية لماكسويل**[1]** .

في ميكانيك الكم، يتم وصف الحالات الديناميكية لنظام الجسيمات بواسطة دوال تسمى "دوال الموجة"**[2]**.

تعتمد دراسة النظام المجهري على حل معادلة تفاضلية غير نسبية اقترحها العالم النمساوي**"إرفين شرودنغر Erwin Schrödinger" 1887–1961** حيث تمكن من تطوير توازي بين الميكانيك الكلاسيكية، والبصريات وتحقيق مفهوم ميكانيك الموجة**[3]**، وهذا ما أصبح يطلق عليه اليوم بمعادلة شرودنغر والتي تعتبر من أهم المعادلات في ميكانيك الكم، وهي بمثابة المبدأ الأساسي للتحريك، فهي تصف تغير وتطور الحالة الكمية لنظام قيد الاعتبار بدلالة الزمان والمكان.

مقدمة

ومن جهة أخرى يعد الهزاز التوافقي نموذجا فيزيائيا أساسيا يحتوي على حالات مرتبطة مع طاقة متبقية غير صفرية، وهو ما يفسر تأثير الحبس الكموني في مجال الفيزياء النووية، هذا النظام يمتلك حل تحليلي لتطوير نموذج أكثر تعقيدا، خاصة لوصف ديناميكيات الكريستال والاهتزازات الداخلية للجزيئات**[4]** .

لحل معادلة شرودنغر نستخدم طرق رياضية يمكننا تقسيمها الى نوعين: تحليلية وعددية حيث اخترنا في هذا العمل:

الطريقة التحليلية: وهي طريقة فصل المتغيرات التي تتمثل في البحث عن الدوال الذاتية للهاملتون**[5]**.

الطريقة العددية: هي طريقة متغيرة شبه عكسية من خلالها نحسب الطاقات ودوال الموجة المقابلة الناتجة عن طريقة فصل المتغير**[2]** .

يتمحور هذا الموضوع حول معالجة مشكلة في ميكانيك الكم غير النسبية من خلال حل معادلة شرودنغر أحادية البعد وثلاثية الأبعاد في إطار فضاء مشوه المتمثل في (DeSitter) و(Anti deSitter) وعليه تكون إشكالية الدراسة كالآتي: ما هو مدى تأثير التشوه على معادلة شرودنغر؟ ولرد على هذا الإشكال اعتمدنا خطة تستوفي شروط العمل بكل جزيئاته، انطلاقا من مقدمة وثلاث فصول وخاتمة على النحو التالي:

مقدمة

الفصل الأول جاء بعنوان "مدخل عام حول معادلة شرودنغر" وقد تناولنا فيه ثلاث أجزاء، الأول معادلة شرودنغر خصصناه للتعريف بهذه المعادلة وكذا المفاهيم المرتبطة بها، أما الثاني فكان يناقش معادلة شرودنغر في الإحداثيات الكروية، و الثالث فقد تكلمنا فيه عن هندسة التشوه، بينما **الفصل الثاني** يركز على "حل معادلة شرودنغر الشعاعية لهزاز توافقي في فضاء تبادلي" تناولنا فيه جزئين، الأول تحت هزاز أحادي البعد، أما الثاني فكان هزاز ثلاثي الأبعاد، **والفصل الثالث** كان بعنوان "حل معادلة شرودنغر الشعاعية لهزاز توافقي في فضاء متشوه" والذي أنطوى تحت جزئين أيضا كما في الفصل الثاني حيث تطرقنا إلى تحديد الحلول الكمية لمستويات الطاقة لنظام غير نسبي يصف حركة جسيم شرودنغر تحت تأثير الكمون المركزي، وفي الأخير خرجنا بخاتمة كحوصلة لنتائج عملنا هذا.

يحتوي العمل الذي قمنا بدراسته على عدد لا بأس بيه من الدراسات التي تطرقت الي جوانب مختلفة، في هذا الصدد نجد رسالة ماجستير لطالبة **سعيدي حنان** بعنوان: Introduction de la méthode quadratique différentielle généralisée dans le traitement du potentiel coulombien’ écranté 2004 بجامعة بسكرة.

وطبعا لا يخلو أي بحث من صعوبات قد تواجه الباحث أثناء بحثه، أولا قلة البحث في هذا الموضوع نظرا لأنه دراسة جديدة، إضافة إلى ذلك عدم إتقان اللغة الأجنبية كمبتدئين مما صعب ترجمة المعلومات.

الفصل الأول

تمهيد:

في فيزياء الكم غير النسبي يتم وصف الجسيم بواسطة دالة موجية $\psi(\vec{r},t)$، التي يتم الحصول عليها بواسطة معادلة شرودنغر، وهي عبارة عن معادلة مشتقات جزئية من الدرجة الأولى حينما تتعلق بالوقت ومعادلة من الدرجة الثانية حينما تتعلق بإحداثيات الفضاء **[6]**.

في هذا الفصل تناولنا فقط دراسة مفاهيم معادلة شرودنغر الثابتة (الكمون المركزي يعتمد فقط على السافة 'r').

1.معادلة شرودنغر:

معادلة شرودنغر هي المعادلة الأساسية لميكانيك الكم غير النسبي، حيث تلعب نفس الدور الأساسي الذي تلعبه معادلة نيوتن في الميكانيك الكلاسيكية او معادلات ماكسويل في الكهرومغناطيسية؛ تصف تطور الحالة الزمانية والمكانية لجسم كمي بواسطة دوال موجية:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi(\vec{r},t) \tag{1.1}$$

حيث:

- ❖ H مؤثر الهاميلتون يصف الطاقة الكلية للنظام المدروس عبارته من الشكل التالي :

$$H(r,t) = T + V(r,t) \tag{1.2}$$

تسمح معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن بإيجاد الحالات المحتملة للنظام، وهي حالة خاصة للمعادلة العامة التي تعتمد على الزمن حيث تعطي تطور دالة الموجة مهما كانت حالة النظام،

عبارتها كالتالي[7]:

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (1.3)$$

نعرف المؤثر الهاميلتون H بالعبارة التالية:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) \quad (1.4)$$

2.معادلة شرودنغر في الإحداثيات الكروية:

لتحديد دالة الموجة$\psi(r)$ ، لجسيم يتحرك في حقل متماثل كروي $V(r)$، يجب علينا حل معادلة شرودنغر التالية:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E + V(r)]\psi = 0 \quad (1.5)$$

حيث:

- $\hbar$ ثابت بلانك
- m كتلة الجسيم
- $V(r)$ هي الطاقة الكامنة
- $\Delta\psi$ **"لابلاسيان"** لدالة الموجةψ عبارته كتالي:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (1.6)$$

فيزيائيا تعتبر معادلة شرودنغر معادلة تفاضلية جزئية لها حلول لقيم معينة لطاقة E، او بمعنى أخرى هي القيم المسموح بها لطاقة E، حيث تدعى " **بالقيم الذاتية** "، والحلول ψ التي توافقها تدعى **"بالدوال الذاتية او الخصائص"**.

بتعويض المعادلة (1.3) في المعادلة (1.4) نتحصل على معادلة شرودنغر مستقلة عن الزمن تدعى الحالة المستقرة، عبارتها كالآتي:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)\right)\psi(r) = E\psi(r) \tag{1.7}$$

نظرا لأن كمون المعادلة(1.5) يعتمد فقط على المسافة، هذا يشير إلى أنه يمكننا تمثيل الإحداثيات الكروية بدلا من الاحداثيات الديكارتية "$\psi(r) \rightarrow \psi(r,\theta,\varphi)$" لهذا" نقوم بالتذكير بالعلاقة بين التمثيلين من خلال التعريفات التالية:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}; 0 \leq r < \infty \\ \varphi = \tan^{-1}\left({}^{y}/_{x}\right); 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right); 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1.9}$$

يأخذ " **لابلاسيان** " الشكل التالي:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{1.10}$$

نقوم بتعويض معادلة (1.10) في المعادلة (1.6) نتحصل على معادلة شرودنغر في الإحداثيات الكروية عبارتها كالتالي:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\psi(r,\theta,\varphi)+V(r,\theta,\varphi)=E\psi(r,\theta,\varphi) \tag{1.11}$$

باستعمال طريقة " **فصل المتغيرات** " نقوم بحل المعادلة (1.11):

كتابة دالة الموجة على الشكل التالي: " $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ "

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{Y(\theta,\varphi)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r)+R(r)\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y(\theta,\varphi)\right\}-[E-V(r)]R(r)Y(\theta,\varphi)=0 \tag{1.12}$$

بالقسمة على $R(r)Y(\theta,\varphi)$، والضرب في r^2، نتحصل على:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-V(r)]=-\frac{1}{Y(\theta,\phi)\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y(\theta,\varphi) \tag{1.13}$$

الطرف الايسر يعتمد على'r' والطرف الأيمن يعتمد على'θ,φ' ومنه نستطيع ان نعرف الطرفان بثابت عبارته كالتالي λ^2.يعطي لنا معادلتين:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-V(r)]R(r)=\lambda^2R(r) \tag{1.14}$$

و

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y(\theta,\phi)=Y(\theta,\varphi)\lambda^2 \tag{1.15}$$

حيث:

- ❖ λ^2 ثابت التفرقة نعرفه ب $l(l+1)$.

تسمى المعادلة الأولى بالمعادلة الشعاعية، وتسمى المعادلة الثانية بالمعادلة الزاوية، حيث نلاحظ ان حل المعادلة الشعاعية يعتمد على اختيار الكمون المركزي $V(r)$ بينما المعادلة الزاوية هي معادلة عالمية صالحة لجميع الكمون المركزي.

في معادلة شرودينغر الشعاعية التي تصف حركة جسيم غير نسبي، منغمس في الكمون المركزي $V(r)$ حيث يتم كتابة عبارة " **لابلاسيان** " في الإحداثيات الكروية على الشكل التالي:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \tag{1.16}$$

نعرف L^2 بالعبارة التالية:

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{1.17}$$

حيث:

- ❖ L يدل على العزم الحركي المداري **[8]**.

بتعويض عبارة L^2 وتبسيط المعادلتين (1.14) و(1.15) نتحصل على:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2}\big(E - V(r)\big) - \frac{\lambda^2}{r^2}\right]R(r) = 0 \tag{1.18}$$

$$L^2Y(\theta,\varphi) = \hbar^2\lambda^2Y(\theta,\varphi) \tag{1.19}$$

باستخدام طريقة فصل المتغيرات أيضا نقوم بحل المعادلة (1.19) حيث نضع:

$$Y(\theta,\varphi) = T(\theta)F(\varphi) \tag{1.20}$$

بتعويض المعادلة (1.17) في(1.19) المعادلة نجد:

$$F(\varphi)\left(\frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{T(\theta)}{F(\theta)\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial\varphi^2} + \lambda^2 T(\theta)F(\varphi) = 0 \tag{1.21}$$

بالقسمة على $T(\theta)F(\varphi)$، والضرب في$\sin^2\theta$، نتحصل على:

$$\frac{\sin^2\theta}{T(\theta)}\left(\frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right) + \lambda^2\sin^2\theta = -\frac{1}{F(\varphi)}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial\varphi^2} \tag{1.22}$$

يعتمد الطرف الأيسر علىθ ، بينما الطرف الأيمن فيعتمد علىφ ، ومنه نستطيع ان نعرف الطرفان بثابت يدعى بثابت التفرقة عبارتهm^2. يعطي لنا معادلتين:

$$\begin{cases} \frac{\sin^2\theta}{T(\theta)}\left(\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right) + \lambda^2\sin^2\theta = m^2 \\ -\frac{1}{F(\varphi)}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial\varphi^2} = m^2 \end{cases} \tag{1.23}$$

بتبسيط المعادلتين نتحصل على:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + \lambda^2\right)T(\theta) = 0 \tag{1.24}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + m^2\right)F(\varphi) = 0 \tag{1.25}$$

نقترح حل للمعادلة(1.25) من شكل التالي:

$$F(\varphi) = Ae^{-im\varphi} \tag{1.26}$$

احتمال تواجد إلكترون $P = |\psi|^2$ يبقى ثابت بزاوية(2π):

$$F(\varphi) = F(\varphi + 2\pi) \tag{1.27}$$

حيث: $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \pm n$

حل المعادلة(1.24) من الشكل:

$$T(\theta)) = Ap_l^m(\cos\theta) \tag{1.28}$$

حيث:

- p_l^m هي معادلة **"le gendre associée"**،***l*** هو عدد صحيح:

$$p_l^m(x) \equiv (1 - x^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} p_l(x) \tag{1.29}$$

حيث كثير الحدود**"le gendre"** $\boldsymbol{p_l}$، يتم تعريفه بواسطة صيغة**" Rodrigues ":**

$$p_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2 - 1)^l \tag{1.30}$$

في الأخير، نستطيع ان نسمي الجزء الزاوي لدالة الموجة **بالتوافقيات الكروية**.

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \epsilon\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}e^{im\varphi}p_l^m(\cos\theta) \tag{1.31}$$

مع:

$$\epsilon = \begin{cases} (-1)^m & m \geq 0 \\ 1 & m \leq 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

3.هندسة التشوه:

علاقات الميكانيك المشوهة: في فضاء ثلاثي البعد يتم تعريف مبدأ الشك لهايزنبارغ المشوه الذي يؤدي الى مبدأ الشك الممدد EUP بواسطة علاقات تدعى بعلاقات التبديل، معرفة كالتالي:

$$\begin{cases} [X_i, X_j] = 0 \\ [P_i, P_j] = i\hbar\tau\lambda\epsilon_{ijk}L_k \\ [X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} - \tau\lambda X_i P_j) \\ \tau = -1, +1 \end{cases} \tag{1.33}$$

حيث:

- ❖ λ معامل التشوه وهو قيمة صغيرة جدا لأنه ضمن إطار الجاذبية الكمية.

يتم تعريف معامل EUP على انه ثابت أساسي مرتبط بعامل قياس الكون الممتد ويتناسب معا الثوابت الكونية:

$$\Gamma = 3r\lambda = 3r/a^2 \tag{1.34}$$

حيث:

- ❖ a هو نصف القطر دوسيتر' De Sitter '
- ❖ L_k هو عنصر العزم الزاوي الذي يعبر عنه ب: $L_k = \epsilon_{ijk}X_iP_j$

في ميكانيك الكم العادية، علاقة التبديل (1.33) تؤدي الى علاقة مبدأ الشك (عدم اليقين) لهايزنبارغ:

$$\Delta X_i \Delta P_i \geq \frac{\hbar}{2}\left(1 - \tau\lambda(\Delta X_i)^2\right) \qquad (1.35)$$

❖ نضع: $\langle X_i \rangle = 0$

من خلال قيمة τ نميز نوعين من جبر فضاء دوسيتر:

❖ نموذج ضد دوسيتر (Anti deSitter): من اجل $\tau = -1$ يتميز هذا الجبر المشوه بوجود الحد الأدنى من عدم اليقين في العزم،

من أجل التبسيط نفترض وجود عدم اليقين متماثل $X_i = X$ وهذا يسمح لنا بكتابة الحد الأدنى من عدم اليقين للعزم في نموذج 'AdS':

$$(\Delta P)_{min} = \hbar\sqrt{\tau\lambda} \qquad (1.36)$$

❖ نموذج دوسيتر (deSitter): من اجل $\tau = +1$، العلاقة (1.35) لا تمثل القيمة الدنيا غير صفرية من عدم اليقين في العزم وهو موضح في (الشكل 1).

يمثل الشكل المقابل رسم علاقات عدم اليقين (الشك) وفقا للتعديل للحصول على العلاقة (1.35)، حيث نلاحظ وجود منطقة ملونة تمثل المنطقة المحظورة للموضع وعزم القياسات في فضاء ضد دوسيتر (AdS) .

المؤثرات غير التبادلية X_i و P_i تناسب الجبر المعدل (1.33) مما تؤدي الى علاقة عدم اليقين المعاد قياسها في فضاء العزم(1.35)، من أجل دراسة الحلول الدقيقة لمعادلة شرودنغر المشوهة.

نمثل المؤثرات كدوال للمؤثر x_i و p_i التي تفي بعلاقات التبديل العادية ويتم ذلك وفق التحويلات التالية:

$$\begin{cases} X_i = \frac{x_i}{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}} \\ P_i = -i\hbar\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\partial_{x_i} \end{cases} \quad (1.38)$$

اذا $\tau = -1$، المتغير r يختلف في المجال $\left]-1/\sqrt{\lambda}, 1/\sqrt{\lambda}\right[$ **[9].**

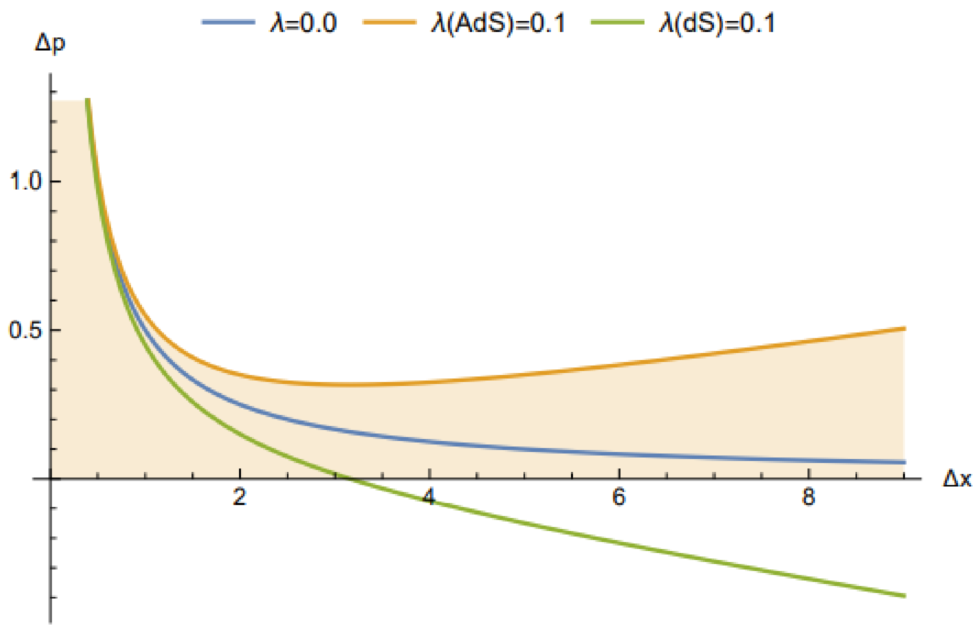

Figure 1: Graphic of HUP and EUP in both dS and AdS Cases

الفصل الثاني

تمهيد:

يعد الهزاز التوافقي ذو أهمية أساسية في الفيزياء حيث يصف تطور أي نظام فيزيائي بالقرب من موقع التوازن مما يجعله أداة تستخدم في العديد من المجالات كالكهرباء والالكترونيات والبصريات والمواد المكثفة**[10]**.

بينما في ميكانيك الكم، نستطيع أن نعرف من خلال الهزاز التوافقي كيفية حل معادلة شرودنغر، في هذا الفصل نقترح دراسة نظام هزاز توافقي لشرودنغر أحادي البعد وثلاثي البعد في مجال ميكانيك الكم غير النسبية.

1.حل معادلة شرودنغر الشعاعية لهزاز توافقي أحادي البعد:

في هذا الجزء، نحاول التعامل مع نظام هزاز توافقي غير نسبي أحادي البعد عن طريق حل معادلة شرودنغر الشعاعية التي تصف حركة جسيمm، تحت تأثير جهد مركزي **[2]**.

عبارة الكمون المركزي كالتالي:

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{2.1}$$

معادلة شرودنغر للهزاز التوافقي تعطى بالشكل التالي:

$$\left\{\frac{\mathrm{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right\}\psi(x) = E\psi(x) \tag{2.2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{m^2\omega^2 x^2}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\psi(x) = 0 \tag{2.3}$$

باستخدام الاختصارات التالية:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2mE}{\hbar^2} \\ a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \end{cases} \tag{2.4}$$

ومنه تكتب معادلة شرودنغر على النحو التالي:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x^2}{a^4} + \alpha\right)\psi(x) = 0 \tag{2.5}$$

نقوم بتبسيط المعادلة (2.5) باستخدام التحويل التالية:

$$\psi(x) = e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} f(x) \tag{2.6}$$

مع المشتقات التالية:

$$\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}} = e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - x\lambda f\right] \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\lambda x\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^2 x^2 f\right] \tag{2.8}$$

تتحول المعادلة (2.3) الي:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\lambda x\frac{\partial}{\partial x} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{a^4}\right)x^2 + (\alpha - \lambda)\right]f(x) = 0 \tag{2.9}$$

لتبسيط المعادلة (2.9) نقوم بتقليلها إلى فئة من المعدلات التفاضلية المعروفة بحل متعدد الحدود، نهمل معامل(x^2) وفقا للشروط التالية:

$$\lambda^2 - \frac{1}{a^4} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{a^2} \tag{2.10}$$

القيمة المقبولة لـλ لدالة الموجة يجب ان تكون في الأصل غير مفردة هي:

$$\lambda = \frac{m\omega}{\hbar} \tag{2.11}$$

هذا يبسط المعادلة (2.9) الى:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2}{a} x \frac{\partial}{\partial x} + (a - \lambda)\right] f(x) = 0 \tag{2.12}$$

نستبدل المتغير التالي:

$$x = a x_p \quad \Rightarrow \partial x = a \partial x_p \tag{2.13}$$

بتعويض العلاقة (2.13) في المعادلة (2.12) نجد:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial {x_p}^2} - 2x_x \frac{\partial}{\partial x_p} + (\alpha - \lambda) a^2\right] f(x_p) = 0 \tag{2.14}$$

لدينا:

$$(\alpha - \lambda) a^2 = 2n \tag{2.15}$$

من المعادلة (2.15) نستطيع التعبير عن طيف الطاقة على الشكل التالي:

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}(2n + 1) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{2.16}$$

من جهة أخرى لدينا

- ***Polynôme d'Hermite :***

$$f(x_\rho) = CH_n(x_\rho) = CH_n\left(\frac{x}{a}\right) \tag{2.17}$$

بمطابقة المعادلة (2.14) مع المعادلة (2.17) نجد في الأخير الحل النهائي لدالة الموجة عبارتها على النحو التالي:

$$\psi(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2a^2}}H_n\left(\frac{x}{a}\right) \tag{2.18}$$

- ❖ C معامل التقنين**[2]** .

2.حل معادلة شرودنغر الشعاعية لهزاز توافقي ثلاثي البعد:

نقوم بدراسة نظام هزاز توافقي ثلاثي الابعاد من خلال حل معادلة شرودنغر الشعاعية التي تصف حركة جسيم كتلته m، خاضع لكمون مركزي $V(r)$

من أجل تحديد القيم الذاتية ودالة الموجة التي تصف ديناميك الجسيم تحت تأثير كمون مركزي لنوع هزاز من الشكل:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2m}m\omega^2(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \tag{2.19}$$

تكتب معادلة شرودنغر على الشكل التالي:

$$\frac{\mathrm{P}^2}{2m}\psi + \frac{1}{2}m\omega^2r^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2.20}$$

هنا نفترض أن الكمون $V(x,y,z)$ مستقل عن الزمن، إذا يمكننا استخدام نفس طريقة الفصل بين المتغيرات التي استخدمناها في الفصل الأول للحصول على معادلة شرودنغر الشعاعية(1.14)، ومنه:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E-\frac{1}{2}m\omega^2r^2\right]\right)R(r)=l(l+1)R(r) \qquad (2.21)$$

إذن:

$$\frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\left(\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{m^2\omega^2\hbar^2}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r)=0 \qquad (2.22)$$

لتبسيط شكل المعادلة(2.22)، نستعمل التحويلات التالية:

$$R(r)=\frac{1}{r}f(r) \qquad (2.23)$$

$$\frac{\partial R(r)}{\partial r}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial r}-\frac{f(r)}{r}\right) \qquad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2f(r)}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}+\frac{2f(r)}{r^2}\right) \qquad (2.25)$$

بتعويض هذه التحويلات في المعادلة(2.22) نتحصل على الشكل التالي:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{m^2\omega^2r^2}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)f(r)=0 \qquad (2.26)$$

الان نقوم بوضع المتغير التالي $\rho=\left(\frac{r}{a}\right)^2$، وباستخدام المختصرات التالية:

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{2mE}{\hbar^2}\\ a=\sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}\end{cases} \qquad (2.27)$$

وبتعويض التحويلات التالية:

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{2r}{a^2} \qquad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2f}{\partial r^2}=\frac{2}{r^2}\left(2\rho\frac{\partial^2f}{\partial\rho^2}+\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) \qquad (2.29)$$

تصبح المعادلة(2.26) كما يلي:

$$\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\alpha a^2}{4}-\frac{l(l+1)}{4\rho}-\frac{\rho}{4}\right)f(\rho)=0 \qquad (2.30)$$

لحل هذه المعادلة التفاضلية(2.30) نستخدم التحويل التالي:

$$f(\rho)=e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^k w(\rho) \qquad (2.31)$$

مع

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}=e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^k\left[\frac{\partial w(\rho)}{\partial\rho}+\left(\frac{k}{\rho}-\frac{1}{2}\right)w(\rho)\right] \qquad (2.32)$$

$$\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial\rho^2}=e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^k\left[\frac{\partial^2 w(\rho)}{\partial\rho^2}+\left(\frac{2k}{\rho}-1\right)\frac{\partial w(\rho)}{\partial\rho}+\left(\frac{k^2-k}{2}-\frac{k}{\rho}+\frac{1}{4}\right)w(\rho)\right] \qquad (2.33)$$

باستبدال المعادلتين (2.32) و (2.33) في المعادلة (2.30)، نجد:

$$\left[\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\left(2k-\rho+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}+\left(k^2-\frac{k}{2}-\frac{l(l+1)}{4}\right)\frac{1}{\rho}+n\right]w(\rho)=0 \qquad (2.34)$$

حيث:

$$n=\frac{\alpha a^2}{4}-k-\frac{1}{4} \qquad (2.35)$$

يمكننا تحديد قيمة الثابت k من خلال حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية المعرفة

كالتالي:

$$4k^2-2k-l(l+1)=0 \qquad (2.36)$$

حلها يعطينا الجذرين التاليين:

$$k_1 = \frac{1}{2}(l+1) \quad , \; k_2 = -\frac{l}{2} \tag{2.37}$$

بنفس المنطق، نختار القيمة المناسبة للثابت k على النحو التالي:

$$k_1 = \frac{1}{2}(l+1) \quad \text{من اجل} \quad n = \frac{\alpha a^2}{4} - \frac{1}{2}(l+1) - \frac{1}{4}$$

الآن، وفقًا للمعادلة (2.34) يمكننا الحصول على التعبير عن طيف الطاقة بالشكل التالي:

$$E_{n,l} = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \tag{2.38}$$

الأن يمكننا حل المعادلة (2.34) رياضيا باستخدام كثير حدود

❖ ***Polynôme hypergéométrique*** يعطي لنا حل دقيق من الشكل التالي :

$$w(\rho) = C'F\left(-n, l + \frac{3}{2}, \rho\right) \tag{2.39}$$

من خلال المعادلة(2.39) يمكننا إعادة كتابة المعادلة(2.31) على الشكل الاتي:

$$f(r) = C'e^{-\frac{r^2}{2a^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k} F\left(n, l + \frac{3}{2}, \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \tag{2.40}$$

بتعويض المعادلة(2.40) في المعادلة(2.23) نتحصل على عبارة دالة الموجة الشعاعية

النهائية من الشكل التالي:

$$R(r) = \frac{C\prime}{a^{2k}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} r^{(2k-1)} F\left(n, l + \frac{3}{2}, \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \tag{2.41}$$

في الأخير، نجد دالة الموجة $\psi(\rho, \varphi)$على الشكل التالي:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{C\prime}{a^{2k}} e^{-\frac{r^2}{2k^2}} r^{(2k-1)} F\left(n, l + \frac{3}{2}, \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) Y(\theta, \varphi) \tag{2.42}$$

حيث:

- ❖ C'هو ثابت التقنين**[11]**.

الفصل الثالث

تمهيد:

في هذا الفصل ندرس تأثير الفضاء المشوه على القيم الذاتية للطاقة والدوال الذاتية في إطار ميكانيك الكم غير النسبية، في حالة معادلة شرودنغر الشعاعية لهزاز توافقي في فضاء أحادي وثلاثي الأبعاد.

1.حل معادلة شرودنغر الشعاعية لهزاز توافقي أحادي البعد:

قبل البدء في دراسة هذا التشوه الكمي على مشكلة هزاز شرودنغر نكتب عبارة الهاملتون أحادي البعد لهزاز توافقي:

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}_x^2 \qquad (3.1)$$

تكون معادلة شرودنغر كالتالي:

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right]\psi(x) = E\psi(x) \qquad (3.2)$$

باستخدام التحول الكموني:

$$\begin{cases} \hat{x}_i = \frac{x_i}{\sqrt{1+\tau\lambda\zeta^2}} \\ \hat{p}_i = -i\hbar\sqrt{1+\tau\lambda\zeta^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases} \qquad (3.3)$$

❖ حلول فضاء ضد دوسيتر (Anti deSitter) من اجل $\tau = -1$:

$$\begin{cases} x_i = \frac{x_i}{\sqrt{1-\lambda\zeta^2}} \\ P_i = -i\hbar\sqrt{1-\lambda\zeta^2}\frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases} \Longrightarrow \text{بعد واحد} \Longrightarrow \zeta \equiv x \qquad (3.4)$$

نجد:

$$\begin{cases} x = \frac{x}{\sqrt{1-\lambda x^2}} \\ P = -i\hbar\sqrt{1-\lambda x^2}\frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases} \begin{cases} x^2 = x.x = \left(\frac{x}{\sqrt{1-\lambda x^2}}\right).\left(\frac{x}{\sqrt{1-\lambda x^2}}\right) \\ P^2 = P.P = \left(-i\hbar\sqrt{1-\lambda x^2}\frac{\partial}{\partial x}\right).\left(-i\hbar\sqrt{1-\lambda x^2}\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{x^2}{(1-\lambda x^2)} \\ P^2 = \lambda x\hbar^2\frac{\partial}{\partial x} - \hbar^2(1-\lambda x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{cases} \tag{3.6}$$

بتعويض التحويل الكموني في المعادلة(3.2) نجد:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(1-\lambda x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\lambda x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{x^2}{(1-\lambda x^2)}\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{3.7}$$

$$\Rightarrow \left[(1-\lambda x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\lambda}\left(\frac{\lambda x^2}{1-\lambda x^2}\right) + \frac{2mE}{\hbar^2}\right]\psi(x) = 0 \tag{3.8}$$

الان لحل هذه المعادلة (3.8) نستخدم هذا التغير التالي:

$$\sqrt{\lambda}x = \sin(\sqrt{\lambda}\rho) \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}\rho) \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial\rho} = \cos(\sqrt{\lambda}\rho) \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{\cos(\sqrt{\lambda}\rho)} \tag{3.9}$$

ولدينا المشتقات التالية:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\cos(\sqrt{\lambda}\rho)}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{\lambda}\rho)}\left[\sqrt{\lambda}\tan(\sqrt{\lambda}\rho)\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\right] \tag{3.11}$$

بتعويض (3.11) و(3.10) في المعادلة(3.8) نجد:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\lambda}tan^2(\sqrt{\lambda}\rho)\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \tag{3.12}$$

الأن نستخدم المتغيرات التالية:

$$\begin{cases} u = \sin(\sqrt{\lambda}\rho) \\ v = \cos(\sqrt{\lambda}\rho) \end{cases} \tag{3.13}$$

مع المشتقات التالية:

$$\begin{cases} \partial u = \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\rho)\partial\rho \\ \partial v = -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\rho)\partial\rho \end{cases} \tag{3.14}$$

لتبسيط المعادلة(3.12) نستخدم التحويل التالي:

$$\psi(\rho) = v^s f(u) \tag{3.15}$$

والمشتقات التالية:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = \sqrt{\lambda}v^s\left[v\frac{\partial f}{\partial u} - s\frac{u}{v}f\right] \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} = \lambda v^s\left[v^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - (2s+1)u\frac{\partial f}{\partial u} + s(s-1)\frac{u^2}{v^2}f - sf\right] \tag{3.17}$$

بتعويض المعادلة(3.17) في(3.12) نجد:

$$\lambda v^s\left[v^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - (2s+1)u\frac{\partial f}{\partial u} + s(s-1)\frac{u^2}{v^2}f - sf - \frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}\frac{u^2}{v^2}f + \frac{2mE}{\hbar^2\lambda}f\right] \tag{3.18}$$

مع:

$$\Rightarrow v^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - (2s+1)u\frac{\partial f}{\partial u} + \left[s(s-1) - \frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}\right]\frac{u^2}{v^2}f + \left[\frac{2mE}{\hbar^2\lambda} - s\right]f = 0 \tag{3.19}$$

ومن جهة أخرى لدينا كثير حدود:

❖ ***polynôme de Gegenbaues :***

$$(1-u^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-(2s+1)u\frac{\partial f}{\partial u}+n(n+2s)f=0 \qquad (3.20)$$

بمطابقة المعادلة (3.19) مع (3.20) نجد:

$$\left[\frac{2mE}{\hbar^2\lambda}-s\right]f=n(n+2s) \qquad (3.21)$$

$$\frac{u^2}{v^2}\equiv \text{كثير حدود} \Rightarrow \left[s(s-1)-\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}\right]f=0\Rightarrow s^2-s-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\lambda}=0 \qquad (3.22)$$

يمكننا تحديد قيمة الثابت s من خلال حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية(3.22)

حيث حلها يعطينا الجذرين التاليين:

$$\begin{cases} s_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}} \\ s_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}} \end{cases} \qquad (3.23)$$

من المعادلة(3.21) نجد:

$$E=\frac{\hbar^2\lambda}{2m}\left[n^2+2sn+s\right] \qquad (3.24)$$

بتعويض قيمة s_1 و s_2 نتحصل:

$$E=\frac{\hbar^2\lambda}{2m}\left[n^2+n\pm n\sqrt{1+4\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}}+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+4\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}}\right] \qquad (3.25)$$

$$\Rightarrow E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\pm\sqrt{\frac{\hbar^4\lambda^2}{4m^2}+\hbar^2\omega^2}\right)+\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\frac{\hbar^2\lambda}{2m} \qquad (3.26)$$

نأخذ في الحالة الابتدائية:

$$\lambda = 0 \Rightarrow E = \left(n + \frac{1}{2}\right)(\hbar\omega) \tag{3.27}$$

ومنه نختار القيمة المناسبة:

$$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2}} \tag{3.28}$$

الان وفقا للمعادلة (3.26)و(3.28) يمكننا الحصول على التعبير عن طيف الطاقة بالشكل التالي:

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\hbar^4\lambda^2}{4m^2} + \hbar^2\omega^2} + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]\frac{\hbar^2\lambda}{2m} \tag{3.29}$$

وفي الأخير الحل الدقيق للمعادلة شرودنغر الشعاعية لهزاز توافقي يمكن التعبير عنه بواسطة كثير حدود"***Gegenbauer***" كما يلي:

$$\psi(\rho) = v^s f(u) \Rightarrow \psi(\rho) = (1 - u^2)^{s/2} f(v) \tag{3.30}$$

حيث:

$$f(u) = C_n^{(s)}(v) \tag{3.31}$$

ومنه نستنتج عبارة دالة الموجة:

$$\psi(x) = N v^s C_n^s(v) \tag{3.32}$$

حيث:

❖ N ثابت التقنين.

مع:

$$C_0^{(s)}(v) = 1\,, C_1^{(s)}(v) = 2sv \tag{3.33}$$

$$C_n^{(s)}(v) = \frac{1}{n}\left[2v(n+s-1)C_{n-1}^{(s)}(v) - (n+2s-2)C_{n-2}^{(s)}(v)\right] \tag{3.34}$$

2.حل معادلة شرودنغر الشعاعية لهزاز توافقي ثلاثي الأبعاد:

في هذا الجزء سنعمم التطبيق السابق من خلال حل معادلة شرودنغر لهزاز توافقي ثلاثي الأبعاد في ميكانيك الكم مع مبدأ عدم اليقين الممدد(EUP).

نذكر في البداية معادلة شرودنغر لهزاز توافقي ثلاثي الأبعاد في فضاء عادي:

$$H\psi(r) = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right) = E\psi(r) \tag{3.35}$$

باستخدام التحويل الكموني التالي:

$$\begin{cases} X^2 = \frac{r^2}{1+\tau\lambda^2 r^2} \\ P^2 = -\hbar^2\left[(1+\tau\lambda^2 r^2)\Delta + \lambda^2 x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right] \end{cases} \tag{3.36}$$

❖ حلول فضاء دوسيتر (deSitter) من اجل $\tau = 1$:

$$\begin{cases} X^2 = \frac{r^2}{1+\lambda^2 r^2} \\ P^2 = -\hbar^2\left[(1+\lambda^2 r^2)\Delta + \lambda^2 x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right] \end{cases} \tag{3.37}$$

بتعويض (3.37) في (3.35) نجد:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left((1+\lambda^2 r^2)\Delta + \lambda^2 x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{r^2}{1+\lambda^2 r^2}\right]\psi = E\psi \tag{3.38}$$

ومنه معادلة شرودنغر لهزاز توافقي ثلاثي الأبعاد في فضاء مشوه كالتالي:

$$\left[(1+\lambda^2r^2)\left(\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{D-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{L^2}{r^2}\right)+\lambda^2r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\frac{r^2}{1+\lambda^2r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right]\psi(r)=0 \tag{3.39}$$

نضع المتغير التالي:

$$y=\sqrt{1+\lambda^2r^2} \tag{3.40}$$

مع المشتقات التالية:

$$\lambda^2 r\,\partial \mathrm{r}=\mathrm{y}\,\partial \mathrm{y} \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\lambda^2 r}{y}\frac{\partial R}{\partial y} \tag{3.42}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}=\frac{\lambda^4r^2}{y^2}\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\left(\frac{\lambda^2}{y}-\frac{\lambda^4r^2}{y^3}\right)\frac{\partial R}{\partial y} \tag{3.43}$$

بتعويض(3.43)، (3.42)، (3.40) في المعادلة(3.39) نجد:

$$\left\{y^2\left[\frac{\lambda^2r^2}{y^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\lambda^2}{y}-\frac{\lambda^4r^2}{y^3}\right)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{D-1}{r}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\lambda^2}{y}-\frac{L^2}{r^2}\right]+\lambda^2r\frac{\lambda^2r}{y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\frac{r^2}{y^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right\}R(r)=0 \tag{3.44}$$

بتبسيط معادلة (3.44):

$$\left\{\lambda^2(y^2-1)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D\lambda^2y\frac{\partial}{\partial y}-\frac{L^2\lambda^2y^2}{y^2-1}-\frac{\omega^2m^2}{\lambda^2\hbar^2}\frac{(y^2-1)}{y^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right\}R(y)=0 \tag{3.45}$$

$$\Rightarrow \left\{(1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - Dy\frac{\partial}{\partial y} - \frac{L^2y^2}{(1-y^2)} - \frac{m^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2}\frac{(1-y^2)}{y^2} - \frac{2mE}{\lambda^2\hbar^2}\right\}R(y) = 0$$

(3.46)

ومنه:

$$\left\{(1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - Dy\frac{\partial}{\partial y} - \frac{L^2y^2}{(1-y^2)} - \frac{m^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2y^2} + \left(\frac{m^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2} - \frac{2mE}{\lambda^2\hbar^2}\right)\right\}R(y) = 0$$

(3.47)

الأن لإستعاب المصطلح $\left(\frac{1}{y^2}\right)$، نستخدم التحويل التالي:

$$R(y) = y^s f(y) \tag{3.48}$$

ولدينا المشتقات التالية:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = y^s\left(\frac{s}{y} + \frac{\partial}{\partial y}\right)f(y) \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = y^s\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2s}{y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{s(s-1)}{y^2}\right)f(y) \tag{3.50}$$

بتعويض (3.48)، (3.49)، (3.50) في المعادلة (3.47) نتحصل على:

$$\left\{(1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left[\frac{2s}{y} - (2s+D)y\right]\frac{\partial}{\partial y} - \frac{L^2y^2}{(1-y^2)} + \varepsilon - Ds - s(s-1) + \left[s(s-1) - \frac{m^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2}\right]\frac{1}{y^2}\right\}f(y) = 0$$

(3.51)

لدينا:

$$\varepsilon = \frac{m^2\omega^2}{\lambda^4\hbar^2} - \frac{2mE}{\lambda^2\hbar^2} \tag{3.52}$$

$$s(s-1) - \frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2} = 0 \Rightarrow s(s-1) = \frac{m^2\omega^2}{\lambda^2\hbar^2} \tag{3.53}$$

الأن نضع المتغير التالي:

$$f(y) = (1 - y^2)^\sigma g(y) \tag{3.54}$$

لدينا المشتقات التالية:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (1 - y^2)^\sigma \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{2\sigma y}{1-y^2}\right) g(y) \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (1 - y^2)^\sigma \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{4\sigma y}{(1-y^2)}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{4y^2}{(1-y^2)^2}\sigma(\sigma - 1) - \frac{2\sigma}{1-y^2}\right] g(y) \tag{3.56}$$

بتعويض (3.54)، (3.55)، (3.56) في المعادلة (3.51):

$$\left\{(1 - y^2)\frac{\partial}{\partial y} + \left[\frac{2s}{y} - (4\sigma + 2s + D)y\right]\frac{\partial}{\partial y} + [(2s + D)2\sigma - 4\sigma s - L^2 + 4\sigma(\sigma - 1)]\frac{y^2}{1-y^2} - 2\sigma - 4\sigma s - \frac{2mE}{\lambda^2\hbar^2} - Ds\right\} g(y) = 0 \tag{3.57}$$

لدينا:

$$(2s + D)2\sigma - 4\sigma s - L^2 + 4\sigma(\sigma - 1) = 0 \Rightarrow 4\sigma\left(\sigma + \frac{D}{2} - 1\right) - L^2 = 0 \tag{3.58}$$

مع التبسيط نجد:

$$\left\{(1 - y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left[\frac{2s}{y} - (4\sigma + 2s + D)y\right]\frac{\partial}{\partial y} - \frac{2mE}{\lambda^2\hbar^2} - 2\sigma(2s + 1) - Ds\right\} g = 0 \tag{3.59}$$

الأن نضع المتغير التالي:

$$z = 2y^2 - 1 \Rightarrow 1 - y^2 = \frac{1}{2}(1 - z) \tag{3.60}$$

مع المشتقات التالية:

$$\frac{\partial}{\partial y} = 4y\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.61}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = 8(z+1)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 4\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.62}$$

بتعويض (3.62)، (3.61)، (3.60) في المعادلة (3.59):

$$\left\{4(1-z^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2[(2s-4\sigma-D+1)-(4\sigma+2s+D+1)z]\frac{\partial}{\partial z} - \frac{2mE}{\lambda^4\hbar^2} - 2\sigma(2s+1) - Ds\right\}g(z) = 0 \tag{3.63}$$

من جهة أخرى لدينا كثير الحدود الاتي:

❖ ***Polynôme de Jacobi :***

$$\left\{(1-z^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + [(b-a)-(a+b+2)z]\frac{\partial}{\partial z} + n(n+a+b+1)\right\}f = 0 \tag{3.64}$$

يعطي الحل الدقيق التالي:

$$g(z) = P_n^{(a,b)}(z) \tag{3.65}$$

إذن:

$$\begin{cases} b-a = \frac{1}{2}(2s-4\sigma-D+1) \\ a+b+2 = \frac{1}{2}(4\sigma+2s+D+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sigma + \frac{D}{2} - 1 \\ b = s - \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.66}$$

بمطابقة (3.64) مع (3.63) نجد:

$$n(n+a+b+1) = -\frac{2mE}{\lambda^2\hbar^2} - 2\sigma(2s+1) - Ds \tag{3.67}$$

نستنتج من (3.67) طيف الطاقة لمعادلة شرودنغر لهزاز توافقي ثلاثي الابعاد في حالة مشوهة:

$$E = -\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m}\left[n\left(n + 2\sigma + \frac{D}{2} + s - \frac{1}{2}\right) + 2\sigma(2s+1) + Ds\right] \qquad (3.68)$$

الأن، الحل الدقيق للمعادلة يمكن التعبير عنه بواسطة كثير حدود **"*Jacobi*"**:

$$g(y) = P_n^{(a,b)}(2y^2 - 1) \qquad (3.69)$$

كما:

$$f(y) = (1-y^2)^{\sigma} P_n^{(a,b)}(2y^2 - 1) \qquad (3.70)$$

وبالتالي التعبير عن $R(y)$ يصبح كالتالي:

$$R(y) = y^s(1-y^2)^{\sigma} P_n^{(a,b)}(2y^2 - 1) \qquad (3.71)$$

الأن نعود الى المتغير القديم r، ومنه نستطيع كتابة دالة الموجة الشعاعية لهزاز توافقي $R(r)$ على النحو التالي:

$$R(r) = N(1+\lambda^2 r^2)^{s/2}(\lambda^2\lambda^2)^{\sigma} P_n^{(a,b)}(2\lambda^2 r^2 + 1) \qquad (3.72)$$

أخيرا، حل معادلة شرودنغر الثابتة لهزاز توافقي ثلاثي الأبعاد في فضاء مشوه هو دالة الموجة عبارتها كالتالي:

$$\psi(r) = N(1+\lambda^2 r^2)^{s/2}(\lambda^2 r^2)^{\sigma} P_n^{(a,b)}(2\lambda^2 r^2 + 1) Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (3.73)$$

خاتمة

خاتمة

في عملنا هذا تطرقنا للدراسة الكمية لمعادلة شرودنغر موصوفة بكمونات مركزية من النوع "هزاز توافقي" في فضاء مشوه ضمن إطار ميكانيك الكم غير النسبي حيث:

- ❖ قمنا بإعطاء لمحة عامة حول معادلة شرودنغر الثابتة حيث استخدمنا طريقة رياضية سمحت لنا بكتابة هذه المعادلة إلى معادلتين إحداهما شعاعية والأخرى زاوية تدعى هذه الطريقة بفصل المتغيرات تمكنا من خلالها من إيجاد الدوال الذاتية للهاملتون وهذا ما ورد في الفصل الأول.
- ❖ من خلال تطبيقنا لطريقة رياضية تمثلت في سلسلة عددية من تغير المتغيرات ووضع المشتقات على الجزء الشعاعي لمعادلة شرودنغر للهزاز التوافقي وباستعمالنا أكثر من كثير حدود: *Polynôme Gegenbauers*،*Polynôme de Jacobi* ، *Polynôme Hypergéométrique*، *Polynôme d'Hermite* تمكنا من إيجاد طيف الطاقة ودوال الموجة المقابلة لها في حالة فضاء عادي وأيضا فضاء مشوه أحادي وثلاثي البعد وهذا ما يبينه الفصل الثاني والثالث.
- ❖ الأن نستطيع القول بأن هدف هذه الدراسة هو تأثير تشوه الفضاء على المعادلة شرودنغر في ميكانيك الكم غير النسبي ونتيجة هذا التأثير تكون على القيم الذاتية للطاقة والدوال الذاتية، أدى هذا التأثير إلى وجود تغيير كبير في قيم نتائجنا مقارنة بالحالة العادية وهذا راجع إلى تعديل عامل مبدأ عدم اليقين " لهايزنبرغ ".

خاتمة

وفي الأخير، إن الدراسة الكمية ضمن إطار الفضاء المشوه تبقى محل انتباه من طرف الكثير من الباحثين لتسليط الضوء عليه والبحث فيه من جديد.

قائمة المراجع والمصادر

قائمة المراجع والمصادر

[1] - بى.تى.ماثيوز: مقدمة في ميكانيكا الكم، تر: أسامة زيد إبراهيم ناجى، الدار الدولية للنشر والتوزيع دط، القاهرة مصر، ص15.

[2] -B Houda, *Etude de l'oscillateur harmonique non relativiste avec un principe d'incertitude généralisé, mémoire de master, université Mohamed Khider -Biskra, (2016-2017).*

[3] -C Nadir, *Théorie des invariants d'un oscillateur harmonique à deux dimensions (2D) à masse et fréquence variables en présence de l'effet Aharonov-Bohm (AB), mémoire de magister, université Ferhat Abbas-Setif, (2007).*

[4]-*C. Cohen. Tannoudji, B. Diu, et F. Laloe*, *mécanique quantique Tome1, 480-486, 21 octobre 1997.*

[5]-*J. V. Lill, G. A. Parker, and J.C.Light, J. V. Lill, G. A. Parker, and J.C.Light, Chem*. *Phys. Lett. 89, 483 (1982), Chem. Phys. Lett. 89, 483 (1982).*

[6] -*L Khalissa*, *Sur la structure des états quantiques via les approches des perturbations et des variations, these de doctorat, université Mohamed Khider-Biskra, (2018).*

[7] -*S Assia*, *Solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un potentiel non central avec de plus un potentiel coulombien et un potentiel quadratique inverse, mémoire de master,*

Université Mohamed Boudiaf - M'sila, (2017).

[8] -*H Saidi*, *introduction de la méthode quadratique différentielle généralisée dans le traitement du potentiel coulombien 'écranté', mémoire de magister, université Mohamed Khider -Biskra, (2004).*

[9] -*M. Falek and M. Moumni and N. Belghar* *" Exact solution of schrodinger equation in (Anti-) deSitter spaces for hydrogen atom", (2015).*

[10] -*T Louiza*, *De L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau vers son Analogue non-relativiste, mémoire de master, université A. Mira-Bejaia , (2015).*

[11] -*B. Mohamed*, *Calcul des éléments de matrice dipolaires dans une géométrie non commutative, mémoire de magister, université D'El-oued, (2013).*

الملخص

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الخصائص الكمية لجملة فيزيائية موصوفة بكمون مركزي غير متعلق بالزمن، من خلال معالجة نظام هزاز توافقي في إطار ميكانيك الكم غير النسبي، حيث قمنا أولا بحل معادلة شرودنغر في الحالة العادية لبعد واحد وثلاثة أبعاد. بعد ذلك تطرقنا إلى حل هذه المعادلة في الحالة المشوهة حيث تم تحديد طيف الطاقة ودالة الموجة في كل حالة.

الكلمات المفتاحية: ميكانيك الكم غير النسبي، معادلة شرودنغر ، هزاز توافقي، فضاء مشوه.

ملخص

Résumé

Dans ce mémoire, on a essayé d'étudier les caractéristiques quantiques d'un corps physique décrit par un potentiel central non lié avec le temps, par le traitement du système d'un oscillateur harmonique dans le contexte de la mécanique quantique non relativiste, d'abord on a essayé de résoudre l'équation de Schrödinger dans le cas d'une seule dimension et à trois dimensions , ensuite nous avons aborder une solution à cette équation dans l'espace déformé, où nous avons déterminé le spectre d'énergie et la fonction d'onde dans chacun des cas.

Les Mots-Clés : *Mécanique quantique non relativiste, Equation de Schrödinger, Oscillateur harmonique, Espace déformé.*

ملخص

Abstract

In this thesis, we tried to study the quantum characteristics of a physical body described by a central potential not bound with time, by treating the system of a harmonic oscillator in the context of non-relative quantum mechanics. First, we tried to solve the Schrödinger equation in the case of only one dimension and three dimensions, then we approached a solution to this equation in the deformed space where we determined the energy spectrum and the wave function in each case.

Key-Words: *Non-relative quantum mechanics, The Schrödinger equation, Harmonic oscillator, deformed space.*