République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

Master en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

Chekkal Nadjet

Titre

Esperance conditionnelle et principe du maximum sous l'information partielle

Membres du jurés :

Dr.	**Imad Eddine Lakhdari**	U.Biskra	**Président**
Pr.	**Mokhtar Hafayed**	U.Biskra	**Encadreur**
Dr.	**Zouzou Akila**	U.Biskra	**Examinateur**

Séptembre 2020

Didicace

À ma chère mère

À mon chèr père,

tu laisses un grand vides dans ma vie, mais sache qu'il y aura toujours une place pour toi dans mon cœur. Même si tu ne sembles pas être avec moi, que je peux pas te toucher, te voir ni t'entendre, je sais que tu l'as toujours fait. Papa, tu me manques déja.

Mes très chers frères et sœurs.

Mes chères amies.

Mes chères collègues

À tout ma famille.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes remerciements mon directeur de mémoire **Mokhtar Hafayed**, professeur de mathématiques à l'université de Biskra, pour sa disponsabilité, sa patience,ses encouragements, l'orientation, l'assistance, qui a aidé à guider et élargir ma réflexion.

Mes remerciement les plus distingués sont adressés aux membres du jury **Dr**.**Imad Eddine Lakhdari** et **Dr**.**Zouzou Akila**, qui m'ont fait l'bonneur de bien vouloir accepter d'évaluer ce modeste travail. Je les remercie également pour leur générosité et leurs conseils.

J'adresse mes plus s'incères remerciements à tous les professeurs de mathématiques à l'université de Biskra pour tous leurs efforts et aussi qui ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions.

Je remercie très spécialement mon oncle **Taher** pour ses conseil et ses encouragements, et pour lui de me soutenir.

Je tiens à remercie

Asma, **Kelthoum**, **Souhila**, **Ha**lima, **Sabrina**, **Dounia**, **Meriem**, **Khadija** Si **hem** **Samah** et **Ikram**, pour leurs amitié et confiance, pour leurs encaragements et pour leurs aides dans les moments difficules.

Enfin, je remercie tous les personnes de prés ou de loin, qui par leurs conseils et leurs encouragements ont remonté mes moral.

Table des matières

Introduction générale

Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse par le problème de l'esperance conditionnelle avec quelque application en contrôle stochastique.

Notre objectif est résoudre un problème de contrôle optimal stochastique sous l'information partielle, qui minimiser une fonction de coût donné par :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right], \tag{1}$$

où $X(\cdot)$ est une solution en t d'un système.gouverné par EDS qui contrôle la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW(t) \\ X(0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

La suite de ce travail est organisée comme suit :

Dans le première chapitre, on trouve quelque rappels de base concernant le calcul stochastique.

Le chapitre deuxième contient le thème principal de ce travail. Ce chapitre est étudié l'espérance conditionnelle et ses propriétés avec la preuve.

Dans le troisième chapitre, en résumé, l'équation différentielle stochastique, et le théorème d'existence d'unicité de la solution. Aussi, on s'intéresse au problème du contrôle stochastique, nous commençons par présenter le problème du contrôle déterministe, la dynamique du système est modélisée par une EDO par contre, dans le cas stochastique, l'evolution est décrite par un processus de diffusion solution d'une EDS définie comme suit :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW(t) \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

où b et σ sont des fonctions déterministes et $W(t)$ un MB.

Dans le quatrième et dernier chapitre, on dévouer à l'étude de principe de maximum sous l'information partielle où le système différentiel est gouverné par $EDSs$. Pour cela, on suppose que la fonction de coût $J(u)$, où u est un contrôle admissible, est différentiable et accept un minimum en $\widehat{u}$ qu'on appelera contrôle optimal

$$J(\widehat{u}) = \min_{u \in \mathcal{U}} \{J(u), u \in \mathbb{U} : convexe\},$$

tel que $\mathcal{U}$ est l'ensemble de contrôle admissible, puis on perturbe le contrôle $\widehat{u}$ sur un intervalle de longueur ε où on obtient un contrôle u_ε qu'on appelera perturbation convexe de $\widehat{u}$, en remarquant ici que u_ε est un contrôle admissible et $\mathcal{G}_t$ adapté.

L'intérêt de la perturbation du contrôle optimal $\widehat{u}$ est d'introduire un contrôle u_ε sur laquelle nous pourrons dériver la fonction de coût $J(u_\varepsilon)$. L'ensemble de contrôle $\mathbb{U}$ est supposé

convexe. Les conditions nécessaires vérifiées par le contrôle $\widehat{u}$ appelerons conditions nécessaire d'optimalité.

Chapitre §1.
Quelques éléments de l'analyse stochastique

Chapitre 1

Quelques éléments de l'analyse stochastique

Dans ce chapitre on va présenter d'une manière simple et brève les principaux outils probabilistes de base utilisés pour formuler l'esperance conditionnelle et application, le point de départ du quelques éléments de l'analyse stochastique, en commençant par : la tribu, probabilité, loi de probabilité, processus stochastiques, martingale, le mouvement brownien, propriétés, intégrale de wiener, exemples, intégrale stochastique, processus d'Itô et formule d'Itô. Il y a des nombreux livres détaillant la théorie classique exposée dans ce chapitre, voir le livre de Yong & Zhou 1999, [8] et le document de Jeanblanc 2006. [1] et Pham 2005 [3].

1.1 Tribu

1.1.1 Définition d'une tribu

Définition 1.1.1 *On appelle tribu ou bien σ-algèbre de partie de E tous sous ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ tel que :*

a/ $E \in \mathcal{F}$

b/ $B \in \mathcal{F} \Longrightarrow B^c \in \mathcal{F}$ *(i.e Stabilité par passage au complémentaire)*

c/ $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}$ *(i.e Stabilité par réunion dénombrable)*

Définition 1.1.2 *Un espace mésérable est un espace muni d'une tribu.*

Proposition 1.1.1 *Soit E un ensemble quelconque et $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ une suite de tribu sur E, alors $\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ est une tribu sur E (i.e l'intersection quelconque des tribus sur E est une tribu).*

Remarque 1.1.1 *La réunion fini où dénombrable de tribu sur E n'est pas necessairement une tribu sur E.*

1.1.2 Mesurabilité

Définition 1.1.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et (E, ξ) deux espaces mesurables. Une application F de Ω dans E est dite $(\mathcal{F}, \xi)$ mesurable si $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \forall B \in \xi$, où*

$$F^{-1}(B) \overset{def}{=} \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \in B\}.$$

Définition 1.1.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une variable aléatoire réelle (v.a.r) X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ (telle que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$).*

1.1.3 Tribu engendrée

Soit E un ensemble quelconque, $A \subset \mathcal{P}(E)$ est une famille de partie de $\mathcal{P}(E)$.

Définition 1.1.5 *La tribu engendrée par A est l'intersection de toutes les tribus contenant A, on la note $\sigma(A)$ i.e : $\sigma(A) = \cap\mathcal{F}$, tel que $\mathcal{F}$ tribu et $A \subset \mathcal{F}$.*

Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux tribus, on note $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ i.e : $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$.

Définition 1.1.6 *La tribu engendrée par une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'ensemble des parties de Ω qui s'écrivent $X^{-1}(A)$ où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .On note cette tribu $\sigma(X)$.*

La tribu $\sigma(X)$ est contenue dans $\mathcal{F}$. C'est la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable.

Une v.a.r X est $\mathcal{G}$-mesurable si $\sigma(X) \subset \mathcal{G}$

Propriétés 1.1.1 *Si Y est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, $\sigma(X)$ mesurable i.e $Y^{-1}(A) \in \sigma(X), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou encore $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$, il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$, et réciproquement.*

Définition 1.1.7 *La tribu engendrée par une famille de v.a.r.s $(X(t), t \in [0,T])$ est la plus petite tribu contenant les ensembles $\{X^{-1}(t)(A)\}$ pour tout $t \in [0,T]$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On la note $\sigma(X(t), t \leq T)$.*

1.2 Probabilités

Définition 1.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable tel que :*

Ω : L'ensemble fondamentel où l'ensemble de tous les résultats possible, $\mathcal{F}$:une tribu définie sur Ω.

Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$, telle que :

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) $\forall A_1, A_2, ..., A_n, n$-évenements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoint (i.e $A_i \cap B_j = \phi \ \forall i \neq j$). Alors,
   $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Remarque 1.2.1 *L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit un espace de probabilité.*

Notation 1.2.1 $\mathbb{P}(A) = \int_A d\mathbb{P} = \int_\Omega 1_A \ d\mathbb{P}$ *où 1_A (fonction indicatrice) est la fonction définie sur Ω tel que :*

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 \ si \ \omega \in A \\ 0 \ si \ \omega \notin A \end{cases} \tag{1.1}$$

Propriétés 1.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, alors :*

– $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

– *Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

– $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, *où $B - A = B \cap A^c$.*

– *Si les A_n forment une suite croissante d'élément de $\mathcal{F}$, i.e $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{F}$ et $A_n \subset A_{n+1}$. Alors $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n)$ quand $n \to +\infty$.*

– *Si les A_n forment une suite décroissante d'élément de $\mathcal{F}$, i.e $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{F}$ et $A_n \supset A_{n+1}$. Alors $\mathbb{P}(\cap_n A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n)$ quand $n \to +\infty$.*

1.2.1 Ensembles négligeables

Définition 1.2.2 *Un ensemble $B \subset \Omega$ est dite négligeable s'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que, $B \subset A$ et $\mathbb{P}(A) = 0$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble de tous les ensembles négligeables de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Définition 1.2.3 *L'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit complet si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$ (dans ce cas A est négligeable $\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$).*

1.3 Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Définition 1.3.1 *Soit X une v.a définie sur cette espace .La loi de X est la probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\{\omega; X(\omega) \in B\} = \mathbb{P}(X \in B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

On difinie aussi la fonction de répartition de la variable X C'est la fonction croissance définie sur $\mathbb{R}$ par $F(X) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

1.3.1 Indépendace

Définition 1.3.2 *Deux sous-tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \forall A \in \mathcal{F}_1, \forall B \in \mathcal{F}_2.$$

Définition 1.3.3 *Une variable aléatoire X est indépendante d'une sous -tribu $\mathcal{G}$ si les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes*

Proposition 1.3.1 *La v.a X est indépendante de la sous tribu $\mathcal{G}$ si et seulement si*

$$\mathbb{P}\{B \cap (X \leq x)\} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall B \in \mathcal{G}.$$

Deux variables (X, Y) sont indépendantes si les tribus $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont indépendantes.

1.4 Processus stochastiques

1.4.1 Filtration

Définition 1.4.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une filtration est une famille $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ croissante de sous tribu de $\mathcal{F}$ i.e :$\forall 0 \leq s \leq t < \infty, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.*

Le quadriplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$ est appelé ***la base stochastique*** *ou bien* ***l'espace de probabilisé filtré****.*

Définition 1.4.2 *L'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ est dit complet si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ ($\mathcal{N}$ la famille de toute les ensembles négligeable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).*

Définition 1.4.3 *Si $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une filtration, alors on note :*

1) $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_t)$

2) $\mathcal{F}_{t^+} = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$

3) $\mathcal{F}_{t^-} = \sigma(\cup_{s<t}\mathcal{F}_s)$

Définition 1.4.4 *Une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue à droite (respectivement à gauche) si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ (resp $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$)*

Exemple 1.4.1 *(Une filtration non continue à droite)*

Soit $X(t) = tY, \forall t \in \mathbb{R}_+$ où Y est une v.a de Bernoulli (i.e $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$)

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration engendrée par $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s), s \leq t), \forall t \in \mathbb{R}_+$

On a : $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ et $\forall t > 0$

$\mathcal{F}_t = \sigma(Y) = \{\phi, \Omega, \{Y = 1\}, \{Y = -1\}\}$

On a donc , $\mathcal{F}_{0^+} = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{0+\varepsilon} = \sigma(Y) \neq \mathcal{F}_0$

On conclut que la filtration $\mathbb{F}$ n'est pas continue à droite

1.4.2 Processus

Définition 1.4.5 *Soit $T \subset \mathbb{R}_+$, toute famille $X = (X(t))_{t\in T}$ de v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelé* ***un processus stochastique.***

Remarque 1.4.1 *1. Un processus stochastique peut être vu comme une famille de v.a.s indicée par le temps : Pour $t \in T$,*

$$X(t) : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

2. Un processus stochastique peut être vu comme un fonction de deux variables

$$X : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

tel que

(a) *Si T est un ensemble dénombrable totalement ordonnée (i.e $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+$), X est appelé* ***une suite de v.a*** *ou bien* ***un processus stochastique à temps discrêt.***

(b) *Si $T = \mathbb{R}_+$, X est appelé* ***un processus stochastique à temps continue.***

Définition 1.4.6 (Processus adapté) *Un processus stochastique $X = (X(t), t \geq 0)$ est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si pour tout $t \geq 0$, la v.a $X(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable*

Définition 1.4.7 *Soit $X = (X(t))_{t\geq 0}$ un processus stochastique*

1) *Le processus X est à trajectoires continues (où est continu) si les applications $t \to X(t)(\omega)$ sont continu pour presque tout ω.*

2) *Le processus X est càdlàg (continu à droite pourvu de limite à gauche) si l'application $t \to X(t)(\omega)$ est continue à droite, pourvue de limite à gauche $\forall\omega \in \Omega$.*

3) *Le processus X est càglàd (continu à gauche pourvu de limite à droite) si l'application $t \to X(t)(\omega)$ est continue à gauche, pourvue de limite à droite $\forall\omega \in \Omega$.*

Définition 1.4.8 *Soit $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Une filtration naturelle associe à X est la filtration $\mathcal{F}_t^X$ définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(s),\ s \leq t), \forall t \in \mathbb{R}_+$.*

1.4.3 Ensemble et processus progressivement mesurable

Définition 1.4.9 *Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit la classe de progressivement de parties de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ par :*

$$\{A \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega \ /\forall t \in \mathbb{R}_+, A \cap ([0,t] \times \Omega)\} \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

La classe de progressivement est une tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ appelé la tribu des ensembles progressivement mesurable (ensemble progressifs).

Définition 1.4.10 (Progressivement mesurable) *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, l'application $(s,\omega) \rightarrow X(s)(\omega)$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Proposition 1.4.1 *Si $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus réel adapté et à trajectoires continues à droite (càd) où continues à gauches (càg), alors X est progressivement mesurable.*

1.4.4 Tribu optionnelle

Soit$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ un espace filtré

Définition 1.4.11 *On appelle tribu optionnelle et on note $\mathcal{O}$, la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par le processus X de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ adapté, continus à droite en tout $t \geq 0$ et ayant une limite à gauche (càdlàg) i.e :*

$$\mathcal{O} = \sigma(\{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, adapté, càdlàg\})$$

Définition 1.4.12 *Tout processus mesurable de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{O})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est appelé* ***processus optionnel.***

Proposition 1.4.2

1. *La tribu optionnel est inclus dans la tribu progressive.*
2. *Si X un processus optionnel, pour tout temps d'arrêt T, la variable d'arrêt $X(T)$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.*
3. *Si X un processus optionnel, le processus d'arrêt $X^T = X(T \wedge t)$ est optionnel.*

1.4.5 Tribu prévisible

Définition 1.4.13 *On appelle tribu prévisible et on note $\mathcal{P}$, la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les processus X de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$, adaptés, continues à gauche en tout $t \geq 0$ (càg) tel que :*

$$\mathcal{P} = \sigma(\{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, adaptés, càg\})$$

Définition 1.4.14 *Un processus mesurable de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dit prévisible.*

Proposition 1.4.3 *La tribu prévisible est inclus dans la tribu optionnel i.e :$\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$.*

Preuve.

Soit$X = (X(t))_{t\geq 0}$est un processus réel,adapté et càg. Montrons que X est optionnel.

On a le processus

$$X^{(n)}(t, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} X(k/2^n, \omega) 1_{[k/2^n, k+1/2^n[}(t)$$

est optionnel car il est adapté et càdlàg comme $X^{(n)} \longrightarrow X$ quand $n \to +\infty$, par continuité à gauche, la limite X est un processus optionnel. ■

1.4.6 Modification d'un processus

Définition 1.4.15 *Soit $X = (X(t))_{t\in T}$ et $Y = (Y(t))_{t\in T}$ deux processus stochastiques définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeur dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, on dit que X est une modification de Y si*

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1, \forall t \in T$$

(où le processus Y est appelé version du processus X).

1.4.7 Indistingubilité

Définition 1.4.16 *On dit que X et Y sont indistinguables si $\mathbb{P}-p.s$, les trajectoires de X et Y sont les même i.e :*

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t), \forall t \in T) = 1$$

1.4.8 Stochastiquement équivalent au sens large (où égaux en loi)

Définition 1.4.17 *On dit que X et Y sont égaux en loi si pour tous $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T^n$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^n$ et tous $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\mathbb{P}(X(t_1) \in A_1, X(t_2) \in A_2, \ldots, X(t_n) \in A_n) = \mathbb{P}(Y(t_1) \in A_1, Y(t_2) \in A_2, \ldots, Y(t_n) \in A_n)$$

1.4.9 Processus croissant :

On dit processus croissant le processus $A = (A_t, t \geq 0)$ tel que : $A_0 = 0$ et $t \to A_t$ est une fonction croissante, i.e

$$A_t(\omega) \leq A_s(\omega), \forall t \leq s, p.s$$

1.4.10 Processus gaussiens :

Un processus X est gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X(t), t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, i.e si

$$\forall n, \forall t_i, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i X(t_i)$$

est une variable aléatoire gaussienne.

Un processus gaussien est caractérisé par son espérance et sa variance.

1.5 Martingales

1.5.1 Cas discret

Définition 1.5.1 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un processus défini sur l''espace filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ *alors* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* $\mathbb{F}$*-martingale (où martingale adapté à* $\mathcal{F}_n$*) si les trois conditions suivantes sont vérifies :*

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* $\mathbb{F}$ *adapté (i.e* X_n *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable pour tout* n*).*
- X_n *est integrable pour tout* n *i.e* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}|X_n| < +\infty$.
- $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Propriétés 1.5.1 $\mathbb{E}(X_{n+p} \mid \mathcal{F}_n) = X_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.5.1 *Si* $Z_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ *où les* $X_i, \forall 1 \leq i \leq n$ *sont indépendantes équidistribuées centrées, alors* Z_n *est une martingale.*

Cas multidimensionnel *: Une famille de vecteurs* $(S_n, n \geq 0)$ telle que S_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une martingale, si les familles $(S_n^i, n \in \mathbb{N})$ sont des martingales $\forall i, 1 \leq i \leq d$.

1.5.2 Cas continu.

Définition 1.5.2 *Une famille de variables aléatoires* $(X(t), t \in [0, \infty[)$ *est une* $\mathbb{F}$ *martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *si les trois conditions suivantes sont vérifies :*

i) $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est* $\mathbb{F}$ *adapté (i.e* $X(t)$ *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$*).*

ii) $X(t)$ *est integrable pour tout* t *i.e* $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}[X(t)] < +\infty$.

iii) $\mathbb{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = X(s), \forall s \leq t$.

Propriétés 1.5.2 *Si* X *est une martingale* $\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(X(0)), \forall t$.

Si $(X(t), t \leq T)$ *est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale :* $X(t) = \mathbb{E}(X(T) \mid \mathcal{F}_t)$

Définition 1.5.3 *Une famille de variables aléatoires* $(X(t), t \in [0, \infty[)$ *est une* $\mathbb{F}$*-sous martingale (resp* $\mathbb{F}$*-sur martingale) par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *si les trois conditions suivantes sont vérifies :*

– $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est* $\mathbb{F}$ *adapté (i.e* $X(t)$ *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$*).*

– $X(t)$ *est integrable pour tout* t *i.e* $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}[X(t)] < +\infty$.

– $\mathbb{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) \geq X(s), \forall s \leq t$ *(resp* $\mathbb{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) \leq X(s), \forall s \leq t$*).*

Exemple 1.5.2 *Si* Y *est martingale, alors* Y^2 *est une sous martingale.*

Si Y *est une martingale et* A *un processus croissant,* $Y + A$ *est une sous-martingale.*

Proposition 1.5.1 (Inégalité de Doob) *Si* X *est une martingale continue,*

$$\mathbb{E}(\sup_{s\leq T} X^2(s)) \leq 4\mathbb{E}(X^2(T)).$$

Définition 1.5.4 (Martingale locale) *Un processus* M *est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissant vers* $+\infty$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, le processus arrète* M^{T_n}*, soit une martingale nulle en* 0.

Définition 1.5.5 (Semi-martingale) *Une semi-martingale est un processus réel, adapté et càdlàg que se décompose en une somme d'une martingale locale et d'un processus réels, càdlàg et à variation finie i.e une semi-martingale est un processus de la forme :*

$$X = M + Z$$

où M *est une martingale locale.et* Z *est un processus, réel càdlàg et à variation finie.*

1.6 Le mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $W = (W(t))_{t\geq 0}$ un processus stochastique.

Définition 1.6.1 *Le processus* W *est appelé* ***mouvement Brownien standard*** *si les quatres conditions suivantes sont vérifies :*

1/ $W(0) = 0$ $\mathbb{P}-p.s$

2/ $(W(t))_{t\geq 0}$ *est continu.*

3/ $\forall 0 \leq s < t < \infty, W(t) - W(s)$ *on a :* $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$ *(i.e acroissements stationnaires).*

4/ *Pour tout* $0 \leq s_0 \leq s_1 \leq ... \leq s_n \leq s < t < \infty$, *la variables* $W(t) - W(s)$ *est independante de* $(W(s_1), W(s_2), ..., W(s_n))$ *(i.e acroissements indépendantes)*

Proposition 1.6.1 *Soit* W *un* MB, *alors la variation quadratique de* W *sur* $[0, T]$ *existe dans* $\mathbb{L}^2$ *et vaut* T *i.e* $\langle W, W\rangle_T = T$.

1.7 Propriétés

Soit $W = (W(t))_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s), s \leq t)$ est sa filtration naturelle.

1.7.1 Processus gaussien

Proposition 1.7.1 *Le processus* W *est processus gaussien avec l''espérance nulle (i.e* $m(t) = \mathbb{E}(W(t)) = 0$*) et covariance* $Cov(W(t), W(s)) = \Gamma(s, t) = s \wedge t$.

1.7.2 Scaling

Proposition 1.7.2 *Soit* $(W(t))_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien. Alors les processus suivants sont des mouvements Brownien pour tout* $t \geq 0$ *:*

1. $\{-W(t)\}_{t\geq 0}$
2. $\left\{\frac{1}{\lambda}W(\lambda^2 t)\right\}_{t\geq 0}$ *(Propriété de scaling)*
3. $\left\{tW(\frac{1}{t})\right\}_{t>0}$ *,où* $W(0) = 0$

1.7.3 Propriétés de martingale

(a) Cas du Brownien

Proposition 1.7.3 *Si le processus W est une martingale. Alors le processus $(W^2(t)-t)_{t\geq 0}$ est une martingale. Réciproquement, si le processus X est continu tel que X et $(X^2(t)-t)_{t\geq 0}$ sont des martingales, alors X est un mouvement Brownien.*

Proposition 1.7.4 *Soit W_1 et W_2 deux MB indépendants. Le produit W_1W_2 est une martingale.*

(b) Généralisation

Proposition 1.7.5 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et W un mouvement Brownien sur cet espace. Si $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$, alors pour tout β réel, $(\exp(\beta X(t) - (\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)t), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale. Réciproquement, si X est un processus continu tel que $(\exp(\beta X(t) - (\mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)t), t \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale, il existe un mouvement Brownien W tel que $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$.*

1.7.4 Brownien multidimensionnel

Soit $W(t) = (W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t))^T, t \geq 0$ un processus n-dimensionnel (l'exposant ^{T}note la transposition d'un vecteur). On appelle W Brownien multidimensionnel un processus stochastique à trajectoire continues si le processus $(W_i, i \leq n)$ sont des Browniens indépendants (i.e $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$. Les accroissements $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ tel que $0 \leq i \leq n-1$, sont indépendantes.Pour chaque (a, b), le processus $aW_1(t) + bW_2(t)$ est un processus gaussien. Il facile de vérifier que $W(t) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(aW_1(t) + bW_2(t))$ est un MB

Si W est un Brownien n-dimensionnel, on a $\mathbb{E}\left(W^T(t)W(s)\right) = n(s \wedge t)$.

Le processus n-dimensionnel W est un MB si et seulement si les processus W_i et $W_iW_j - \delta_{i,j}t$ sont des martingales tel que

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$$

Définition 1.7.1 *Les mouvements Browniens à valeurs réelles W_1 et W_2 sont corrélés de coefficient de corrélation ρ si $W_1(t)W_2(t) - \rho t$ est une martingale.*

1.8 Intégrale de wiener

Définition 1.8.1 *On note $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, i.e $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 ds < \infty$. C'est un espace de Hilbert pour la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} f^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$.*

(a) Fonction en escalier

Pour $f = 1_{]u,v]}$, on pose

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(s)dW(s) &= \int_0^{+\infty} 1_{]u,v]}dW(s)\\ &= \int_u^v dW(s)\\ &= W(v) - W(u)\end{aligned}$$

Soit f une fonction en escalier, tel que :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} 1_{]t_{i-1},t_i]}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(s)dW(s) &= \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} 1_{]t_{i-1},t_i]}dW(s)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} \int_0^{+\infty} 1_{]t_{i-1},t_i]}dW(s)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(W(t_i) - W(t_{i-1}))\end{aligned}$$

La variable aléatoire $I(f) \stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} f(s)dW(s)$ est une variable aléatoire gaussienne d'espérance nulle et de variance $\int_0^{+\infty} f^2(s)ds$. En effet,

$$\begin{aligned}
var(I(f)) &= var(\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(W(t_i) - W(t_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 var(W(t_i) - W(t_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) \\
&= \int_0^{+\infty} f^2(s) ds \\
&= \| f \|_2
\end{aligned}$$

Parce que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f^2(s) ds &= \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 1_{]t_{i-1}, t_i]}(t) ds \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 \int_0^{+\infty} 1_{]t_{i-1}, t_i]} ds \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1})
\end{aligned}$$

L'intégrale de wiener est linéaire : $I(f+g) = I(f) + I(g)$ tel que f et g deux fonctions en escalier $\mathbb{E}(I(f)I(g)) = \int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds$. En effet :

$$\begin{aligned}
var(I(f+g)) &= var(I(f) + I(g)) \\
&= var(I(f)) + var(I(g)) + 2Cov(I(f), I(g)) \\
&= var(I(f)) + var(I(g)) + 2(\mathbb{E}(I(f)I(g)) - \mathbb{E}(I(f))\mathbb{E}(I(g))) \\
&= var(I(f)) + var(I(g)) + 2\mathbb{E}(I(f)I(g)) - 0 \\
\int_0^{+\infty} (f+g)^2 ds &= \int_0^{+\infty} f^2(s) ds + \int_0^{+\infty} g^2(s) ds + 2\mathbb{E}(I(f)I(g))
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(I(f)I(g)\right) &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}(f+g)^2(s)ds - \int_0^{+\infty} f^2(s)ds - \int_0^{+\infty} g^2(s)ds\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}(f^2(s)+g^2(s)+2f(s)g(s))ds - \int_0^{+\infty} f^2(s)ds\right.\\ &\left. - \int_0^{+\infty} g^2(s)ds\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f^2(s)ds + \int_0^{+\infty} g^2(s)ds + 2\int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds\right.\\ &\left. - \int_0^{+\infty} f^2(s)ds - \int_0^{+\infty} g^2(s)ds\right)\\ &= \int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds\end{aligned}$$

(b) cas générale

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, il existe une suite de fonction en escalier $\{f_n\} \subset \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ qui converge vers f dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, i.e

$$\int_0^{+\infty} |f_n - f|^2(x)dx \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} 0.$$

Dans ce cas, la suite f_n est une suite de cauchy dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$. La suite de v.a $F_n = \int_0^{+\infty} f_n(s)dW(s)$ est une suite de cauchy dans l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (en effet $\|F_n - F_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \rightarrow_{n,m\rightarrow+\infty} 0$), donc elle est convergente. Il reste vérifier que la limite ne dépend que de f et non du choix da la suite.On pose

$$I(f) \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} f(s)dW(s) = \lim_{n\rightarrow\infty}\int_0^{+\infty} f_n(s)dW(s)$$

On dit que $I(f)$ est **l'intégrale stochastique où intégrale de wiener** *de* f par rapport à W.

Le sous-espace de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ formé par les v.a.s $\int_0^{+\infty} f(s)dW(s)$ coïncide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement Brownien.

1.8.1 Propriétés

L'application $f \rightarrow I(f)$ est linéaire et isométrique de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ tel que :

$I(f+g) = I(f) + I(g)$ et l'isométrie que $\| I(f) \| = \| f \|$, tel que $\| I(f) \|$ est la norme $\mathbb{L}^2(\Omega)$ définie par $\|I(f)\|^2 = \mathbb{E}\left((I(f))^2\right)$, $\|f\|$ est la norme $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ définie par

$\|f\|^2 = \int_0^{+\infty} f^2(s)ds$.

La propriété d'isométrie : $\mathbb{E}\left(I(f)I(g)\right) = \int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds$.

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$. $I(f)$ est une v.a gaussienne centrée de variance $\int_{\mathbb{R}^+} f^2(s)ds$ mésurable par rapport $\sigma(W(t), t \geq 0)$ qui vérifie $\forall t \geq 0$

$$\mathbb{E}\left(I(f)W(t)\right) = \int_0^t f(s)ds.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(I(f)W(t)\right) &= \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^+} f(s)dW(s)W(t)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^+} f(s)dW(s)\right)\left(\int_0^t dW(s)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^+} f(s)dW(s)\right)\left(\int_{\mathbb{R}^+} 1_{[0,t]}(s)dW(s)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^+} f(s)1_{[0,t]}(s)dW(s)\right) \\
&\overset{(j)}{=} \int_{\mathbb{R}^+} f(s)1_{[0,t]}(s)ds \\
&= \int_0^t f(s)ds
\end{aligned}$$

$^{(j)}$Par isométrie.

Cette formule caractérise l'intégrale stochastique.

$I(f)$ est l'unique v.a Z gaussienne mésurable par rapport $\sigma(W(t), t \geq 0)$ telle que $\mathbb{E}\left(ZW(t)\right) = \int_0^t f(s)ds$ où $Z = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)dW(s)$.

1.8.2 Processus lié à l'intégrale stochastique

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ tel que $\int_0^t f(s)dW(s) \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} 1_{[0,t]}(s)f(s)dW(s)$.

On peut de la même façon définir $\int_0^t f(s)dW(s)$ pour f telle que $\int_0^T |f(s)|^2 ds < \infty, \forall T$, ce qui permet de définir l'intégrale stochastique pour une classe plus grande de fonctions.

On note par $\mathbb{L}^2_{loc}$ (espace des fonctions 2 fois localement intégrable).

Théorème 1.8.1 *Soit $f \in \mathbb{L}^2_{loc}$ et $M(t) = \int_0^t f(s)dW(s)$.*

1. *Le processus M est une martingale continue (d'espérance 0 et de variance $\int_0^t f^2(s)ds$).*
2. *Le processus M est un processus gaussien centré de covariance $\Gamma(s,t) = \int_0^{t\wedge s} f^2(u)du$ à accroissements indépendants.*
3. *Le processus $\left(M^2(t) - \int_0^t f^2(s)ds, t \geq 0\right)$ est une martingale.*
4. *Si f et $g \in \mathbb{L}^2_{loc}$, on a :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t f(u)dW(u) \int_0^s g(u)dW(u)\right) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du$$

(conséquence de l'isométrie).

1.8.3 Intégration par parties

Théorème 1.8.2 *Soit $f \in \mathcal{C}^1$ alors,*

$$I_t(f) = \int_0^t f(s)dW(s) = f(t)W(t) - \int_0^t f'(s)W(s)ds.$$

1.9 Exemples

1.9.1 Le brownien géométrique

Soit W un mouvement Brownien, b et σ deux constantes. Le processus

$$X(t) = X(0)\exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)\}$$

est appellé **Brownien géométrique.**

Ce processus est aussi appellé processus " $\log -normal$". En effet, donc ce cas

$$\ln X(t) = \left\{b - \frac{1}{2}\sigma^2\right\} t + \sigma W(t) + \ln x$$

et la variable qui est à droite suit la loi normale. On a immédiatement

Proposition 1.9.1 *Le processus $X(t)e^{-bt}$ est une martingale.*

En écrivant :

$$X(t) = X(s)\exp\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s)+\sigma(W(t)-W(s))\right\}$$

On établit que X est Markovien. Le caractère Markovien de X et les propriétés du MB permettent de calculer les espérances conditionnelles :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(X(t)\mid\mathcal{F}_s\right)\\
&=\mathbb{E}\left(X(s)\exp\{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)+\sigma(W(t)-W(s))\}\mid\mathcal{F}_s\right)\\
&=X(s)\exp(b(t-s))\mathbb{E}\left(\exp\left\{\left(\frac{-1}{2}\sigma^2\right)(t-s)+\sigma(W(t)-W(s))\right\}\mid\mathcal{F}_s\right)\\
&=X(s)\exp(b(t-s))\mathbb{E}\left(\exp\left\{\left(\frac{-1}{2}\sigma^2\right)(t-s)+\sigma W(t-s)\right\}\right)\\
&=X(s)e^{b(t-s)}\\
&=\mathbb{E}\left(X(t)\mid X(s)\right)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété de martingale de l'exponentielle du MB. Remarquons que nous avons utilisé que $X(t)\overset{loi}{=}X(s)\widetilde{X}(t-s)$ avec $\widetilde{X}(t-s)$ indépendant de $X(t)$ et de même loi que $X(t-s)$. De la même façon, en notant G une v.a. de loi $N(0,1)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(f(X(t))\mid\mathcal{F}_s\right)\\
&=\mathbb{E}\left(f(X(t))\mid X(s)\right)\\
&=\mathbb{E}\left(f(x\exp\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s)+\sigma(W(t)-W(s))\right\}\right)_{x=X(s)}\\
&=\mathbb{E}\left(f(x\exp\{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)+\sigma G\sqrt{t-s}\}\right)_{x=X(s)}\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(X(s)\exp\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s)+\sigma y\sqrt{t-s}\right\}\right)q(1,0,y)dy.
\end{aligned}$$

Ce processus est très souvent utilisé pour modéliser le prix d'un actif financier. Le rendement de l'actif entre deux dates est mesuré par la différence des *logarithmes des cours et est donné par la variable gaussienne*

$$\{b - \frac{1}{2}\sigma^2\}(t-s) + \sigma(W(t) - W(s)).$$

Il est facile de calculer les moments d'un Brownien géométrique ; par exemple $E(X(t)) = X(0)e^{bt}$ *(Utiliser ; par exemple, la propriété de martingale). Pour calculer le moment d'ordre 2, il suffit de faire les transformations évidentes suivantes*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2(t)\right) &= X^2(0)\mathbb{E}\left(\exp\{(2b-\sigma^2)t + 2\sigma W(t)\}\right) \\
&= X^2(0)\mathbb{E}\left(\exp\left\{(2b+\sigma^2)t - \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t + (2\sigma)W(t)\right\}\right) \\
&= X^2(0)\exp[(2b+\sigma^2)t]
\end{aligned}$$

On en déduit $VarX(t) = x^2 e^{2bt}(e^{\sigma^2 t} - 1)$.

Le ratio de Sharpe est

$$\frac{\mathbb{E}\left(X(t)\right) - x}{\sqrt{VarX(t)}}$$

1.10 Intégrale stochastique

Définition 1.10.1 *On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir* $\int_0^t \theta(s)dW(s)$ *pour des processus stochastiques* θ.

1.10.1 Cas de processus étagés

On appelle processus θ étagé (ou élémentaire), s'il existe une suite de réels $t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_i telles que θ_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, appartienne à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et que $\theta(t) = \theta_i, \forall t \in]t_i, t_{i+1}]$, le processus de type

$$\theta(s)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit alors
$$\int_0^{+\infty} \theta(s)dW(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

On vérifie : $\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} \theta(s)dW(s)\right) = 0$ et $Var\left(\int_0^{+\infty} \theta(s)dW(s)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} \theta^2(s)ds\right)$.

1.10.2 Cas général

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le cas de processus étajé.

On définit les processus càglàd de carré intégrable comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés càglàd, $(\mathcal{F}_t)$-adapté tels que

$$\|\theta\|^2 \stackrel{def}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \theta^2(t)dt\right] < \infty.$$

Les processus étagés appartiennent à Γ. On dit que θ_n converge vers θ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ si

$$\|\theta - \theta_n\|^2 \to 0 \; quand \; n \to +\infty.$$

L'application $\theta \to \|\theta\|$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet.

On peut définir $\int_0^{\infty} \theta(s)dW(s)$ pour tous les processus θ de Γ : On approche θ par des processus étagés.

Soit $\theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n$ où $\theta_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \widetilde{\theta}_i^n 1_{]t_i,t_{i+1}]}$, avec $\widetilde{\theta}_i^n \in \mathcal{F}_{t_i}$ la limite étant au sens de $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R})$.

L'intégrale $\int_0^{\infty} \theta(s)dW(s)$ est alors la limite dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des sommes $\sum_{i=1}^{k(n)} \widetilde{\theta}_i^n(W(t_{i+1}) - W(t_i))$ dont l'espérance est 0 et la variance

$$\mathbb{E}\left[\sum_i \widetilde{\theta}_i^2(t_{i+1} - t_i)\right].$$

On a alors

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta(s)dW(s)\right) = 0 \ et \ \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta(s)dW(s)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta^2(s)ds\right).$$

On note

$$\int_0^t \theta(s)dW(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \theta(s)1_{[0,t]}(s)dW(s)$$

Si θ est étagé

$$\int_0^t \theta(s)dW(s) = \sum_i \theta_i(W(t_{i+1}\wedge t) - W(t_i \wedge t)).$$

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $1_{]0,\tau]}(t)$ est adapté et on définit

$$\int_0^{\tau\wedge t} \theta(s)dW(s) = \int_0^t \theta(s)1_{]0,\tau]}(s)dW(s)$$

1.11 Propriétés

On note par Λ l'ensemble $\mathbb{L}^2_{loc}(\Omega\times\mathbb{R}^+)$ des processus θ adaptés càglàd vérifiant :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta^2(s)ds\right) < \infty, \forall t.$$

1.11.1 Linéarité.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et θ_1, θ_2 deux processus de Λ.On a

$$\int_0^t (a\theta_1(s) + b\theta_2(s))dW(s) = a\int_0^t \theta_1(s)dW(s) + b\int_0^t \theta_2(s)dW(s)$$

1.11.2 Propriétés de martingale

Proposition 1.11.1 *Soit*

$$M(t) = \int_0^t \theta(s)dW(s)$$

,où $\theta \in \Lambda$.

1. *Le processus M est une martingale à trajectoires continues.*
2. *Soit $N(t) = \left(\int_0^t \theta(s)dW(s)\right)^2 - \int_0^t \theta^2(s)ds$. Le processus $(N(t), t \geq 0)$ est une martingale.*

Proposition 1.11.2 *Si τ un temps d'arrêt et θ un processus $\mathbf{F^B}$-adapté tel que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau \theta^2(s)ds\right) < \infty$$

Alors,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau \theta(s)dW(s)\right) = 0 \text{ et } \mathbb{E}\left(\int_0^\tau \theta(s)dW(s)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau \theta^2(s)ds\right).$$

1.11.3 Un exemple

Proposition 1.11.3 *$\forall t$ on a*

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}(W^2(t) - t)$$

1.11.4 Martingale locale

On peut définir $\int_0^t \theta(s)dW(s)$pour des processus adaptés càglàd qui n'appartiennent pas nécessairement à $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R})$, mais qui vérifient $\forall t$, $\int_0^t \theta^2(s,\omega)ds < \infty$ $p.s$. Dans ce cas M n'est pas une martingale mais une martingale locale et $\mathbb{E}(M(t))$ peut être non nul. On utilise souvent qu'une martingale locale positive est une surmartingale.

1.12 Processus d'Itô

Définition 1.12.1 *Un processus X est un processus d'Itô si :*

$$X(t) = x + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s)$$

où $b(s)$ est un processus $\mathcal{F}_t^B$-adapté tel que $\int_0^t |b(s)|\, ds < \infty$ $p.s, \forall t \geq 0$ (au sens Lebesgue), *et σ un processus $\in \Lambda$.*

On utilise la notation suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t), \\ \\ X(0) = x, \end{cases}$$

Le coefficient $b(t)$ s'appelle le dérive ou le drift du processus X, et $\sigma(t)$ s'appelle le coefficient de diffusion ou volatilité.

L'écriture $dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t)$ est unique. Ceci signifie que si

$$dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t) = \widetilde{b}(t)dt + \widetilde{\sigma}(t)dW(t)$$

alor $b = \widetilde{b}; \sigma = \widetilde{\sigma}$. En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement.

1.12.1 Propriétés

Si $\sigma \in \Lambda$, on a

$$\mathbb{E}\left(X(t)\right) = \mathbb{E}\left(X(0)\right) + \int_0^t \mathbb{E}\left(b(s)\right) ds,$$

et $\forall s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X(t) \mid \mathcal{F}_s\right) &= X(0) + \int_0^s b(u)du + \mathbb{E}\left(\int_s^t b(u)du \mid \mathcal{F}_s\right) + \int_0^s \sigma(u)dW(u) \\ &= X(0) + \mathbb{E}\left(\int_s^t b(u)du \mid \mathcal{F}_s\right). \end{aligned}$$

Si $b \equiv 0$ et $\sigma \in \Lambda$, le processus X est une martingale continue.

La réciproque est vraie : sous certaines conditions d'intégrabilité et de mésurabilité, toute martingale continue s'écrit $x + \int_0^t \phi(s)dW(s)$.

1.12.2 Intégrale par rapport à un processus d'Itô.

Soit X un processus d'Itô de décomposition

$$dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t).$$

On note

$$\int_0^t \theta(s)dX(s) \stackrel{def}{=} \int_0^t \theta(s)b(s)ds + \int_0^t \theta(s)\sigma(s)dW(s).$$

1.12.3 Crochet d'un processus d'Itô

Soit Z une martingale continue de carré intégrable (telle que $\mathbb{E}\left(\sup_t Z^2(t)\right) < \infty$). On peut montrer qu'il existe un processus croissant continu A tel que $(Z^2(t) - A(t), t \geq 0)$ est une martingale. Le processus A est appellé le "crochet oblique", ou le crochet de Z.

On le note très souvent $A_t = \langle Z, Z\rangle_t$ ou encore $\langle Z\rangle_t$.

Proposition 1.12.1 *Le crochet de deux martingales continues M et N est égale à la variance quadratique de ces processus*

$$\langle M, N\rangle_t = \lim \sum_{i=1}^{n} (M(t_{i+1}) - M(t_i))(N(t_{i+1}) - N(t_i))$$

Il en résulte que si P et Q sont équivalentes, le crochet de M sous P et sous Q sont égaux. On dit que deux martingales continues sont orthogonales si leur crochet est nul, ou si leur produit est une martingale.

Si M est une martingale locale continue, on a équivalence entre $\mathbb{E}\left\langle M\right\rangle_t < \infty$ et $(M(s), s \leq t)$ est une martingale $\mathbb{L}^2$ bornée.

On étend la définition du crochet aux processus d'Itô : si

$$dX_i(t) = b_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t), i = 1, 2$$

sont deux processus d'Itô , leur crochet est par définition le crochet de leur partie martin-

gale. Cela tient à la propriété 1.12.1.

Nous en déduisons une nouvelle forme de la définition de ***Brownien*** *corrélés : deux Browniens sont corrélés si leur crochet est ρt. On définit le crochet du processus d'Itô X comme étant le crochet de sa partie martingale. Le crochet de X est $A(t) = \langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma^2(s)ds$. On caractérise le mouvement Brownien en disant que c'est une martingale continue d'espérance nulle et de crochet t.*

1.13 Formule d'Itô

Soit X un processus d'Itô de décomposition

$$dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

1.13.1 Première formule :

Théorème 1.13.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois continûment différentiable (i.e de classe $\mathcal{C}^2$). Alors*

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\sigma^2(s)ds$$

où

$$\int_0^t f'(X(s))dX(s) = \int_0^t f'(X(s))b(s)ds + \int_0^t f'(X(s))\sigma(s)dW(s)$$

Sous forme condensée

$$df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)dt$$

où

$$df(X(t)) = f'(X(t))b(t)dt + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)dt + f'(X(t))\sigma(t)dW(t)$$

Si on utilise le crochet :

$$df(X(t)) = f'(X(t))b(t)dt + \frac{1}{2}f''(X(t))d\langle X\rangle_t + f'(X(t))\sigma(t)dW(t)$$

La formule est facile à mémoriser en notant sa ressemblance avec la formule de Taylor, sous forme :

$$df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))dX(t)dX(t)$$

et la règle de multiplication :

$$dtdt = 0, dtdW(t) = 0, dW(t)dW(t) = dt$$

Exemple 1.13.1 – *calcul* $\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}(W^2(t) - t)$.

– $d(\exp(X(t))) = \exp(X(t))(dX(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)dt)$.

– *La seule solution de* $dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$ *est :* $S(t) = x\exp(X(t))$ *avec* $X(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)$.

1.13.2 Fonction dépendant du temps :

Théorème 1.13.2 *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *par rapport à* t *(i.e une fois différentiable en* t*), de classe* $\mathcal{C}^2$ *par rapport à* x *(i.e deux fois différentiable en* x*), on a*

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) = f(0, X(0)) &+ \int_0^t f'_t(s, X(s))ds + \int_0^t f'_x(s, X(s))dX(s) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X(s))\sigma^2(s)ds. \end{aligned}$$

Tel que

$$\int_0^t f'_x(s, X(s))dX(s) = \int_0^t f'_x(s, X(s))b(s)ds + \int_0^t f'_x(s, X(s))\sigma(s)dW(s)$$

Ce que l'on note

$$df(t,X(t)) = [f'_t(t,X(t)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,X(t))\sigma^2(t)]dt + f'_x((t,X(t))dX(t)$$

$$= f'_t(t,X(t))dt + f'_x(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,X(t))d\langle X\rangle_t$$

Application :

(**a**) Soit X un processus tel que :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s,X(s))ds + \int_0^t \sigma(s,X(s))dW(s)$$

Si f est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\sigma f'_x$ est bornée et

$$f'_t(t,x) + b(t,x)f'_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)f''_{xx}(t,x) = 0,$$

alors $(f(t,X(t)), t \geq 0)$ est une martingale.

L'opérateur $\mathcal{L}$ définir sur les fonctions de $\mathcal{C}^{1,2}$ par :

$$\mathcal{L}(f)(t,x) = b(t,x)f'_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)f''_{xx}(t,x)$$

est l'operateur infinitésimal de la diffusion.

Si

$$f'_t(t,x) + b(t,x)f'_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)f''_{xx}(t,x) = rf(t,x) \tag{1.2}$$

alors $(\exp(-rt)f(t,X(t)), t \geq 0)$ est une martingale.

Dans ce cas :

$$\exp(-rt)f(t,X(t)) = \mathbb{E}\left(\exp(-rt)f(T,X(T)) \mid \mathcal{F}_t\right)$$

Si f vérifie $f(T,x) = h(x)$ et solution de 1.2, on a :$\exp(-rt)f(t,X(t)) = \mathbb{E}\left(\exp(-rt)h(X(T)) \mid \mathcal{F}_t\right)$

(b) Soit X un processus (Brownien géométrique) tel que :

$$dX(t) = X(t)(rdt + \sigma dW(t)),$$

où r et σ sont des constantes. Alors le processus $(e^{-rt}X(t), t \geq 0)$est une martingale.

Il suffit de remarque que :

$$d(e^{-rt}X(t)) = e^{-rt}X(t)\sigma dW(t)$$

$$d(e^{-rt}X(t)) = dX(t)e^{-rt} - rdte^{-rt}X(t) = e^{-rt}(dX(t) - rX(t)dt)$$

et vérifié les conditions d'intégrabilité.

La solution de $dX(t) = X(t)(rdt + \sigma dW(t)), X(0) = 0$ est :

$$X(t) = x \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right)$$

On dit que X est un Brownien géométrique.

(c) Soit X un processus tel que $dX(t) = X(t)(b(t)dt + \sigma(t)dW(t))$, où b et σ sont des fonctions (X est dit Brownien géométrique à coefficient déterministes). Alors le processus $(\exp(-\int_0^t b(s)ds)X(t), t \geq 0)$ est une martingale.

1.13.3 Cas multidimensionnel

Soit $(X_i, i = 1, 2)$ deux processus d'Itô tels que

$$dX_i(t) = b_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t).$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2, on a

$$\begin{aligned}
&df(X_1(t), X_2(t)) \\
&= f_1'(X_1(t), X_2(t))dX_1(t) + f_2'(X_1(t), X_2(t))dX_2(t) \\
&+ \frac{1}{2}\left[f_{11}''(X_1(t), X_2(t))\sigma_1^2(t) + 2f_{12}''(X_1(t), X_2(t))\sigma_1(t)\sigma_2(t) + f_{22}''(X_1(t), X_2(t))\sigma_2^2(t)\right] dt.
\end{aligned}$$

Où f_i' désigne la dérivée par rapport à $x_i, i = 1, 2$ et f_{ij}'' la dérivée seconde par rapport à $x_i x_j$.

Sous forme condensée :

$$df(X_1X_2)(t) = \sum_{i=1}^{2} f_i'(X_1(t), X_2(t))dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{ij}''(X_1(t), X_2(t))\sigma_i\sigma_j dt$$

Proposition 1.13.1 ***Formule d'intégration par parties.***

Soit $X(t)$ et $Y(t)$ deux processus d'Itô tel que :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b_1(s)ds + \int_0^t \sigma_1(s)dW(s)$$

et

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t b_2(s)ds + \int_0^t \sigma_2(s)dW_s.$$

Alors,

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \langle X, Y\rangle_t$$

tel que,

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds$$

où

$$d(XY)(t) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt$$

La formule d'Itô montre que :

$$X^2(t) = X^2(0) + 2\int_0^t X(s)dX(s) + 2\int_0^t \sigma_1^2(s)ds$$

$$Y^2(t) = Y^2(0) + 2\int_0^t Y(s)dY(s) + 2\int_0^t \sigma_2^2(s)ds.$$

Alors,

$$(X(t)+Y(t))^2 = (X(0)+Y(0))^2 + 2\int_0^t (X(s)+Y(s))d(X(s)+Y(s)) + \int_0^t (\sigma_1(s)\sigma_2(s))^2 ds.$$

Tel que :

$$(X(t)+Y(t))^2 = X^2(t) + Y^2(t) + 2X(t)Y(t)$$

Avec,

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds.$$

1.13.4 Cas du Brownien multidimensionnel.

Théorème 1.13.3 *Soit $(X_i, i = 1, 2)$ deux processus d'Itô tels que*

$$dX_i(t) = b_i(t)dt + \sigma_i(t)dW_i(t)$$

Où W_1 et W_2 sont deux Browniens indépendants. On a :

$$\begin{aligned} df(X_1(t), X_2(t)) &= f_1'(X_1(t), X_2(t))dX_1(t) + f_2'(X_1(t), X_2(t))dX_2(t) \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{11}''(X_1(t), X_2(t))\sigma_1^2(t) + f_{22}''(X_1(t), X_2(t))\sigma_2^2(t)\right] dt. \end{aligned}$$

Dans le cas générale (plusieurs Brownien indépendants), soit $(X(t), t \geq 0)$ un processus d'Itô multidimensionnel de composantes $(X_i(t), i \leq n)$ tel que

$$dX(t) = u(t)dt + v(t)dW(t)$$

soit

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \ldots \\ dX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & \ldots & v_{1,p} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & \ldots & v_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \ldots & \ldots & v_{n,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1 \\ dW_2 \\ \ldots \\ dW_n \end{bmatrix}$$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$, alors :

$$df(t, X(t)) = f'_t(t, X(t))dt + \sum_{i=1}^{n} f'_i(t, X(t))dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f''_{ij}(t, X(t))dX_i(t)dX_j(t)$$

Où l'on utilise les conventions d'écriture :

$$dW_i dW_j = \delta_{ij} dt, dW_i dt = 0, dtdt = 0.$$

Chapitre §.2
L'espérance conditionnelle et ses propriétés

Chapitre 2

L'espérance conditionnelle et ses propriétés

Le but de ce chapitre est étudié l'espérance conditionnelle et ses propriétés avec les démonstrations.

2.1 Espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fixé

2.1.1 Conditionnement sur un évènement :

Définition 2.1.1 *Soit A et B deux évènements de $\mathcal{F}$ (i.e $A, B \in \mathcal{F}$). Alors la probabilité conditionnelle de A sachant que B est :*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

.pour tout B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Propriétés 2.1.1 $\mathbb{P}(. \mid B)$ *est une nouvelle probabilité sur* Ω.

Définition 2.1.2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et soit X une variable aléatoire définie sur cet espace.*

Considérons le cas de X à valeurs dans $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Soit B un evènement de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ fixé et $Q(A) := \mathbb{P}(A \mid B)$.

On a alors l'espérance de X par rapport à Q :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(X) \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j Q(X = x_j) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\mathbb{P}(X = x_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbb{P}(X = x_j \cap B)\end{aligned}$$

On sait que :

$$\mathbb{P}(A) = \int_A d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{F}$$

et

$$\mathbb{P}\{(X = x_j) \cap B\} = \int_{(X=x_j)\cap B} d\mathbb{P} = \int_B 1_{(X=x_j)}(\omega) d\mathbb{P}, \tag{2.1}$$

tel que

$$1_{(X=x_j)}(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in (X = x_j) \\ 0 & si\ \omega \notin (X = x_j) \end{cases}$$

On sait que on peut écrire :

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{n} x_j 1_{(X=x_j)}(\omega) \tag{2.2}$$

D'après 2.1 et 2.2, on sait que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(X) &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbb{P}(X = x_j \cap B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{j=1}^{n} x_j \int_B 1_{(X=x_j)} d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B \sum_{j=1}^{n} x_j 1_{(X=x_j)} d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P},\end{aligned}$$

Implique que :

$$\mathbb{E}_Q(X)\mathbb{P}(B) = \int_B X d\mathbb{P}.$$

Ce qui implique :

$$\int_B \mathbb{E}_Q(X)d\mathbb{P} = \int_B Xd\mathbb{P},$$

tel que B un évènement fixé

Donc,on note par

$$\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}(X \mid B)$$

2.1.2 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit X une v.a définit sur cet espace. Soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 2.1.3 *On appelle l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire X sachant $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire et on la note $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ tel que :*

***a)**. $\mathcal{G}$-mesurable*

***b)**. Telle que,$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_A Xd\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}$.*

C'est l'unique (à une égalité $\mathbb{P}-$ p.s prés) variable $\mathcal{G}$-mesurable telle que :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})Y] = \mathbb{E}(XY),$$

pour toute variable Y, $\mathcal{G}$-mesurable bornée.

2.1.3 Espérance conditionnelle par rapport à une variable

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fixé et donné. Soient X, Z deux variables aléatoires définies sur cet espace

Soit $\mathcal{G}$ la tribu engendré par Z (i.e $\mathcal{G} = \sigma(Z)$).

Définition 2.1.4 *On appelle l'espérance conditionnelle de X sachant Z est une variable aléatoire définie comme l'espérance conditionnelle de X par rapport la tribu $\mathcal{G}$ (i.e $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$) on la note $\mathbb{E}(X \mid Z)$. Telle que $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ est une fonction de Z (i.e $\mathbb{E}(X \mid Z)$ est une variable aléatoire mesurable par rapport la tribu engendrée par Z).*

L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \mid Z)$ *est caractérisée par :*

a) *C'est une variable* $\sigma(Z)$ *mesurable.*

b) $\int_A \mathbb{E}(X \mid Z)d\mathbb{P} = \int_A Xd\mathbb{P}, \forall A \in \sigma(Z)$.

2.1.4 Espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X par rapport à un evènement B

Soit X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit B un evènement fixé de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 2.1.5 *On appelle l'espérance conditionnelle de* X *par rapport un evènement* B *fixé est une constante tel que :* $\int_B \mathbb{E}_B(X)\ d\mathbb{P} = \int_B Xd\mathbb{P}$

2.1.5 Espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X par rapport à une tribu engendrée par un évènement B

Soit B un évènement fixé de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ une tribu engendrée par l'evènement B (i.e $\mathcal{G} = \langle B \rangle$)

Définition 2.1.6 *On appelle l'espérance conditionnelle de* X *par rapport à* $\mathcal{G}$ *et on la note* $\mathbb{E}(X \mid G)$ *est une variable aléatoire définie par :*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})(\omega) = \mathbb{E}(X \mid B)1_B(\omega) + \mathbb{E}(X \mid B^c)1_{B^c}(\omega)$$

2.1.6 Propriétés de l'espérance conditionnelle

1) Soit a et b deux constantes tel que : $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ **(Linéarité).**

2) Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ **(Croissance).**

3) Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.

4) Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$.

5) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\right] = \mathbb{E}(X)$.

6) Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

7) Si X une v.a telle que $X \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \forall p \geq 1$. Alors $\|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \leq \|X\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}$.

8) Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$.

9) Si ϕ est une application convexe et mesurable, $\mathbb{E}\left[\phi\left(X\right) \mid \mathcal{G}\right] \geq \phi\left(\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right)$ (**Inégalité de Jensen**).

***Voir le document de Jeanblanc* 2006.**[1]

Preuve.

Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

1) Soit a, b deux constante,alors

$$\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) \stackrel{?}{=} a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$$

On a $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) < \infty$ et $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) < \infty$, tel que :

$$\begin{aligned}
\int_A \mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} &\stackrel{def}{=} \int_A (aX + bY) d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \\
&= a\int_A X d\mathbb{P} + b\int_A Y d\mathbb{P} \\
&\stackrel{def}{=} a\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} + b\int_A \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} \\
&= \int_A a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\int_A [\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) - (a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}))] d\mathbb{P} = 0, \forall A \in \mathcal{G}$$

On a $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G})$ une v.a $\mathcal{G}$-mesurable, $a \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ v.a, $\mathcal{G}$-mesurable, donc $a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ v.a $\mathcal{G}$-mesurable, $b \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ v.a $\mathcal{G}$-mesurable, donc $b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ v.a $\mathcal{G}$-mesurable. Ce que implique $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) - (a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}))$, est une variable aleatoire $\mathcal{G}$-mesurable, donc on obtient

$$\mathbb{E}(aX+bY \mid \mathcal{G}) - (a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})) = 0.\mathbb{P}{-}p.s$$

D'où

$$\mathbb{E}(aX+bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})\ \mathbb{P}{-}p.s$$

2) Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$?

On a $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) < +\infty$, $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) < +\infty$. On d'après que $X \leq Y$ alors on a

$$\begin{aligned}
\int_A X d\mathbb{P} &\leq \int_A Y d\mathbb{P},\ \forall A \in \mathcal{G} \\
\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} &= \int_A X d\mathbb{P},\ \forall A \in \mathcal{G} \\
&\leq \int_A Y d\mathbb{P},\ \forall A \in \mathcal{G} \\
&\leq \int_A \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P},\ \forall A \in \mathcal{G},
\end{aligned}$$

Implique :

$$\int_A [\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})] d\mathbb{P} \geq 0, \forall A \in \mathcal{G}$$

On a : $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ une v.a $\mathcal{G}$-mesurable et $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ une v.a $\mathcal{G}$-mesurable.Donc, $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ une v.a $\mathcal{G}$-mesurable.

On déduit que

$$\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq 0,\ \mathbb{P} - p.s.$$

D'où, $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$, $\mathbb{P} - p.s.$

3) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Si X est $\mathcal{G}$-mesurable,alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$?

On sait que $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ une v.a $\mathcal{G}$-mesurable (par definition) telle que :

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_A Xd\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}$$
$$\Rightarrow \int_A (\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - X)d\mathbb{P} = 0, \forall A \in \mathcal{G}$$

On sait que $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$: une v.a $\mathcal{G}$-mesurable et X une v.a $\mathcal{G}$-mesurable (par hypothèse) implique $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - X$: une v.a $\mathcal{G}$-mesurable. Ce qui implique

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - X = 0, \ \mathbb{P} - p.s.$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X, \ \mathbb{P} - p.s.$$

d'où, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$, $\mathbb{P} - p.s.$

4) Soit X , Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de$\mathcal{F}$.

Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ $\mathbb{P} - p.s.$?

L'objectif est de démontrer que on a :

$$\int_A \mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_A Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}$$

$$\int_A (\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) - Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))d\mathbb{P} = 0, \forall A \in \mathcal{G}$$

On a $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})$ une v.a $\mathcal{G}$-mesurable (par definition) et Y une v.a $\mathcal{G}$-mesurable (par hypothèse), $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ v.a $\mathcal{G}$-mesurable, donc $Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ v.a $\mathcal{G}$-mesurable

Ce qui implique $(\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) - Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))$ une v.a $\mathcal{G}$-mesurable.

Etape 1 : *On pose :* $Y = 1_C$ tel que C est $\mathcal{G}$-mesurable implique1_C est $\mathcal{G}$-mesurable. Par un simple calcul, on trouve :

$$\int_A 1_C \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_{A \cap C} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P}$$
$$\stackrel{def}{=} \int_{A \cap C} Xd\mathbb{P}, \ \forall A \in \mathcal{G}, \forall C \in \mathcal{G}$$
$$\forall A \in \mathcal{G}, \forall C \in \mathcal{G} \Rightarrow A \cap C \in \mathcal{G}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_A 1_C \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} &= \int_A 1_C X d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \\
&\overset{def}{=} \int_A \mathbb{E}(1_C X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}
\end{aligned}$$

On conclut que :

$$\int_A [1_C \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(1_C X \mid \mathcal{G})] d\mathbb{P} = 0, \forall A \in \mathcal{G}.$$

Ce qui implique :

$$1_C \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(1_C X \mid \mathcal{G}) = 0 \ \mathbb{P} - p.s.$$

D'où :

$$1_C \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_C X \mid \mathcal{G}) \ \mathbb{P} - p.s.$$

Donc, $Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(YX \mid \mathcal{G})$ $\mathbb{P}$−$p.s.$

Etape 2 : On pose que la variable aleatoire Y écrit sous forme d'une fonction étagé :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{C_i},$$

tel que C_i est $\mathcal{G}$-mesurable (i.e Y une v.a étagé)

Alors, on obtient par un calcul simple

$$\begin{aligned}
\int_A Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} &= \int_A (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{C_i}) \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_A 1_{C_i} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_A 1_{C_i} X d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \\
&= \int_A (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{C_i}) X d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \\
&= \int_A YX d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \\
&\overset{def}{=} \int_A \mathbb{E}(YX \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}.
\end{aligned}$$

On déduit que :

$$\int_A [Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(YX \mid \mathcal{G})d\mathbb{P}] = 0, \forall A \in \mathcal{G}.$$

Ce qui implique :

$$Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(YX \mid \mathcal{G}) = 0 \ \mathbb{P}-p.s.$$

D'où : $Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(YX \mid \mathcal{G}) \ \mathbb{P}-p.s.$

Etape 3 : *Si* Y une v.a positive $\mathcal{G}$-mesurable, alors il existe une suite de v.a étagé $(Y_n)_{n\geq 1}$ positive croissante telle que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} Y_n = Y$$

D'après **Etape 2 :** *on a :*

$$\int_A Y_n\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_A Y_n X d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \tag{2.3}$$

Cas 1 : Si X une v.a positive tel que : $Y_n \to Y$ quand $n \to +\infty$ et $(XY_n)_{n\geq 1} \to XY_n$ quand $n \to +\infty$

$(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante et $X \geq 0$, alors $(XY_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante tel que : $Y_n \leq Y_{n+1}$

implique $XY_n \leq XY_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ tel que $X \geq 0$.

D'après le lemme de **Beppo Lévy** *et 2.3*, on a :

$\int_A XY_n d\mathbb{P} \to \int_A XY d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}$ quand $n \to +\infty$

$\int_A Y_n\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} \to \int_A Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}$ quand $n \to +\infty$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A Y_n\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} = \lim_{n\to+\infty} \int_A Y_n X d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}$$

Ce qui implique,

$$\begin{aligned} \int_A Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} &= \int_A YX d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \\ &\stackrel{def}{=} \int_A \mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

On conclut que :

$$\int_A [Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})]d\mathbb{P} = 0, \forall A \in \mathcal{G}$$

On sait que Y une v.a $\mathcal{G}$-mesurable et $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ une v.a $\mathcal{G}$-mesurable (par definition), donc $Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ une v.a $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})$ une v.a $\mathcal{G}$-mesurable

Donc, $[Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})]$ est $\mathcal{G}$-mesurable

implique,

$$Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = 0 \ \mathbb{P}-p.s.$$

D'où, $Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})$ $\mathbb{P}-p.s.$ ■

Rappel (lemme de Beppo-lévy) . Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a monotone et si

$$Y_n \overset{p.s}{\to} Y.$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y)$$

(i.e $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega Y_n \ d\mathbb{P} = \int_\Omega Y \ d\mathbb{P}$)

Cas 2 : Soit X une v.a quelconque

On a : $X = X^+ - X^-$, tel que X^+, X^- deux variable aléatoires positives, alors d'après le **Cas 1** on a :

$$\begin{cases} Y\mathbb{E}(X^+ \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X^+Y \mid \mathcal{G}), \\ \qquad\qquad et \\ Y\mathbb{E}(X^- \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X^-Y \mid \mathcal{G}), \end{cases}$$

ce qui implique

$$Y[\mathbb{E}(X^+ \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^- \mid \mathcal{G})] = \mathbb{E}(X^+Y - X^-Y \mid \mathcal{G}),$$

ceci donne aussi $Y\mathbb{E}(X^+ - X^- \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(Y(X^+ - X^-) \mid \mathcal{G})$.

D'où, $Y\mathbb{E}(X^{\pm} \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(YX^{\pm} \mid \mathcal{G})$

i.e $Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})$.

Etape 4 : Si Y une v.a intégrable

D'après l' **Etape 3** *on a :*

$Y \equiv Y^{\pm} = Y^{+} - Y^{-}$ telle que Y^{+}, Y^{-} deux variables aléatoires positives

On a :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(XY^{+} \mid \mathcal{G}) = Y^{+}\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \\ \mathbb{E}(XY^{-} \mid \mathcal{G}) = Y^{-}\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(XY^{+} \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(XY^{-} \mid \mathcal{G}) = Y^{+}\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - Y^{-}\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}).$$

D'après la linéarité de l'espérance conditionnelle

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(X(Y^{+} - Y^{-}) \mid \mathcal{G}) = (Y^{+} - Y^{-})\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}).$$

D'où, $\mathbb{E}(XY^{\pm} \mid \mathcal{G}) = Y^{\pm}\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$

i.e $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$

5) Soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et X une v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$?

On a par definition $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ est une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable telle que :

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_A Xd\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}.$$

On pose :$A = \Omega$

Tel que :

$$\int_\Omega \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_\Omega Xd\mathbb{P}.$$

D'où, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.

6) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une v.a définit sur cet espace, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$?

On sait que :

$\mathbb{E}(X)$ une constante,$\forall A \in \mathcal{G}$

telle que :

$$\int_A \mathbb{E}(X) d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X) \int_A d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \text{ et } \mathbb{E}(X) \overset{def}{=} \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} &(\int_\Omega X d\mathbb{P})(\int_A d\mathbb{P}), \forall A \in \mathcal{G} \\ &\int_\Omega X d\mathbb{P} \int_\Omega 1_A d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

On a X est indépendant de $\mathcal{G}$, alors X est indépendant de $1_A, \forall A \in \mathcal{G}$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}(X) d\mathbb{P} &= (\int_\Omega X d\mathbb{P})(\int_\Omega 1_A d\mathbb{P}), \forall A \in \mathcal{G} \\ &= \int_\Omega X 1_A d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \\ &= \int_A X d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G} \\ &\overset{def}{=} \int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}, \end{aligned}$$

implique

$$\int_A \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} = 0, \forall A \in \mathcal{G}$$

On a $\mathbb{E}(X)$ une constante est $\mathcal{G}$-mesurable et $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ une v.a est $\mathcal{G}$-mesurable, donc $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ une v.a est $\mathcal{G}$-mesurable.

En conclut que : $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = 0$ $\mathbb{P}-p.s.$

D'où, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ $\mathbb{P}-p.s.$

7) Si X une v.a telle que $X \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), p \geq 1$. Alors $\|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \overset{?}{\leq} \|X\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}$.

On sait que $X \leq |X|$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{G})$$

(d'après la croissance de l'esperance conditionnelle)

Implique que

$$|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})|^p \leq (\mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{G}))^p \leq \mathbb{E}(|X|^p \mid \mathcal{G}) + ...$$

(d'après l'inégalité de Jensen, $p \geq 1$)

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})|^p) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X|^p \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(\,|X|^p)$$

(d'après la propriété 2.1.6 numéro 5) de l'esperance conditionnelle telle que $\mathbb{E}(\,(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\,) = \mathbb{E}(X))$, on sait que $\|Y\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \mathbb{E}(\,|Y|^p)$, Alors on a le résultat suivant

$$\|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \mathbb{E}(\,|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})|^p) \ et \ \|X\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \mathbb{E}(\,|X|^p).$$

Alors,

$$\mathbb{E}(\,|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})|^p) \leq \mathbb{E}(\,|X|^p).$$

On conclut que, $\|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \leq \|X\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}$.

8) Soit $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ deux tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$?

On sait que :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}),$$

telle que $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ est une v.a $\mathcal{G}$-mesurable (par definition). Donc, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ une v.a $\mathcal{H}$-mesurable et $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$

Ce qui implique $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$ est $\mathcal{G}$-mesurable, on obtient

$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$.

9) D'après le **lemme** 2.1.1 donné ci-après, on sait que ϕ une fonction convexe, alors il existe k fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donc fonction borélienne tel que, pour tout $x, b \in \mathbb{R}$,

$$\phi(x) - \phi(b) \geq k(b)(x - b)$$

Soit $W = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ $p.s$. On a donc pour tout $\omega \in \Omega$

$$\phi(X(\omega)) - \phi(W(\omega)) \geq k(W(\omega))(X(\omega) - W(\omega)). \tag{2.4}$$

On aimerait intégrer cette inégalité sur un élément de $\mathcal{G}$ mais cela n'est pas possible car les v.a.s $\phi(W)$ et $k(W)(X - W)$ peuvent ne pas être intégrable. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on introduit donc $A_p = \{\mid W \mid \leq p\}$ tel que les v.a.s $1_{A_P} k(W)(X - W)$ et $1_{A_P}\phi(W)$ sont intégrables (on note que $k(W)$ est bornée sur A_p car k est croissante). On pose

$$A = \{\mathbb{E}(\phi(X) \mid \mathcal{G}) - \phi(W) < 0\} \text{ et } B_p = A_p \cap A.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité (2.4) donne $1_{B_p}(\phi(X) - \phi(W)) \geq 1_{B_p} k(W)(X - W)$ et donc, en intégrant sur Ω

$$\begin{aligned} \int_\Omega 1_{B_p}(\phi(X) - \phi(W)) d\mathbb{P} \geq \int_\Omega 1_{B_p} k(W)(X - W) d\mathbb{P}. \qquad (2.5) \\ \Longrightarrow \int_{B_p} \phi(X) - \phi(W) d\mathbb{P} \geq \int_{B_p} k(W)(X - W) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Comme W et $\mathbb{E}(\phi(X) \mid \mathcal{G})$ sont $\mathcal{G}$-mesurables, on a donc 1_{B_p} est $\mathcal{G}$-mesurable car B_p est $\mathcal{G}$-mesurable (i.e $B_p \in \mathcal{G}$). On aussi $k(W)$ est $\mathcal{G}$-mesurable car k est borélienne. Donc, $1_{B_p} k(W)$ est $\mathcal{G}$-mesurable.

On conclut que,

$$\begin{aligned} \int_{B_p} \phi(X) - \phi(W) d\mathbb{P} &= \int_\Omega 1_{B_p}(\phi(X) - \phi(W)) d\mathbb{P} = \mathbb{E}(1_{B_p}(\phi(X) - \phi(W)) \\ &= \mathbb{E}(1_{B_p}(\mathbb{E}(\phi(X) \mid \mathcal{G}) - \phi(W))) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{B_p} k(W)(X - W) d\mathbb{P} &= \int_\Omega 1_{B_p} k(W)(X - W) d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}(1_{B_p} k(W)(X - W)) = 0 \ (car\ W \in \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})), \end{aligned}$$

d'après(2.5), on conclut :

$$\int_{B_p} (\mathbb{E}(\phi(X) \mid \mathcal{G}) - \phi(W))d\mathbb{P} \geq 0$$
$$\Longrightarrow \int_{B_p} \mathbb{E}(\phi(X) \mid \mathcal{G}) \geq \int_{B_p} \phi(W)d\mathbb{P}$$

Comme $\mathbb{E}(\phi(X) \mid \mathcal{G}) - \phi(W) < 0$ sur B_p car $B_p \subset A$, on a donc $\mathbb{P}(B_p) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{p\in\mathbb{N}^*} B_p) = 0$, d'où $\mathbb{E}(\phi(X) \mid \mathcal{G}) \geq \phi(W)$ $p.s$

Donc, $\mathbb{E}(\phi(X) \mid \mathcal{G}) \geq \phi(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))$ $p.s.$ ∎

lemme 2.1.1 *Soit ϕ une fonction convexe tel que $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe alors k, fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et donc fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) tel que pour tout $x, b \in \mathbb{R}$,*

$$\phi(x) - \phi(b) \geq k(b)(x - b)$$

2.1.7 L'espérance conditionnelle dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Si X une v.a de carré intégrable, si $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. Alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ est la projection de X sur l'espace de v.a, $\mathcal{G}$-mesurable de carré intégrable (i.e $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ est une variable aléatoire qui minimise $\mathbb{E}((X - Y)^2)$ parmi les v.a.s $Y, \mathcal{G}$-mesurable).

Exemple 2.1.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. Soit X une variable aléatoire tel que $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ est une v.a, $\mathcal{G}$-mesurable qui minimise $\mathbb{E}((X - Y)^2)$ (i.e $\min \|X - Y\|_2 = \min \mathbb{E}((X - Y)^2)$, Y de carré intégrable, $\mathcal{G}$-mesurable) $\Longrightarrow Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$*

Preuve.

Soit Y une v.a tel que $\mathbb{E}(|Y|^2) < \infty$, et $\mathcal{G}$-mesurable

Soit W une v.a $\mathcal{G}$-mesurable, alors

$\mathbb{E}(XW \mid \mathcal{G}) = W\ \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ (car W une v.a, $\mathcal{G}$-mesurable) implique

$\mathbb{E}(\mathbb{E}(XW \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(W\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$,

implique

$$\mathbb{E}(XW) = \mathbb{E}(W\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})), \tag{2.6}$$

et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W(X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) &= \mathbb{E}(WX - W\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) \\ &= \mathbb{E}(WX) - \mathbb{E}(W\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})). \end{aligned}$$

D'après 2.6 on obtient :

$\mathbb{E}(W\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) - \mathbb{E}(W\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = 0.$

Alors,

$$\mathbb{E}(W(X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))) = 0. \tag{2.7}$$

On pose : $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + W$,

implique que Y est $\mathcal{G}$-mesurable parce que $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ est une v.a, $\mathcal{G}$-mesurable (par definition) et W une v.a $\mathcal{G}$-mesurable

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X-Y)^2) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) - W)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))^2 + W^2 - 2W(X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})] \\ &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))^2) + \mathbb{E}(W^2) - 2\mathbb{E}(W(X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})). \end{aligned}$$

D'après 2.7 on a : $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))W) = 0.$

Donc,

$$\mathbb{E}((X-Y)^2) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))^2] + \mathbb{E}(W^2).$$

Alors, on conclut que $\mathbb{E}((X-Y)^2)$ est minimise si

$$\mathbb{E}(W^2) = 0$$

$$\Rightarrow W^2 = 0$$

$$\Rightarrow W = 0.$$

Donc, on déduit que la valeur $\mathbb{E}((X-Y)^2)$ est minimum si

$$Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + W$$

D'où $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$. Ce qui termine la preuve. ■

2.1.8 Variance conditionnelle :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit Y une v.a définie sur cet espace.

Soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. Alors on définit la variance conditionnelle tel que :

$$Var(Y \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(Y^2 \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}^2(Y \mid \mathcal{G})$$

En vertu de l'inégalité de Jensen :

Soit F une fonction convexe.On a : $\mathbb{E}(F(Y) \mid \mathcal{F}) \geq F(\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}))$.

2.1.9 La densité conditionnelle :

Si $f_{X,Y}$ la densité jointe de (X,Y). Alors,

– La densité conditionnelle de Y quand $(X = x)$ est définie par :

$$f_{Y|X}(x,y) = f(Y \mid X) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \ si \ f_X(x) > 0 \\ 0 \ si \ f_X(x) = 0 \end{cases}$$

– La densité conditionnelle de X quand $(Y = y)$ est définie par :

$$f_{X|Y}(x,y) = f(X \mid Y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{si} \quad f_Y(y) > 0 \\ \\ 0 \quad \text{si } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

Chapitre §.3
Contrôle optimal et méthodes de résolutions

Chapitre 3

Méthodes de résolutions d'un problème de contrôle optimal

Un problème de contrôle optimal est un problème d'optimisations. Il existe essentiellement deux grandes méthodes pour la résolution un problemes de contrôle optimal, dans les cas déterministes ou stochastiques : le principe de la programmation dynamique et le pricipe de maximum de Pontryagin. La premiére méthode a elle été introduite par Bellman en 1953, elle s'appuie sur la notion de la "politique optimale", qui consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles EDP de second ordre, non linéaire.

La deuxiéme méthode connue sous le nom conditions nécessaires d'optimalité qui sera au centre intérét pour abordé notre probléme de contrôle.

On considére le processus stochastique X de valeur dans $\mathbb{R}^n$ satisfait l'équation diférentielle stochastiques suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW(t), \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{3.1}$$

le controle $u(\cdot) = (u(t))_{0 \leq t \leq T}$ est un processus progressivement mésurable à valeurs dans A sous ensemle de $\mathbb{R}^n$.

L'objet de controle optimal stochastique est de minimiser un coût, ou de maximiser s'il s'agit d'un gain, sur un ensemble $\mathcal{U}$ de tous les controles admissibles. Généralement ce coût est donné par :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(t))\right], \tag{3.2}$$

où f et g sont deux fonctions données par

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d,$$
$$g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,$$

vérifiée les mémes hypothéses que celle imposés sur le drift b et soit une application de classe C^1, $|g(x)| \leq c[1 + |x|]$ et à dérivée bornée.

3.1 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique appelé aussi principe de Bellman est fondé sur le principe d'optimisation suivant :

si une trajéctoire est optimale alors elle est optimale pour chaque instant , c'est á dire "si on commence à un autre point on ne peut faire mieux que suivre de la trajectoire optimale".

le principe de la programmation dynamique de Bellman permet de résoudre, au travers d'une équation aux dérivées partielles, appelé équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), certain probléme analytiquement.

Généralement l'équation aux dérivées partielles de Bellman n'est pas facile à résoudre et il faut supposer que la solution soit de classe $\mathcal{C}^2$, nous pouvons sinon supposer qu'elle est seulement localement bornée mais dans ce cas la solution sera au sens de la viscosité.

En appliquant formellement ce principe où on peut minimiser la fonction valeur $V(t, x)$ associer à un probléme de contrôle stochastique à temp continu satisfait à une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

$$\frac{dV}{dt}(t, x) + \inf_{u \in U} \left[\mathcal{L}_u V(t, x) + f(t, x, u)\right] = 0, \ \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

où $\mathcal{L}_u$ est le générateur infinitésimale de second-ordre associé à la diffusion $X(t)$ solution de l'équation 3.1 avec un contrôle u donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{L}_u V = b(x,u)D_x(V) + \frac{1}{2}tra\left[\sigma(x,u)\sigma^T(x,u)D_x^2(V)\right]. \tag{3.4}$$

.Noton que l'équation 3.3 est une version infinitésimal de la programmation dynamique : on suppose que la fonction valeur V est de classe $\mathcal{C}^2$. En appliquent la formule d'itô sur $V(s, X^{t,x}(s))$ entre $s = t$ et $s = t + h$ puis faisons tendre h vres $+\infty$

Lorsque l'on cherche à maximiser un gain, l'équation aux dérivées partielles 3.3 devient sous la forme :

$$-\frac{dV}{dt}(t,x) - \sup_{u\in\mathcal{U}}\left[\mathcal{L}_u V(t,x) + f(t,x,u)\right] = 0. \tag{3.5}$$

D'autre part, on peut avoir cette équation 3.5 de la façon suivante : $\forall(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$:

$$-\frac{dv}{dt}(t,x) - H(t,x,D_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) = 0,$$

telle que : $\forall(t,x,p,M) \in [0,T] \times\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}_n$:(M_n :l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$.)

$$H(t,x,p,M) = \sup_{u\in\mathcal{U}}\left[b(t,x,u)p + \frac{1}{2}tra\left(\sigma\sigma^T(t,x,u)M\right) + f(t,x,u)\right]$$

La fonction H est dite l'Hamiltonien du probléme de contrôle associé. En remarquant que si la fonction de valeur est continu et pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ et satisfait le principe d'optimalité de la programmation dynamique, alors elle est solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante .

3.2 Principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin connue sous le nom "*conditions nécessaires d'optimalité*" a été introduite par Pontryagin en 1956 .Il s'appuie sur l'idée suivante : si un contrôle optimal existe en utilisant l'approche de Lagrange en calcul des variations sur la fonctionnelle $J(u)$ par rapport à certain paramètre de perturbation doit être positive. Généralement cette approche consiste à introduire un processus adjoint solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle.

3.3 Equations differentielles stochastiques

Définition 3.3.1 *On appelle une EDS est une équation de la forme :*

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s) \tag{3.6}$$

3.6 sous la forme condensé

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \\ \\ X(0) = x, \end{cases}$$

et l'inconu est le processus X.

Le coefficient $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ s'appelle la dérive (drift) du processus X, et σ s'appelle le coefficient de diffusion (où volatilité).

L'équation différentielle a une unique solution (comme pour une équation différentielle ordinaire). Donc la solution est le processus X continu $\mathcal{F}_t-$adapté tels que les intégrales $\int_0^t b(s, X(s))ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$ ont un sens (sont bien définies) et l'égalité 3.6 est satisfaite $\forall t$, avec $\int_0^t |b(s, X(s))|\, ds < +\infty$ et $\int_0^t |\sigma(s, X(s))|\, dW(s) < +\infty$ $\mathbb{P} - p.s$

3.3.1 Théorème d'existence

Théorème 3.3.1 *On suppose que :*

1) *Les deux fonctions b et σ continues.*

2) *Il existe $k > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}$.*

(a) $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k\,|x-y|$ *(Condition de Lipschitz locale)*

(b) $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq k(1+|x|)$ *(Condition de croissance linéaire)*

3) *La condition initiale $X(0)$ est indépendante de $(W(t), t \geq 0)$ et est carré intégrable, alors il existe une unique solution de 3.6 à trajectoires continues pour $t \leq T$.*

Cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X(t)|^2\right) < \infty$$

L'unicité signifie que si $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ et $(Y(t))_{0\leq t\leq T}$ sont deux solutions de 3.6.

Alors : $\forall 0 \leq t \leq T, X(t) = Y(t)$ $\mathbb{P}-p.s$

Ce théorème se généralise au cas de processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.3.1 *Soit φ une fonction borélienne de $]0, +\infty[$ dans lui-même telle que l'intégrale de $(\varphi)^{-1}$au voisinage de zéro diverge (par exemple $\varphi(x) = \sqrt{x}$). Si $|\sigma(s,x) - \sigma(s,y)|^2 \leq \varphi\,|x-y|$ et b est Lipschitizienne, soit $|b(s,x) - b(s,y)| \leq k_t\,|x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $s \leq t$, il existe une unique solution de 3.6.*

Chapitre §.4
Principe de maximum sous l'information partielle

Chapitre 4

Principe de maximum sous l'information partielle

Dans ce chapitre, on va établir les conditions nécessaires d'optimalité pour une EDS sous l'information partielle. On considère l'équation différentielle stochastiques suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW(t) \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

avec une fonction de coût a minimiser

$$J(u(\centerdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right],$$

sous l'information partielle $\mathcal{G}_t$ sous tribu de $\mathcal{F}_t$. Prouvées par le principe d'optimisation convexe.

4.1 l'information partielle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ éspace filtré et $W(t) = (W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t))$ un MB définie sur cet éspace, supposant que $X(t) = X^u(t) \in \mathbb{R}^n$ est donné par l'équation différentielle stochastique controllée suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW(t) \\ X(0) = x_0 \text{ où } x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.1}$$

où

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n},$$

deux fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Le contrôle $u(t)$ est un contrôle admissible i.e

$$\mathcal{U} = \{u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{U}, tel\ que\ u\ mesurable\ et\ \mathcal{G}_t - adapté\}.$$

– $T > 0$ un constant.

– $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$.

Par exemple, $\mathcal{G}_t$ pourrait être l'information retardée définie par δ :

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{(t-\delta)}, t \geq 0,$$

où $\delta > 0$.

Supposons qu'on nous donne une fonctionne de coût tel que

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right],$$

où :

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaite la condition

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f(t,X(t),u(t))|\,dt + |g(X(T))|\right] < \infty, u \in \mathcal{U}.$$

Le problème de contrôle sous l'information partielle est de trouver $\Psi_{\mathcal{G}}$ et $\widehat{u}$ tel que

$$\Psi_{\mathcal{G}} = \sup_{u\in\mathcal{U}}\{J(u)\} = J(\widehat{u}).$$

4.2 Conditions nécessaires d'optimalité

Conditions (H1) Les fonctions b,σ,f et g sont de classe C^1 en (x,u). Les applications b,σ sont des processus progressive mesurable telles que $b(\cdot,0,0) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^n)$ et $\sigma(\cdot,0,0) \in \mathcal{M}^{n\times d}(\mathbb{R})$.

Conditions (H2) Les derivativées de b et σ par rapport a ces variables (x,u) sont bornées. De plus, l'application f est bornée par $C(1+|x|+|u|)$ et ces derivées dominées par $C(1+|x|^2+|u|^2)$. L'applications g est bornée par $C(1+|x|)$ et ces derivées par rapport à x sont dominées par $C(1+|x|^2)$.

Notons que, sous les conditions (**H1**) et (**H2**) (voir Baghiri & Oksendal [**?**]), l'équation (4.1) admit une unique solution $X(\cdot) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^n)$ donnée par :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(s,X(s),u(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s,X(s),u(s))dW(s).$$

Pour tout contrôle $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}}([0,T])$ avec la trajectoire associée $X(\cdot) = X^u(\cdot)$, on défiit le processus adjoint $(p(\cdot),q(\cdot))$ comme une solution de l'équation différentielle stochastiques rétrograde de la forme suivante :

$$\begin{aligned} -dp(t) &= [b_x(t,X(t),u(t))\,p(t) + \sigma_x(t,X(t),u(t))\,q(t) + f_x(t,X(t),u(t))]dt \\ &\quad - q(t)dW(t), \\ p(T) &= g_x(X(T)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

On définit la fonction Hamiltonian H comme suit :

$$H\left(t, X(t), u(t), p(t), q(t)\right) := p(t) b\left(t, X(t), u(t)\right) + q(t) \sigma\left(t, X(t), u(t)\right) + f\left(t, X(t), u(t)\right).$$

Si on dénote par $H(t) = H(t, X(t), u(t), p(t), q(t))$, alors l'équation adjoint (4.2) peut être réécrit comme le type stochastique de système Hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned} -dp(t) &= H_x\left(t\right) dt - q(t) dW(t), \\ p(T) &= g_x(X(T)). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Selon les hypothèses (**H1**) et (**H2**), les équations adjoints (4.2) ou (4.3) admettent une unique solution $p(t), q(t)$. De plus, puisque les dérivés de b, σ, f et g par rapport à x sont bornés, nous déduisons des arguments standard qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|p(t)\right|^2 + \int_0^T \left|q(t)\right|^2 dt\right] < C$$

4.3 Principe du maximum sous l'information partielle

Dans cette section, nous dérivons les conditions nécessaires pour l'optimalité sous la forme d'un principe maximum. En plus des hypothèses nous présumons ce qui suit :

Conditions (H3)

- Pour tout t et h telle que $0 \leq t \leq t+h \leq T, \forall i = 1, ..., k$ et pour tout processus $\beta = \beta(\omega)$ $\mathcal{G}_t$-mesurable, le contrôle α définit par :

  $$\alpha(s) := (0, 0, ..., \alpha_i(s), 0, ..., 0) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^k$$

  avec

  $$\alpha_i(s) := \beta_i 1_{[t,t+h]}(s); s \in [0, T] \tag{4.4}$$

- Pour tous $u, \alpha \in \mathcal{U}$ avec α est bornée, il existe $\lambda > 0$ tel que $u + y\alpha \in \mathcal{U}, \forall y \in (-\lambda, +\lambda)$

On définit le processus $Z(t) := Z^{(u,\alpha)}(t)$ par

$$Z(t) = \frac{d}{dy} X^{(u,\alpha)}(t)\Big|_{y=0}$$

Notons que $Z(0) = 0$ et

$$dZ(t) = [b_x(t, X(t), u(t))Z(t) + b_u(t, X(t), u(t))\alpha(t)]dt$$
$$+[\sigma_x(t, X(t), u(t))Z(t) + \sigma_u(t, X(t), u(t))\alpha(t)]dW(t)$$

Supposons que $\widehat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ est un minimum locale pour $J(u)$, en ce sens que pour toutes bornées $\alpha \in \mathcal{U}$ il existe $\lambda > 0$ tel que $(\widehat{u} + y\alpha) \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}}([0,T]), \forall y \in (-\lambda, +\lambda)$ et $\phi(y) := J(\widehat{u} + y\alpha), y \in (-\lambda, +\lambda)$ est maximale à $y = 0$

$$\phi'(y) = \frac{d}{dy} J(\widehat{u} + y\alpha) = 0 \tag{4.5}$$

Théorème 4.3.1 *Sous **les conditions (H1)** et **(H2)** il existe un triplet unique de processus adapté $(\widehat{p}, \widehat{q})$ solution d'équation adjointe tel que $\widehat{u}(\cdot)$ est une point stationnaire pour $\mathbb{E}[H \mid \mathcal{G}_t]$ donc*

$$\mathbb{E}\left[H_u\left(t, \widehat{X}(t), \widehat{u}(t), \widehat{p}(t), \widehat{q}(t)\right) \mid \mathcal{G}_t\right] = 0.$$

Preuve.

D'après 4.5 on a

$$\begin{aligned}
0 &= \phi'(0) \\
&= \frac{d}{dy}\, J(\widehat{u} + y\alpha)|_{y=0} \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T f_x(t, \widehat{X}(t), \widehat{u}(t))\widehat{Z}(t)dt\right. \\
&\left. + \int_0^T f_u(t, \widehat{X}(t), \widehat{u}(t))\alpha(t)dt + g_x(\widehat{X}(T))\widehat{Z}(T)\right].
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[g_x(\widehat{X}(T))\widehat{Z}(T)\right] \qquad (4.6)\\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T f_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\widehat{Z}(t)dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T f_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t)dt\right]
\end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Itô à $\widehat{p}(t)\widehat{Z}(t)$, donc on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\widehat{p}(T)\widehat{Z}(T)\right] - \mathbb{E}(\widehat{p}(0)\widehat{Z}(0))\\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{p}(t)d\widehat{Z}(t)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{Z}(t)d\widehat{p}(t)\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{q}(t)[\sigma_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\widehat{Z}(t) + \sigma_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t)]dt\right]\\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{p}(t)d\widehat{Z}(t)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{p}(t)\left[b_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\widehat{Z}(t) + b_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t)\right]dt\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{p}(t)b_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\widehat{Z}(t)dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T b_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t)dt\right].
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{Z}(t)d\widehat{p}(t)\right] \qquad (4.7)\\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{Z}(t)\left[b_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\widehat{p}(t) + \sigma_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\widehat{q}(t) + f_x(\widehat{t,X}(t),\widehat{u}(t))\right]dt\right]\\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{Z}(t)b_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\widehat{p}(t)dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{Z}(t)(\sigma_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\widehat{q}(t))dt\right]\\
&- \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{Z}(t)f_x(\widehat{t,X}(t),\widehat{u}(t))dt\right] \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{q}(t)[\sigma_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\widehat{Z}(t)+\sigma_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t)]dt\right] \qquad (4.9)\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{q}(t)[\sigma_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\widehat{Z}(t)dt\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{q}(t)(\sigma_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t))dt\right] \end{aligned}$$

D'après 4.9 et $\widehat{Z}(0)=0$, $\widehat{p}(T)=g_x\left(\widehat{X}(T)\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[g_x(\widehat{X}(T))\widehat{Z}(T)\right] \qquad (4.10)\\ &=\mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{p}(t)b_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t)dt\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{q}(t)\sigma_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t)dt\right]\\ &-\mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{Z}(t)f_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))dt\right] \qquad (4.11) \end{aligned}$$

D'après 4.6 et 4.10, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{p}(t)b_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t)dt\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T \widehat{q}(t)\sigma_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t)dt\right]\\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T f_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))\alpha(t)dt\right] \end{aligned}$$

Depuis $\widehat{p}(t)b_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))+\widehat{q}(t)\sigma_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))+f_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))=H_u\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)$, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)\alpha(t)dt\right] \qquad (4.12)$$

Fixons maintenant $t\in[0,T]$ et appliquer 4.4 et $\beta_i=\beta_i(\omega)$ est borné, $\mathcal{G}_t$-mesurable. D'après 4.12 on obtient

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h}\frac{\partial}{\partial u_i}H(s,\widehat{X}(s),\widehat{u}(s),\widehat{p}(s),\widehat{q}(s))\beta_i(\omega)ds\right]=0$$

Différencier par rapport à h au point $h=0$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial u_i}H(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t))\beta_i\right]=0 \qquad (4.13)$$

D'après 4.13 et comme β_i est borné, $\mathcal{G}_t$-mesurable, on conclut que

$$\mathbb{E}\Big[H_u(t, \widehat{X}(t), \widehat{u}(t), \widehat{p}(t), \widehat{q}(t)) \mid \mathcal{G}_t\Big] = 0 \ \mathbb{P} - p.s.$$

■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié l'espérance conditionnelle et ses propriétés avec les preuves. Aussi, sous l'information partielle, on a étudié un problème de contrôle stochastique optimal pour des equations differentielle stochastiques (EDS). Cette étude nous permis de voir de prés le principe du maximum stochastique d'optimalité sous l'information partielle de condition nécessaire ont été prouvées par le principe d'optimisation convexe

Bibliographie

[1] M.Jeanblanc. (2006). M.Jeanblanc. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes.

[2] M. Zitouni, Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades, Université M'hamed Bougara Boumerdes, pp 115.

[3] H. Pham (2005), Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.Vol. 61, Springer Verlage.

[4] N. Khelfallah, Théorie générale de processus stochastique, cours de professeur Khelfallah.

[5] M. Hafayed (2009), Gradient généralisés et contrôle stochastique, Université Mohamed khider Biskra, pp 102.

[6] B.Øksendal,A.Sulem (2004), Applied Stochastic Control of Jump Diffusions, Springer, Berlin.

[7] F. Baghery and B. Øksendal (2007), A maximum principle for stochastic control with partial information, Stoch. Anal. Appl., pp. 705–717.

[8] J. Yong and X.Y. Zhou (1999), *Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations.* Springer Verlag.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F})$	:	Espace probabilisable.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$	:	Espace filtré.
$\mathcal{F}_0$	:	Tribu trivial.
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	:	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
$c\grave{a}d$	:	Continu à droite.
$c\grave{a}dl\grave{a}g$	:	Continu à droite pourvu au limite à gauche.
$\mathbb{R}^d$	:	Espace réel euclidien de dimension d.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	:	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{P} - p.s$	:	Presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des entiers naturels.
$B = (B_t)_{t \geq 0}$	:	Mouvement Brownien.
MB	:	Mouvement Brownien.
$\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$	:	Espace de fonction de carré intégrable.
C^1	:	Ensemble de fonction dérivable et dont la dérivée première continue.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
b	:	Dérive.

σ	:	Cofficient de diffision.
EDP	:	Equations aux dérivées partielles.
EDO	:	Equation différentielle ordinaire.
$J(\cdot)$	:	La fonction de coût à minimiser.
$\widehat{u}$	:	Contrôle optimal.
$p(t)$	:	Processus adjoint.
$H(t, X, u, p, q)$	:	Hamiltonian..
$\widehat{X}$	:	Trajectoire associé à $\widehat{u}$.

الملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة بعض عناصر التحليل العشوائي المنظم و بالخصوص الأمل الرياضي الشرطي ومميزاته بدقة. ونظرا لأهمية هذا الأخير و كتطبيق له درسنا مبدأ الاعظمية القصوى في ظل وجود لمعلومات جزئية غير الكلية وذلك لجملة من المعادلات التفاضلية العشوائية التوافقية المراقبة. لقد برهنا نظرية مبدأ الاعظمية في مجال محدب والتي من خلالها نحدد الشروط الضرورية المثلى لإيجاد قيمة المتغير المراقب الأمثل.

الكلمات المفتاحية : *المعادلة التفاضلية العشوائية، الأمل الرياضي الشرطي، مبدأ الاعظمية.*

Résumé

Dans ce mémoire, nous intéressons à certains éléments de l'analyse stochastique, de l'espérance conditionnelle et de leurs propriétés explicitement. Comme une applications, nous étudions un problème de contrôle optimal, où nous dérivons un principe maximum sous information partielle. Le système considéré est gouverné par l'équation différentielle stochastique de type Ito. Les conditions nécessaires d'optimalité, sous la forme du principe du maximum de Pontryagin ont été établies en appliquant la méthode de perturbation convexe et quelques estimations sur le processus d'état.

Mot clés: *Espérance conditionnelle, Equation différentielle stochastique, principe du maximum stochastique.*

Abstract

In this work, we are interested in some elements of the stochastic analysis, conditional expectation and their proprietes. As an applications, we study an optimal control problem, where we derive a maximum principle under partial information. The system under consideration is governed by Ito stochastic differential equation. Necessary conditions of optimal stochastic contrôle, in the form of Pontraygin maximum principle have been established by applying convex perturbation method and some estimations on the state process.

Key words: *Conditional expectation, stochastic differential equation, Maximum principle.*