République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

SAAD Nadjla

Titre :

Les solutions fortes d'EDS à coefficients Lipschitziens en dimension finie

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**MANSOURI Bader Eddine**	UMKB	Encadreur
Dr.	**LABED Boubaker**	UMKB	Président
Dr.	**BENABBA Fadhila**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dedicace

Je dédie ce modeste travail

À mes trés chèrs parents : **Mokhtar** et **Fatma**, pour tous leurs sacrifices, leurs amour, leur tendresse, et pour tout leur soutien au long de mes études,

À mon chèr frère **Nasr Eddine**,

À ma chère sœur **Khawla**,

Merci d'être toujours à mes côtés,

À mes amis,

Et à la promotion de mathématique 2020,

Je pris ***Allah*** de leur accorder longue vie et bonne santé.

NADJLA

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord mon dieu ***Allah*** qui m'a donné la force, et la volonté, pour accomplir ce travail.

Tout mon respect et ma profonde gratitude à mon encadreur **Dr.MANSOURI Bader Eddine** pour ses directives permanentes de mon travail, ses conseils, et son soutien.

Et je remercie aussi les membres du jury ; **Dr.LABED Boubaker** et **Dr.BENABBA Fadhila** pour accepté d'évaluer et de juger ce modeste travail.

Mes remerciements également à tous les enseignants du département de Mathématiques pour nous aider tout au long de notre parcours d'étude.

J'exprime mes profondes gratitudes à mes parents, et à toutes les personnes qui m'ont encouragé et contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse à étudier les équations différentielles stochastiques, notées EDS ou en Englais SDE (stochastic differential equations). L'équation différentielle stochastique est une équation différentielle dans laquelle un ou plusieurs termes sont processus stochastique, habituellement, l'EDS contient une variable comme le bruit blanc aléatoire calculée comme la dérivée du mouvement brownien, son histoire remonte aux années 1940 lorsque le mathématicien japonais**.** Kiyosi Itô a publié un article dans une revue japonaise sur le processus stochastique (Infnitely divisible laws of probability). En 1942, **Dr.** Itô developée une définition de l'intégrale stochastique et il a créé la théorie de l'équation différentielle stochastique. les EDS sont utilisons pour modéliser divers phénomènes physiques, chimiques et économiques, et sa solution, bien sûr, est un processus stochastique. Cela soulève la question suivante, Comment prouver l'existence et l'unicité d'une solution forte ?

Ce mémoire est principalement constituée trois chapitres :

Chapitre1 (Rappels sur le calcul stochastique) : Ce premier chapitre porte sur les définitions et les notes importantes sur le calcul stochastique que nous utiliserons. pour compléter cette mémoire (Processus stochastique, Martingales, Mouvement brownien,...etc). Pour plus de détails voir [02], [06] et [08] .

Chapitre2 (Equations différentielles stochastiques) : Le but principal de ce chapitre,est d'introduire les équations différentielles stochastiques, et de rappeler le théorème de l'existence et l'unicité de leurs solutions fortes avec sa preuve.

Chapitre3 (Application) : Dans ce dernier chapitre, nous présenterons le modèle Black-Scholes comme un exemple en Finance.

Chapitre 1

Rappels sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous allons montionner certaines définitions et notes sur le calcul stochastique que nous utiliserons dans cette mémoire.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1 (Processus stochastique) *: Soit $T \subset \mathbb{R}_+$ un ensemble. La famille $X = (X_t)_{t \in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ est appelée processus stochastique indexé par le temps $t \in T$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, X_t est une variable aléatoire (v.a).*

– X est une fonction de deux variables :

$$
\begin{aligned}
X : \mathbb{R}_+ \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(t, \omega) &\longmapsto X_t(\omega)
\end{aligned}
$$

i) Pour t fixé, X_t est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

ii) Pour ω fixé, la fonction $t \longmapsto X_t(\omega)$ est appelée trajectoire.

Définition 1.2 (Filtration) *: Une filtration sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$*

croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ c'est à dire :

$$\forall 0 \leq s \leq t \prec \infty, \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

Remarque 1.1 *: On a les remarques suivantes :*

– $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t.

– L'espace $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P}\right)$ est dite espace de probabilité filtré.

– On dit qu'une filtration est continue à droite si : $\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ avec :

$$\mathcal{F}_{t^+} = \left(\cap_{s \succ t} \mathcal{F}_s\right).$$

– L'espace de probabilité filtré est dit complet si $N \subset \mathcal{F}_0$ (N la famille de toutes les ensembles négligeables de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).

Définition 1.3 (Filtration naturelle) *: Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique. La filtration définie par :*

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(X_s,\ s \leq t\right), \forall t \geq 0$$

s'appelle la filtration naturelle du processus X, et on note par $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t \geq 0}$.

Définition 1.4 (Temps d'arrêt) *: Soit $T = \mathbb{R}_+$. $\mathbb{F}-$temps d'arrêt est une application $\tau : \Omega \longrightarrow T \cup \{+\infty\}$ telle que :*

$$\forall t \in T : \{\omega \in \Omega\ / \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.5 *: Le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est dit à trajectoires continues si la fonction : $t \longrightarrow X_t(\omega)$ est continue, pour tout $\omega \in \Omega$.*

Définition 1.6 (Processus càd-làg) *: Un processus est dit continu à droite et limité à gauche **(càd-làg),** si ses trajectoires sont continues à droite et limités à gauche.*

Définition 1.7 (Processus càg-làd) *: Un processus est dit continu à gauche et limité à droite **(càg-làd),** si ses trajectoires sont continues à gauche et limités à droite.*

Définition 1.8 (Processus mesurable) *: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus défini sur l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$. Le processus X est dit mesurable si l'application suivante :*

$$\begin{aligned}
([0,+\infty[\times\Omega, \mathcal{B}([0,+\infty[)\otimes\mathcal{F}) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\
(t,\omega) &\longmapsto X_t(\omega)
\end{aligned}$$

est mesurable.

Définition 1.9 (Processus progressivement mesurable) *: Le processus X est dit progressivement mesurable, si $\forall t \geq 0$ l'application*

$$\begin{aligned}
X : [0,t]\times\Omega &\longrightarrow E \\
(s,\omega) &\longmapsto X_s(\omega)
\end{aligned}$$

est $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t-$mesurable.

Définition 1.10 (Processus adapté) *: On dit que $X = (X_t)_{t\in T}$ est $\mathbb{F}-$ adapté si pour tout $t \in T$, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Définition 1.11 (Modification et indistingables) *: Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastiques défini sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans* $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.

1. On dit que X est une modification de Y si :

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.\mathbb{P}-p.s.$$

2. X et Y sont indistingables $\mathbb{P}-p.s$, si les trajectoires de X et Y sont les même c'est à dire :
$$\mathbb{P}\left(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\right) = 1.\mathbb{P}-p.s.$$

Remarque 1.2 *:*

- Si X et Y sont indistingables, alors X est une modification de Y (i.e : indistingables $\Longrightarrow$ modification).
- Un processus est toujours adapté à sa filtration naturelle.
- Si la filtration $\mathbb{F}$ est complet, et si X un processus $\mathbb{F}-$adapté, alors toute modification de X est $\mathbb{F}-$adapté.

Définition 1.12 (Processus à variation finie) *:Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré et* X *un processus adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

On dit que X est un processus à variation finie si toutes les trajectoires $t \longmapsto X_t(\omega)$ sont à variation finie.

1.2 Espérance conditionnelle

Soit X une v.a réelle intégrable ($X \in L^1$) définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.13 (Espérance conditionnelle par rapport à une tribu) *: L'espérance conditionnelle* $\mathbb{E}(X \setminus \mathcal{G})$ *de* X *quand* $\mathcal{G}$ *est l'unique v.a* **:**

1. $\mathcal{G}-$mesurable
2. $\int_B \mathbb{E}(X \setminus \mathcal{G})\, d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}, \forall B \in \mathcal{G}$.

C'est aussi l'unique (à une égalité $p.s$ prés) variable $\mathcal{G}-$mesurable telle que :
$$\mathbb{E}\left[Y\mathbb{E}(X \setminus \mathcal{G})\right] = \mathbb{E}(XY)$$

pour toute variable $Y, \mathcal{G}-$mesurable bornée.

Dans la suivante les propriétés de l'espérance conditionnelle :

- **Linéarité :** soit a et b deux constantes. $\mathbb{E}\left(aX + bY \setminus \mathcal{G}\right) = a\ \mathbb{E}\left(X \setminus \mathcal{G}\right) + b\ \mathbb{E}\left(Y \setminus \mathcal{G}\right).$
- **Croissance.** soit X et Y deux v.a telle que $X \preceq Y$ alors : $\mathbb{E}\left(X \setminus \mathcal{G}\right) \preceq \mathbb{E}\left(Y \setminus \mathcal{G}\right).$
- $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X \setminus \mathcal{G}\right)\right] = \mathbb{E}\left(X\right).$
- Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}\left(X \setminus \mathcal{G}\right) = \mathbb{E}\left(X\right).$
- Si X est $\mathcal{G}-$mesurable, $\mathbb{E}\left(X \setminus \mathcal{G}\right) = X.$
- Si Y est $\mathcal{G}-$mesurable, $\mathbb{E}\left(XY \setminus \mathcal{G}\right) = Y\mathbb{E}\left(X \setminus \mathcal{G}\right).$
- Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$alors :

$$\mathbb{E}\left(X \setminus \mathcal{H}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X \setminus \mathcal{H}\right) \setminus \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X \setminus \mathcal{G}\right) \setminus \mathcal{H}\right].$$

1.3 Variation totale et quadratique

Définition 1.14 *: La variation infinitésimale d'ordre p d'un processus X sur $[0, T]$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ de $[0, T]$ est définie par :*

$$V_T^p\left(\Pi_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p$$

si $V_T^p\left(\Pi_n\right)$ a une limite dans un certain sens (convergence dans L^p $p.s$). Lorsque :

$$\pi_n = \left\|\Pi_n\right\|_\infty = \max_{i \leq n} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \longrightarrow 0$$

la limite ne dépend pas de la subdivision choisir, on l'appelle la variation d'ordre p de X sur $[0, T]$. En particulier,

- Si $p = 1$, la limite s'appelle variation totale de X sur $[0, T]$.
- Si $p = 2$, la limite s'appelle variation quadratique de X sur $[0, T]$, et on note par $\langle X \rangle_T$.

1.4 Martingales

Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration.

Définition 1.15 (Martingale à temps continue) *: Un processus $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathbb{F}$ s'il satisfait les propriétés suivantes :*

a) Pour tout t, le processus M est integrable (i.e : $\mathbb{E}(|M_t|) \prec +\infty$) ;

b) La v.a M_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable ;

c) $\mathbb{E}(M_t \setminus \mathcal{F}_t) = M_s$, $\forall s \leq t$.

M est $\mathbb{F}-$sur martingale (resp. $\mathbb{F}-$sous martingale), si a) et b) sont vérifier avec $\mathbb{E}(M_t \setminus \mathcal{F}_t) \leq M_s$ (resp. $\mathbb{E}(M_t \setminus \mathcal{F}_t) \geq M_s$), $\forall s \leq t$.

Théorème 1.1 (Théorème d'arret) *: Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite par rapport à une filtration $\mathbb{F}$.Alors*

i) pour tout temps d'arret S, la v.a X_S est intégrable ($X_S \in L^1$).

ii) Si S et T sont deux temps d'arret, et si $S \leq T$, alors :

$$X_S = \mathbb{E}(X_T \diagdown \mathcal{F}_S).$$

Définition 1.16 (Martingale locale) *: Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique $\mathbb{F}-$adapté. On dit que M est une $\mathbb{F}-$martingale locale si il existe une suite $\{\tau_n, n \geq 0\}$ de temps d'arret telle :*

$$\mathbb{P}(\tau_n \longrightarrow +\infty) = 1, n \longrightarrow +\infty$$

telle que le processus,

$$M^n : t \longrightarrow M_{t\wedge\tau_n}$$

est une martingale,$\forall n \geq 0$.

Définition 1.17 (Semi-martingale) *: Une semi-martingale est un processus réel,adapté et càd-làg qui écrit comme suit :*

$$X = M + Z$$

avec, $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{F}-$martingale locale, et $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus réel, càd-làg et à variation finie.

1.5 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est le nom du phénomène correspondant du mouvement aléatoire de particules dans un fluide, à été observé par le botaniste anglais Robert Brown en 1827, comme la diffision du pollen dans l'eau.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $W = \{W_t,\, t \geq 0\}$ un processus sur cet espace.

Définition 1.18 (Mouvement Brownien standard) *: Le processus W est un Mouvement Brownien standard, s'il satisfait les conditions suivantes :*

1. $W_0 = 0$;
2. $(W_t)_{t\geq 0}$ est continues ;
3. Pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n \leq t \prec +\infty$, les accroissements W_{t_n}-$W_{t_{n-1}}$,$W_{t_{n-1}}$-$W_{t_{n-2}}$, ...,W_{t_2}-W_{t_1}, W_{t_1}sont des v.a indépendantes ;
4. Pour $0 \leq s \leq t \prec +\infty$, l'accroissement $W_t - W_s$ suit la loi normale d'espérence nulle et de variance $(t - s)$.

Proposition 1.1 *:*

1. Soit W un MB standard, les processus suivantes sont des MB :
   - $(-W_t)_{t\geq 0}$.
   - Pour tout $s \geq 0$, $\{W_{t+s} - W_s\}_{t\geq 0}$.
   - Pour tout $c \geq 0$, $\left\{cW_{\frac{t}{c^2}}\right\}_{t\geq 0}$.
   - Le processus définie par :$Y_t = tW_{\frac{1}{t}}$,$\forall t \geq 0$ avec $Y_0 = 0$.

2. Le MB standard est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s\ ,\ s \leq t)$, $\forall t \geq 0$, et on note $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\geq 0}$.
3. Un processus W est un MB si et seulement si c'est un processus gaussien continu, centré, et de fonction de covariance

$$cov\,(W_s, W_t) = s \wedge t.$$

1.6 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un MB sur cet espace, muni par sa filtration naturelle.

On cherche à définie lintégrale de wiener

$$\int_0^t \theta_s dW_s$$

avec, $\theta = (\theta_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique.

Définition 1.19 (Bon processus) *: On dit que $\theta = (\theta_t)_{t\geq 0}$ est un bon processus s'il est $\left(\mathcal{F}_t^W\right)$ −adapté, càg-làd, et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] \prec +\infty$$

pour tout $t \succ 0$.

Définition 1.20 (Bon processus local) *: On dit que θ est un bon processus local s'il est càg-làd, $\left(\mathcal{F}_t^W\right)$-adapté, et si :*

$$\int_0^t \theta_s^2 ds \prec +\infty,\ p.s$$

pour tout $t \succ 0$.

1.6.1 Cas des processus étagés

On dit qu'un processus θ étagés s'il est écrit sous la forme :

$$\theta_t^n = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$$

avec, $p_n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{p_n} = t$ une subdivision de réels, et θ_i une suite de v.a $\mathcal{F}_t-$mesurable et appartienne à $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})$ $\forall i = 0, ..., p_n$.

Pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$,on definit l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} I_t(\theta^n) &= \int_0^t \theta_s^n dW_s = \int_0^t \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)\, dW_s \\ &= \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) \end{aligned}$$

on a les propriétés suivantes :

- $\mathbb{E}[I_t(\theta^n)] = 0;$
- $Var[I_t(\theta^n)] = \mathbb{E}\left(\int_0^t (\theta_s^n)^2 ds\right);$
- Les processus $I_t(\theta^n)$ et $I_t^2(\theta^n) - \int_0^t (\theta_s^n)^2 ds$ sont des martingales.

1.6.2 Cas général

Si θ est un bon processus. il existe $\{\theta^n, n \geq 0\}$ suite de processus étagés converge vers θ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, i.e

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds\right] \longrightarrow 0, n \longrightarrow +\infty$$

Quand $n \longrightarrow +\infty$,il existe une v.a $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que

$$\mathbb{E}\left[|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)|^2\right] \longrightarrow 0, n \longrightarrow +\infty$$

Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dW_s$$

1.6.3 Propriétés

On a les propriétés suivantes :

– $\mathbb{E}[I_t(\theta)] = 0;$

– $Var[I_t(\theta)] = \mathbb{E}\left(\int_0^t (\theta_s)^2 ds\right);$

– **Linéarité :**

$$I_t\left(a\theta^1 + b\theta^2\right) = aI_t\left(\theta^1\right) + bI_t\left(\theta^2\right)$$

$a, b \in \mathbb{R}$, et θ^1, θ^2 deux bon processus.

– **Propriétés de martingales :** Pour tout bon processus θ, les deux processus suivantes :

$$t \longrightarrow I_t(\theta) \text{ et } t \longrightarrow I_t^2(\theta) - \int_0^t \theta_s^2 ds$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^W\right)$ −martingales continues.

$$E\left[(I_t(\theta) - I_s(\theta))^2 \diagdown F_s^W\right] = E\left[\int_s^t \theta_u^2 du \diagdown F_s^W\right], s \leq t$$

– **Propriété d'isométrie :** Pour tous bons processus θ, ϕ et tout $s, t \geq 0$, on a :

$$E[I_s(\phi) I_t(\theta)] = E\left[\int_0^{s\wedge t} \theta_u \phi_u du\right].$$

De plus, le processus

$$I_t(\theta) I_t(\phi) - \int_0^t \theta_u \phi_u du$$

est une $\mathcal{F}_t^W$−martingale.

Proposition 1.2 *: Pour tout $t \geq 0$, on a :*

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right).$$

Preuve. : Nous voulons prouver la proposition précédente. Considérons que $\{t_i^n,\ i = 0, ..., 2^n\}$ la subdivision régulière de $[0, t]$, on écrit : ■

$$\int_0^t W_s dW_s = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{2^n - 1} W_{t_i^n}\left(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\right).$$

Après avoir utilisé l'égalité suivante :

$$a(b-a) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \frac{1}{2}(a-b)^2$$

on obtien :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{2^n - 1} W_{t_i^n}\left(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\right) &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{2^n - 1}\left[\frac{1}{2}\left(W_{t_{i+1}^n}^2 - W_{t_i^n}^2\right) - \frac{1}{2}\left(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\right)^2\right] \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{2^n - 1}\left(W_{t_{i+1}^n}^2 - W_{t_i^n}^2\right) - \sum_{i=0}^{2^n - 1}\left(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\right)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[W_t^2 - \lim_{n \longrightarrow +\infty}\left(\sum_{i=0}^{2^n - 1}\left(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\right)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right)
\end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right).$$

1.7 Calcul d'Itô

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t \geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré, et $W = (W_t)_{t \geq 0}$ un MB.

1.7.1 Processus d'Itô

On appelle processus d'Itô, un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui s'écrive sous la forme suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \tag{1.1}$$

avec :

- X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable.
- b_s est une processus $\left(\mathcal{F}_t^W\right)-$adapté, tel que :

$$\int_0^t |b_s|\, ds \prec +\infty \ p.s, \forall t \geq 0.$$

- σ_s est un bon processus locale.

On écrit généralement le processus d'Itô en utilisant la forme différentielle

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t \\ \qquad X_0 = x \end{cases}$$

avec :

- $X_0 = x$ est la condition initiale.
- La coefficient b_t s'appelle la dérivé (drift) du processus X, et σ_t s'appelle le coefficient de diffusion (volatilité).
- On appelle le processus $t \longmapsto x + \int_0^t b_s ds$ la partie à variation finie de X, et le processus $t \longmapsto \int_0^t \sigma_s dW_s$ la partie martingale de X.
- La décomposition de processus d'Itô est unique.
- Si $b_t = 0$, $X_t = x + \int_0^t \sigma_s dW_s$ est une martingale locale.

Théorème 1.2 (Représentation des martingales locales) *: Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une $\left(\mathcal{F}_t^W\right)-$ martingale locale. Alors, il existe $x \in \mathbb{R}$ et ψ un bon processus locale, tel que :*

$$M_t = x + \int_0^t \psi_s dW_s.$$

Définition 1.21 (Crochet de deux processus dItô) *: Soit X_t^1 et X_t^2 sont deux processus d'Itô :*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_s^i ds + \int_0^t \sigma_s^i dW_s, i = 1, 2.$$

Le crochet de $\langle X^1, X^2 \rangle_t$ est le crochet de leurs parties martingales :

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \left\langle \int_0^t \sigma_s^1 dW_s, \int_0^t \sigma_s^2 dW_s \right\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^1 \sigma_s^2 ds$$

avec le table de multiplication :

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

1.7.2 Formule d'Itô

Soit X un processus d'Itô de décomposition (**1.1**), et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.La formule d'Ito vise à donner une formule de changement de variable pour le processus $f(X_t)$.

Théorème 1.3 (Première formule d'Itô) *: Soit f une fonction deux fois continument différentiable. Alors,*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s .$$

Exemple 1.1 *: Soient W un MB standard $(W_0 = 0)$, et $Z_t = (X_t)^2$, avec $Z_0 = 0$, et $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$. On va ecrire Z_t comme un processus d'Itô.*

On pose : $f(x) = x^2$. Alors, on obtient respectivement les première et deuxième dérivées : $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$.

Maintenant, nous appliquons la formule d'Itô :

$$df\left(X_t\right)=f'\left(X_t\right)dX_t+\frac{1}{2}f''\left(X_t\right)d\left\langle X\right\rangle_t$$

Alors :

$$\begin{aligned}dZ_t=d\left(X_t\right)^2&=2X_tdX_t+\frac{1}{2}2d\left\langle X\right\rangle_t\\&=2X_t\left(\mu X_tdt+\sigma X_tdW_t\right)+\sigma^2X_t^2dt\\&=\left(2X_t^2\mu+\sigma^2X_t^2\right)dt+2X_t^2\sigma dW_t\\&=\left(2Z_t\mu+\sigma^2Z_t\right)dt+2Z_t\sigma dW_t.\end{aligned}$$

Théorème 1.4 (Deuxième formule d'Itô) *: Soit* $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{1,2}$*.Alors,*

$$f\left(t,X_t\right)=f\left(0,X_0\right)+\int_0^t f_t'\left(s,X_s\right)ds+\int_0^t f_x'\left(s,X_s\right)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''\left(s,X_s\right)d\left\langle X\right\rangle_s.$$

Le crochet :

$$\left\langle X\right\rangle_t=\int_0^t\sigma_s^2ds.$$

Proposition 1.3 (Formule d''intégration par partie) *: Soient* X_t *et* Y_t *deux processus d'Itô :*

$$X_t=X_0+\int_0^t b_sds+\int_0^t\sigma_sdW_s\text{ et }Y_t=Y_0+\int_0^t b_s'ds+\int_0^t\sigma_s'dW_s$$

alors,

$$X_tY_t=X_0Y_0+\int_0^t X_sdY_s+\int_0^t Y_sdX_s+\left\langle X,Y\right\rangle_t$$

où,

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds.$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques

L'objectif de ce chapitre, est d'introduire l'équation différentielle stochastique et de prouver l'existence et l'unicité de la solution forte.

2.1 Introduction et définitions générales

Le but des équations différentielles stochastiques est de donner un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. L'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{dX_t}{dt} = b\left(X_t\right)$$

exprime un système physique qui évolue avec le temps. Après avoir considérée les perturbations, on ajoute alors le terme de bruit $\sigma\left(X_t\right) dW_t$, où W est un MB, et $\sigma\left(.\right)$ est l'intensité du bruit à l'instant t. Ainsi, on obtenue une équation différentielle stochastique écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.1}$$

ou comme suit :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s.$$

où : la coefficient b_t s'appelle la dérivé (drift) du processus X, et σ_t s'appelle le coefficient de diffusion.

Définition 2.1 (EDS) *: Soit $x \in \mathbb{R}^d$ une condition initiale, et soient $d, m \in \mathbb{N}$.*

$b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{M}_{d\times m}(\mathbb{R})$ deux fonctions mesurables bornées $b(t, X) = \{b_i(t, X), i = 1, ..., d\}$, et $\sigma(t, X) = \{\sigma_{i,j}(t, X), i = 1, ..., d, j = 1, ..., m\}$ .Avec :

– Un espace de probabilité muni d'une filtration complète $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$;

– Un $\mathcal{F}_t-$MB, $W = (W^1, ..., W^m)$.

Une solution de l'EDS (2.1) est un processus $X = \left(X^1, X^2, ..., X^d\right)$ continue, $\mathcal{F}_t-$ adapté tel que les intégrales : $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$ ont un sens (sont bien définie), et l'égalité :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(s, X_s)\, ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)\, dW_s^m, 1 \leq i \leq d$$

est satisfaite pour tout t $\mathbb{P}-p.s$.

2.2 Notions et quelques inégalités

2.2.1 Notion d'éxistance et unicité forte

– On dit que X est une solution forte de (2.1) si, X est adapté par rapport à la filtration du MB W.

– Unicité trajectorielle (forte) si, l'espace de probabilité filtré et le MB W étant fixés. Les deux solutions X et X' de (2.1) telles que $X_0 = X_0'$ $p.s$, sont indistinguables i.e : $\mathbb{P}(X_t = X_t',\ \forall t \geq 0) = 1.\mathbb{P}-p.s.$

2.2.2 Quelques inégalités

Ici, on va montionée certaines des inégalités qu'on va les utilisées dans le preuve de ce chapitre.

Définition 2.2 *: On dit que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application lipchitzienne, s'il existe $K \geq 0$ telle que :*

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

et dit contractante, si $0 \leq K \prec 1$.

Théorème 2.1 (Théorème de point fixe) *: Soient F un espace vectoriel normé complet, et E une partie fermée de F $(E \subset F)$. Soit f une application contractante de E dans E. Alors : f admet un unique point fixe a.*

Théorème 2.2 (Inégalité de young) *: Soient a et b deux réels positifs ou nuls, et $1 \prec p, q \prec +\infty$ deux exposants conjugués i.e : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Théorème 2.3 (Inégalité de Hölder) *: Soient $f \in L^p$ $g \in L^q$, et $p, q \in [1, +\infty[$ deux exposants conjugués i.e : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.Alors :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Pour $p = q = 2$,on obtien l'inégalité de cauchy schwarz

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Théorème 2.4 (Inégalité de Doob dans L^p) *: Soit $p \geq 1$ et X une martingale à trajectoires continues à droite telle que $X_t \in L^p$. Alors pour tout $t \geq 0$:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right] \leq q^p \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$$

q le conjugué de p (i.e : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *).*

Lemme 2.1 (Lemme de Gronwall) *: Soit* $T \geq 0$*,et soit* g *une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle* $[0,T]$*. Supposons qu'il existe deux constantes* $a \succeq 0, b \succeq 0$ *telles que pour tout* $t \in [0,T]$ *:*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)\,ds$$

alors on a pour tout $t \in [0,T]$ *:*

$$g(t) \leq a\exp(bt).$$

Pour la démonstration du lemme voir [08] .

2.3 Existence et unicité de solution forte

Pour simplifier le travail, on écrit la définition d'EDS seulement pour le cas unidimensionnel $d = m = 1$.

Définition 2.3 *Soient* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré, et* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *un* $(\mathcal{F}_t)-$ *Mounement Brownien. Soient* $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions mesurables. l'équation :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma_s(s, X_s)\,dW_s \tag{2.2}$$

est appelée une équation différentielle stochastique.

Définition 2.4 *La solution forte de l'EDS* (2.2) *est un processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *défnie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *continue et adapté tel que :* $\forall t \geq 0 \quad \int_0^t \left[b_s(s, X_s)^2 + \sigma_s(s, X_s)^2\right] ds \prec \infty$ *et que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma_s(s, X_s)\,dW_s \quad \mathbb{P}-p.s$$

Théorème 2.5 *Supposons que* $X_0 \in L^2$ *(i.e :* $\mathbb{E}\left(|X_0|^2\right) \prec \infty$ *), et* b*, et* σ *sont des fonction continue telle que :*

a) Il existe une constante $M \succ 0$,

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq M|x-y| \quad \text{(condition de Lipschitz locale)}.$$

b) $\exists K \succ 0$,

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|) \quad \text{(condition de croissance linèare)}.$$

Alors, il existe une unique solution forte de l'EDS (2.2), $\forall t \geq 0$.Cette solution appartient à S^2, telle que :

$$S^2 = \left\{ (X_t)_{0\leq t\leq T} \text{ continue } \mathcal{F}_t - \text{adapté, } \mathbb{E}\left(\int_0^T X_s^2 ds\right) \prec +\infty \right\}$$

Preuve. : ■

Unicité : On Commence par l'unicité de la solution, pour cela, on utiliserons l'inégalité de Young $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, la condition de Lipschitz de b et σ, l'inégalité de Cauchy schwarz, et la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique.

Considérons que $X, Y \in S^2$ sont deux solutions distinctes de l'EDS (2.2), telles que $X_0 = Y_0$, on a :

$$X_t - Y_t = X_0 + \int_0^t b_s(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma_s(s,X_s)\,dW_s - \left[Y_0 + \int_0^t b_s(s,Y_s)\,ds + \int_0^t \sigma_s(s,Y_s)\,dW_s\right] \tag{1}$$

$$= \int_0^t \left[b(s,X_s) - b(s,Y_s)\right] ds + \int_0^t \left[\sigma_s(s,X_s) - \sigma_s(s,Y_s)\right] dW_s$$

Maintenant, pour $M \succ 0$ et $t \in [0,T]$ on continuons comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^t \left[b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right] ds + \int_0^t \left[\sigma_s(s, X_s) - \sigma_s(s, Y_s)\right] dW_s\right|\right)^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|\, ds\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |\sigma_s(s, X_s) - \sigma_s(s, Y_s)|\, dW_s\right)^2\right] \\
&\leq 2t\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma_s(s, X_s) - \sigma_s(s, Y_s)|^2 ds\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma_s(s, X_s) - \sigma_s(s, Y_s)|^2 ds\right] \\
&\leq 2\left[T\mathbb{E}\int_0^t (M|X_s - Y_s|)^2 ds + \mathbb{E}\int_0^t (M|X_s - Y_s|)^2 ds\right] \\
&\leq 2M^2(T+1)\int_0^t \mathbb{E}|X_s - Y_s|^2 ds
\end{aligned}$$

alors :

$$\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 \leq K\int_0^t \mathbb{E}|X_s - Y_s|^2 ds, \qquad K = 2M^2(T+1)$$

Si on pose $g(t) = \mathbb{E}|X_t - Y_t|^2$:

$$g(t) \leq K\int_0^t g(s)\, ds$$

par appliqué le lemme de Gronwall, et utiliser la remarque suivante : si $a = 0$, alors $g(t) = 0$.On obtien :

$$g(t) = \mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 = 0$$

donc, on déduit que $X = Y$.

Existance : Maintenant, on prouve l'existence de la solution, le preuve est basée sur la méthode d'itération de Picard, L'existence peut preuver aussi par la méthode de point fixe. L'idée est de construire une suite $\{\Phi(X^n)_t, n \geq 0\}$ de processus de S^2 :

$$
\begin{aligned}
X_t^0 &= x \\
\Phi\left(X^0\right)_t &= X_t^1 = x + \int_0^t b\left(s, X_s^0\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^0\right) dW_s \\
&. \\
&. \\
&. \\
\Phi\left(X^{n-1}\right)_t &= X_t^n = x + \int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dW_s \\
\Phi\left(X^n\right)_t &= X_t^{n+1} = x + \int_0^t b\left(s, X_s^n\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dW_s
\end{aligned}
$$

et de montrer la convergence de cette suite vers la solution, où :

$$
\Phi(X)_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s, \qquad t \in [0, T]
$$

$\Phi(X)_t$ est un processus bien défini et continu si $X \in S^2$.

On a l'égalité suivante :

$$
\begin{aligned}
\Phi(X^n) - \Phi\left(X^{n-1}\right) &= X_t^{n+1} - X_t^n \\
&= \int_0^t \left[b(s, X_s^n) - b\left(s, X_s^{n-1}\right)\right] ds + \int_0^t \left[\sigma_s(s, X_s^n) - \sigma_s\left(s, X_s^{n-1}\right)\right] dW_s
\end{aligned}
$$

en utilisant l'inégalité de Doob dans la deuxième inégalité, et par le même manière pour (1), on obtien :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] &\le 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s}\left|\int_0^t \left(b\left(s_1,X_{s_1}^n\right)-b\left(s_1,X_{s_1}^{n-1}\right)\right)ds_1\right|^2\right] \\
&+ 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s}\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s_1,X_{s_1}^n\right)-\sigma\left(s_1,X_{s_1}^{n-1}\right)\right)dW_{s_1}\right|^2\right] \\
&\le 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^s \left|b\left(s_1,X_{s_1}^n\right)-b\left(s_1,X_{s_1}^{n-1}\right)\right|ds_1\right)^2\right] \\
&+ 8\mathbb{E}\left[\left(\int_0^s \left|\sigma\left(s_1,X_{s_1}^n\right)-\sigma\left(s_1,X_{s_1}^{n-1}\right)dW_{s_1}\right|\right)^2\right] \\
&\le 2T\mathbb{E}\left[\int_0^s \left|b\left(s_1,X_{s_1}^n\right)-b\left(s_1,X_{s_1}^{n-1}\right)\right|^2 ds_1\right] \\
&+ 8\mathbb{E}\left[\int_0^s \left|\sigma\left(s_1,X_{s_1}^n\right)-\sigma\left(s_1,X_{s_1}^{n-1}\right)\right|^2 ds_1\right] \\
&\le 2\left(T+4\right)M_T^2\mathbb{E}\left[\int_0^s \left|X_{s_1}^n-X_{s_1}^{n-1}\right|^2 ds_1\right] \\
&\le K_T\mathbb{E}\left[\int_0^s \sup_{0\le t\le s_1}\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2 ds_1\right], \qquad \forall 0\le s\le T
\end{aligned}$$

avec, $K_T = 2M_T^2\left(T+4\right)$.

alors, par recurrence on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] &\le K_T\int_0^s \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s_1}\left|X_t^{n}-X_t^{n-1}\right|^2\right]ds_1\\
&\le K_T\int_0^s K_T\int_0^{s_1}\mathbb{E}\left[\left|X_{s_2}^{n-1}-X_{s_2}^{n-2}\right|^2\right]ds_2ds_1\\
&\le K_T^2\int_0^s\int_0^{s_1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s_2}\left|X_t^{n-1}-X_t^{n-2}\right|^2\right]ds_2ds_1\\
&\le K_T^2\int_0^s\int_0^{s_1}K_T\int_0^{s_2}\mathbb{E}\left[\left|X_{s_3}^{n-2}-X_{s_3}^{n-3}\right|^2\right]ds_3ds_2ds_1\\
&\le K_T^3\int_0^s\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s_3}\left|X_t^{n-2}-X_t^{n-3}\right|^2\right]ds_3ds_2ds_1\\
&.\\
&.\\
&.\\
&\le K_T^n\int_0^s\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}...\int_0^{s_{n-2}}\int_0^{s_{n-1}}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s_n}\left|X_t^{1}-X_t^{0}\right|^2\right]ds_nds_{n-1}...ds_3ds_2ds_1\\
&\le K_T^n\frac{T^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s}\left|X_t^{1}-X_t^{0}\right|^2\right]
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\le D\frac{(K_TT)^n}{n!}$$

où, la quantité D est le majorant de $\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{1}-X_t^{0}\right|^2\right]$. Finalement :

$$\left\|\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_2^2\le D\frac{(K_TT)^n}{n!}$$

$$\left\|\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_2\le \sqrt{D}\frac{(K_TT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}$$

alors :

$$\sum_{n\ge0}\left\|\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_1\le\sum_{n\ge0}\left\|\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_2\le\sqrt{D}\sum_{n\ge0}\frac{(K_TT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}\prec+\infty$$

quand n tend vers l'infini. La série $\sum_{n\geq 0} \sup_t \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}-p.s$, et donc $\mathbb{P}-$ $p.s$ la suite $\{X_t^n, n \geq 0\}$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ adapté et continue. En passant à la limite dans la définition $\Phi(X^n) = X^{n+1}$ on trouve que X est solution forte de l'EDS (2.2).

2.4 Exemple

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck : Soit $\alpha \succ 0$. On a l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -\alpha X_t dt + dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2}$$

le processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$X_t = X_0 \exp(-\alpha t) + \int_0^t \exp(-\alpha(t-s))\, dW_s.$$

est une solution de (2). Pour résoudre cette équation on appliquons la formule d'Ito à $Y_t = f(t, X_t) = X_t \exp(\alpha t)$ avec, $f \in C^{1,2}$ alors, on obtien :

$$\begin{aligned} dY_t &= (-\alpha X_t dt + dW_t) \exp(\alpha t)\, X_t \alpha \exp(\alpha t)\, dt \\ &= \exp(\alpha t)\, dW_t \end{aligned}$$

et on a :

$$Y_t = X_t \exp(\alpha t) \Longrightarrow X_t = Y_t \exp(-\alpha t)$$

$$\begin{aligned} dY_t &= \exp(\alpha t)\, dW_t \\ Y_0 &= x \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t \exp(\alpha s)\, dW_s \\ \Longrightarrow X_t &= \left(Y_0 + \int_0^t \exp(\alpha s)\, dW_s \right) \exp(-\alpha t) \\ \Longrightarrow X_t &= Y_0 \exp(-\alpha t) + \exp(-\alpha t) \int_0^t \exp(\alpha s)\, dW_s \\ \Longrightarrow X_t &= X_0 \exp(-\alpha t) + \int_0^t \exp(-\alpha(t-s))\, dW_s. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Modèle de Black-Scholes

Dans ce dernier chapitre, on va donner un exemple en finance. En effet, les EDS sont utilisées pour modéliser les prix des actions instables.

3.1 Historique

Le monde financier est depuis longtemps soulevé de nombreuses questions que les mathématiciens ont essayé de les résoudre. En 1901, Louis BACHELIER qui a proposé le premier modèle d'évolution des actifs finaciers dans sa thèse, Théorie de la spéculation. Depuis 1973, le modèle de Black-Scholes est utilisé pour prévoir le prix d'une action sur les marchés financiers, et ce modèle est une formule mathématique a été proposée par deux chercheurs : Fischer BLACK, Myron SCHOLES et élaborée par Bob MERTON qui ont obtenu le Prix Nobel d'économie en 1997 (quand BLACK était décédé).

Le modèle Black-Sholes prend en compte cinq facteurs :

- le prix actuel de l'action ;
- le prix d'exercice de l'option ;
- le temps restant avant l'expiration de l'option ;
- en pourcentage d'une année ;
- le taux d'intérêt sans risque et la volatilité implicite du prix de l'action.

3.2 Présentation du modèle

Le modèle de Black-Scholes est un modèle à deux actifs :

1. Un actif risqué, qui ne peut garantir le flux de remboursement à l'investisseur.
2. Un actif non risqué, qui ne comporte pas de risque de non remboursement et dont la profit est garantie.

Typiquement, l'actif risqué est une action (l'action sous-jacente à l'option) tandis que l'actif non risqué s'apparente à une obligation.

On suppose que :

$$dR_t = r_t R_t dt, \qquad \text{soit } R_t = R_0 \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$$

où R_t un actif représente le prix de l'obligation à l'instant t, $r_t \geq 0$ représente le taux d'intérêt instantanné et on supposons toujours que $R_0 = 1$.

Le prix de l'action $\{S_t\}_{t\geq 0}$ est un processus stochastique en temps continu et est régi par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dS_t = S_t\left(\mu_t dt + \sigma_t dW_t\right), \qquad S_0 \succ 0 \text{ donné}, \tag{3.1}$$

où $\mu_t \in \mathbb{R}$ et $\sigma_t \geq 0$ est le paramètre de la volatilité. Avec le mouvement Brownien standard $\{W_t, t \geq 0\}$ et $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$sa filtration naturelle augmentée. On suppose que les processus r, μ et σ sont progressivement mesurables avec σ borné et que, pour tout $T \succ 0$:

$$\int_0^T \left\{r_t + |\mu_t| + \sigma_t^2\right\} dt \prec +\infty \qquad \mathbb{P} - p.s$$

maintenant nous appliquons la formule d'Itô et donc on obtien la solution de l'EDS (3.1) :

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_d^2 ds\right\} \exp\left\{\int_0^t \mu_s ds\right\}.$$

Dans le modèle de Black–Scholes originel, les paramètres r,μ et σ sont des constantes. On a dans ce cas :

$$R_t = \exp rt \qquad S_t = S_0 \exp \sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2} \exp \mu t.$$

Considérons un agent qui investit dans ce marché. On indique par ϕ_t et ψ_t les valeures respectifs d'obligations et d'actions possedes par l'agent à l'instant t. La valeur du portefeuille de cet investisseur est :

$$V_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t.$$

Supposons que le processus (ϕ, ψ) est progressivement mesurable. Alors que l'agent détermine la stratégie qu'il adoptera, il n'anticipe pas le futur, ce qui rend (ϕ, ψ) approprié, $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t, cela proscrit en particulier les délits d'initiés. D'autra part, dans ce modèle signalons que ϕ et ψ sont des réels ; lorsqu'ils sont négatifs, l'agent contracte une dette libéllée dans l'actif correspondant.

Un tel couple de processus s'appelle une stratégie de financement. En fait, nous ne considérerons que des stratégies auto-financées i.e pour les quelles nous avons :

$$dV_t = \phi_t dR_t + \psi_t dS_t.$$

Le sens de l'auto-financement est : L'agent investit un somme V_0 à l'instant $t = 0$ dans le marché puis au fil du temps, il fait évoluer la répartition des titres dans son portefeuille. Il n'y a ni apport de fonds ni retrait d'argent pour consommation.
L'équation d'auto-financement nécessite une petite hypothèse technique. En résumé pour notre modèle

Définition 3.1 *: Le couple (ϕ, ψ) de processus progressivement mesurables est une stratégie auto-financée si est vérifiant $\mathbb{P} - p.s$*

$$\int_0^T \left\{ r_t \left| \phi_t \right| + \sigma_t^2 \psi_t^2 \right\} dt \prec +\infty$$

et tel que le processus $V_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t$ satisfait

$$dV_t = \phi_t dR_t + \psi_t dS_t \qquad t \geq 0.$$

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté, la valeur actualisée de X_t est $X^a(t) = X_t / R_t$. On note par a_t pour le coefficient d'actualisation à l'instant t avec $a_t = 1/R_t$. Par l'intégration par partie on a :

$$dV^a(t) = -r_t V^a(t)\, dt + a_t V_t, \qquad dS^a(t) = -r_t S^a(t)\, dt + a_t dS_t = -r_t a_t S_t dt + a_t dS_t$$

Oa alors, comme $V_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t$:

$$\psi_t dS^a(t) = -r_t a_t (V_t - \phi_t R_t)\, dt + a_t \psi_t dS_t = -r_t V^a(t)\, dt + a_t (\phi_t dR_t + \psi_t dS_t)$$

de là, nous concluons le lemme suivant

Lemme 3.1 *La stratégie (ϕ, ψ) est autofinancée si et seulement si $dV^a(t) = \psi_t dS^a(t)$.*

Le résultat de cette lemme est que la stratégie autofinancée est complètement caractérisée par la valeur initiale du portefeuilleV_0 et le processus ψ_t. En effet, une stratégie est autofinancée si et seulement si

$$V^a(t) = V^a(0) + \int_0^t \psi_u dS^a(u) = V_0 + \int_0^t \psi_u dS^a(u) \tag{3.2}$$

donc, on a ϕ_t via la relation $\phi_t = V^a(t) - \psi_t S^a(t) = V_0 + \int_0^t \psi_u dS^a(u) - \psi_t S^a(t)$.

Nous ferons référence à une stratégie d'autofinancement par le couple (x, ψ), soit x la valeur initiale du portefeuille associée via la relation (3.2), et note par $V_t^{x,\psi}$ la valeur du portefeuille corespondant à le couple (x, ψ).

Définition 3.2 *On dit que (x, ψ) est une stratégie autofinancée admissible si pour tout $t \geq 0, V_t^{x,\psi} \geq 0$.*

Elle est dite minorée, s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\forall t \geq 0, \qquad V^a(t) \geq -c$$

La valeur du portefeuille doit toujours être positive, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dette, même si elle est temporaire, et c'est pour que la stratégie soit admissible. La dette peut être tolérée si elle ne dépasse pas une certaine limite

3.3 Opportunité d'arbitrage

Dans le domaine de la finance, une opportunité d'arbitrage est le meilleur moyen d'obtenir plus d'avantages, et de gagner de l'argent sans risque, surtout sans mise initiale, et tout cela peut être exprimé par la définition suivante Supposons que l'agent investisse pendant la période $[0, T]$.

Définition 3.3 *: Une opportunité d'arbitrage est une stratégie minorée telle que*

$$V_0 = 0, \qquad \mathbb{P}(V_T \geq 0) = 1, \qquad \mathbb{P}(V_T \succ 0) \succ 0.$$

Chaque condition a une signification spécifique, La première condition signifie que l'investisseur part de rien, Le second est de s'assurer de ne pas perdre d'argent, et le troisième signifie un vrai profit.

Nous l'avons dans le modèle de Black-Scholes :

$$dS^a(t) = S^a(t)\{(\mu_t - r_t)\, dt + \sigma_t dW_t\}.$$

Soit le processus $\psi_t = sgn(\mu_t - r_t)\, \mathbf{1}_{\sigma_t=0}$. La stratégie autofinancée associée à $(0, \psi_t)$ vérifie :

$$V^a(t) = \int_0^t \psi_u dS^a(u) = \int_0^t |\mu_u - r_u|\, \mathbf{1}_{\sigma_u=0} du$$

Sous l'absence d'opportunité d'abitrage (AOA), la stratégie précédente est un arbitrage en l'absence de la condition $|\mu_u - r_u|\, \mathbf{1}_{\sigma_u=0} = 0 \ m \otimes \mathbb{P}-p.s$, et donc il exist θ le processus progressivement mesurable tel que :

$$\sigma_t \theta_t = \mu_t - r_t;$$

Prenons un exemple :

$$\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} \mathbf{1}_{\sigma_t \neq 0}$$

puisque $\mu_t - r_t = 0$, si $\sigma_t = 0$.

Nous définirons d'abord la probabilité risque neutre que c'une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}_T$ et telle que $\{S^a(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ est une $\mathbb{P}^*-$martingale. Nous allons maintenant, parler d'un résultat important dans les modèles financiers discrets qui dit que l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une probabilité risque neutre.

Nous poserons ici la question suivante, si ce résultat reste vrai dans les modèles continus ? l'existence d'une probabilité risque neutre conduisant à l'absence d'opportunité d'arbitrage mais la réciproque est fausse.

Nous allons d'abord prouver la première implication, supposons donc l'existence d'une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ et considèrons que ψ est une stratégie minorée telle que $V_0 = 0$. On a $V^a(t) = \int_0^t \psi_u dS^a(u)$, sous $\mathbb{P}^*$ S^a est une martingale, donc V^a est une martingale locale comme intégrale stochastique par rapport à une martingale. En outre, $V^a(t)$ reste minorée par une constante. Or une martingale locale minorée est une surmartingale, alors nous avons

$$\mathbb{E}^*[V^a(T)] \leq \mathbb{E}[V^a(0)] = V_0 = 0$$

Pour un arbitrage, on a $V^a(T) \geq 0$ $\mathbb{P}-p.s$ (ou $\mathbb{P}^*$ c'est pareil)et donc $\mathbb{E}^*[V^a(T)] = 0$ puis $V^a(T) = 0$ $\mathbb{P}-p.s.$ Ceci contredit le fait que $\mathbb{P}[V_T \succ 0] \succ 0$. donc Il n'y a pas d'arbitrage.

Dans le modèle de Black–Scholes le plus simple, on a le résultat qui exprime l'existence de l'opportunité d'arbitrage si on s'autorise toutes les stratégies autofinancées, opportunités. Ce résultat permet de construire un processus $(h_t)_t$ adapté tel que

$$\int_0^T h_r dW_r = 1, \qquad 0 \prec \int_0^T h_r^2 dr \prec +\infty \qquad \mathbb{P}-p.s.$$

On se place alors dans le cas $\mu = r = 0$, $R_0 = S_0 = \sigma = 1$, soit $R_t = 1$ et $dS_t = S_t dW_t$, c'est à dire, $S_t = \exp\left(W_t - \frac{t^2}{2}\right)$. alors On définit $V_t = \int_0^t h_r dW_r$ et $\psi_t = \frac{h_t}{S_t}$. $(0, \psi)$ est une opportunité
d'arbitrage et $V_0 = 0$, $V_T = \int_0^T h_r dW_r = 1$.
Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré, et $W = (W_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement brownien.

Théorème 3.1 (Théorème de Girsanov) *: Soit $\theta = (\theta_t)_{t\in[0,T]}$ un processus adapté vérifiant $\int_0^T \theta_s^2 ds \prec +\infty$ p.s et tel que le processus $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ défini par :*

$$M_t = \exp\left\{\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right\}$$

soit une martingale. Alors, sous la probabilité $\mathbb{P}^*$ de densité M_t par rapport à $\mathbb{P}$. Le processus $Q = (Q_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par $Q_t = W_t - \int_0^t h_s ds$ est un mouvement Brownien.

Maintenant, Nous allons essayer de clarifier la difficulté de la second. Soit $\mathbb{P}^*$ une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ et donc sur $\mathcal{F}_t$ pour tout $0 \leq t \leq T$. donc, il existe un processus $(h_t)_{t\in[0,T]}$ progressivement mesurable tel que :

$$\int_0^T h_s ds \prec +\infty, \qquad D_t = \exp\left\{\int_0^t h_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t h_s^2 ds\right\}$$

où : D_t est la densité de $\mathbb{P}^*$ par rapport à $\mathbb{P}$ et est une $\mathbb{P}-$martingale strictement positive.

D'après le théorème précédent, le processus $B_t = W_t - \int_0^t h_s ds$ un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^*$. D'autre part, nous avons :

$$dS^a(t) = S^a(t)\{\mu_t - r_t\} dt + \sigma_t dW_t = S^a(t)\{(\mu_t - r_t + \sigma_t h_t) dt + \sigma_t dB_t\}.$$

Si donc $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque neutre, S^a est une $\mathbb{P}^*-$martingale, et l'unicité de la décomposition des processus d'Itô, donne :

$$\mu_t - r_t \sigma_t h_t.$$

L'absence d'opportunité d'arbitrag fournit : un processus θ tel que $\sigma_t \theta_t = \mu_t - r_t$. Et on a $\theta_t = -h_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$ si en suposant $\sigma_t \succ 0$ et l'absence d'opportunité d'arbitrage ne donne pas d'information sur ce dernier processus. Mais $\mathbb{P}^*$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, donne D martingale ce qui est équivalent à :

$$\mathbb{E}\left[\left\{\int_0^t h_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t h_s^2 ds\right\}\right] = 1$$

c'est une martingale car est une surmartingale d'espérance constante.

Dans le modèle de Black-Scholes, nous venons de voir qu'il existe une probabilité risque neutre si et seulement si il existe un processus progressivement mesurable θ tel que :

$$\mu_t - r_t = \sigma_t \theta_t, \qquad \int_0^T \theta_s^2 \prec +\infty, \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right\}\right] = 1.$$

Dans ce cas, si $\mathbb{P}^*$ est la mesure de densité par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ définie par le processus θ, et $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^*$

$$dS^a(t) = S^a(t)\,\sigma_t dB_t, \text{ i.e } \qquad S^a(t) = S_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right\}$$

3.4 Complétude du marché

Une option européenne d'achat, call européen, donne le droit à son détenteur d'acheter une actif (action, divise,...etc) S à un prix d'exercice (noté K) fixé par avance dans un contrat, et à une certaine date future fixée T, appelle la maturité. L'acheteur n'est pas obligé d'exercer l'option, donc à la date T il a deux choix : acheter l'option et revendre-la à un prix S_T, et obtient ainsi un bénéfice de $S_T - K$ si $S_T \succ K$, sinon, il ne fait rien parce qu'il n'y a pas de bénéfice. le gain que procure la détention d'un call européen, s'appelle le "pay-off", est donc $\xi = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$.

Définition 3.4 *: On appelle option européenne de maturité T toute variable aléatoire positive et $\mathcal{F}_T-$mesurable.*

Nous prouvons la maturité $T \succ 0$ et supposons qu'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ On va maintenant mentionée deux notions importantes :

Définition 3.5 *: Une option européenne est régulière – on devrait dire $\mathbb{P}^*-$régulière si la variable aléatoire $\xi^a := a_T\xi$ est $\mathbb{P}^*-$intégrable i.e : $\mathbb{E}^*[\xi^a] \prec +\infty$.*

Une option régulière est simulable s'il existe une stratégie autofinancée (x, ψ) telle que :

$$V_T = \xi, \qquad V^a \text{ est une } \mathbb{P}^* \text{ martingale.}$$

Remarque 3.1 *:*

- Si toute l'option régulière est simulable, le marché donc est complet
- l'option régulière est simulable si et seulement si il existe une stratégie minorée telle :

$$V_0 = \mathbb{E}^*(\xi^a), \qquad V_T = \xi.$$

- Si ξ est simulable alors il existe une stratégie autofinancée telle que V^a est une $\mathbb{P}^*-$martingale et $V^a(T) = \xi^a$, alors :

$$V^a(t) = \mathbb{E}^*[V^a(T) \setminus \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*(\xi^a \setminus \mathcal{F}_t).$$

- V^a est sous $\mathbb{P}^*$ une martingale locale minorée, donc est surmartingale, Si (x, ψ) est une stratégie minorée. Donc pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\mathbb{E}^*[V^a(T)] \leq \mathbb{E}^*[V^a(t)] \leq \mathbb{E}^*[V^a(0)]$$

- Pour tout $t \in [0, T]$. $\mathbb{E}^*[V^a(t)] = \mathbb{E}^*[\xi^a]$ et V^a est une $\mathbb{P}^*-$martingale, si $V^a(0) = V_0 = \mathbb{E}^*[\xi^a]$ et $V^a(T) = \xi^a$

résultat : Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité risque neutre. le marché est $\mathbb{P}^*-$complet si et seulement si $\mathbb{P}^*$ est l'unique probabilité risque neutre.

Dans le modèle de Black–Scholes, nous supposons qu'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$. Donc on a :

Théorème 3.2 *:.Le marché est complet si et seulement si* $\sigma_t \succ 0$ $m \otimes \mathbb{P}-p.p.$

Preuve. : Nous allons prouver le théorème précédent. Tout d'abord, supposons qu'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$, ensuite zsur $\mathcal{F}_t$ notons D_t la densité de $\mathbb{P}^*$ par rapport à $\mathbb{P}$ qui est une $\mathbb{P}-$martingale. Soit θ un processus progressivement mesurable tel que $\sigma_t\theta_t = \mu_t - rt$, $\int_0^T \theta_s^2 ds \prec +\infty$ et ∎

$$D_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

Le processus $B_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$ est sous $\mathbb{P}^*$ un mouvement brownien et $dS^a(t) = S^a(t)\,\sigma_t dB_t$.

($\Longrightarrow$) Posons que le marché est complet. Considédons ξ un variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable

$$\xi = R_T\left(1 + \int_0^T \mathbf{1}_{\sigma_t=0} dB_t\right) \qquad \text{soit } \xi^a = 1 + \int_0^T \mathbf{1}_{\sigma_t=0} dB_t$$

ξ^a est intégrable par rapport à $\mathbb{P}^*$ et $\mathbb{E}^*(\xi^a) = 1$. ξ^+, ξ^- sont simulables, donc il existe ψ^+, ψ^- deux processus progressivement mesurable tels que :

$$M_t^{\pm} := \mathbb{E}^*\left(\xi^{a\pm}\right) + \int_0^t \psi_u^{\pm} dS^a(u) \qquad \mathbb{P}^* - \text{martingale vérifant } M_T^{\pm} = \xi^{a\pm}.$$

On a $\psi = \psi^+ - \psi^-$ et $M = M^+ - M^-$ avec, M est une $\mathbb{P}^*-$martingale et par suite il en est de même de $X_t := M_t - 1 - \int_0^t \mathbf{1}_{\sigma_s=0} dB_s$ qui vérifie $X_T = \xi^a - \xi^a = 0$, donc pour tout $0 \le t \le T$:

$$X_t = \mathbb{E}^*(\xi^a) + \int_0^t \psi_u S^a(u)\,\sigma_u dB_u - 1 - \int_0^t \mathbf{1}_{\sigma_u=0} dB_u = \int_0^t \left(\psi_u S^a(u)\,\sigma_u - \mathbf{1}_{\sigma_u=0}\right) dB_u = 0.$$

Alors, $\psi_u S^a(u)\,\sigma_u = \mathbf{1}_{\sigma_s=0}$ $m\otimes$ $\mathbb{P}-p.p$ et donc $\sigma_u \neq 0$ soit $\sigma_u \succ 0$ $m\otimes$ $\mathbb{P}-p.p.$

$(\Longleftarrow)$ Supposons $\sigma_t \succ 0$ $m \otimes \mathbb{P}-p.p.$ Et ξ est une option régulière, et M la $\mathbb{P}^*-$martingale $M_t = \mathbb{E}^* \left(\xi^a \diagdown \mathcal{F}_t\right).$

Théorème 3.3 (Théorème de représentation des martingales browniennes) *: Soit* $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$ *une martingale de carré intégrable, par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$*. Il existe un processus adapté* $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ *tel que* $\mathbb{E} \int_0^T L_s^2 ds \prec +\infty$ *et :*

$$\forall t \in [0, T], \qquad N_t = N_0 + \int_0^t L_s dB_s \quad p.s.$$

Donc, comme M est une $\mathbb{P}-$martingale nous utilisons le théorème précédent et on obtien :

$$\forall t \in [0, T], \qquad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$$

avec H un processus progressivement mesurable.
Posons $\psi_t = \frac{H_t}{(\sigma_t S^a(t))}$ pour obtient :

$$M_t = M_0 + \int_0^t \psi_u \sigma_u S^a(u) \, dB_u = \mathbb{E}^* (\varepsilon^a) + \int_0^t \psi_u dS^a(u)$$

La stratégie autofinancée $(\mathbb{E}^* (\varepsilon^a), \psi)$ simule l'option ξ puisque par construction $V^a = M$ est une $\mathbb{P}^*-$martingale telle que $V_T^a = M_T = \xi^a$ soit $V_T = \xi$.

3.5 La problématique des options

Dans cette partie, nous parlons des problèmes que les options posent au vendeur. À l'instant $t = 0$ il vend l'option et reçoit une somme x d'argent.qui appelée la prime Le premier problème du vendeur est de ne pas perdre d'argent : À la date de maturité, il sait qu'il devra verser au détenteur de l'option la somme $\xi(\omega)$ Pour éviter le risque, le vendeur investit la prime x dans le marché et tente d'adopter une stratégie autofinancée et minorée ψ dans lequel $V_T^{x,\psi} \geq \xi$. Le deuxième problème, concurrence dans le marché, car notre agent n'est pas le seul à proposer ce produit, et pour gagner, il essaiera vendez l'option au prix le plus bas possible. Finalement, ξ apparaît comme :

$$\mathbb{P}(\xi) = \inf\left\{x \geq 0, \exists (x,\psi) \text{ stratégie minorée t.q } V_T^{x,\psi} \geq \xi \ \mathbb{P}-p.s\right\}$$

Prouver $\mathbb{P}(\xi) \geq \mathbb{E}^*[\xi^a]$. est très facile. Soit (x,ψ) une stratégie minorée telle que $V_T \geq \xi$, V^a est une surmartingale et

$$x = \mathbb{E}^*[V^a(0)] \geq \mathbb{E}^*[V^a(T)] \geq \mathbb{E}^*(\xi^a).$$

Théorème 3.4 *: Si le marché est complet,* $\mathbb{P}(\xi) = \mathbb{E}^*[\xi^a]$, *l'infimum étant atteint pour une stratégie* (x,ψ) *telle que* $V_T^{x,\psi} = \xi$.

Soit V^a une $\mathbb{P}^*-$martingale Le marché est complet, donc il existe une stratégie (x,ψ) simulant ξ :

$$x = V^a(0) = \mathbb{E}^*[V^a(T)] = \mathbb{E}^*(\xi^a).$$

La raison pour laquelle nous avons parlé de prix équitable (fair price) est que l'acheteur de l'option paye la prime x, et il ne veut pas perdre d'argent donc il investit dans le marché en suivant une stratégie ψ. Il souhaite aussi profiter de l'option pour couvrir sa dette éventuelles au temps T soit $\xi + V_T^{-x,\psi} \geq 0$. les acheteurs veulent savoir à quel point ils ne peuvent pas perdre complètement de l'argens soit

$$\sup\left\{x \geq 0, \exists (-x,\psi) \text{ autofinancée t.q } \xi + V_T^{-x,\psi} \geq 0 \ \mathbb{P}-p.s \text{ et } V^a \ \mathbb{P}^* - \text{sur-martingale}\right\}.$$

Notons $P-(\xi)$ cette dernière quantité et montrons que $P-(\xi) \leq \mathbb{E}^*(\xi^a)$ On a $\xi \geq 0 = V_T^{-0,0}$, $P-(\xi) \geq 0$, et si (x,ψ) est une stratégie autofinancée on a $V^a(T) \geq -\xi^a$, donc par la propriété de surmartingale :

$$-\mathbb{E}^*(\xi^a) \leq \mathbb{E}^*[V^a(T)] \leq \mathbb{E}^*[V^a(0)] = -x.$$

Lorsque le marché est complet, il existe une stratégie (x,ψ) qui simule l'option et $x = \mathbb{E}^*(\xi^a)$, la stratégie $(-x, -\psi)$ réalise le supremum et par suite $P - (\xi) = \mathbb{E}^* (\xi^a) = \mathbb{P}(\xi)$. l'acheteur a le même point de vue que le vendeur d'où l'expression (prix équitable)

Formule de Black–Scholes : Il est impossible de présenter le modèle Black -Scholes sans donner la fameuse formule du même nom qui donne le prix du call européen dans le cas le plus simple. Si on considère une option européenne d'achat de prix d'exercice K, la date de maturité T, et $\xi = (S_T - K)^+$. Le prix d'une telle option C est :

$$C = \mathbb{E}^* \left[\exp(-rT)(S_T - k)^+\right] = \mathbb{E}^* \left[(S^a(T) - \exp(-rt) K)^+\right].$$

Soit G une gaussienne centrée réduite. On a :

$$S^a(T) = S_0 \exp\left(\sigma B_T - \sigma^2 T/2\right) \overset{(d)}{=} S_0 \exp\left(\sigma\sqrt{T} G - \sigma^2 T/2\right)$$

posons $\alpha = \sigma\sqrt{T}$, donc :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(S_0 \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}\right) - \exp(-rT) k\right)^+ \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_I \exp\left(\alpha x - \frac{\sigma^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx - \frac{\exp(-rT) k}{\sqrt{2\pi}} \int_I \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
\text{Si } I &= \left\{x \in \mathbb{R}, S_0 \exp\left(\alpha x - \frac{\sigma^2}{2}\right) \geq \exp(-rT) k\right\} = \left[-d^-, +\infty\right[\text{ avec} \\
d^\pm &= \frac{rT + \ln\left(\frac{S_0}{k}\right) \pm \frac{\alpha^2}{2}}{\alpha} = \frac{rT + \ln\left(\frac{S_0}{k}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}.
\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \geq -d^-} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right) dx - \frac{\exp(-rT) k}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \geq -d^-} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{y \geq -d^- - \alpha} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy - \frac{\exp(-rT) k}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \geq -d^-} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx
\end{aligned}$$

et comme $d^- + \alpha = d^+$ on obtient :

$$C = S_0 \Phi\left(d^{+}\right) - \exp\left(-rT\right) k \Phi\left(d^{-}\right)$$

où Φ est la fonction de répartition de loi normale centrée réduite.

Conclusion

En conclusion, dans ce modeste travail nous avons essayé de répondre à la question posée de savoir comment prouver l'existence et l'unicité de les solutions fortes d'équations différentielles stochastique et, nous nous sommes appuyés en cela sur la méthode d'approximation de Picard et quelques théorèmes pour prouver l'existence de la solution et son unicité. Il est également possible d'utiliser l'argument de point fixe.

Bibliographie

[1] ABDICH, N. (2017/2018). Les équations différentielles stochastiques en dimension finie (Mémoire de Master, Université Dr Moulay Tahar-Saida).

[2] BELQADHI, A. (14 Janvier 2008). Etude du calcul stochastique : martingales, mouvement Brownien et intégration d'Itô.

[3] BRIAND, P. (Mars 2001). Équations Différentielles Sochastiques Rétrogrades

[4] BRIAND, P. (Mars 2003). Le modèle de Black & Scholes.

[5] GHAMRI, Y. (Juin 2019). Processus de Lévy et l'Equation Différentielle Stochastique (Mémoire de Master, Université Mohamed Khider-Biskra).

[6] JEANBLANC, M. (Septembre 2006). Cours de calcul stochastique, Master 2IF EVRY.

[7] JEANBLANC, M & SIMON, T. (Septembre 2005). Elements de calcul stochastique, IRBID.

[8] LE GALL, J.F. (2013). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique (Vol.71). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[9] LAMBERTON, D & LAPEYRE, B. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

Ω	L'ensemble de résultat possible.
$\mathcal{F}$	Tribu sur Ω.
$\mathbb{P}$	Probabilité.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.
$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique ou moyenne du v.a.X.
$Var\left[X\right]$	Variance du v.a X.
Cov	Fonction de covariance.
$s \wedge t$	$\min\left(s,t\right)$.
$\mathbf{1}_A$	Indicatrice de A est noté : $\mathbf{1}_A\left(x\right) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \in A \end{cases}$.
L^1	Espace des processus intégrables.
$\mathcal{C}^1$	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la première dérivée est continue.
$\mathbb{R}^{d\times m}$	Ensemble des matrices réelles $d \times m$.

$p.s$	Presque sûrement.
$\mathbb{P}-p.s$	Prêsque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
v.a	Variable aléatoire.
i.e	C'est à dire.
resp	Respectivement.
MB	Mouvement Brownien.
max	Maximum.
S^2	Ensemble de processus càglàd, $\mathcal{F}_t-$ adapté.
EDS	Equation différentielle stochastique.
AOA	L'absence d'opportunité d'arrbitrage.
$m\otimes\mathbb{P}-p.s$	Presque partout par rapport la mesure $m\otimes\mathbb{P}$.