République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Mansouri Boutheyna

Titre

Principe du maximum stochastique pour les systèmes avec sauts

Membres du Comité d'Examen :

Dr. TABET Moufida, *Université de Biskra*, ______ **Président**

Dr. LAKHDARI Imad Eddine, *Université de Biskra*, ______ **Encadreur**

Dr. GATT Rafika, *Université de Biskra*, ______ **Examinateur**

2020

Dédicace

Pour la femme la plus importante de ma vie, mon lien, la lumière

de mes yeux et le ton de mon cœur, ma chèr mère

«***Romana***», qui m'aide toujours

à persévérer dans mes études.

Qui m'a soutenu dans cette vie, mon chèr père

«***Mohammed***».

À mes frères : ***Alladine, Lakhdar, cassi***.

À ma soeur ***Rayane***.

Ma spéciale dédicace à tout la famille «***Mansouri***».

Aux enfants les plus doux et les plus beaux de ma famille,***Hanine, AbdelNour,***

AbdelRahim, Haithem, AyahRahman, Rami, Ouiam,

Abir, Najla, Abdelmejib.

À tous mes amis surtout : ***Hala, Assia, Aljia, Asma, Shayma, khawla, Romaissa,***

Ahlem, Abla, Hasniya.

Je n'oublie pas tous mes amis en cours d'études depuis cinq ans.

Je remercie particulièrement mon amie "***AhlemBerramdane***" pour son soutien

et ses efforts pour accomplir ce travail.

Remerciements

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant «***Allah***» le tout
puissant de m'avoir donné le force et la volonté
pour terminer ce travail.
Deuxièmement, je remercie mon encadreur de mémoire Monsieur
«**Imad-Eddine Lakhdari** ».Je le remercie pour les
encouragements, la motivation et les précieux conseils
qu'il a fournis pour mener à bien ce travail.
Je remercie vivement les membres du jury **Tabet Moufida** et **Gatt Rafika**
pour leur présence et pour l'évaluation de ce travail.
Je tiens aussi à remercier tous les personnes qui nous ont encouragés pendant
la réalisation de ce travail, famille, collège, amis,
sans exception.

Table des matières

Introduction générale

Introduction

Dans ce travail, on considère un problème de contrôle optimal stochastique pour les systèmes avec sauts, qui consiste à minimiser une fonction de coût donnée par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T L(t, X_t, u_t)\, dt + \Psi(X_T)\right],$$

où X_t est la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t, u_t)\, dt + g(t, X_t, u_t)\, dW_t + \int_{R^l} h(t, X_{t^-}, u_t, \theta)\, \mu(d\theta, dt), \\ X_0 = x, \end{cases}$$

avec W est un mouvement brownien, μ est une mesure martingale de Poisson, u est un processus de contrôle.

Notre objectif est d'étudier les conditions nécessaires d'optimalité sous forme de principe du maximum stochastique. Nous supposons que le domaine du contrôle est convexe. Cette étude est basé sur le travail de Cadenillas [4].

Nous présentons dans ce travail trois chapitres :

Le premier chapitre est introductif et permet d'introduire les outils essentiels pour comprendre le principe du maximum stochastique (processus stochastique, mouvement brownien, processus de poisson, l'intégrale stochastique et ...).

Le deuxième chapitre, contient l'essentielle de notre étude, nous commençons par une formulation générale du problème, puis nous étudions le principe du maximum stochastique (conditions nécessaires d'optimalité).

Dans le dernier chapitre, nous appliquons le principe du maximum stochastique au problème de consommation et d'investissement.

Chapitre §.1
Généralité sur le calcul stochastique

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre nous allons rappeler des notions essentielles en théorie du calcul stochastique, nous commençons par définir un processus stochastique, mouvement brownien, l'intégrale stochastique, processus d'itô, nous rappelons ensuite les équations différentielles stochastique et le processus de poisson.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ un espace mesurable.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires $X_t(\omega) : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ indexée par un temps $t \in T$:*

1. Pour t fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.
2. Pour ω fixé, $t \in T \to X_t(\omega)$ est une fonction réelles, appelée trajectoire du processus.

- $T \subseteq \mathbb{N}$ le processus est à temps discrét,
- $T = [0, a]$ tel que $a > 0$ le processus est à temps continu.

Définition 1.2 (Filtration) *Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ pour $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$,*

- la filtration naturelle (ou canonique) de processus X_t est donné par

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s, 0 \leq s \leq t\right), \qquad t \in T,$$

c'est la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

L'espace $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}{=}\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in T}, \mathbb{P}\right)$ est appelé espace probabilisé filtré.

Remarque 1.1.1 *La filtration est dite :*

1. Continue à droite si $\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\mathcal{F}s = \mathcal{F}_t$.
2. Satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}-$négligeables de $\mathcal{F}$.

Définition 1.3 *Un processus $\left(X_t\right)_{t\geq 0}$ est dit mesurable si l'application définie sur*

$\left(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+\right) \otimes \mathcal{F}\right)$ par $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ est mesurable.

Définition 1.4 *On dit que un processus $\left(X_t\right)_{t\geq 0}$ est adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.5 *Un processus est à trajectoire continue si*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega; t \rightarrow X_t(\omega) \ \textit{ est continue}\}\right) = 1.$$

Définition 1.6 *Un processus $\left(X_t\right)_{t\geq 0}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si $\forall\ t \in T$ l'application $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ est mesurable sur $\left([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}\left([0,t]\right) \otimes \mathcal{F}_t\right)$.*

Définition 1.7 *Un processus $\left(X_t\right)_{t\geq 0}$ est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limite à gauche pour presque tout ω.*

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors X_t est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition 1.8 (processus gaussien) *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est gaussien ssi toute combinaison linéaire de ses marginales $\alpha_1 X_{t_1} + ... + \alpha_n X_{t_n}$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_1, ...t_n \in T$ et $\alpha_1...\alpha_n \in \mathbb{R}$).*

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.9 *Un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ est appellée mouvement brownien si vérifiée les conditions suivantes :*

1. $B_0 = 0$.
2. $(B_t) \rightarrow B_t(\omega)$ continue $\mathbb{P} - p\ s$.
3. $\forall\ \ 0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.
4. $\forall\ \ 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $N(0, t-s)$.

Lorsque $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle de $(B_t)_{t\geq 0}$, on dit que B est un mouvement brownien naturel.

Proposition 1.2 *Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, alors :*

i) le processus $\breve{B}$ défini par $\breve{B}_t = B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien.

ii) le processus $\widehat{B}$ défini par $\widehat{B}_t = -B_t$ est un mouvement Brownien.

iii) le processus $\widetilde{B}$ défini par $\widetilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un mouvement Brownien.

iiii) le processus $\overline{B}$ défini par, $\overline{B}_t = t B_{\frac{1}{t}}, \forall t > 0, \overline{B}_0 = 0$ est un mouvement Brownien.

1.3 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un mouvement Brownien B sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du MB.

Définition 1.10 *l'intégrale de Wiener définir par*

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

telle que θ est un processus stochastique.

Définition 1.11 *On dit que* $\{\theta_t, t \geq 0\}$ *est un "bon processus" s'il est* $(\mathcal{F}_t)$ *adapté et càdlàg vérifiant :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s ds\right] < +\infty \qquad , \forall t \geq 0.$$

Propriétés de l'intégrale stochastique : On note Λ l'ensemble $L^2_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ des processus θ adaptés càglàd vérifiant $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2(\omega)\, ds\right] < \infty$.

Définition 1.12 *Soit* B *un MB et* $\{\theta_t, t \geq 0\}$ *un "bon processus" :*

1. $\theta \rightarrow \int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire.
2. Le processus $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{t\in]0,T]}$ est à trajectoire continue.
3. $N_t = \left[\int_0^t \theta_s dB_s\right]^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$. Le processus $(N_t, t \geq 0)$ est une martingale.
4. on a $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ et $var\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.

1.4 Processus d'Itô

Un processus X est un processus d'Itô si

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s| ds$ existe (au sens Lebesgue) $p.s.$ pour tout t, et σ un processus appartenant à Λ.

On utilise la notation plus concise suivante

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

L'écriture $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ est unique (sous réserve que les processus b et vérifient les conditions d'intégrabilité).

Ceci signifie que si

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = dX_t = \widetilde{b}_t dt + \widetilde{\sigma}_t dB_t.$$

alors $b = \tilde{b}, \sigma = \tilde{\sigma}$. En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement. On peut définir un processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que $\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$, mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie $x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie. Si un processus A à variation finie et une martingale, il est constant. En effet, si $A_0 = 0$, $A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s$ et par suite $\mathbb{E}\left[A_t^2\right] = 0$.

1.5 Equations différentielles stochastiques

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s, \tag{1.1}$$

Ou en autre forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

L'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, démontrer que sous certaines conditions sur les coéfficients, l'équation différentielle a une unique solution.Il est utile de préciser les données.

Soit b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un

espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et un.$(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien B sur cet espace. Une solution de (1.1) est un processus X continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté
tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$ sont un sens et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s,$$

est satisfaite pour tout t, $\mathbb{P} - p.s.$

1.6 Processus de Poisson

Définition 1.13 *Un processus de poisson N de paramétre $\lambda > 0$ est un processus de comptage*

$$\forall t \geq 0,\ N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

associé à une famille $(T_n;\ n \in \mathbb{N})$ avec $T_0 = 0$ de va représentant les temps d'arrivées, telle que les variables aléatoires $(T_{n+1} - T_n;\ n \in \mathbb{N})$ sont i.i.d de loi exponentielle de paramétre λ.
Processus de Poisson compensé : On définit la version "*centrée*" d'un processus de Poisson par

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t.$$

Sa fonction caractéristique est

$$\phi_{\tilde{N}_t}(z) = \exp\left[e^{iz} - 1 - iz\right].$$

$\widetilde{N}$ est aussi a accroissement indépendant. Comme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[N_t / N_s, s \leq t\right] &= \mathbb{E}\left[N_t - N_s + N_s / N_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[N_t - N_s\right] + N_s = \lambda(t - s) + N_s, \end{aligned}$$

alors $\left(\widetilde{N}_t\right)$ est une martingale,

$$\forall s \leq t, \qquad \mathbb{E}\left(\widetilde{N}_t/\widetilde{N}_s\right) = \widetilde{N}_s.$$

$\left(\widetilde{N}_t\right)$ est dite *Processus de Poisson compensé* et l'expression déterministe $(\lambda t)_{t\geq 0}$ est dite *compensateur* de $(N_t)_{t\geq 0}$. Pour un processus de Poisson compensé, la mesure aléatoire est définie par

$$\widetilde{M}(A) = M(A) - \lambda |A|.$$

$\widetilde{M}(A)$ vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\widetilde{M}(A)\right) = 0 \quad et \quad var\left(\widetilde{M}(A)\right) = \lambda |A|.$$

Remarque 1.6.1 *Pour définir la mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d$, on peut remplacer $A \subset \mathbb{R}^+$ par un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ et la mesure de Lebesgue $|\cdot|$ par une mesure de Radon -Nykodim μ sur E.*

Mesure aléatoire de Poisson compensé : La mesure aléatoire de Poisson compensé est définit par

$$\widetilde{M}(A) = M(A) - \mu(A),$$

et elle vérifie :

- Pour tous les ensembles compacts disjoints $A_1, ..., A_n \in E$.
- Les variables $\widetilde{M}(A_1), ..., \widetilde{M}(A_n)$ sont indépendantes et vérifiants

$$\mathbb{E}\left(\widetilde{M}(A_i)\right) = 0, var\left(\widetilde{M}(A_i)\right) = \mu(A_i).$$

Le processus de Poisson définit par un processus de comptage n'est pas utilisé pour modéliser les cours d'actifs, car la condition que la taille est toujours égale à 1, n'est pas réaliste. C'est pour ça, on va définir le processus de Poisson composé,

Définition 1.14 *Le processus de Poisson composé d' intensité de sauts λ et de distribution* *de taille de sauts μ est un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est défini par*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

où $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ est une suite de $v.a$ indépendantes de loi μ et N est un processus de Poisson standard d'intensité indépendant de $\{Y_i\}_{i\geq 1}$.

Proposition 1.3 *un processus de Poisson $(X_t)_{t\geq 0}$ est composé si et seulement si, il est un processus de Lévy et ses trajectoires sont des fonctions continues par morceau.*

Mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé : Pour tout processus càdlàg et en particulier, pour tout processus de Poisson composé, on peut associé une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ qui décrit les sauts de X pour chaque ensemble mesurable $B \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty[$:

$$J_X(B) = \mathbb{E}\left[\sum_{t\in[0,T]} 1_B\left(X_t - X_{t^-}, t\right)\right].$$

Pour chaque ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^d$, $J_X\left(A \times [t_1, t_2]\right)$ contient le nombre de sauts de X entre t_1 et t_2 dont les tailles des sauts sont dans A.

Première Formule d'Itô

Théoreme 1.6.1 *Supposons que $X(t) \in \mathbb{R}$ est un processus de lévy d'itô de la forme*

$$dX(t) = \alpha(t,\omega)\, dt + \beta(t,\omega)\, dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z,\omega)\, \overline{N}(dt,dz), \tag{1.2}$$

où

$$\overline{N}(dt,dz) = \begin{cases} N(dt,dz) - v(dz)\, dt & si \quad |\, z \,|< R \\ N(dt,dz) & si \quad |\, z \,|\geq R \end{cases} \tag{1.3}$$

pour certains $R \in [0, \infty]$.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ et définie $Y(t) = f(t, X(t))$. Alors $Y(t)$ est à nouveau un processus de lévy d'itô et

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\left[\alpha(t,\omega)\,dt + \beta(t,\omega)\,dB(t)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\beta^2(t,\omega)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))\,dt \\ &+ \int_{|z|<R} \left\{ f\left(t, X\left(t^-\right) + \gamma(t,z)\right) - f\left(t, X\left(t^-\right)\right) \right. \\ &- \left. \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, X\left(t^-\right)\right)\gamma(t,z) \right\} \upsilon(dz)\,dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left\{ f\left(t, X\left(t^-\right) + \gamma(t,z)\right) - f\left(t, X\left(t^-\right)\right) \right\} \overline{N}(dt, dz). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Remarque : Si $R = 0$ alors $\overline{N} = N$.

Si $R = \infty$ alors $\overline{N} = \widetilde{N}$.

La formule d'Itô multi–dimensionnelle : Soit $X(t) \in \mathbb{R}^n$ être un processus de lévy d'itô de la forme

$$dX(t) = \alpha(t,\omega)\,dt + \sigma(t,\omega)\,dB(t) + \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t,z,\omega)\,\overline{N}(dt,dz), \tag{1.5}$$

où $\alpha : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n, \sigma : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^{n\times m}$ et $\gamma : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\Omega \to \mathbb{R}^{n\times\ell}$ sont des processus adaptés tels que les intégrales existent. $B(t)$ est un mouvement brownien m-dimensionnel et

$$\begin{aligned} \overline{N}(dt,dz)^T &= \left(\overline{N_1}(dt,dz_1), ..., \overline{N}_\ell(dt,dz_\ell)\right) \\ &= \left(N_1(dt,dz_1) - \chi_{|z_1|<R_1}\upsilon_1 d(z_1)\,dt, ..., N_\ell(dt,dz_\ell) - \chi_{|z_\ell|<R_\ell}\upsilon_\ell d(z_\ell)\,dt\right), \end{aligned}$$

où $\{N_j\}$ sont des mesures aléatoires de Poisson indépendantes avec des mesures de lévy υ_j provenant de processus de lévy indépendant (uni–dimensionnel) $\eta_1, ..., \eta_\ell$.

Notez que chaque colonne γ^k de $n\times\ell$ la matrice $\gamma = [\gamma_{ij}]$ ne dépend de z que par la $k^{ième}$ coordonnée z_k, c'est-à-dire

$$\gamma^k(t,z,\omega) = \gamma^k(t,z_k,\omega); \qquad z = (z_1, ..., z_\ell) \in \mathbb{R}^\ell.$$

Ainsi, l'intégrale à droite de (1.5) n'est qu'une notation de matrice abrégée. Lorsqu'il est écrit en détail composant numéro i de $X(t)$ en (1.5), $X_i(t)$ obtient la forme

$$X_i(t) = \alpha_i(t,\omega)\,dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t,\omega)\,dB_j(t) + \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\mathbb{R}} \gamma_{ij}(t,z_j,\omega)\,\overline{N}_j(dt,dz_j)\,; \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{1.6}$$

Soit $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Mettre $Y(t) = f(t,X(t))$. Alors

$$\begin{aligned} dY(t) = {} & \frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\alpha_i dt + \sigma_i dB(t)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left(\sigma\sigma^T\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dt \\ & + \sum_{k=1}^{\ell} \int_{|z_k|<R_k} \left\{ f\left(t, X\left(t^-\right) + \gamma^{(k)}(t,z_k)\right) - f\left(t, X\left(t^-\right)\right) \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(k)}(t,z_k) \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(X\left(t^-\right)\right) \right\} \upsilon_k(dz_k)\,dt \\ & + \sum_{k=1}^{\ell} \int_{\mathbb{R}} \left\{ f\left(t, X\left(t^-\right) + \gamma^{(k)}(t,z_k)\right) - f\left(t, X\left(t^-\right)\right) \overline{N}_k(dt,dz_k) \right\}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\gamma^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ est le numéro de colonne k de $n \times \ell$, la matrice $\gamma = [\gamma_{ik}]$ et $\gamma_i^k = \gamma_{ik}$ est le nombre de coordonnées i de $\gamma^{(k)}$.

Chapitre §.2
Principe du maximum stochastique

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration $\mathbb{P}$-complète et continue à droite. W est un mouvement brownien de dimension d, p un processus stationnaire $(\mathcal{F}_t)$-Poisson de point sur un sous-ensemble fixé non vide $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^l$. On note par $m(d\theta)$ la mesure caractéristique de p et par $\widetilde{\mu}(d\theta; dt)$ la mesure de comptage. Nous supposons que $m(\mathcal{E}) < \infty$, on définissons $\mu(d\theta, dt) := \widetilde{\mu}(d\theta, dt) - m(d\theta)dt$ telleque μ est une mesure martingale de Poisson avec la caractéristique $m(d\theta)dt$. Nous supposons que $(\mathcal{F}_t)$ est $\mathbb{P}-$augmentation de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^{(W,\mu)})$ définie par $\forall t \in [0, \infty)$:

$$\mathcal{F}_t^{(W,\mu)} = \sigma(W(s) : 0 \leq s \leq t) \vee \sigma\left(\int_A \int_0^s \mu(d\theta, dr) : 0 \leq s \leq t, A \in \beta(\mathcal{E})\right).$$

Soit T un nombre fixé strictement positif réel, U un sous-ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^k$, et considérons les fonctions

$$\begin{aligned}
&A : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n),\\
&B : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^n),\\
&C : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n,\\
&D : [0; T] \times \Omega \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E &: [0,T] \times \Omega \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)),\\
F &: [0,T] \times \Omega \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n),\\
G &: [0,T] \times \Omega \times \mathcal{E} \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &: [0,T] \times \Omega \times \mathcal{E} \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^n),\\
I &: [0,T] \times \Omega \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

$\mathbb{L}(\widetilde{V}, \widetilde{W})$ désigne l'espace des transformations linéaires d'un espace vectoriel $\widetilde{V}$ en espace vectoriel $\widetilde{W}$. Nous identifierons les transformations linéaires avec des matrices. De plus, les vecteurs seront considérés comme des matrices à une colonne, et M^* est la transposé de la matrice M.

Nous supposons que $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G(\theta),\ H(\theta)$ et $I(\theta)$ sont prévisibles par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ et uniformément borneé dans $(t, \omega, \theta) \in [0, \infty) \times \Omega \times \mathcal{E}$.

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique linéaire

$$
\begin{cases}
dX_t = f(t, X_t, u_t)dt + g(t, X_t, u_t)dW_t + \displaystyle\int_{\mathcal{E}} h(t, X_{t-}, u_t, \theta)\mu(d\theta, dt),\\
X_0 = x,
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

où

$$
\begin{aligned}
f(t,x,u) &= A_t x + B_t u + C_t,\\
g(t,x,u) &= D_t x + E_t u + F_t,\\
h(t,x,u,\theta) &= G_t(\theta)x + H_t(\theta)u + I_t(\theta).
\end{aligned}
$$

Pour s'assurer que l'équation différentielle stochastique ci-dessus a un sens, il faut considérerons que les processus de contrôle $(\mathcal{F}_t)-$prévisibles $u : [0,T] \times \Omega \to U \subset \mathbb{R}^k$ satisfait

$$
\mathbb{P}\left\{ \int_0^T |B_t u_t|\, dt < \infty, \int_0^T |E_t u_t|^2\, dt < \infty,\ \text{et}\ \int_0^T \int_{\mathcal{E}} |H_t(\theta) u_t|^2\, m(d\theta)dt < \infty \right\} = 1. \tag{2.2}
$$

Ensuite, il existe un unique processus stochastique X^u càdlàg adapté (continue à droite amet une limite à gauche) qui satisfait (2.1).

Nous observons cette condition $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[|u(t)|^8] < \infty$ de [12] implique que la condition

$\mathbb{E}\left[\int_0^T |u_t|^2 \, dt\right] < \infty$ de [10, 11], et cela implique que $\mathbb{P}\left\{\int_0^T |u_t|^2 < \infty\right\} = 1$, ce qui implique (2.2).

Ainsi, nous considérerons une plus grande classe de contrôles que dans [10, 12]. Évidemment, la linéarité du système et pour tous les processus de contrôle u, v comme ci-dessus, nous avons pour chaque $\alpha \in [0, 1]$ on a :

$$X^{\alpha u+(1-\alpha)v} = \alpha X^u + (1-\alpha)X^v. \tag{2.3}$$

Considérons maintenant les fonctions mesurables :

$$\Psi : \Omega \to C^1(V;\mathbb{R}),$$
$$L : [0,T] \times \Omega \to C^{1,1}(V \times U;\mathbb{R}).$$

Supposons que Ψ est $(\mathcal{F}_t)-$mesurable, L est $(\mathcal{F}_t)-$adapté, et que pour chaque
$(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$, $L(t,.,.) \in C^{1,1}(V \times U;\mathbb{R})$ et $\Psi(.) \in C^1(V;\mathbb{R})$ sont des fonctions convexes.

Définition 2.1 *Soit V un sous-ensemble fixe, non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in V$, on noterons par $\mathcal{U}(x)$ la classe des processus de contrôle $u : [0;T] \times \Omega \to U$, qui sont $(\mathcal{F}_t)$-prévisibles, satisfait la condition (2.2), et sont tels que la trajectoire correspondante X^u de (2.1) satisfaient $\mathbb{P}\{\forall t \in [0,T] : X_t^u \in V\} = 1$. Ils seront appelés contrôles admissibles.*

De cette définition et de (2.3), nous observons que la classe $\mathcal{U}$ des contrôles admissibles est convexe.

Notre fonction de côut $J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est de la forme :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T L(t, X_t, u_t)dt + \Psi(X_T)\right]. \tag{2.4}$$

La propriété suivante est alors évidente.

Proposition 2.1 *La fonction J est convexe. De plus, si pour chaque $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega, L(t,.,.)$ où $\Psi(\cdot)$ est strictement convexe, alors J est strictement convexe.*

Probleme 2.1

Nous étudions le problème de contrôle stochastique suivant :

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} J(u) = \inf_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[\int_0^T L(t, X_t, u_t)dt + \Psi(X_T)\right]. \tag{2.5}$$

Autrement dit, nous voulons trouver un contrôle $\widehat{u} \in \mathcal{U}$ qui minimise la fonction de côut J.

2.1 Processus adjoints

Considérons un contrôle optimal $\widehat{u}$ avec la trajectoire correspondante $\widehat{X}$.

Définition 2.2 *Un triple (p, q, r) des processus stochastiques $p : [0; T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $q : [0; T] \times \Omega \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$, et $r : [0; T] \times \Omega \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^n$, est une solution de l'équation adjointe si p est adapté, q et $r(\theta)$ sont prévisibles, et ils satisfait*

$$\begin{cases} dp_t = \left(L_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) - A_t^* p_t - \sum_{j=1}^{d} D_t^{(j)*} q_t^{(j)} - \int_{\mathcal{E}} G_t^* r_t(\theta) m(d\theta)\right) dt \\ \qquad +q_t dW_t + \int_{\mathcal{E}} r_t(\theta)\mu(d\theta, dt), \\ p_T = -\Psi_x(\widehat{X}_T). \end{cases} \tag{2.6}$$

Pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $D_t^{(j)}$ et $q_t^{(j)}$ sont des matrices de dimension $n \times n$ et $n \times 1$, respectivement.

Hypothèse 2.1

Dans cette section, nous supposons que

$$\mathbb{E}[\mid \Psi_x(\widehat{X}_T) \mid^2] < \infty \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T L_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right|^2 dt\right] < \infty. \tag{2.7}$$

Soit $\mathcal{L}$ un espace vectoriel normée de dimension finie. On note par $M^2(0, T; \mathcal{L})$ l'ensemble du processus à valeurs vectorielles $\widetilde{\xi} : [0, T] \times \Omega \to \mathcal{L}$ qui sont mesurables, adaptés, et satisfait $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{\xi}(t)\right|^2 dt < \infty\right]$, et par $M^{2,p}(0, T; \mathcal{L})$ l'espace des versions $(\mathcal{F}_t)-$prévisibles des classes

équivalentes dans $M^2(0,T;\mathcal{L})$. De même, $M^{2,p}(0,T;\mathcal{E};\mathcal{L})$ dénote l'ensemble des processus $(\mathcal{F}_t)-$prévisibles $\widetilde{\xi}:[0,T]\times\Omega\times\mathcal{E}\to\mathcal{L}$ satisfaisant $\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_{\mathcal{E}}\left|\widetilde{\xi}(t,\theta\right|^2)m(d\;\theta)dt\right]<\infty$.
Le résultat suivant d'existence et d'unicité est prouvé dans [12, Lemma 2.4]. La preuve utilise un résultat de représentation de martingale voir [12, Lemma 2.3].

Théoreme 2.1.1 *Si l'Hypothèse **2.1** satisfaite, alors il existe un triple unique*

$$(p,q,r)\in M^2(0,T;\mathbb{R}^n)\times M^{2,p}(0,T;\mathbb{L}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n))\times M^{2,p}(0,T;\mathcal{E};\mathbb{R}^n),$$

solution de l'équation adjointe 2.6, avec p est un processus càdlàg.

Nous appellons p,q et r les processus adjoints.

2.2 Principe du maximum stochastique

On définie la fonction d'hamiltonien H par

$$\begin{aligned}H(t,p,q,r,x,u) &= -L(t,x,u)+p\cdot f(t,x,u)+q\cdot g(t,x,u)\\ &\quad+\int_{\mathcal{E}}[r_t(\theta)\cdot h(t,x,u,\theta)]m(d\theta).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Le $\cdot$ signifie le produit intérieur. Soit Z^u la solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned}Z_t &= \int_0^t (A_sZ_s+B_su_s)\,ds+\int_0^t (D_sZ_s+E_su_s)\,dW_s\\ &\quad+\int_0^t\int_{\mathcal{E}}(G_s(\theta)Z_{s-}+H_s(\theta)u_s)\mu(d\theta,ds).\end{aligned}$$

Nous observons que $Z^u-Z^v=X^u-X^v$. L'hypothèse suivante est utilisée dans la preuve de Lemma 2.1.

Hypothèse.2.2

Il existe une variable aléatoire $\tilde{Y}:\Omega\to\mathbb{R}$ et un processus mesurable $Y:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}\left[\left|\tilde{Y}\right|\right] < \infty$, $\mathbb{E}[\int_0^T |Y_t|\, dt] < \infty$, et pour tout arbitraire $u, v \in \mathcal{U}, \rho \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
&\tilde{Y} \geq Z_T^u \cdot \Psi_x(X_T^v + \rho Z_T^u),\\
&Y_t \geq Z_t^u \cdot L_x(t, X_t^v + \rho Z_t^u, v_t + \rho u_t) + u_t \cdot L_u(t, X_t^v + \rho Z_t^u, v_t + \rho u_t).
\end{aligned}$$

Lemme 2.1 *J est une fonction différentiable au sens de Gâteaux donné par*

$$\langle J'(v), u\rangle = \mathbb{E}\left[\int_0^T \{Z_t^u \cdot L_x(t, X_t^v, v_t\} + u_t \cdot L_u(t, X_t^v, v_t)\}dt + Z_T^u \cdot \Psi_x(X_T^v)\right]. \tag{2.9}$$

Proof. La preuve est la même que celle du lemme 1.1 [3, Lemma 1.1] . Considérons les semi-martingales p et X^u donnés par les Eqs (2.6) et (2.1), et on applique la formule d'Itô où de façon équivalente la formule d'intégration par parties, nous obtenons (voir [7, Section 2.6])

$$\begin{aligned}
p_t \cdot X_t^u - p_0 \cdot X_0^u = &\int_0^t \left\{ X_s^u \cdot \left[L_x(s, \widehat{X}_s, \widehat{u}_s) - A_s^* p_s - \sum_{j\ =1}^{d} D_s^{(j)*} q_s^{(j)} \right.\right.\\
&\left.\left. - \int_{\mathcal{E}} G_s^* r_s(\theta) m(d\theta) \right] + p_s \cdot f(s, X_s^u, u_s) + q_s \cdot g(s, X_s^u, u_s) \right\} ds\\
&+ \int_0^t \{p_s \cdot g(s, X_s^u, u_s) + X_s^u \cdot q_s\}\, dW_s\\
&+ \int_0^{t+} \int_{\mathcal{E}} \{X_{s^-} \cdot r_s(\theta) + p_{s-} \cdot h(s, X_{s-}, u_s, \theta)\\
&+ h(s, X_{s^-}, u_s, \theta) \cdot r_s(\theta)\}\, \mu(d\theta, ds)\\
&+ \int_0^t \int_{\mathcal{E}} h(s, X_s, u_s, \theta) \cdot r_s(\theta) m(d\theta) ds.
\end{aligned}$$

L'équation ci-dessus peut être écrite comme

$$R_t^u = p_0 \cdot x + \int_0^t \left\{ p_s \cdot C_s + q_s \cdot F_s + \int_{\mathcal{E}} r_s(\theta) \cdot I_s(\theta) m(d\theta) \right\} ds + S_t^u, \tag{2.10}$$

où nous dénotons pour chaque $u \in \mathcal{U}, t \in [0,T]$:

$$S_t^u := \int_0^t \{p_s \cdot g(s, X_s^u, u_s) + X_s^u \cdot q_s\}\, dW_s \tag{2.11}$$
$$+ \int_0^{t+} \int_{\mathcal{E}} \{X_{s-} \cdot r_s(\theta) + p_{s-} \cdot h(s, X_{s-}, u_s, \theta)$$
$$+ h(s, X_{s-}, u_s, \theta) \cdot r_s(\theta)\}\, \mu(d\theta, ds),$$

$$R_t^u := p_t \cdot X_t^u - \int_0^t \Big\{ X_s^u \cdot L_x(s, \widehat{X}_s, \widehat{u}_s) \tag{2.12}$$
$$+ p_s \cdot B_s u_s + q_s \cdot E_s u_s + \int_{\mathcal{E}} r_s(\theta) \cdot H_s(\theta) u_s m(d\theta) \Big\}\, ds.$$

Si on considère seulement les contrôles qui satisfait $\mathbb{E}[\int_0^T u_t^2 dt] < \infty$, alors il aurait été possible de prouver (comme dans [3, Lemma 3.1]), pour chaque $u \in \mathcal{U}$, S^u ne serait pas seulement une martingale locale, mais aussi une martingale, donc $\forall u \in \mathcal{U}, t \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}[R_t^u] = \mathbb{E}\left[p_0 \cdot x + \int_0^t \left\{ p_s \cdot C_s + q_s \cdot F_s + \int_{\mathcal{E}} r_s(\theta) \cdot I_s(\theta) m(d\theta) \right\} ds \right] = \mathbb{E}[R_t^{\widehat{u}}].$$

Puisque nous considérons une classe plus grande de contrôles (rappelez-vous (2.2), S^u n'est pas nécessairement une martingale. Nous devons considérer les trois cas suivants

Cas .1 : Pour chaque $u \in \mathcal{U}$: $\mathbb{E}[R_T^{\widehat{u}}] \leq \mathbb{E}[R_T^u]$.

Cas .2 : Pour chaque $u \in \mathcal{U}$: $\mathbb{E}[R_T^{\widehat{u}}] \geq \mathbb{E}[R_T^u]$.

Cas .3 : Il existe $u, v \in \mathcal{U}$ telle que $\mathbb{E}[R_T^u] < \mathbb{E}[R_T^{\widehat{u}}] < \mathbb{E}[R_T^v]$.

Soit la fonction $\tilde{H} : [0,T] \times \Omega \times U \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{H}(t, \omega, u) := L(t, \widehat{X}_t(\omega), u) - p_t(\omega) \cdot B_t(\omega) u - q_t(\omega) \cdot E_t(\omega) u$$
$$- \int_{\mathcal{E}} r_s(\theta)(\omega) \cdot H_s(\theta)(\omega) u m(d\theta).$$

Nous notons que $\tilde{H}(t, \omega, .)$ est convexe. ■

Proposition 2.2 *Si le **cas .1** est vérifie, alors la condition nécessaire pour que $\widehat{u}$ est un contrôle optimale pour le problème (**2.1**) est que pour chaque $u \in \mathcal{U}$:*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{\widetilde{H}_u(t, \omega, \widehat{u}_t(\omega)) \cdot (u_t(\omega) - \widehat{u}_t(\omega))\right\} dt\right] \geq 0. \tag{2.13}$$

D'autre part, si le **cas .2** est vérifie, alors l'inégalité (2.13) est une condition sufficient d'optimalité pour un contrôle $\widehat{u}$.

Proof. Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser $J(u)$ sur $u \in \mathcal{U}$, où J est une fonction convexe Gâteaux-différentielle avec dérivé donné par (2.9). Par conséquent, selon la proposition 2.2.1 de [6, pp. 36 et 37], une condition nécessaire et suffciente pour $\widehat{u}$ d'être une solution du problème **2.1** est que pour chaque $u \in \mathcal{U}$:

$$\langle J'(\widehat{u}), u - \widehat{u} \rangle \geq 0.$$

Ainsi selon (2.6) $\widehat{u}$ est un contrôle optimal si et seulement si $\forall u \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{(X_t^u - \widehat{X}_t) \cdot L_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) + (u_t - \widehat{u}_t) \cdot L_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right\} dt + (X_T^u - \widehat{X}_T) \cdot \Psi_x(\widehat{X}_T)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{(X_t^u - \widehat{X}_t) \cdot L_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) + (u_t - \widehat{u}_t) \cdot L_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right\} dt + (\widehat{X}_T - X_T^u) \cdot p_T\right] \\
&\geq 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Dans le **cas .1**, On a pour chaque $u \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{L_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) \cdot (u_t - \widehat{u}_t) + p_t \cdot B_t(\widehat{u}_t - u_t)\right.\right. \\
&\left.\left. + \ q_t \cdot E_t(\widehat{u}_t - u_t) + \int_{\mathcal{E}} r_t(\theta) \cdot H_t(\theta)(\widehat{u}_t - u_t) m(d\theta)\right\} dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{L_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) \cdot (u_t - \widehat{u}_t) + L_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) \cdot (X_t^u - \widehat{X}_t)\right\} dt\right.
\end{aligned}$$

$$+\int_0^T \left\{p_t\cdot B_t\widehat{u}_t+\widehat{X}_t\cdot L_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)+q_t\cdot E_t\widehat{u}_t+\int_{\mathcal{E}}r_t(\theta)\cdot H_t(\theta)\widehat{u}_t m(d\theta)\right\}dt$$
$$-\int_0^T \left\{p_t\cdot B_t u_t+X_t^u\cdot L_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)+q_t\cdot E_t u_t+\int_{\mathcal{E}}r_t(\theta)\cdot H_t(\theta)u_t m(d\theta)\right\}dt\Big]$$
$$\geq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{(X_t^u-\widehat{X}_t)\cdot L_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)+(u_t-\widehat{u}_t)\cdot L_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)\right\}dt+(\widehat{X}_T-X_T^u)\cdot p_T\right].$$

Ainsi, dans le **cas .1** et en conjonction avec (2.14), une condition nécessaire pour que le contrôle $\widehat{u}$ soit optimal est que $\forall u\in\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}0\leq \mathbb{E}\Big[\int_0^T &\Big\{L_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)\cdot(u_t-\widehat{u}_t)+p_t\cdot B_t(\widehat{u}_t-u_t)\\ &+\ q_t\cdot E_t(\widehat{u}_t-u_t)+\int_{\mathcal{E}}r_t(\theta)\cdot H_t(\theta)(\widehat{u}_t-u_t)m(d\theta)\Big\}dt\Big],\end{aligned}\tag{2.15}$$

qui équivalent à (2.13).

D'autre part, dans le **cas .2**, pour chaque $u\in\mathcal{U}$:

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T \Big\{L_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)\cdot(u_t-\widehat{u}_t)+p_t\cdot B_t(\widehat{u}_t-u_t)$$
$$+\ q_t\cdot E_t(\widehat{u}_t-u_t)+\int_{\mathcal{E}}r_t(\theta)\cdot H_t(\theta)(\widehat{u}_t-u_t)m(d\theta)\Big\}dt\Big]$$
$$=\mathbb{E}\Big[\int_0^T \left\{L_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)\cdot(u_t-\widehat{u}_t)+L_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)\cdot(X_t^u-\widehat{X}_t)\right\}dt$$
$$+\int_0^T \left\{p_t\cdot B_t\widehat{u}_t+\widehat{X}_t\cdot L_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)+q_t\cdot E_t\widehat{u}_t+\int_{\mathcal{E}}r_t(\theta)\cdot H_t(\theta)\widehat{u}_t m(d\theta)\right\}dt$$
$$-\int_0^T \left\{p_t\cdot B_t u_t+X_t^u\cdot L_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)+q_t\cdot E_t u_t+\int_{\mathcal{E}}r_t(\theta)\cdot H_t(\theta)u_t m(d\theta)\right\}dt\Big]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{(X_t^u-\widehat{X}_t)\cdot L_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)+(u_t-\widehat{u}_t)\cdot L_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)\right\}dt+(\widehat{X}_T-X_T^u)\cdot p_T\right].$$

Ainsi, dans le **cas .2**, la condition suffisante pour qu'un contrôle $\widehat{u}$ soit optimal est (2.15), où de façon équivalente (2.13), vérifie pour chaque $u\in\mathcal{U}$. ■

Nous observons que pour un contrôle $\widetilde{v}:[0,T]\times\Omega\to U$

$$\min_{u\in U}\widetilde{H}(t,\omega,u)=\widetilde{H}(t,\omega,\widetilde{v}_t(\omega))$$

est équivalent à

$$\max_{u\in U} H(t,p_t(\omega),q_t(\omega),r_t(\omega),\widehat{X}_t(\omega),u) = H(t,p_t(\omega),q_t(\omega),r_t(\omega),\widehat{X}_t(\omega),\widetilde{v}_t(\omega))$$

Théoreme 2.2.1

Supposons que pour chaque $(t,\omega,x) \in [0,T]\times\Omega\times V$, la fonction $L(t,x,\cdot) : U \to \mathbb{R}$ est strictement convexe. Si le **cas .1** donner, alors une condition nécessaire pour qu'un contrôle $\widehat{u}$ soit optimal pour le problème (**2.1**) est que

$$\widetilde{u} = \widetilde{v}, \quad Leb \otimes \mathbb{P} \ - a.e. \quad \text{sur } [0,T]\times\Omega, \tag{2.16}$$

où $\widetilde{v}$ est un contrôle qui satisfait

$$\max_{u\in U} H(t,p_t,q_t,r_t,\widehat{X}_t,u) = H(t,p_t,q_t,r_t,\widehat{X}_t,\widetilde{v}_t) \quad \text{et} \quad X_t^{\widetilde{v}} \in V, \tag{2.17}$$

$Leb \otimes \mathbb{P} - a.e$ on $[0,T]\times\Omega$. D'autre part, si le **cas .2** vérifie, alors (2.16) est une condition suffisante d'optimalité pour un contrôle $\widehat{u}$.

Proof. La preuve est la même que celle de [3, theorem 1.4]. Appliquer la théorème d'analyse convexe, nous pouvons également obtenir le résultat suivant sur l'unicité. ■

Théoreme 2.2.2 [2]

Si, pour chaque $(t,\omega) \in [0,T]\times\Omega, L(t,\cdot,\cdot)$ ou $\Psi(\cdot)$ sont strictement convexes, le problème (**2.1**) admet au plus un contrôle optimal.

Proof. La preuve est la même que celle de [3, Theorem 1.6]. ■

Chapitre §.3
Application en finance

Chapitre 3

Application en finance

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats obtenus dans le chapitre précédent au problème de consommation et d'investissement.

3.1 Problème de consommation et d'investissement

Nous considérons un marché financier dans lequels $m+1$ titres sont négociés en continu. L'un d'eux est une obligation avec le prix $P_0(t)$ à temp t gouverné par

$$dP_0(t) = P_0(t)\rho(t)dt.$$

Il existe également m réserves (stocks) avec des prix par action $P_i(t)$ à le temp t gouverné par

$$dP_i(t) = P_i(t-)\left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d}\psi_{ij}(t)dW_j(t) + \sum_{j=1}^{l}\phi_{ij}(t)dN_j(t)\right], \quad i \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Ces équations sont conduit par un mouvement brownien $W = (W_1, ..., W_d)^*$ de dimension d et un processus de poisson compensé multivarié $N = (N_1, ..., N_l)^*$ de dimension l avec intensité $\lambda(t) = (\lambda_1(t), ..., \lambda_l(t))^*$.

Pour la simplicité de la notation, nous supposons que $\lambda_i(t) \equiv 1$. Ainsi, si $\overline{N}i$ dénote un processus de Poisson standard avec attente t, puis le processus N_i défini par $N_i(t) = \overline{N}_i(t) - t$ est une martingale pour chaque $i \in \{1, 2, ..., l\}$. Par conséquent, $M = (W, N)$ est un mélange m-dimensionnel d'un mouvement brownien d-dimensionnel et un processus de Poisson compensé a I-dimension.

Notons

$$\psi(t) = (\psi_{ij}(t))_{m\times d}, \quad \phi(t) = (\phi_{ij}(t))_{m\times l}, \quad \text{et} \quad \sigma(t) = (\psi(t) : \phi(t))_{m\times m}.$$

Supposons que ρ, $b = (b_i)_{m\times 1}$ et $\sigma = (\sigma_{ij)_{m\times m}}$ sont prévisibles par rapport à $(\mathcal{F}_t)$, et uniformément bornée en $(t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega$. Aussi nous supposons que

$$\mathbb{P}\left\{\forall t \in [0, T] : \phi(t) > -1\right\} = 1,$$

et il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}\left\{\forall t \in [0, T], \xi \in \mathbb{R}^m : \xi^*\sigma(t)\sigma^*(t)\xi \geq \varepsilon\left|\xi\right|^2\right\} = 1.$
Comme nous avons vu dans [13, Sections 3.2 et 3.3] (voir aussi [8]), Ces hypothèses assurer que les prix des stocks seront toujours positifs, et que le processus de risque relatif $\hat{\theta}$ défini par $\hat{\theta}(t) := (\sigma(t))^{-1}[b(t) - \rho(t)\tilde{1}]$ est bornée. $\tilde{1}$ est un vecteur de colonne de ceux.

Toute l'activité économique est supposé prendre un lieu dans le temps-horizon fini $[0; T]$. Pour un investisseur, un portefeuille π est un processus dont les composantes π_i représentent le montant d'argent investi dans le stock correspondante $i \in \{1, 2, ..., m\}$, et un taux de consommation c est un taux auquel il retire des fonds pour la consommation.

Notation 1 *Notons par $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les processus $\pi : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ qui sont prévisibles par rapport $(\mathcal{F}_t)$ et qui satisfait*

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T \left|\pi(t)\right|^2 dt < \infty\right\} = 1. \tag{3.1}$$

Les éléments de $\mathcal{P}$ sont appelés processus de portefeuille. Notons par φ l'ensemble de tous les processus $c : [0, T] \times \Omega \to [0, \infty)$ qui sont prévisibles par rapport $(\mathcal{F}_t)$ et qui satisfait

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T c(t)dt < \infty\right\} = 1. \tag{3.2}$$

Les éléments de φ sont appelés processus de taux de consommation.

Le processus de richesse $X = X^{(x,\pi,c)}$ correspondant au capital initial $x > 0$, portefeuille π, et le taux de consommation c satisfait alors l'équation

$$\begin{cases} dX(t) = [\rho(t)X(t-) - c(t)]\,dt + \pi^*\left[b(t) - \rho(t)\tilde{1}\right]dt + \pi^*(t)\psi(t)dW(t) + \pi^*(t)\phi(t)dN(t), \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{3.3}$$

Maintenant, nous allons considérer seulement les processus de portefeuille et de taux de consommation suivants

Définition 3.1 *Une paire $(\pi, c) \in \mathcal{P} \times \varphi$ est appelée admissible pour le capital initial $x > 0$ si le processus de richesse correspondant X donné par (3.3) satisfait*

$$\mathbb{P}\{\forall\ 0 \leq t \leq T : X(t) \geq 0\} = 1.$$

Notons par $A(x)$ la classe de ces paires.

Une fonction d'utilité est une fonction $U \in C^1((0,\infty);\mathbb{R})$ strictement croissante, strictement concave, et a un dérivé $U' : (0,\infty) \to (0,\infty)$ satisfait $\lim_{c\to\infty} U'(c) = 0$. I est l'inverse de la fonction strictement décroissante U' . Alors, nous allons considérer deux fonctions d'utilité fixes : $U_1(t,\cdot)$ et U_2.

Probleme 3.1

L'investisseur veut trouver une paire $(\widehat{\pi}, \widehat{c}\ ) \in A(x)$ qui maximise

$$J(\pi, c) := \mathbb{E}\left[\int_0^T U_1(t, c(t)) + U_2(X(T))\right]. \tag{3.4}$$

Dans la notation de la section 2, prenons $u \equiv (\pi, c)$, $U \equiv \mathbb{R}^m \times [0,\infty)$, $V \equiv [0,\infty)$, $\mathcal{U} \equiv A$,

$\mathcal{E} \equiv \{e_{1,}e_2, ..., e_l\}$, où $e_i = \{x \in \mathbb{R}^l : x_i = 1 \quad et \quad \forall j \neq i : x_j = 0\}$,
$f(t,x,u) \equiv \rho(t)x - c + \pi^* \left[b(t) - \rho(t)\tilde{1}\right]$, $g(t,x,u) \equiv \pi^*\psi(t), h(t,x,u,e_j) \equiv \sum_{i=1}^{m} \pi_i(t)\phi_{ij}(t)$,
$L(t,x,u) \equiv -U_1(t,c)$,et $\Psi(x) \equiv -U_2(x)$. On voit que toutes les hypothèses faites dans la section 2 sont valables pour le modèle décrit dans cette section. Pour appliquer la théorie générale de la section précédente, il reste seulement à vérifier que l'hypothèse (2.2) conserve dans le modèle des marchés financiers. Mais depuis $U_1(t,\cdot)$ et U_2 sont des fonctions d'utilité,$U_1^{'}(t,\cdot)$ et $U_2^{'}$ sont positifs et décroissants. En particulier, l'hypothèse(2.2) conserve pour le modèle décrit dans cette section (prends simplement $Y \equiv 0$ et $\tilde{Y} \equiv 0$).
Par conséquent, nous pouvons appliquer le principe du maximum stochastique développé dans la section précédente pour étudier ce problème de consommation et d'investissement.
Depuis $\mathcal{E} \equiv \{e_1, e_2, ..., e_l\}$, nous notons dans cette section

$$r(t) := (r_t(e_1), ..., r_t(e_l))_{1\times l}.$$

Alors l'Hamiltonien pour ce problème peut être écrit

$$\begin{aligned} H(t,p,q,x,(\pi,c)) &= U_1(t,c) + p(\rho(t)x - c + \pi^* \left[b(t) - \rho(t)\tilde{1}\right]) \\ &+ q^*\psi^*(t)\pi + r^*\phi^*(t)\pi, \end{aligned}$$

et l'équation adjoint prend la forme

$$dp(t) = -\rho(t)p(t)dt + q(t)dW(t) + r(t)dN_t, \tag{3.5}$$

$$p(T) = U_2^{'}(\widehat{X}(T)). \tag{3.6}$$

Considérons les processus prévisibles $\mu : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ et $\nu : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^l$ qui sont uniformément bornée en $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$. On définit ensuite la martingale exponentielle $Z_{(\mu,\nu)}$ comme la solution de l'équation

$$Z_{(\mu,\nu)}(t) = 1 - \sum_{i=1}^{d} \int_0^t Z_{(\mu,\nu)}(s-)\mu_i(s)dW_i(s) - \sum_{i=1}^{l} \int_0^t Z_{(\mu,\nu)}(s-)\nu_i(s)dN_i(s).$$

Nous définissons aussi les processus stochastiques β et $\zeta_{(\mu,\nu)}$ par

$$\beta(t) := \exp\left\{-\int_0^t \rho(s)ds\right\} \quad \text{et} \quad \zeta_{(\mu,\nu)}(t) := \beta(t)Z_{(\mu,\nu)}(t).$$

Selon la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\beta(t)Z_{(\mu,\nu)}(t) &= \beta(0)Z_{(\mu,\nu)}(0) + \int_0^t \beta(s-)dZ_{(\mu,\nu)}(s) + \int_0^t Z_{(\mu,\nu)}(s-)d\beta(s)\\ &= 1 - \int_0^t \beta(s)Z_{(\mu,\nu)}(s-)\rho(s)ds - \sum_{i=1}^d \int_0^t \beta(s-)Z_{(\mu,\nu)}(s-)\mu_i(s)dW_i(s)\\ &- \sum_{i=1}^l \int_0^t \beta(s-)Z_{(\mu,\nu)}(s-)\nu_i(s)dN_i(s).\end{aligned}$$

Cela signifie que le triple $(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{r})$ défini par

$$\widetilde{p}(t) = \gamma\beta(t)Z_{(\mu,\nu)}(t) = \gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t), \tag{3.7}$$

$$\widetilde{q}(t) = -\gamma\beta(t-)Z_{(\mu,\nu)}(t-)\mu^*(t) = -\gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t-)\mu^*(t), \tag{3.8}$$

$$\widetilde{r}(t) = -\gamma\beta(t-)Z_{(\mu,\nu)}(t-)\nu^*(t) = -\gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t-)\nu^*(t), \tag{3.9}$$

où $\gamma = p(0)$, satisfait la dynamique (3.5). On note aussi que $\widetilde{p}$ est adapté, et $\widetilde{q}$ et $\widetilde{r}$ sont prévisibles. On choisissons γ, μ et ν pour que $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^1) \times M^{2,p}(0,T,\mathbb{L}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^1)) \times M^{2,p}(0,T;\mathcal{E};\mathbb{R}^1)$.

Pour satisfaire l'état terminal (3.6), nous devons trouver γ, μ, et ν telleque

$$\gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(T) = U_2'(\widehat{X}(T)). \tag{3.10}$$

Puisque U_2 est strictement croissante, le côté droit est positif. Par conséquent, γ soit positif. Depuis l'Eq (3.10) nous obtenons

$$\widehat{X}(T) = I_2(\gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(T)). \tag{3.11}$$

Depuis Eqs. (2.12) et (3.7) - (3.9), et depuis $\gamma > 0$, nous obtenons dans le **cas 4.2**,

$$\mathbb{E}\left[\zeta_{(\mu,\nu)}(T)X(T) + \int_0^T \left\{\zeta_{(\mu,\nu)}(t)(c(t) - \pi^*(t)\left[b(t) - \rho(t)\tilde{1}\right] + \mu^*(t)\psi^*(t)\pi(t) + \nu^*(t)\phi^*(t)\pi(t))\right\} dt\right] \tag{3.12}$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\zeta_{(\mu,\nu)}(T)\widehat{X}(T) + \int_0^T \left\{\zeta_{(\mu,\nu)}(t)(\widehat{c}(t) - \widehat{\pi}^*(t)\left[b(t) - \rho(t)\tilde{1}\right] + \mu^*(t)\psi^*(t)\widehat{\pi}(t) + \nu^*(t)\phi^*(t)\widehat{\pi}(t))\right\} dt\right]$$

Le principe du maximum stochastique de théorème (2.2.1) implique ce que suit.

Théoreme 3.1.1

Supposons que $(\widehat{\pi}, \widehat{c}) \in A(x)$ satisfait l'inégalité (3.12) pour chaque $(\pi, c) \in A(x)$, et

$$(p(t), q(t), r(t)) = (\gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t), -\gamma\zeta_{(\mu,\upsilon)}(t-)\mu^*(t), -\gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t-)\nu^*(t))$$

est une solution de l'équation adjointe (3.5) - (3.6). Si

$$\begin{aligned} &\Big\{\max_{\pi\in\mathbb{R}^m, c\geq 0} U_1(t,c) + \gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t)(\rho(t)\widehat{X}(t) - c + \pi^*\left[b(t) - \rho(t)\tilde{1}\right])c \\ &- \gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t)\pi^*\psi(t)\mu(t) - \gamma\zeta_{(\mu,\nu)}\pi^*\phi(t)\nu(t)\Big\} \\ &= U_1(t,\widehat{c}(t)) + \gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t)(\rho(t)\widehat{X}(t) - \widehat{c}(t) + \widehat{\pi}^*\left[b(t) - \rho(t)\tilde{1}\right]) \\ &- \gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t)\widehat{\pi}^*(t)\psi(t)\mu(t) - \gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t)\widehat{\pi}^*(t)\phi(t)\nu(t). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Puis $(\widehat{\pi}, \widehat{c}\ )$ est optimal pour le problème (3.4). $\widehat{X}$ est le processus de richesse généré par le processus de portefeuille $\widehat{\pi}$ et processus de taux de consommation $\widehat{c}$.

Pour trouver les contrôles qui satisfont la condition (3.13), nous différencions, on obtient

$$\widehat{c}(t) = I_1(t, \gamma\zeta_{(\mu,\nu)}(t)), \tag{3.14}$$

$$\forall i \in \{1,2,...,d\} : \widehat{\mu}(t)_i = \sigma^{-1}(t)\left[b(t) - \rho(t)\tilde{1}\right]_i\ , \tag{3.15}$$

$$\forall j \in \{1,2,...,l\} : \widehat{\nu}(t)_j = \sigma^{-1}(t)\left[b(t) - \rho(t)\tilde{1}\right]_{d+j}\ . \tag{3.16}$$

Notons $\zeta = \zeta_{(\widehat{\mu},\widehat{v})}$, et supposons que pour chaque $y \in (0,\infty)$

$$\mathbb{E}\left[\zeta(T)I_2(y\zeta(T)) + \int_0^T \zeta(s)I_1(s,y\zeta(s))ds\right] < \infty. \tag{3.17}$$

Nous définissons ensuite la fonction $\chi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ par

$$\chi(y) := \mathbb{E}\left[\zeta(T)I_2(y\zeta(T)) + \int_0^T \zeta(s)I_1(s,y\zeta(s))ds\right]. \tag{3.18}$$

Puisque χ est strictement décroissant et surjectif, il a un inverse $\mathcal{Y} := \chi^{-1} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ qui il est aussi strictement décroissant. Nous pouvons choisi $\widehat{\gamma} = \mathcal{Y}(x)$.

Considérons maintenant la mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}} : \mathcal{F}_T \to [0,1]$ défini par

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{A\} = \mathbb{E}\left[I_A Z(T)\right],$$

où on note par $Z = Z_{(\widehat{\mu},\widehat{v})}$. Selon la théorème de Girsanov (voir, par exemple[13, Theorem I.6.3]), les processus stochastiques

$$\widetilde{M}_i(t) := W_i(t) + \int_0^t \mu_i(s)ds, \qquad i \in \{1,...,d\};$$

$$\widetilde{M}_{d+j}(t) := N_j(t) + \int_0^t \nu_j(s)ds, \qquad j \in \{1,...,l\};$$

sont des martingales pour $\widetilde{\mathbb{P}}$. Selon la résultat de représentation martingale pour les processus de Lévy (voir [13, Theorem I.6.3]), il existe un processus prévisible $\xi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ avec $\mathbb{P}\left\{\int_0^T |\xi(s)|^2 ds < \infty\right\} = 1$ telle que

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\beta(T)I_2(\widehat{\gamma}\zeta(T)) + \int_0^T \beta(s)I_1(s,\widehat{\gamma}\zeta(s)ds \ \mid \mathcal{F}_t\right] = x + \int_0^t \xi^*(s)d\widetilde{M}_s. \tag{3.19}$$

Maintenant, nous définissons les processus stochastiques $\widehat{\pi}$ et $\widehat{c}$ par

$$\widehat{\pi}(t) := \beta(t)^{-1}(\sigma^*(t))^{-1}\xi(t), \tag{3.20}$$

$$\widehat{c}(t) := I_1(t, \mathcal{Y}(x)\zeta(t-)). \tag{3.21}$$

D'après le théorème (3.1.1), nous concluons alors

Théoreme 3.1.2 *Supposons que l'hypothèse (3.17) est vérifie, alors le processus de portefeuille optimal et le processus de taux de consommation sont donnés par (3.20) - (3.21). Cette stratégie de consommation-investissement détermine un processus de richesse donné par*

$$\widehat{X}(t) = \frac{1}{\zeta(t)}\mathbb{E}\left[\zeta(t)I_2(\mathcal{Y}(x)\zeta(T)) + \int_t^T \zeta(s)I_1(s, \mathcal{Y}(x)\zeta(s))ds \mid \mathcal{F}_t\right]. \tag{3.22}$$

Proof. La preuve suit les mêmes étapes que celle du [3, Theorem 2.2]. Nous observons que le paire décrite en (3.20), (3.21) est la solution unique du problème (3.1). ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un principe du maximum stochastique pour un problème de contrôle optimal où le système est linéaire et avec sauts. Nous supposons que le domaine du contrôle est convexe. A titre d'exemple, nous avons étudie explicitement un problème de consommation et d'investissement.

Bibliographie

[1] R.K. Boel, P. Varaiya, Optimal control of jump processes, SIAM J. Control Optim. 15 (1977) 92-119.

[2] Cadenillas, U.G. Haussmann, The stochastic maximum principle for a singular control problem, Stochastics Stochastics Rep. 49 (1994) 211-237.

[3] A. Cadenillas, I. Karatzas, The stochastic maximum principle for linear, convex optimal control with random coefficients, SIAM J. Control Optim. 33 (1995) 590-624.

[4] A. Cadenillas, A stochastic maximum principle for systems with jumps, with applications to finance, Systems & control letters 47(2002) 433-444.

[5] M. Davis, R. Elliott, Optimal control of a jump process, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 40 (1977) 183-202.

[6] J. Ekeland, R. Temam, Convex Analysis and Variational Problems, North-Holland, Amsterdam and American Elsevier, New York,1976.

[7] N. Ikeda, S. Watanabe, Stochastic Di0erential Equations and Diffusion Processes, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[8] M. Jeanblanc-Picqué, M. Pontier, Optimal portfolio for a small investor in a market model with discontinuous prices, Appl. Math.Optim. 22 (1990) 287–310.

[9] R. Rishel, A minimum principle for controlled jump processes, in : Lecture Notes in Economics and Mathematical Sciences, Vol.107, Springer, Berlin, 1975, pp. 493–508.

[10] M. Saksonov, Necessary optimality conditions for linear control problems of jump processes, in : Analysis in Probability for Control Problems of Economical Processes, CEMI, Academy of Science USSR, Moscow, 1985, pp. 117–130 (in Russian).

[11] M. Saksonov, On a jump process control under the finite-dimensional constraints, in : Mathematical Modeling for Control Processes under Uncertainty Conditions, CEMI, Academy of Science USSR, Moscow, 1987, pp. 101–119 (in Russian).

[12] S. Tang, X. Li, Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps, SIAM J. Control Optim. 32 (1994) 1447–1475.

[13] X.X. Xue, Martingale representation for a class of processes with independent increments, and its applications, in : Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 177, Springer, Berlin, 1992, pp. 279–311.

[14] J. Yong, X.Y. Zhou, Stochastic Controls : Hamiltonian Systems and HJB Equations, Springer, Berlin, 1999.

[15] Øksendal, Bernt, and Agnes Sulem. Applied stochastic control of jump diffusions. Springer Science & Business Media, 2007.

[16] Jeanblanc, Monique. "Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY." Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc (2006).

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$	La filtration.
T	Le temps terminal.
MB	Mouvement brownien.
$\sup, \inf$	supérieur, inférieur.
$\exp$	Expontielle.
b	Drift.
σ	Cofficient de duffission.
$\mathbb{P} - p.s$	Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\widehat{u}$	Contrôle optimal.
$\widehat{X}$	Trajectoire associé à $\widehat{u}$.
M^*	Transposée de la matrice M.
$p(t)$	Processus adjoint.
$H(t, p, q, r, x, u)$	Hamiltonian.
$\min, \max$	Minimum,Maximum.
$J(u)$	Le coût.