République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

HAMED Ikram

Titre :

Mouvement Brownien Fractionnaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**GATT RAFIKA**	UMKB	Président
Dr.	**CHALA ADEL**	UMKB	Encadreur
Dr.	**AOUNE SALIMA**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents : **NOUREDDINE & ZINEB.**

Ma sœur IMEN et mes frères MOHAMMED TAHAR & KHOUBEIB.

Mes cousines Fadhila & Ainiya.

Ma nièce Djoumana "zamzom" et sa mère Sarra.

Mes grands-parents HAMED Tahar, HAMED Zouina, BOUKHENTEF Mohammed et KARJAA Lkhamsaa.

Je n'oublie pas de citer des personnes que je connais depuis longtemps et qui ont été toujours là avec leur soutien moral, mes chères amies :Soundous, Wissem, Hanaa, Radia, Zakia, Nacira, Souheila, Imen vous restez toujours mes meilleurs amies, et mes amies de l'jamaa.

Tous les professeurs qui m'ont enseigné dans mes années précédentes En particulier Belmassaoud Azzeddine & Haddad aissa.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie **Allah** le plus puissant de m'avoir permis d'accomplir cet humble travail.

Je remercie infiniment les deux personnes les plus importantes de ma vie : ma mère **ZINEB** et mon père **NOUREDDINE**, pour leur éternel soutien abstrait et concret, je ne peux jamais leur dire des mots qui leur rapportent ce qu'ils méritent, sans leur soutien, je ne serais jamais ici, merci beaucoup à eux et qu'**Allah** bénisse leurs jours et santés.

Ensuite, je tends à exprimer ma profonde reconnaissance et gratitude à mon encadreur : Dr. CHALA Adel, qui m'a guidé avec soin et patience tout en faisant ce travail, et ce que j'ai appris en lui contactant et travaillant sous sa direction il n'a pas de prix, je lui dois toute ma vie et lui souhaite le meilleur dans sa carrière professionnelle.

Je déclare mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à toute la famille enseignante de la faculté de mathématiques de Biskra, sans exception. En particulier, je remercie mes professeurs THEMER Lazhar, MANSOURI Badreddine.

Je remercie chaleureusement : Dr.GATT Rafika et Dr.AOUNE Salima de m'avoir honoré et accepté d'évaluer ce travail.

Finalement, je remercie tous ce qui ont contribué dans ce travail, de près ou de loin en particulier Zouaoui Nourelhouda & Zaid Ferdous.

Table des matières

Introduction

Les processus stochastiques auto-similaires sont devenus populaires dans beaucoup de domaines d'applications (physique, télécommunications, finance), et il y a de ce fait une demande naturelle de calcul stochastique basé sur ce type de processus. Nous représenterons en particulier le mouvement Brownien fractionnaire. Ce processus a été étudié la première fois par Kolmogorov en 1940. Son étude a été reprise et approfondie par Mandelbrot et Van-Ness en 1968. On peut définir le mouvement Brownien fractionnaire comme un processus gaussien est entièrement déterminé par sa fonction de moyenne $\mathbb{E}(B_t^H)$ et sa fonction de covariance $cov\left(B_t^H, B_s^H\right)$. Concernons aux propriétés de base du mouvement Brownien fractionnaire ainsi qu'à sa définition, nous verrons que ce processus est pauvre en propriétés classique (semi-martingale, différentiabilité).

L'objectif de notre mémoire est l'étude de mouvement Brownien fractionnaire et ses propriétés, pour cela, l'étude a été divisée en trois chapitres :

On commence au chapitre 1 par des généralités sur les processus stochastiques, espérance conditionnelle et leur propriétés ainsi que le mouvement Brownien, martingales et l'intégrale stochastique.

Le second chapitre, considéré comme étant le noyau de ce travail, est consacré aux définition et montrer les propriétés principales du mouvement Brownien fractionnaire.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude l'analyse stochastique du mouvement Brownien fractionnaire on commence par la définition des nouvelles intégrales et puis nous avons prouvé la formule d'Itô dans le cas de mouvement Brownien fractionnaire et on donne une application dans le contrôle optimal stochastique et établir le condition suffisante d'optimalité.

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique

Ce chapitre contient des généralités et des définitions sur le calcul stochastique, a été prise de : [3], [6], [8], [10].

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (**Tribu**) *Une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω est une famille de parties de Ω vérifiant :*

1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

2) Stabilité par passage au complémentaire. i.e : $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

3) Stabilité par union dénombrable. i.e : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \Rightarrow (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{F}$.

Définition 1.1.2 (**Variable aléatoire**) *On appelle variable aléatoire (v.a par abréviation) $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{G})$ toute application mesurable i.e : $\forall A \in \mathcal{G}, X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.*

Définition 1.1.3 (**Processus stochastique**) *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ définie sur un même espace de probabilité.*

-Si $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}$ on dit que le processus est à temps discret.

-Si $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ on dit que le processus est à temps continu.

Définition 1.1.4 *On peut représenter le processus stochastique comme une application :*

$$\begin{aligned} X: \quad & \mathbb{T}\times\Omega\rightarrow E, \\ & (t,w) \longmapsto X(t,w). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *Pour t fixé $X(t,w)$ est une v.a, et pour w fixé $X(t,w)$ est appelée trajectoire.*

Définition 1.1.5 (**Tribu engendrée**) *La tribu engendrée par une v.a X définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'ensemble : $\sigma(X) = \{X^{-1}(A), A \in \mathcal{G}\}$, tel que : $X^{-1}(A) = \{w \in \Omega : X(w) \in A\}$, c'est la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable.*

Définition 1.1.6 (**Filtration**) *Une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ i.e : $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$; $\forall\ 0 \leq s < t$.*

Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé un espace de probabilité filtré.

La filtration naturelle (canonique) d'un processus stochastique X est : $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$.

Définition 1.1.7 (**Processus mesurable**) *Un processus X est dit mesurable si l'application :*

$$\begin{aligned} X: \quad & (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{G}), \\ & (t,w) \longmapsto X(t,w), \end{aligned}$$

est mesurable.

Définition 1.1.8 (**Processus adapté**) *Un processus X est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ou ($\mathcal{F}_t-$adapté) si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Remarque 1.1.2 *Le processus est toujours adapté à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$.*

Définition 1.1.9 (**Processus prévisible**) *Un processus X est dit processus prévisible par rapport la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ou ($\mathcal{F}_t-$prévisible) si $\forall t \geq 0$; X_{t+1} est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Définition 1.1.10 (**Processus croissante**) *On dit qu' un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus croissante si : $\forall 0 \leq s \leq t$; $X(s,w) \leq X(t,w)$.*

Définition 1.1.11 (**Accroissements**, **stationnaires**) *Pour tout* $0 \leq s \leq t$, *les variables aléatoire* $X(t) - X(s)$ *sont appelés des accroissements.*

-Un processus X *est accroissement indépendants si :* $\forall 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$; *les v.a* $X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendants.*

-Un processus X *est accroissement stationnaires si : la loi de la variable* $X(t+s) - X(t)$ *ne dépend pas de* t. *En d'autre termes pour tout* $t > 0; h > 0$ *la loi de* $X(t+h) - X(t)$ *est égale à la lois de* $X(h) - X(0)$.

Définition 1.1.12 (**Équivalents**, **modification**, **indistinguable**) *Soient* $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *deux processus stochastiques définiés sur un même espace de probabilité, il sont dits :*

1) équivalents (ou égaux en loi) si : $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$ *i.e pour tout* $(t_1, t_2, ..., t_n)$ *et pour tout* n *on a :* $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)) \overset{\mathcal{L}}{=} (Y(t_1), Y(t_2), ..., Y(t_n))$.

2) Y *est une modification de* X *si :* $\forall t > 0, P(X(t) = Y(t)) = 1$.

3) X *et* Y *sont indistinguable et on note* $X \equiv Y$ *si :* $\mathbb{P}(X(t) = Y(t), \forall t \geq 0) = 1$.

Remarque 1.1.3 *On a* $3) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 1)$.

Définition 1.1.13 (**Processus Gaussien**) *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus Gaussien si toute combinaison linéaire finie de* X *est une v.a Gaussienne, i.e :* $\forall n, \forall t_i, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$ *est une v.a Gaussienne.*

Théorème 1.1.1 (**Kolmogorov**) *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique à valeurs réelles pour lequel il existe trois constantes strictement positives* γ, c, ε *tel que :*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^\gamma\right] \leq |t-s|^{c+\varepsilon}.$$

Alors il existe une modification $\widetilde{X}$ *du processus* X, *tel que :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\neq s} \frac{\left|\widetilde{X}_t - X_s\right|^\gamma}{|t-s|^\alpha}\right] < +\infty,$$

pour chaque $0 \leq \alpha \leq \frac{\varepsilon}{\gamma}$. *En particulier les trajectoires de* $\widetilde{X}$ *sont Hölderienns continues de paramètre* α.

1.2 Espérance conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et A et B deux évènements de $\mathcal{F}$, telle que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Définition 1.2.1 (**Probabilité conditionnelle**) *La probabilité conditionnelle de* A *sachant* B *est* $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Définition 1.2.2 (**Espérance conditionnelle d'une v.a par rapport à un évènement**) *On appelle espérance conditionnelle de la v.a* X *sachant* B *:*

$$\mathbb{E}(X \mid B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P}.$$

Définition 1.2.3 (**Espérance conditionnelle d'une v.a par rapport à une tribu**) *Soit* $\mathcal{G}$ *sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *alors l'espérance conditionnelle de la v.a* X *sachant* $\mathcal{G}$ *est l'unique v.a* $\mathcal{G}-$*mesurable tel que :*

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \int_A X d\mathbb{P}, \ \forall A \in \mathcal{G}.$$

Proposition 1.2.1 (**Propriétés de l'espérance conditionnelle**) *Soient* X *et* Y *deux v.a et soiten* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{H}$ *sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *tel que :* $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, *on a :*

1) Linéarité : Soit a *et* b *deux constantes alors :* $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.

2) Croissance : Si $X \leq Y$, *alors* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.

3) Positivité : Si $X \geq 0$, *alors* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq 0$.

4) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$.

5) Si X *est* $\mathcal{G}-$*mesurable alors :* $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.

6) Si X *est* $\mathcal{G}-$*mesurable alors :* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.

7) Si X *est indépendant de* $\mathcal{G}$ *alors :* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

8) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}\right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$.

1.3 Martingale

Définition 1.3.1 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un processus définie sur l'espace filtré* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},\mathbb{P})$, *on dit que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale si :*

1) X_n *est intégrable,* $\forall n\in\mathbb{N}$ *i.e :* $\mathbb{E}(|X_n(t)|)<\infty$.

2) X_n *est* $\mathcal{F}_n-$*mesurable* $\forall n\in\mathbb{N}$.

3) $\mathbb{E}(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=X_n$.

Remarque 1.3.1 *Si on remplace la* 3^{eme} *condition par :* $\mathbb{E}(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)\leq X_n$ *(resp* $\mathbb{E}(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)\geq X_n$*) alors* $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dit sur-martingale (resp sous-martingale).*

Définition 1.3.2 (**Temps d'arrêt**) *Soit* $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une filtration de* $\mathcal{F}$*, un temps d'arrêt par rapport à* $\mathbb{F}$ *est une v.a* $\tau:\Omega\to[0,+\infty]$ *telle que :*

$$\{\tau\leq n\}=\{w\in\Omega;\tau(w)\leq n\}\in\mathcal{F}_n\ \forall n.$$

1.3.1 Martingale à temps discret

Théorème 1.3.1 (**Décomposition de Doob d'une sous − martingale**) *Toute sous-martingale* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $X_n=M_n+A_n$ *tel que :*

-$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale.*

-$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un processus croissante prévisible tel que :* $A_0=0$.

Théorème 1.3.2 (**d'arrêt**) *Si* τ *est un* $\mathbb{F}-$*temps d'arrêt et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un processus adapté, on appelle le processus arrêt à l'instant* T *la suite aléatoire* $X_n^T=(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$.

1.3.2 Martingale à temps continu

Définition 1.3.3 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *intégrable et adapté est une :*

-Martingale si : $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$.

-Sous-martingale si : $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$.

-Sur-martingale si : $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$.

Définition 1.3.4 (**Martingale locale**) *Un processus* M *est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt* $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissant p.s vers* $+\infty$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le processus d'arrêt* M_n^T *soit une martingale nulle en* 0.

Définition 1.3.5 (**Semi − martingale**) *Une semi-martingale* X *est un processus réel, adapté et càdlàg qui s'écrire de la forme :* $X = M + Z$ *où :*

-M *est une martingale locale.*

-Z *est un processus réel, càdlàg et à variation finie.*

Proposition 1.3.1 *[7] si* M *est une martingale alors :* $E(M_t) = E(M_0)\ \forall t \geq 0$.

1.4 Le mouvement Brownien

Définition 1.4.1 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un processus sur l'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *on dit que le processus* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien (mb) standard si :*

1) La variable aléatoire $B_0 = 0\ \mathbb{P}-p.s.$

2) Pour tout $0 \leq s \leq t$, *la variable aléatoire* $B_t - B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)$.

3) L'application : $t \rightarrow B_t$ *est continue* $\mathbb{P}-p.s.$

4) $(B_t)_{t\geq 0}$ *est à accroissements indépendants.*

Théorème 1.4.1 *Un processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est un mb si et seulement si :*

a) X *est gaussien, centré, et stochastiquement continu.*

b) La covariance entre deux processus c'est la quantité $cov(X_t, X_s) = \min(s,t) = t \wedge s$.

1.4.1 Propriétés trajectorielle du mouvement Brownien

Proposition 1.4.1 *1) Le mouvement Brownien est à trajectoire continu $\mathbb{P}-$ p.s.*

2) Le mouvement Brownien est à trajectoire n'est pas dérivable $\mathbb{P}-$p.s.

Preuve. 1) On a pour les fonctions : f continu en x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si on pose : $x - x_0 = h \Rightarrow x = x_0 + h$, alors il vient que :

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0),$$

d'où

$$\lim_{h \to 0}[f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0,$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Donc $(B_t)_{t \geq 0}$ continu $\mathbb{P}-$p.s. si on veut montrer que :

$$\mathbb{P}(|B_{t+h} - B_t| > \varepsilon) \underset{h \to 0}{\to} 0.$$

d'après Inégalité de Tchebytchev, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|B_{t+h} - B_t| > \varepsilon) &\leq \frac{var(B_{t+h} - B_t)}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{t + h - t}{\varepsilon^2} = \frac{h}{\varepsilon^2} \underset{h \to 0}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(|B_{t+h} - B_t| > \varepsilon) \underset{h \to 0}{\to} 0$.

Alors : $(B_t)_{t \geq 0}$ continu $\mathbb{P}-$p.s.

2) On a pour les fonctions : f dérivable en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe.}$$

On a la v.a $Y = \frac{B_{t+h}-B_t}{\sqrt{h}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, et M une constante on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{B_{t+h}-B_t}{h}\right| > M\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{B_{t+h}-B_t}{\sqrt{h}}\right| > M\sqrt{h}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|Y| > M\sqrt{h}\right) \\
&= \int_{|Y|>M\sqrt{h}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \\
&\underset{h\to 0}{\to} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{B_{t+h}-B_t}{h}\right| > M\right) \underset{h\to 0}{\to} 1.$$

Donc le mouvement Brownien est à trajectoire n'est pas dérivable $\mathbb{P}-$p.s. ■

1.4.2 Propriété de martingale du mouvement Brownien

On note par $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par le mouvement Brownien.

Théorème 1.4.2 *Le mouvement Brownien est une martingale par rapport à la filtration canonique* $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$.

Preuve. Evidente. ■

Proposition 1.4.2 *a)* $X_t = (B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ *est une* $\mathcal{F}_t^B-$*martingale.*

b) $Y_t = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)_{t\geq 0}$ *est une* $\mathcal{F}_t^B-$*martingale.*

Preuve. a) Evidente.

b) 1. L'intégrabilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Y_t|\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left|\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right|\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + \alpha^2 t^2 - 2\alpha x t}{2t}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha t)^2}{2t}\right) dx = 1 < +\infty.
\end{aligned}$$

2. Puisque Y_t est une fonction continue de variables aléatoires $\mathcal{F}_t^B-$mésurables, alors Y_t est elle même $\mathcal{F}_t^B-$mésurables.

3. Pour tout $0 \leq s \leq t \leq +\infty$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t \mid \mathcal{F}_s^B] &= \mathbb{E}\left[Y_s \frac{Y_t}{Y_s} \mid \mathcal{F}_s^B\right], \text{ car } Y_s > 0 \\
&= Y_s \mathbb{E}\left[\frac{Y_t}{Y_s} \mid \mathcal{F}_s^B\right], \text{ car } Y_s \text{ est } \mathcal{F}_s - \text{mesurable.}
\end{aligned}$$

Il suffit de calculer la quantité $\mathbb{E}\left[\frac{Y_t}{Y_s} \mid \mathcal{F}_s^B\right]$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{Y_t}{Y_s} \mid \mathcal{F}_s^B\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\alpha(B_t - B_s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right\} \mid \mathcal{F}_s^B\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\alpha(B_t - B_s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right\}\right] \text{ car } B_t - B_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s^B \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2 + \alpha^2(t-s)^2 - 2\alpha x(t-s)}{2(t-s)}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha(t-s))^2}{2(t-s)}\right) dx = 1.
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_s^B) = Y_s$.

Alors $Y_t = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t^B-$martingale. ■

Proposition 1.4.3 *Soit $B=(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien, alors :*

1. ***(Symétrique)*** *Le processus : $X=(-B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.*

2. *Le processus : $Y=(|B_t|)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.*

3. ***(Inversion)*** *Le processus :*

$$Z=\begin{cases} 0 & si : t=0 \\ tB_{\frac{1}{t}} & si : t>0 \end{cases}$$

est un mouvement Brownien.

4. ***(Changement d'échelle)*** *Pour tout $\lambda>0$, le processus $B^{\lambda}=(\lambda B_{\frac{t}{\lambda^2}})_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.*

5. ***(Shifting)*** *Pour tout $s>0$, le processus : $B_t^{(s)}=B_{t+s}-B_s$, est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma(B_u, u\leq s)$.*

6. ***(Retournement du temps)*** *Pour tout $0\leq t\leq r$, le processus $B_t^r=B_r-B_{r-t}$, est un mouvement Brownien.*

Définition 1.4.2 (**Variation quadratique**) *Un processus X est dit à variation quadratique finie s'il existe un processus noté $\langle X\rangle$ tel que pout toute suite de subdivisions $\Delta_n=\sup\limits_{0\leq i\leq n}(t_{i+1}-t_i)$ de $[0,t]$, avec $k\in\mathbb{N}$, tel que $|\Delta_n| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\left|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right|^2=\langle X\rangle_t \quad \mathbb{P}-\ p.s.$$

Proposition 1.4.4 *Pour toute famille de subdivision Δ_n, on a la variation quadratique du mouvement Brownien définie comme suite :*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\left|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right|^2=t \quad \mathbb{P}-\ p.s.$$

1.5 L'intégrale stochastique

On note par $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ boréliennes } / \int_{\mathbb{R}_+} |f(s)|^2 \, ds < +\infty \right\}$ un espace de Banach pour la norme $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}_+} f^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}$, et on note :

$$\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P}) = \left\{ \theta_i : ([0,t_i] \times \Omega, \beta\left([0,t_i]\right) \otimes \mathcal{F}_{t_i}) \to (\mathbb{R}, \beta\left(\mathbb{R}\right)) \;\; / \int_0^{t_i} |\theta_i|^2 < +\infty \right\},$$

un espace de Banach pour la norme $\|\theta_i\|_2 = \mathbb{E}\left[\int_0^{t_i} |\theta_i\,(s)|^2 \, ds \right]$.

1.5.1 Construction d'intégrale stochastique

On cherche à définir des v.a de type : $\int_0^t X_s dB_s$, où $(X_s)_{s\geq 0}$ un processus stochastique et $(B_s)_{s\geq 0}$ est un mouvement Brownien.

Définition 1.5.1 *On dit que $\theta = (\theta_t)_{t\geq 0}$ est un "bon processus" s'il est : $\mathcal{F}_t^B-$adapté, càdlàg et $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds \right] < +\infty$, $\forall t \geq 0$.*

Cas de processus étagés

On appelle processus étagés (ou simple) les processus de type : $\theta_s^n = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$ où $p_n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{p_n} = t$ une subdivision de $[0,t]$, et $\theta_i \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})$ $\forall i = 0,1,...,p_n$, et $\theta^n = (\theta_s^n)_{s\geq 0}$ est un bon processus. On définit :

$$I_t(\theta^n) = \int_0^t \theta_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Cas générale

Si θ est un bon processus, il existe $(\theta^n)_{n\geq 0}$ suite de processus étagés tel que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 \, ds \right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il existe une v.a $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que :

$$\mathbb{E}\left[(I_t(\theta) - I_t(\theta^n)\right]^2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On pose : $I_t(\theta) = \displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$.

Proposition 1.5.1 (**Propriétés de l ̃intégrale stochastique**)

1. $\theta \longmapsto \displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire.
2. $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$ est continue p.s.
3. $\mathbb{E}\left[\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ et $var\left[\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\displaystyle\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.
4. $\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$ et en générale n'est pas gaussienne sauf dans le cas où θ est déterministe.
5. Propriétés d'isométrie :
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$
6. On a même le résultat plus général :
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s \int_0^u \phi_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds\right].$$
7. $\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s$ est une $(\mathcal{F}_t^B)-$martingale.
8. Le processus $\left(\displaystyle\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \displaystyle\int_0^t \theta_s^2 ds$ est une $(\mathcal{F}_t^B)-$martingale.
9. La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :
$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$
10. La covariation quadratique entre deux intégrales stochastiques est donnée par :
$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds.$$

1.5.2 Processus d'Itô

Définition 1.5.2 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ une mouvement Brownien, on appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall t \leq T, \qquad X_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

avec :

1) X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

2) $(b_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus adapté à $\mathcal{F}_t^B$, tel que $\int_0^t |b_s|\, ds < +\infty$ $\mathbb{P}-p.s.$

3) $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus adapté à $\mathcal{F}_t^B$, tel que $\int_0^t |\sigma_s|^2\, ds < +\infty$ $\mathbb{P}-p.s.$

On écrit généralement le processus d'Itô en utilisant la forme différentielle :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Le coefficient b s'appelle la dérivée (ou le drift) du processus, et σ son coefficient de diffusion.

1.5.3 Formule d'Itô

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô.

Théorème 1.5.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 alors :*

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Alors :

$$df(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, \sigma_t^2 dt.$$

Théorème 1.5.2 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X_s\rangle,$$

tel que :

$$d\langle X_s\rangle = \langle dX_s, dX_s\rangle = \langle b_s ds + \sigma_s dB_s, b_s ds + \sigma_s dB_s\rangle = \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.5.3 *Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô, et f une fonction dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 alors :*

$$\begin{aligned} f(X_1(t), X_2(t)) = {} & f(X_1(0), X_2(0)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_1(s), X_2(s))\, dX_1(s) \\ & + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_1(s), X_2(s))\, dX_2(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X_1(s), X_2(s))\, d\langle X_1\rangle_s \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X_1(s), X_2(s))\, d\langle X_2\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X_1(s), X_2(s))\, d\langle X_1, X_2\rangle_s. \end{aligned}$$

Théorème 1.5.4 (**Intégration par partie**) *Soient X et Y deux processus d'Itô tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s \quad et \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha_s' ds + \int_0^t \beta_s' dB_s.$$

Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t,$$

avec :

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t \beta_s \beta_s' ds.$$

De plus la formule d'intégrale par partie s'écrit :

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t.$$

Chapitre 2

Mouvement Brownien fractionnaire

Le mouvement Brownien fractionnaire (mBf) a été introduit par Kolmogorov en 1940 [9], comme moyen d'engendrer des "spirales" Gaussiennes dans des espaces de Hilbert. En 1968 [11], Mandelbrot et Van Ness l'ont rendu célèbre en l'introduisant dans des modèles financiers, et en étudiant ses propriétés. Tout au long de ce chapitre, on se réfère aux : [1], [7], [13].

2.1 Définition du mouvement Brownien fractionnaire

Définition 2.1.1 *Un (mBf) de paramètre $H \in (0,1)$ est un processus Gaussien centré continu noté par $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^{B^H}, \mathbb{P})$ et de fonction de covariance :*

$$R(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

**Le paramètre H est appelé le paramètre de Hurst.*

Proposition 2.1.1 *1. Si $H = \frac{1}{2}$, alors le mouvement Brownien fractionnaire est le mouvement Brownien standard.*

2. Si $H = 1$, alors $B_t^H = tB_1^H$ presque sûrement pour tous $t \geq 0$.

Preuve. 1. Nous voyons immédiatement que la covariance de $B^{\frac{1}{2}}$ réduire à (s,t) égale $s \wedge t$, ce qui donne $B^{\frac{1}{2}}$ est un mouvement Brownien standard.

2. Si $H = 1$, nous avons pour tous $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(B_t^H - tB_1^H\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(B_t^H\right)^2\right] + t^2\mathbb{E}\left[\left(B_1^H\right)^2\right] - 2t\mathbb{E}\left[B_t^H B_1^H\right] \\
&= t^2 + t^2 \times 1 - 2t\left(\frac{1}{2}\left(t^2 + 1 - (1-t)^2\right)\right) \\
&= 2t^2 - 2t^2 = 0.
\end{aligned}$$

Donc on dit que $B_t^H = tB_1^H$ $\mathbb{P}-$p.s. ■

Proposition 2.1.2 *Soit $B^H = \left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ un mBf alors :*

$$var(B_t^H) = t^{2H}.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
var(B_t^H) = R(B_t^H, B_t^H) &= \frac{1}{2}\left(t^{2H} + t^{2H} - |t-t|^{2H}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2t^{2H}\right) = t^{2H}.
\end{aligned}$$

CQFD. ■

Proposition 2.1.3 *Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien stationnaire et $X_0 = 0$, tel que $var(X) = t^{2H}$ alors X est un mBf de paramètre H.*

Preuve. Il suffit de montrer que la fonction de covariance de X est la quantité :

$$R(X_t, X_s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

On a :

$$var(X_t - X_s) = var(X_t) + var(X_s) - 2cov(X_t, X_s).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
cov(X_t, X_s) &= \frac{1}{2}\left\{var(X_t) + var(X_s) - var(X_t - X_s)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{var(X_t) + var(X_s) - var(X_{t-s})\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}\right\} =: R(X_t, X_s).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.2 Propriétés principales

2.2.1 Auto-similarité

Définition 2.2.1 *Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ est dit auto-similarité d'indice $\beta > 0$ tel que : pour tout $\alpha > 0$ les processus $\{X_{\alpha t}, t \in \mathbb{R}\}$ et $\left\{\alpha^{\beta} X_t, t \in \mathbb{R}\right\}$ aient même loi.*

Théorème 2.2.1 *Le mBf de paramètre H est auto-similarité d'ordre H.*

Preuve. On fixe $\alpha > 0$, il évidente que $\left\{B^H_{\alpha t}, t \in \mathbb{R}\right\}$ et $\left\{\alpha^H B^H_t, t \in \mathbb{R}\right\}$ sont deux processus Gaussiens centrés, il suffit donc de montrer qu'ils ont la même fonction de covariance.

D'une part on a :

$$\begin{aligned}
R(B^H_{\alpha t}, B^H_{\alpha s}) &= \frac{1}{2}\left\{|\alpha t|^{2H} + |\alpha s|^{2H} - |\alpha t - \alpha s|^{2H}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\alpha^{2H}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
R(\alpha^H B^H_t, \alpha^H B^H_s) = cov(\alpha^H B^H_t, \alpha^H B^H_s) &= \alpha^{2H} cov(B^H_t, B^H_s)\\
&= \frac{1}{2}\alpha^{2H}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.2.2 Accroissement stationnaire

Proposition 2.2.1 *Le mouvement Brownien fractionnaire* $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ *est un processus à accroissement stationnaire.*

Preuve. Comme $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien avec $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$, il suffit de vérifier :

$$cov(B_{t_3}^H - B_{t_2}^H, B_{t_1}^H - B_{t_0}^H) = cov(B_{t_3+h}^H - B_{t_2+h}^H, B_{t_1+h}^H - B_{t_0+h}^H).$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} cov(B_{t_3}^H - B_{t_2}^H, B_{t_1}^H - B_{t_0}^H) &= cov(B_{t_3}^H, B_{t_1}^H) - cov(B_{t_3}^H, B_{t_0}^H) - cov(B_{t_2}^H, B_{t_1}^H) + cov(B_{t_2}^H, B_{t_0}^H) \\ &= \frac{1}{2}\left(t_3^{2H} + t_1^{2H} - (t_3 - t_1)^{2H}\right) - \frac{1}{2}\left(t_3^{2H} + t_0^{2H} - (t_3 - t_0)^{2H}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(t_2^{2H} + t_1^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}\right) + \frac{1}{2}\left(t_2^{2H} + t_0^{2H} - (t_2 - t_0)^{2H}\right). \end{aligned}$$

En simplifiant terme à terme, on obtient :

$$cov(B_{t_3}^H - B_{t_2}^H, B_{t_1}^H - B_{t_0}^H) = \frac{1}{2}\left\{(t_3 - t_0)^{2H} - (t_3 - t_1)^{2H} + (t_2 - t_1)^{2H} - (t_2 - t_0)^{2H}\right\}.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} cov(B_{t_3+h}^H - B_{t_2+h}^H, B_{t_1+h}^H - B_{t_0+h}^H) &= \frac{1}{2}\left\{(t_3 + h)^{2H} + (t_1 + h)^{2H} - (t_3 + h - t_1 - h)^{2H}\right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}\left\{(t_3 + h)^{2H} + (t_0 + h)^{2H} - (t_3 + h - t_0 - h)^{2H}\right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}\left\{(t_2 + h)^{2H} + (t_1 + h)^{2H} - (t_2 + h - t_1 - h)^{2H}\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{(t_2 + h)^{2H} + (t_0 + h)^{2H} - (t_2 + h - t_0 - h)^{2H}\right\}. \end{aligned}$$

En simplifiant terme à terme, on obtient :

$$cov(B_{t_3+h}^H - B_{t_2+h}^H, B_{t_1+h}^H - B_{t_0+h}^H) = \frac{1}{2}\left\{(t_3 - t_0)^{2H} - (t_3 - t_1)^{2H} + (t_2 - t_1)^{2H} - (t_2 - t_0)^{2H}\right\}.$$

D'où le résultat. ■

2.2.3 Propriétés de mémoire

Soit $r(n) = cov(X_k, X_{k+n}); k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*$

Définition 2.2.2 *Un processus stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, est dite à longue mémoire tant que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r(n) = +\infty$ et à courte mémoire si : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r(n) < +\infty$.*

Proposition 2.2.2 *Le mouvement Brownien fractionnaire a une longue mémoire, si $H > \frac{1}{2}$ et il a une courte mémoire si $H < \frac{1}{2}$.*

Preuve. On considère $X_k = B_k^H - B_{k-1}^H$ et $X_{k+n} = B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H$.

Puisque le mBf est centré donc :

$$\begin{aligned}
r(n) = cov(X_k, X_{k+n}) &= \mathbb{E}\left(X_k X_{k+n}\right) = \mathbb{E}\left[\left(B_k^H - B_{k-1}^H\right)\left(B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(B_{k-(k-1)}^H\right)\left(B_{k+n-(k+n-1)}^H\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(B_1^H\right)\left(B_{n+1-n}^H\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(B_1^H\right)\left(B_{n+1}^H - B_n^H\right)\right] = \mathbb{E}\left[B_1^H B_{n+1}^H - B_1^H B_n^H\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B_1^H B_{n+1}^H\right] - \mathbb{E}[B_1^H B_n^H] = R(B_1^H, B_{n+1}^H) - R(B_1^H, B_n^H) \\
&= \frac{1}{2}\left(1^{2H} + (n+1)^{2H} - |n+1-1|^{2H}\right) - \frac{1}{2}\left(1^{2H} + n^{2H} - |n-1|^{2H}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^{2H}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2H} - 2n^{2H} + n^{2H}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2H}\right) \\
&= \frac{1}{2}n^{2H}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2H} - 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2H}\right) \\
&= \frac{1}{2}n^{2H}\left(\left(1+\frac{2H}{n}\right) + \frac{H(2H-1)}{n^2} - 2 + \left(1-\frac{2H}{n}\right) + \frac{H(2H-1)}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= H(2H-1)n^{2H-2} + \circ\left(n^{2H-2}\right).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que si $H > \frac{1}{2}$ on a :

$$r(n) > 0 \quad et \quad \sum_n r(n) = +\infty.$$

Pour $H < \frac{1}{2}$ on a :

$$r(n) < 0 \ \ et \ \ \sum_n r(n) < +\infty.$$

Pour cela on dit que le mBf a une longue mémoire si $H > \frac{1}{2}$ et il a une courte mémoire si $H < \frac{1}{2}$. ■

2.2.4 Non-Différentiabilité

Théorème 2.2.2 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire sont $\mathbb{P}-p.s$ non différentiable en t_0.*

Preuve. On a la v.a $Z = \dfrac{B^H_{t+h} - B^H_t}{h^H} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et M une constante, on veut montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{B^H_{t+h} - B^H_t}{h}\right| > M\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{B^H_{t+h} - B^H_t}{h}\right| > M\right) &= \mathbb{P}\left(\left|h^{1-H}\frac{B^H_{t+h} - B^H_t}{h}\right| > Mh^{1-H}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|\frac{B^H_{t+h} - B^H_t}{h^{1-1+H}}\right| > Mh^{1-H}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|Z| > Mh^{1-H}\right) \\
&= \int_{|Z|>Mh^{1-H}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{B^H_{t+h} - B^H_t}{h}\right| > M\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

D'où le théorème. ■

2.2.5 Propriété trajectorielle du mouvement Brownien fractionnaire

Définition 2.2.3 *On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^d$ est dite α-Höldérienne, s'il existe $C > 0$ tel que :*

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{L}^d} \leq C \|x - y\|_{\mathbb{L}^p}^{\alpha} .$$

Proposition 2.2.3 *Les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire sont Hölderienns continues de paramètre $\alpha < H$.*

Preuve. On a

$$\mathbb{E}\left[\left|B_t^H - B_s^H\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|B_{t-s}^H\right|^2\right] = |t-s|^{2H} .$$

Si on prend : $\gamma = 2$, $c = 1$, et $c + \varepsilon = 2H$ d'où : $\varepsilon = 2H - 1$, d'après le théorème de Kolmogorov 1.1.1 B_t^H à une modification $\widetilde{B}_t^H$ dont les trajectoires sont Hölderienns continues de paramètre :

$$\alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{\gamma}\right[= \left[0, \frac{2H-1}{2}\right[= \left[0, H - \frac{1}{2}\right[.$$

On a prouvé que $\widetilde{B}_t^H$ est Hölderienn continue de paramètre $\alpha < H$. ■

2.2.6 La variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire

Théorème 2.2.3 *Soit $\left\{B_t^H, t \in \mathbb{R}\right\}$ un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre H, on a :*

$$\begin{aligned} \left\langle B^H \right\rangle_t &= 0, & \forall t \in \mathbb{R} & \quad \textit{pour } H > \tfrac{1}{2}. \\ \left\langle B^{\frac{1}{2}} \right\rangle_t &= t, & \forall t \in \mathbb{R} & \\ \left\langle B^H \right\rangle_t &= +\infty, & \forall t \in \mathbb{R}^* & \quad \textit{pour } H < \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Preuve. Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$, et $\{\Delta_n : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de subdivision de $[0,t]$ dont le pas $|\Delta_n| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Considérons $T_t^{\Delta_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H\right)^2$.

<u>**1^{er} cas :** $H > \frac{1}{2}$.</u>

Nous allons donc montrer la convergence dans $\mathbb{L}^1$ de $T_t^{\Delta_n}$ vers 0. Par la stationnarité des accroissements, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[T_t^{\Delta_n}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} var(B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} var(B_{t_{k+1}-t_k}^H) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k|^{2H} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k|\,|t_{k+1} - t_k|^{2H-1} \\
&\leq |\Delta_n|^{2H-1}\sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k| \\
&\leq |\Delta_n|^{2H-1}\, t.
\end{aligned}
$$

Comme $H > \frac{1}{2} \Rightarrow 2H - 1 > 0$, on a donc : $\lim_{n\to+\infty} |\Delta_n|^{2H-1}\, t = 0$.

Alors :

$$T_t^{\Delta_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{L}^1}{\to}} 0.$$

d'où le résultat.

$\mathbf{2}^{\grave{e}me}$ cas : $H < \frac{1}{2}$.

Nous allons montrer la divergence de $T_t^{\Delta_n}$ vers $+\infty$.

Appelons A l'ensemble des subdivisions de $[0,t]$ dont le pas tend vers 0 et considérons :
$D_n = \sup\limits_{\Delta_n} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H\right)^2\right]$, ceci est donc minoré par la subdivision $\tau_i = \frac{it}{2^n}$ on a donc :

$$\begin{aligned}
D_n &\geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{2^n}\left(B_{\tau_i}^H - B_{\tau_{i-1}}^H\right)^2\right] \\
&\geq \sum_{i=0}^{2^n}\mathbb{E}\left[\left(B_{\tau_i}^H - B_{\tau_{i-1}}^H\right)^2\right] \\
&\geq \sum_{i=0}^{2^n} var(B_{\tau_i}^H - B_{\tau_{i-1}}^H) \\
&\geq \sum_{i=0}^{2^n} var(B_{\tau_i - \tau_{i-1}}^H) \\
&\geq \sum_{i=0}^{2^n} |\tau_i - \tau_{i-1}|^{2H} \\
&\geq \sum_{i=0}^{2^n} \left|\frac{it}{2^n} - \frac{(i-1)\,t}{2^n}\right|^{2H} \\
&\geq \sum_{i=0}^{2^n} \left|\frac{t}{2^n}\right|^{2H} \\
&\geq (2^n+1)\left|\frac{t}{2^n}\right|^{2H} \\
&\geq (t)^{2H}\left(\frac{1}{2^{n(2H-1)}} + \frac{1}{2^{2nH}}\right).
\end{aligned}$$

Comme $H < \frac{1}{2}$ alors $2H-1<0$ et $2H>0$ on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n(2H-1)}} = +\infty \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{2nH}} = 0.$$

Ce qui conduit au résultat. ■

2.2.7 Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale

Théorème 2.2.4 *Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale pour* $H \neq \frac{1}{2}$*, relativement à sa filtration naturelle.*

Preuve. On suppose que ce soit une semi-martingale, elle est donc continue et nulle en 0, B^H s'écrit donc de manière unique sous la forme $B^H = M + V$ tel que : M est une martingale locale continue en 0 et V un processus continue à variation finie nul en 0.

1er **cas :** $H > \frac{1}{2}$.

Comme M est une martingale locale donc d'après la décomposition de Doob-Meyer, $M^2 - \langle M \rangle$ est une martingale locale, et on a $\langle M \rangle_t = \left\langle B^H \right\rangle_t = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, alors M^2 martingale locale continue nulle en 0 c'est à dire qu'il existe une suite $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ croissante de temps d'arrêt telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s,$$

et d'après le proposition 1.3.1 et la définition 1.3.4 on a :

$$\forall n, \forall t, \quad \mathbb{E}\left[M^2_{t \wedge T_n}\right] = \mathbb{E}\left[M^2_{0 \wedge T_n}\right] = 0,$$

$$\forall n, \forall t, M^2_{t \wedge T_n} = 0 \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Comme T_n tend en croissant vers $+\infty$ $\mathbb{P} - p.s$, on a :

$$\forall t, M_t^2 = 0 \ \ \mathbb{P} - p.s.$$

Donc M^2 est indistinguable du processus nul.

Finalement, $\forall t, B_t^H = V_t$ $\mathbb{P} - p.s.$et donc B^H est $\mathbb{P} - p.s$, à variation finie.(contradiction).

2ème **cas :** $H < \frac{1}{2}$.

La variation quadratique de M ne serait définie qu'en 0 ce qui contredit l'hypothèse de continuité. Absurde. ∎

Chapitre 3

Analyse stochastique du mouvement Brownien fractionnaire (formule d'Itô généralisé)

En 1993, F. Russo et P. Vallois [12] ont jeté les premières bases d'un calcul stochastique, généralisant ceux plus classiques d'Itô et dont un des intérêts est qu'il permet de donner un sens à des intégrales contre des processus qui ne sont pas forcément des semi-martingales.

Tout au long de ce chapitre, on se réfère aux : [1], [4], [5].

3.1 Intégrales forward, backward et symétrique

Les processus Gaussiens fournissent de nombreux exemples de processus qui ne sont pas des semi-martingales. Parmi les processus Gaussiens, le mBf est très utilisé, sa fonction de covariance étant particulièrement simple. C'est pourquoi, dans la suite, ce processus sera utilisé pour tester les résultats généraux que nous établirons.

Faisons tout d'abord un calcul formel

$$\begin{aligned}
\int_0^t R(s)d^-X(s) &= \int_0^t \left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{(s-\varepsilon)\vee 0}^{s} R(u)du\right] d^-X(s) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[\int_{(s-\varepsilon)\vee 0}^{s} R(u)du\right] d^-X(s) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[\int_{u}^{u+\varepsilon} d^-X(s)\right] R(u)du \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \frac{X(u+\varepsilon)-X(u)}{\varepsilon} R(u)du.
\end{aligned}$$

Le calcul précédent repose sur deux résultats-clés : les théorèmes de Heine-Lebesgue et de Fubini.

Théorème 3.1.1 (**Heine – Lebesgue**) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, alors :*

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(u)du &= f(x), \lambda - p.p. \\
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{x}^{x+\varepsilon} f(u)du &= f(x), \lambda - p.p. \\
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x} f(u)du &= f(x), \lambda - p.p.
\end{aligned}$$

λ désignant la mesure de Lebesgue.

Lemme 3.1.1 (**Fubini : la version stochastique**) *Si M est une martingale continue de carré intégrable et si $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est un processus borné $\mathcal{P}_{prog} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)-$mesurable, alors pour tous $s, t \geq 0$, on a :*

$$\int_0^s \left(\int_0^t \Phi(u,v)dM(u)\right) dv = \int_0^t \left(\int_0^s \Phi(u,v)dv\right) dM(u).$$

Donnons-nous un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles, il est maintenant assez naturel de poser la :

Définition 3.1.1 *Soient $\varepsilon > 0$ et $t \geq 0$. Si X et Y sont deux processus stochastiques continus, on pose :*

$$I^{-}(\varepsilon, t, X, dY) = \int_0^t X(s)\frac{Y(s+\varepsilon)-Y(s)}{\varepsilon}ds.$$
$$I^{+}(\varepsilon, t, X, dY) = \int_0^t X(s)\frac{Y(s)-Y((s-\varepsilon)\vee 0)}{\varepsilon}ds.$$
$$I^{\circ}(\varepsilon, t, X, dY) = \int_0^t X(s)\frac{Y(s+\varepsilon)-Y((s-\varepsilon)\vee 0)}{2\varepsilon}ds.$$

Quand la limite existe, on a :

$$\int_0^t X(s)d^{-}Y(s) = \lim_{\varepsilon\to 0} ucp\ I^{-}(\varepsilon, t, X, dY) \quad \text{"intégrale forward de } X \text{ contre } dY\text{"}.$$
$$\int_0^t X(s)d^{+}Y(s) = \lim_{\varepsilon\to 0} ucp\ I^{+}(\varepsilon, t, X, dY) \quad \text{"intégrale backward de } X \text{ contre } dY\text{"}.$$
$$\int_0^t X(s)d^{\circ}Y(s) = \lim_{\varepsilon\to 0} ucp\ I^{\circ}(\varepsilon, t, X, dY) \quad \text{"intégrale symétrique de } X \text{ contre } dY\text{"}.$$

Dans ces définitions, "ucp" signifie convergence uniforme sur tout compact, en probabilité.

Définition 3.1.2 *Rappelons qu'une famille $(X^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ de processus converge en probabilité vers X quand $\varepsilon \to 0$, uniformément sur tout compact, si :*

$$\forall T > 0, \forall \delta > 0 : \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{\varepsilon} - X_t| > \delta\right) = 0.$$

Remarque 3.1.1 *Remarquons que*

$$I^{\circ}(\varepsilon, t, X, dY) = \frac{I^{+}(\varepsilon, t, X, dY) + I^{-}(\varepsilon, t, X, dY)}{2},$$

et donc que :

$$\int_0^t X d^{\circ}Y = \frac{1}{2}\left(\int_0^t X d^{+}Y + \int_0^t X d^{-}Y\right).$$

3.2 Formule d'Itô généralisé

Une des idées fondamentales du calcul stochastique est la suivante : Si X est une semi-martingale et si f est une fonction de classe C^2, alors $f(X)$ est une semi-martingale, et on peut écrire la formule d'Itô.

Il est bien connu que le mBf est une semi-martingale si et seulement si $H = \frac{1}{2}$.

Les questions naturelles sont alors : lorsque $H \neq \frac{1}{2}$, est-il possible de construire des intégrales stochastiques par rapport au mBf ? Peuton écrire une formule d'Itô ?

Des différentes méthodes ont été utilisées pour construire le calcul stochastique par rapport à un mBf.

Proposition 3.2.1 *[5] Soit X un processus continu, l'intégrale forward $\left(\int_0^t f'(X_s)\, d^- X_s, t \geq 0\right)$ existe pour toute fonction $f \in C^2$ si et seulement si X admet une variation quadratique. Dans ce cas, on a : pour tout $t \geq 0$:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, d^- X_s + \int_0^t f''(X_s)\, d\langle X, X\rangle(s).$$

Cette proposition met en évidence un phénomène que l'existence des intégrales $\int_0^t f'(X_s)\, d^- X_s$ ou $\int_0^t f'(X_s)\, d^\circ X_s$ est équivalente à l'obtention d'une formule d'Itô.
Lorsque $X = B^H$ nous avons :

$$f\left(B_t^H\right) = f\left(B_0^H\right) + \int_0^t f'\left(B_s^H\right) d^- B_s^H + \int_0^t f''\left(B_s^H\right) d\left\langle B^H, B^H\right\rangle(s). \tag{3.1}$$

D'une manière analogue, on peut démontrer que si $H \geq \frac{1}{2}$, l'intégrale symétrique $\int_0^t f'(X_s)\, d^\circ X_s$ existe pour toute fonction $f \in C^2$ et que, dans ce cas on a pour tout $t \geq 0$:

$$f\left(B_t^H\right) = f\left(B_0^H\right) + \int_0^t f'\left(B_s^H\right) d^\circ B_s^H. \tag{3.2}$$

M. Gradinaru, F. Russo et P. Vallois [2] ont montré que cette dernière formule est encore vraie pour $H \geq \frac{1}{4}$

Théorème 3.2.1 *[1]Soit B^H un mBf d'indice $H \in (0,1)$ et f une fonction de classe C^2 alors pour tout $t \geq 0$ on a :*

$$f\left(B_t^H\right) = f\left(B_0^H\right) + \int_0^t f'\left(B_s^H\right) dB_s^H + H \int_0^t f''\left(B_s^H\right) s^{2H-1} ds. \tag{3.3}$$

Preuve. Voir [1]. ∎

Remarque 3.2.1 *À mon avis personnel, la formule applicable la plus simple est (3.3).*

Exemple 3.2.1 *Calculer $f\left(B_t^H\right) = \left(B_t^H\right)^2$, par formule d'Itô on a :*

$$\begin{aligned}
f\left(B_t^H\right) = \left(B_t^H\right)^2 &= \left(B_0^H\right)^2 + \int_0^t 2B_s^H dB_s^H + H \int_0^t 2s^{2H-1} ds \\
&= 2\int_0^t B_s^H dB_s^H + H\frac{t^{2H}}{2H} \\
&= \frac{t^{2H}}{2} + 2\int_0^t B_s^H dB_s^H.
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.2 *Pour b, $\delta > 0$, on considère l'EDS liniéaire avec coefficients constants :*

$$\begin{aligned}
dX_t &= bX_t dt + \delta X_t dB_t^H, \\
X_0 &= x.
\end{aligned}$$

On pose $Y_t = \ln(X_t)$. On applique la formule d'Itô on obtien :

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{X_t^2} d\left\langle X_t \right\rangle \\
&= \frac{1}{X_t}\left(bX_t dt + \delta X_t dB_t^H\right) - \frac{1}{X_t^2}\left(\delta^2 X_t^2 H t^{2H-1} dt\right) \\
&= \left(bdt + \delta dB_t^H\right) - \left(\delta^2 H t^{2H-1} dt\right) \\
&= bdt - \delta^2 H t^{2H-1} dt + \delta dB_t^H.
\end{aligned}$$

On intégre :

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t b ds - \delta^2 H \int_0^t s^{2H-1} ds + \delta \int_0^t dB_s^H \\ &= Y_0 + bt - \delta^2 H \frac{t^{2H}}{2H} + \delta B_t^H \\ &= Y_0 + bt - \frac{1}{2}\delta^2 t^{2H} + \delta B_t^H. \end{aligned}$$

Alors :

$$Y_t = \ln X_t = \ln x + bt - \frac{1}{2}\delta^2 t^{2H} + \delta B_t^H.$$

Donc :

$$X_t = x \exp\left(bt - \frac{1}{2}\delta^2 t^{2H} + \delta B_t^H \right).$$

3.3 Application sur le contrôle optimal stochastique

Notre but dans ce partie est de dirivé les conditions suffisantes d'optimalité pour un problème de contrôle optimal géré par fonction de côut de forme linéaire quadratique.

3.3.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^H)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et soit $B^H = \left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien fractionnaire.

T un réel strictement positive fixé. U un fermé convexe de $\mathbb{R}^n$:

Définition 3.3.1 *On définit un contrôle admissible pour tout processus $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeur dans U tel que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |v_t|^2 \right] < \infty.$$

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des tous les contrôles admissibles.

Pour tout $v \in \mathcal{U}$, on considère l'éqaution différentielle stochastique contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t^v, v_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) dB_t^H, \\ x_0 = \xi. \end{cases} \tag{3.4}$$

où : $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 3.3.2 *La fonction de coût qui doit être minimiser(maximiser) , est donnée par :*

$$J\left(v\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f\left(t, x_t^v, v_t\right) dt + g\left(x_T^v\right)\right]. \tag{3.5}$$

où :

$$f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Hypothèse (H) :

Les fonctions b, σ, f sont continues en (x, v) et leur dérivées $b_x, b_v, \sigma_x, \sigma_v, f_x, f_v,$ et g_x sont continues et uniformément bornées.

Le problème de contrôle optimal est de maximiser la fonction de coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles, on choisit un contrôle $u \in \mathcal{U}$ tel que :

$$J\left(u\right) = \max_{v \in \mathcal{U}} J\left(v\right). \tag{3.6}$$

Définition 3.3.3 *On définit la formule du Hamiltonienne comme la suite :*

$$H\left(t, x_t^u, u_t, p_t, q_t\right) = f\left(t, x_t^u, u_t\right) + p_t b\left(t, x_t^u, u_t\right) + q_t \sigma\left(t, x_t^u, u_t\right).$$

Définition 3.3.4 *On a l'équation adjoint suivante :*

$$\begin{cases} -dp_t = H_x\left(t, x_t^u, p_t, q_t, u_t\right) dt + q_t dB_t^H, \\ p_T = g_x\left(x_T^u\right). \end{cases} \tag{3.7}$$

Remarque 3.3.1 *Sous les hypothèse (H), l'EDS (3.4) et l'EDSR (3.7) admettent unique solution.*

Pour plus des détails voir [4] et [13].

3.3.2 Condition suffisant d'optimalité

Théorème 3.3.1 *On suppose que les fonctions g et H sont concave par rapport à (x, u), on suppose que $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_v(t)(u-v)\, dt\right] \geq 0$, alors u est le contrôle optimal pour le problème de contrôle $\{(3.4), (3.5), (3.6)\}$.*

Preuve. Pour cela on veut démontrer que pour tout u et v deux contrôles (u doit être optimal) :

$$J(u) - J(v) \geq 0.$$

Alors il suffit de calculer la différence :

$$\begin{aligned} J(u) - J(v) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T f\left(t, x_t^u, u_t\right) dt + g\left(x_T^u\right)\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T f\left(t, x_t^v, v_t\right) dt + g\left(x_T^v\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f\left(t, x_t^u, u_t\right) - f\left(t, x_t^v, v_t\right)\right) dt\right] + \mathbb{E}\left[g\left(x_T^u\right) - g\left(x_T^v\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mais on sait que g est concave, alors :

$$g\left(x_T^u\right) - g\left(x_T^v\right) \geq g_x\left(x_T^u\right)\left(x_T^u - x_T^v\right).$$

d'après la définition d'équation adjoint on remarque que $p_T = g_x\left(x_T^u\right)$, alors :

$$\mathbb{E}\left[g\left(x_T^u\right) - g\left(x_T^v\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[p_T\left(x_T^u - x_T^v\right)\right]. \tag{3.9}$$

tel que (x, u) et (x, v) sont des solutions respectivement associés au contrôle optimale u et le contrôle v, alors d'après la définition du système (3.4) , on peut écrire :

$$\begin{cases} dx_t^u = b\left(t, x_t^u, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t^u, u_t\right) dB_t^H, \\ x_0^u = \xi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx_t^v = b\left(t, x_t^v, v_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) dB_t^H, \\ x_0^v = \xi. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} d\left(x_t^u - x_t^v\right) = \left(b\left(t, x_t^u, u_t\right) - b\left(t, x_t^v, v_t\right)\right) dt + \left(\sigma\left(t, x_t^u, u_t\right) - \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right)\right) dB_t^H, \\ \left(x_0^u - x_0^v\right) = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

On applique la formule d'Itô généralisée pour le produit $p_t\left(x_t^u - x_t^v\right)$, en utilisant les équations (3.7) et (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned} d\left(p_t\left(x_t^u - x_t^v\right)\right) = & -\left(x_t^u - x_t^v\right)\left(H_x\left(t, x_t^u, p_t, q_t, u_t\right) dt + q_t dB_t^H\right) \\ & + p_t\left(b\left(t, x_t^u, u_t\right) - b\left(t, x_t^v, v_t\right)\right) dt \\ & + p_t\left(\sigma\left(t, x_t^u, u_t\right) - \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right)\right) dB_t^H \\ & + q_t\left(\sigma\left(t, x_t^u, u_t\right) - \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right)\right) H t^{2H-1} dt. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^T d\left(p_t\left(x_t^u - x_t^v\right)\right)\right] = & -\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(x_t^u - x_t^v\right)\left(H_x\left(t, x_t^u, p_t, q_t, u_t\right) dt + q_t dB_t^H\right)\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T p_t\left(b\left(t, x_t^u, u_t\right) - b\left(t, x_t^v, v_t\right)\right) dt\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T p_t\left(\sigma\left(t, x_t^u, u_t\right) - \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right)\right) dB_t^H\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T q_t\left(\sigma\left(t, x_t^u, u_t\right) - \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right)\right) H t^{2H-1} dt\right]. \end{aligned}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[p_T\left(x_T^u-x_T^v\right)\right]=&-\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(x_t^u-x_t^v\right)\left(H_x\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)dt\right)\right]\\&+\mathbb{E}\left[\int_0^T p_t\left(b\left(t,x_t^u,u_t\right)-b\left(t,x_t^v,v_t\right)\right)dt\right]\\&+\mathbb{E}\left[\int_0^T q_t\left(\sigma\left(t,x_t^u,u_t\right)-\sigma\left(t,x_t^v,v_t\right)\right)Ht^{2H-1}dt\right].\end{aligned}$$

Mais $H\in[0,1]$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[p_T\left(x_T^u-x_T^v\right)\right]\geq&-\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(x_t^u-x_t^v\right)\left(H_x\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)dt\right)\right]\\&+\mathbb{E}\left[\int_0^T p_t\left(b\left(t,x_t^u,u_t\right)-b\left(t,x_t^v,v_t\right)\right)dt\right]\\&+\mathbb{E}\left[\int_0^T q_t\left(\sigma\left(t,x_t^u,u_t\right)-\sigma\left(t,x_t^v,v_t\right)\right)dt\right].\end{aligned}$$

Alors, on remplace ce derniere inégalité dans (3.8) et d'après (3.9) :

$$\begin{aligned}J(u)-J(v)&=\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(f\left(t,x_t^u,u_t\right)-f\left(t,x_t^v,v_t\right)\right)dt\right]+\mathbb{E}\left[g\left(x_T^u\right)-g\left(x_T^v\right)\right]\\&\geq\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(f\left(t,x_t^u,u_t\right)-f\left(t,x_t^v,v_t\right)\right)dt\right]+\mathbb{E}\left[p_T\left(x_T^u-x_T^v\right)\right]\\&\geq\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(f\left(t,x_t^u,u_t\right)-f\left(t,x_t^v,v_t\right)\right)dt\right]\\&-\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(x_t^u-x_t^v\right)\left(H_x\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)dt\right)\right]\\&+\mathbb{E}\left[\int_0^T p_t\left(b\left(t,x_t^u,u_t\right)-b\left(t,x_t^v,v_t\right)\right)dt\right]\\&+\mathbb{E}\left[\int_0^T q_t\left(\sigma\left(t,x_t^u,u_t\right)-\sigma\left(t,x_t^v,v_t\right)\right)dt\right].\end{aligned}$$

d'après la définition de la fonction Hamiltonienne on obtient :

$$\begin{aligned}J(u)-J(v)\geq&-\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(x_t^u-x_t^v\right)\left(H_x\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)\right)dt\right]\\&+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(H\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)-H\left(t,x_t^v,p_t,q_t,v_t\right)\right)dt\right].\end{aligned}\tag{3.11}$$

De plus la fonction Hamiltonienne est concave pour (x,u), alors

$$\begin{aligned} H\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)-H\left(t,x_t^v,p_t,q_t,v_t\right) &\geq \left(x_t^u-x_t^v\right)\left(H_x\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)\right) \\ &\quad+\left(u_t-v_t\right)\left(H_v\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &H\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)-H\left(t,x_t^v,p_t,q_t,v_t\right)-\left(x_t^u-x_t^v\right)\left(H_x\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)\right) \\ &\geq \left(u_t-v_t\right)\left(H_v\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

On remplace (3.12) dans (3.11) on obtient :

$$\begin{aligned} J(u)-J(v) &\geq -\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(x_t^u-x_t^v\right)\left(H_x\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)\right)dt\right] \\ &\quad+\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(H\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)-H\left(t,x_t^v,p_t,q_t,v_t\right)\right)dt\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(u_t-v_t\right)\left(H_v\left(t,x_t^u,p_t,q_t,u_t\right)\right)dt\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Alors

$$J(u)-J(v)\geq 0.$$

Donc

$$J(u)\geq J(v).$$

Alors u est un contrôle optimal. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, j'ai réalisée une étude sur un processus récemment défini : le mouvement Brownien fractionnaire. En premier lieu, on a définit ce processus et étudié leur propriétés avec tous les détails, Par ailleurs au cours de cette étude, on a rencontré plusieurs difficultés comme la non-différentiabilité des trajectoires de ce processus.

Une question fondamentale a été posée ; Le mouvement Brownien fractionnaire est-il une semi-martingale ? cette question a eu une réponse remarquable, car on a montré que notre processus n'est pas une semi-martingale pour $H \neq \frac{1}{2}$. c'est la raison pour laquelle nous avons définies différents type d'intégration stochastique.

La valorisation de notre travail est montré dans le troisième chapitre en recherchant la généralisation de la formule d'Itô dans le cas où X n'est pas une semi-martingale.

Enfin, nous illustrons notre principale résultat de cette mémoire en donnant un exemple sur nous problème du contrôle sous dynamique stochastique non linéaire avec la fonction de coût terminale.

Bibliographie

[1] Bender, C. (2003). An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst parameter. Stochastic Processes and their Applications (Vol : 104), pp81 − 106.

[2] Gradinaru, M. & Russo, F. & Vallois, P. (2001). Generalized covariations, local time and Stratonovich Itô's formula for fractional Brownian motion with Hurst index $H \geq \frac{1}{4}$. Ann. Probab. (Vol : 31), pp1772-1820.

[3] Hafayad, M. (2018). Cours de probabilité approfondies. Université de Biskra, département de mathématique, master I.

[4] Ivan, N. (2001). Sur une généralisation des intégrales d'Itô, backward et de Fisk-Stratonovich. Université Henri Poincaré - Nancy 1, département de Probabilités, diplôme de DEA.

[5] Ivan, N. (2004). Calcul stochastique généralisé et applications au mouvement brownien fractionnaire ; Estimation non-paramétrique de la volatilité et test d'adéquation. Université Henri Poincaré - Nancy 1, D.F.D. Mathématiques diplôme de docteur.

[6] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY Lecture Notes, Université de Évry .

[7] Kaouache, R. Quelques propriétés du Mouvement Brownien classique et Mouvement Brownien Fractionnaire (Le Modele de Black et Scholes). Université Mentouri-Constantine, département de mathématique.

[8] Khalfallah, N. (2019). Cours de Martingale. Université de Biskra, département de mathématique, master I.

[9] Kolmogorov, A, N. (1940). The Wiener spiral and some other interesting curves in Hilbert space Dokl. Akad. Nauk SSSR. (vol : 26), (2), pp115–118. (Russian).

[10] Labed, B. (2019). Cours de Mouvement Brownien et calcul stochastique. Université de Biskra, département de mathématique, masterII.

[11] Mandelbrot, B. B., & Van-Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Rev (Vol : 10), pp422-437.

[12] Russo, F. & Vallois, P. (1993). Forward, backward and symmetric stochastic integration. Probab Th. Rel. Fields. (Vol : 97), pp403–421.

[13] Savy, N. (2003). Mouvement Brownien fractionnaire, applications aux Télécommunication. Calcul Stochastique relativement à des Processus Fractionnaires. Université de Rennes 1, département de mathématique.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	espace de probabilité.
EDS	équation différentielle stochastique.
$EDSR$	équation différentielle stochastique rétrograde.
mb	Mouvement Brownien.
mBf	Mouvement Brownien fractionnaire.
B_t	Mouvement Brownien.
B_t^H	Mouvement Brownien fractionnaire.
$\mathcal{F}_t^B$	la filtration engendrée par le Mouvement Brownien.
$\mathcal{F}_t^H$	la filtration engendrée par le Mouvement Brownien fractionnaire.
$\mathbb{P}-p.s$	presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$càdlàg$	continu à droite avec une limite à gauche.
$CQFD$	ce qui fallait à démontrer.
$=:$	égale par définition.
$t \wedge s$	l'inf entre t et s.
$t \vee s$	le sup entre t et s.

الملخص

الحركة البراونية الكسرية ليست شبه مارتنجال، لذلك لا يمكننا استخدام نفس الحجج المستخدمة في الحركة البراونية القياسية. لهذا هناك العديد من صيغ إيتو حسب قيم الوسيط هيرس.

الكلمات المفتاحية

صيغة إيتو المعممة، الحركة البراونية الكسرية، المعادلات التفاضلية العشوائية، المتحكم المثالي، الشروط اللازمة المثالية، وسيط هيرس.

Abstract

Fractional Brownian motion is not a semi-martingale , than we can not use the same arguments as for standard Brownian motion. For this and, there are many Itô's formulae according to the value of the Hurst parameter.

Keywords

Itô's formula general, Fractional Brownian motion, stochastic differential equations, optimal control, necessary optimality condition, Hurst parameter.

Résumé

Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale, donc on ne peut pas utiliser les mêmes arguments comme pour le mouvement Brownien standard. Pour cela, il existe beaucoup de formules d'Itô selon la valeur du paramètre de Hurst.

les mots clés

formule d'Itô généralisé, Le mouvement Brownien fractionnaire, équations différentielle stochastique, le contrôle optimal, condition nécessaire d'optimalité, paramètre de Hurst.