République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Ben Drari Soheila

Titre :

Sur les équations différentielles stochaastiques rétrogrades

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**GATT RAFIKA**	UMKB	Président
Dr.	**CHALA ADEL**	UMKB	Encadreur
Dr.	**KORICHI FATIHA**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

𝒥e dédie ce modeste travail :

À mes chers parents "**Kamel**" et "**Naima**" pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien

et leurs prières tout au long de mes études,.

A mes frères : **Mohamed , Miloud, Mahmoud , Ahmed** et **Tayeb** .

A mes chères sœurs : **Loubna** et **Salsabil**.

A tous mes amis surtout : **Halima** , **Ikram** et **Zakia**

Et à toutes les personnes qui m'ont aidé soit de prés ou de loin.

Je pris Allah de leurs accorder longue

vie et bonne santé...

REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant «**Allah**» le tout
puissant de m'avoir donné le force et la volonté
pour terminer ce travail.

J e remercie mon encadreur de mémoire Monsieur «**Chala Adel**» , pour avoir
assuré l'encadrement de ce travail. Je le remercie pour son
encouragement, son orientation et ses conseils

Je tiens aussi à remercier tous les personnes qui nous ont encouragés pendant la
réalisation de ce travail, famille, collège, amis,
sans exception..

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux équations différentielles stochastiques rétrogrades, notées (EDSR) ou en anglais (BSDE) (backward stochastic differential equations), elles sont une nouvelle classe d'équations différentielles stochastiques, leur valeur est donnée en temps terminale (horizon finie) T.

Commencée en 1973, les équations différentielles stochastiques linéaires ont été d'abord introduite par Bismut en 1973 [1], qui a utilisé ces EDSR pour étudier les problèmes de contrôle optimal stochastique dans la version stochastique du principe du maximum de Pontryaguin. Cinq ans plus tard, (Bismut, 1978) prolonge sa théorie et montre l'existence d'une solution unique bornée de l'EDSR de Riccati.

En 1990, la théorie des EDSR a été grandement développée par de nombreux chercheurs, et il y avait un grand nombre d'articles publiés consacrés à la théorie des EDSR et leurs applications. Parmi ces auteurs, les plus célèbres sont Pardoux et Peng en 1990 [6].et El-Karoui [4] .

Le question que suppose est quelle est la signification et la solution de l'EDSR. On défini un mouvement Brownien d-dimensionnel (B_t), soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq T)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien. On considère des EDSR générale de la forme suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = -f(t, \omega, Y_t, Z_t)\, dt + Z_t\, dB_t \\ Y_T = \xi, \text{ avec } \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

ou sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, \omega, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s \, dB_s,$$

telle que :

* $f = f(t; \omega; y; z)$ est le générateur qui est une fonction progressivement mesurable donnée.

* Le condition terminale (finale) $Y_T = \xi$ qui est variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable est de carré intégrable.

Le résoudre de l'équation différentielle stochastique rétrograde c'est trouver un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq T)$, c'est-à-dire ne dépend que de l'information connu jusqu'à l'instant t.

Dans ce mémoire qui ce compose à trois chapitre :

Premier chapitre :

Dans ce chapitre, on introduit les notions générales du calcul stochastique on définit les processus stochastiques et leurs propriétés et les notions de mouvement brownien et l'espérance conditionnel, et temps d'arrêt et martingale...etc. On parlait aussi sur les équations différentielles stochastiques (EDS), l'existante et l'unicité de sa solution avec démonstration en détail, et quelque théories et inégalité sur l'analyse.

Deuxième chapitre :

Dans ce chapitre on présentait le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dont les coefficients sont globalement Lipchitziens. Ce résultat a été obtenu par **Pardoux et Peng en 1990** voir [**6**] avec le générateur f non-linéaire et une donné terminale de carré intégrable.voir [7].

Troisième chapitre :

Dans le dernier chapitre, on parle sur le problème du contrôle optimal pour un système gouverné par $EDSR$, nous créé les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sur l'$EDSR$ contrôlée.

Chapitre 1

Introduction au processus stochastique

Dans ce chapitre on peut donner quelques concepts de base au processus stochastique comme formule d'Itô et les EDSs pour plus de détail voir le livre [5].

1.1 Rappel sur mesure

Définition 1.1.1 *E ensemble quelconque. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, on dit que $\mathcal{A}$ est une tribu si et seulement si :*

1. $E \in \mathcal{A}$.

2. Stabilité par passage au complémentaire,i.e. $\forall A \in \mathcal{A}$ alors $A^C \in \mathcal{A}$.

3. Stabilité par union dénombrable, i.e. Soit $A_1, A_2, A_3, \ldots.., A_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

On appelle l'espace $(E, \mathcal{A})$ espace mesurable.

Définition 1.1.2 *Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, une mesure sur $(E, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ telle que :*

1) $\mu(\phi) = 0$.

2) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de parties deux à deux disjointes de* E *alors :*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On appelle l'espace $(E, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré.

Remarque 1.1.1 *Si de plus* $\mu(E) = 1$, μ *mesure de probabilité, et on la notera* $\mathbb{P}$, *et* $(E, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *espace de probabilité.*

Théorème 1.1.1 ***(Théorème du point fixe)*** *: Soient* (E, d) *un espace métrique complet et* $\Psi : E \to E$ *une application contractante, c'est à dire, Lipchitzienne de rapport* $k < 1$. *Alors :* Ψ *admet unique point fixe* $a \in E$ *tel que* $\Psi(a) = a$.

Théorème 1.1.2 ***(Inégalité de Young)*** *: Soient* $a, b \geq 0$ *et* $1 < p, q < +\infty$ *deux éxposants conjugués i.e,*$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Théorème 1.1.3 ***(Inégalité de Hölder)*** *: Soient* $a, b \geq 0$ *et* $p, q \in [1, \infty]$ *deux exposants conjugués i.e,*$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*si* f, g *sont des applications mesurables, alors :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proposition 1.1.1 *En cas particulier , l'inégalité de Hölder (dans le cas* $p = 2$*) donne l'inégalité de Cauchy-Schwartz, i e :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \tag{1.1}$$

Théorème 1.1.4 ***(Théorème de Fibuni)*** *Soient* $(E, \mathcal{A}, \mu)$, (F, B, η) *deux espaces mesurés tels que les deux mesures soient* $\sigma - finies$ *et soit* $(E \times F, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \otimes \eta)$ *l'espace mesurable produit muni de la mesure produit. Si :* $f : E \times F \to [0, \infty]$ *et est un application* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$*-*

mesurable, alors les applications :

$$x \mapsto \int_E f(x,y)\, d\eta(y) \quad et \quad y \mapsto \int_F f(x,y)\, d\mu(x),$$

sont respectivement $\mathcal{A}-$et $\mathcal{B}-$mesurables et

$$\begin{aligned} \int_{E\times F} f(x,y)\, d(\mu\otimes\eta)(x\times y) &= \int_F \left(\int_E f(x,y)\, d\eta(y)\right) d\mu(x) \\ &= \int_E \left(\int_F f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\eta(y). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Théorème 1.1.5 ***(Formule de Taylor avec reste intégral)*** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}, (n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$. Alors :*

$$f(x) = f(a) + f'(x-a) + \frac{f"(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\, dt.$$

Théorème 1.1.6 ***(Convergence bornée de Lebesgue)*** *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$une suite de fonctions mesurables sur E $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant :*

- *Il existe une constante $M > 0$ avec $|f_n| \leq M$ pour tout $n > 1$.*
- *$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour presque tout $x \in E$. Alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n - f|\, d\lambda \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n d\lambda \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda.$$

1.1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.3 *Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, $X : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ une application mesurable (variable aléatoire) si seulement si $\forall A \in \mathcal{B} : X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.*

Définition 1.1.4 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un ensemble $B \subset \Omega$ est dit négligeable s'il existe $A \in \mathcal{A}$*

telle que $B \subset A$ *avec* $\mathbb{P}(A) = 0$.

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble de tous les ensembles négligeable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

L'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit complet si tous les ensembles négligeable est mesurable ie. $(\mathcal{N} \subset \mathcal{A})$.

Définition 1.1.5 *Processus stochastique est une famille* $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ *de variable aléatoire définie sur une même espace de probabilité indexé par le temps* t.

Si $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}$ *on dit que le processus est à temps discret.*

Si $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ *on dit que le processus est à temps continue.*

Définition 1.1.6 ***(Filtration)*** *Une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante* $\mathbb{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *de sous tribu de* $\mathcal{F}$ *avec* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *pour tous* $0 \leq s \leq t$ *dans* $\mathbb{T}$.

- Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ *est appelé espace de probabilité filtré.*

Remarque 1.1.2 *On dit qu'une filtration* $\mathbb{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite ie* $\mathcal{F}_t = \cap_{s\leq t}\mathcal{F}_s$, $\forall t \in \mathbb{T}$, *et si elle complet c'est-à-dire* $\mathcal{F}_0$ *contient les ensembles négligeables.*

Définition 1.1.7 ***(Modification)*** *Deux processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *et* $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *définis sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *sont dit modification l'un de l'autre si :*

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1; \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

c'est à dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, X_t(\omega) \ = Y_t(\omega).\mathbb{P} - ps.$$

Définition 1.1.8 ***(Indistingabilité)*** *Deux processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *et* $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *définies sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *sont dit indistingables s'il existe* $\mathcal{N}$ *un ensemble* $\mathbb{P}-$*négligeable tel que :*

$$\mathbb{P}(\omega \notin \mathcal{N} : X_t(\omega) \ = Y_t(\omega), \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1,$$

c'est à dire :

$$\forall \omega \notin \mathcal{N}, \implies X_t(\omega) = Y_t(\omega). \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \mathbb{P}-ps.$$

Définition 1.1.9 ***(Trajectoire continue)*** *On dit que le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à trajectoire continue si l'application $t \to X(t,\omega)$ soit continue.*

Définition 1.1.10 ***(Processus prévisible)*** *On dit qu'un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est prévisible pour $\mathcal{A}_t$, si X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et X_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable pour chaque $t > 0$.*

Définition 1.1.11 ***(Processus adapté)*** *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit adapté par rapport à une filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ si X_t est $\mathcal{A}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.12 ***(Processus Gaussien)*** *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus Gaussien ssi $\forall n \geq 1 : \forall\ t_0, t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+, \forall\ a_0, a_1, ..., a_n\ : \sum_{i=0}^{n} a_i X_{t_i}$ est une v.a Gaussien.*

Définition 1.1.13 ***(Accroissement stationnaire et indépendante)*** *Pour $0 \leq s \leq t$ les variables aléatoires $X(t) - X(s)$ sont appelés des accroissement :*

1) Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à accroissement stationnaire si la distribution de la variable aléatoire $X_{t+s} - X_t$ ne dépende pas de t.

2) Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à accroissement indépendants si pour tout suite $0 < t_0 < t_1 < ... < t_n$ les v.as $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendante.

Définition 1.1.14 ***(Processus progressivement mesurable)*** *Un processus (X_t) à valeurs réelles est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$ si pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\omega \in \Omega$ l'application $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ est $[\mathcal{B}([0;t]) \otimes \mathcal{F}_t]$-mesurable $B([0,t])$ est l'ensemble des boréliens de $[0,t]$.*

1.1.2 Espérance Conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité si A, B deux évènements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tq $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors la probabilité conditionnelle de A sachant que B est :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Définition 1.1.15 ***(L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X par rapport à une tribu $\mathcal{G}$)*** *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$, alors l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ est une variable aléatoire $\mathcal{G}-$mesurable telle que :*

$$\int_A \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P},\ \forall A \in \mathcal{G}.$$

Théorème 1.1.7 *Soit $\mathcal{G}-$sous tribu de $\mathcal{F}$ l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire $\mathcal{G}-$mesurable*

$$\int_A \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P},\ \forall A \in \mathcal{G}.$$

Proposition 1.1.2 ***(Propriété d'espérance conditionnelle)*** *Soient X et Y deux v.a et $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$ tel que : $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$,on a :*

1) Linéarité : Soient a et b deux constantes, alors :

$$\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$$

2) Si X est indépendant de $\mathcal{G}$ alors : $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

3) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$.

4) Si X est $\mathcal{G}-$mesurable alors : $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$

5) Si X est $\mathcal{G}-$mesurable alors : $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.

6) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}\right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$.

1.1.3 Martingale

La martingale est une série de v a dans lesquelles la prédiction conditionnelle de la valeur suivant de la séquence à instant donné est égale à valeur couvant étant donné tous les valeurs précédentes.

Définition 1.1.16 *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}{=}\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0} \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré, on appel un processus* X_t *adapté à* $\mathcal{F}_t-$*martingale si et seulement si :*

$$X_t \in L^1 \text{ et pour tout } 0 \leq s \leq t : \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \ \mathbb{P} - ps.$$

Définition 1.1.17 ***(Temps d'arrêt)*** *Soint* $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{R}_+$ $.(\Omega, \mathcal{F})$ *espace mesurable : Un temps d'arrêt sur* Ω *relatif à un filtration* $\mathcal{F} = \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$ *est une application* $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ *,et*

$$\forall t \in \mathbb{T} : \{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega \ / \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.18 ***(Martingale locale)*** *Soit* $\mathcal{F} = \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$ *une filtration et* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *un processus stochastique* $\mathcal{F}_t-$*adapté. On dit que* X *est* $\mathcal{F}_t-$*martingale locale s'il existe une suite de* $\mathcal{F}_t-$ *temps d'arrêt* $\{\tau_n \ n \geq 0\}$ *telle que :* $\mathbb{P}\left(\tau_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty\right) = 1$ *et telle que : le processus* $X^n : t \to X_{t\wedge\tau_n}$ *est une martingale nulle en* 0, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.1.19 ***(Semi-martingale)*** *Une Semi-martingale* X_t *est un processus réel adapté et càdlàg qui se décompose en une somme d'une martingale locale* M_t *et d'une processus* Z_t *réel càdlàg et a variation finie ie.* $X_t = M_t + Z_t$.

Définition 1.1.20 ***(Inégalité de Doob)*** $\forall p \geq 1$, *si* $\{X_n\}_{n=1\ldots N}$ *est une martingale dans* L^p, *alors :*

$$\mathbb{E}\left[|X_N|\right] \leq \mathbb{E}\left[|X^{*p}|\right] \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \mathbb{E}\left[|X_N|\right],$$

telle que : $|X^*| := \max\left[|X_1|, |X_2|, ..., |X_N|\right].$

1.2 Mouvement Brownien (MB)

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cette espace.

Définition 1.2.1 *Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard si :*

1) $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$.

2) $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est une variable aléatoire de loi Gaussienne centrée de variance $(t-s)$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_i$, et $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, les variables $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$, ..., $B_{t_1} - B_{t_0}$, B_{t_0} sont indépendants.

4) $(B_t, t \geq 0)$ est a trajectoire continue $\mathbb{P}$ presque sûrement.

Théorème 1.2.1 ***(Théorème de représentation des martingales)*** *Soient (B_t) un MB sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}{=}\left(\mathcal{F}_t\right)_{t>0}, \mathbb{P}\right)$ et M_t une martingale $(\mathcal{F}_t)-$adapté. Alors il existe unique processus adapté (Z_t) telle que :*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t Z(s)\ dB_s.$$

Définition 1.2.2 ***(Covariance quadratique)*** *Soient M_1 et M_2 deux martingales par rapport à même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et $\pi_n = 0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = t$, une partition de $[0,t]$ telle que $\max\limits_{1\leq i\leq n} |t_i - t_{i-1}| \to 0$. Alors on pose :*

$$\langle M_1, M_2 \rangle \ = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[M_1(t_i) - M_1(t_{i-1})\right]\left[M_2(t_i) - M_2(t_{i-1})\right].$$

$\langle M_1, M_2 \rangle$ s'appelle la covariance quadratique de M_1 et M_2.

Définition 1.2.3 *On définit la variation quadratique d'une martingale (M_t) par :*

$$\langle M_t \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[M_t(t_i) - M_t(t_{i-1})\right]^2.$$

Définition 1.2.4 *On définit aussi la variation finie (totale) d'une martingale* $(M_{t,})$ *par :*

$$\langle M_t \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[\left| M_t\left(t_i\right) - M_t\left(t_{i-1}\right) \right| \right]$$

1.3 Intégrale stochastique et formule d'Itô

Il s'agit d'une intégrale de la forme $\int_0^T X(t)dB_t$, où $(B_t)_{t\leq T}$ est un mouvement Brownien, et $(X_t)_{t\leq T}$ un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité.

Propriété 1.3.1 *L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :*

1. *Linéarité* $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t a(X_s + Y_s)dB_s = a\int_0^t X_s dB_s + a\int_0^t Y_s dB_s,$$

2. *Additivité : Pour* $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t X(s)dB_s = \int_s^u X(s)dB_s + \int_u^t X(s)dB_s.$$

3. *Si* $\int_0^T \mathbb{E}\left[X^2(s)\right] dB_s < \infty$, *alors pour tout* $t \leq T$.

$$\int_0^T \mathbb{E}\left[X(s)\right] dB_s = 0.$$

$\left(\text{\textit{Car le processus}} \left\{ \int_0^T X(s)dB_s \right\} \text{\textit{est une martingale}} \right).$

4. *Isométrie d'Itô*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(s)dB_s\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T \left(\{X(s)\right)^2 ds. \tag{1.3}$$

5. *Propriété du martingale*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)dB_s \mid \mathcal{F}_u\right] = \int_0^u X(s)ds.$$

Définition 1.3.1 *Soient* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace filtré, et* B_t *une mouvement Brownien, on appelle processus d'Itô un processus* $\left(X_t\right)_{0\leq t\leq T}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall t \leq T \qquad X_t = x_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

avec : 1 X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*

2 $\left(\alpha_t\right)_{0\leq t\leq T}$ *et* $\left(\sigma_t\right)_{0\leq t\leq T}$ *deux processus adaptés à* $\mathcal{F}_t$.

3 $\int_0^t \left|\alpha_s\right| ds < +\infty$ $\mathbb{P}-p.s$ *et* $\int_0^t \left|\sigma_s\right|^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}-p.s.$

Le coefficient α_s s'appelle dérive (drift) de processus X et σ_s s'appelle le coefficient de diffusion (volatilité).

On appelle le processus $t \rightarrow x_0 + \int_0^t \alpha_s ds$ est la partie à variation finie de X, et le processus $t \rightarrow \int_0^t \sigma_s dB_s$ le partie orthogonal de X..

1.3.1 Formule d'Itô

Soit $\left(X_t\right)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô, s'écrit sous la forme :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

Alors :

$$dX_t = \alpha_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Théorème 1.3.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *alors :*

$$f\left(X_t\right) = f\left(x_0\right) + \int_0^t f'\left(X_s\right) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''\left(X_s\right)\sigma_s^2 ds.$$

Alors :

$$df\left(X_t\right) = f'\left(X_s\right) dX_s + \frac{1}{2} f''\left(X_s\right)\sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.3.2 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x on a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X_s\rangle,$$

telle que :

$$d\langle X_s\rangle = \langle dX_s, dX_s\rangle = \langle b_s ds + \sigma_s dB_s, b_s ds + \sigma_s dB_s\rangle = \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.3.3 *Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô, et f une fonction dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 alors :*

$$\begin{aligned} f(X_1(t), X_2(t)) = f(X_1(0), X_2(0)) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_1(s), X_2(s))\, dX_1(s) \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_1(s), X_2(s))\, dX_2(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X_1(s), X_2(s))\, d\langle X_1\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X_1(s), X_2(s))\, d\langle X_2\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X_1(s), X_2(s))\, d\langle X_1, X_2\rangle_s. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.4 ***(Intégration par partie)*** *Soit X et Y deux processus d'Itô telle que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s \quad et\ Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha_s^{'} ds + \int_0^t \beta_s^{'} dB_s.$$

Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t,$$

avec :

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t \beta_s \beta_s^{'} ds.$$

De plus la formule d'intégration par partie s'écrit $d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t$.

1.4 Equations différentielles stochastique

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une généralisation de la notion d'équation différentielle prenant en compte un terme de bruit blanc. Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels des cours de bourse ou les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion.

Définition 1.4.1 *Soient* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré,* B_t *un* $(\mathcal{F}_t)-MB$ *d-dimensionnelle,* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *un processus stochastique continue à valeur dans* $\mathbb{R}^n$*, et*

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}_{n\times d}(\mathbb{R}),$$
$$\alpha : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

deux fonctions Boréliennes, et ξ *une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0$ *mesurable indépendante de* B_t *telle que :* $\mathbb{E}\left(|\xi|^p\right) < \infty$, $\forall p > 1$.

Soit L'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \alpha\left(t, X_t\right)dt + \sigma\left(t, X_t\right)dB_t, \\ X_0 = \xi, \end{cases} \tag{1.4}$$

vérifiant les conditions suivantes :

$$\mathbb{P}(X_0 = \xi) = 1. \tag{1.5}$$

$$\mathbb{P}(\int_0^t |\alpha\left(s, X_s\right)| ds + \int_0^t \sigma^2\left(s, X_s\right) ds < +\infty) = 1 \tag{1.6}$$

$$X_t = \xi + \int_0^t \alpha\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s. \tag{1.7}$$

Définition 1.4.2 *On dit que l'équation (1.4) admet une solution forte (trajectorielle) si pour chaque espace de probabilité filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *pour tout mouvement Brownien* $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ *il existe un processus continue* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *tel que les conditions (1.5), (1.6) et*

(1.7) *sont vérifiées.*

Théorème 1.4.1 ***(Théorème d'existence et unicité)*** *Supposons que pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *et* $t \geq 0$, *les fonctions* σ *et* α *satisfait les conditions suivants :*

1) Condition Lipchitz : S'il existe une constante $k > 0$ *telle que :*

$$\left|\alpha\left(t,x\right)-\alpha\left(t,y\right)\right|^{2}+\left|\sigma\left(t,x\right)-\sigma\left(t,y\right)\right|^{2}\leq k\left|x-y\right|^{2}. \tag{1.8}$$

2) Croissance linéaire **:** *S'il existe une constante* $c > 0$ *telle que :*

$$\left|\alpha\left(t,x\right)\right|^{2}+\left|\alpha\left(t,y\right)\right|^{2}\leq c\left(1+\left|x\right|^{2}\right). \tag{1.9}$$

Si les coefficients α *et* σ *vérifient les conditions* (1.8) *et* (1.9)*. Alors l' équation* (1.4) *admet une solution forte unique* $X = (X_t)_{t\in[0,T]} - (\mathcal{F}_t)$ *adapté et continue avec condition initiale* $X_0 = \xi$ *de plus cette solution est Markovienne et vérifie :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t\right|^2\right] < M,$$

où M *est une constante qui dépend de* k, T *et* ξ.

La preuve du théorème d'existence et l'unicité 1.4.1 est basé sur les deux lemmes suivants :

Lemme 1.4.1 ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit* f *une fonction intégrable et non-négative* $t \geq 0$ *et vérifiant*

$$f(t) \leq \beta + c\int_0^t f(s)ds,$$

où c *une constante positive. Alors :* $f(t) \leq \beta\int_0^t \exp(cs)ds.$

Lemme 1.4.2 ***(Inégalité de Bulkhoder-Davis-Gundy (BDG)***

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq\mathbb{T}}\left|\int_0^t \sigma(s,X_S)dB_s\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma(s,X_S)\right|^2 ds\right], \tag{1.10}$$

où C est une constante positive.

Preuve. **1) L'unicité :**

Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ deux solutions pour l'équation (1.4) tel que $X_0 = Y_0 = \xi$, et en appliquant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, et en utilisant les formules de X_t, Y_t on obtient :

$$\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &= \left|\xi + \int_0^t \alpha(s, Xs)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s - (\xi + \int_0^t \alpha(s, Y_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)\, dB_s)\right|^2 \\
&= \left|\int_0^t (\alpha(s, Xs)\, ds - \alpha(s, Y_s))\, ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right|^2 \\
&\leq 2\left|\int_0^t (\alpha(s, Xs)\, ds - \alpha(s, Y_s))\, ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right|^2.
\end{aligned}$$

Passant au l'espérance mathématique, on obtient :

$$\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 \leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \alpha(s, Xs)\, ds - \alpha(s, Y_s)\, ds\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right|^2.$$

D'après L'isométrie d'Itô (1.3) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz (proposition 1.1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 &\leq 2\mathbb{E}\int_0^t \left(\mathbf{1}^2\ ds\right) \int_0^t |(\alpha(s, Xs)\, ds - \alpha(s, Y_s))|^2\, ds + 2\mathbb{E}|\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\right|^2 ds \\
&\leq 2t\mathbb{E}\int_0^t |\alpha(s, Xs)\, ds - \alpha(s, Y_s)|^2\, ds + 2\mathbb{E}\int_0^t |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2\, ds.
\end{aligned}$$

D'après condition Lipschitienne (1.8) , et la théorème de Fubini 1.2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 &\leq 2T\int_0^t \mathbb{E}|(\alpha(s, Xs)\, ds - \alpha(s, Y_s))|^2\, ds + 2\int_0^t \mathbb{E}|(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2\, ds \\
&\leq 2Tk\int_0^t \mathbb{E}|X_s - Y_s|^2\, ds + 2k\int_0^t \mathbb{E}|X_s - Y_s|^2\, ds \\
&\leq C\int_0^t \mathbb{E}|X_s - Y_s|^2\, ds,
\end{aligned}$$

telle que $C = \max(2Tk, 2k)$, alors :

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq C \int_0^t \mathbb{E}\left|X_s - Y_s\right|^2 ds.$$

D'après Lemme Gronwall 1.4.1, on obtient :

$$0 \leq \mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 0 \exp\left(Ct\right) = 0.$$

Donc $\quad \mathbb{P}\ ps\ X_t = Y_t.$

2) L'existence : On montre l'existance d'une solution forte en utilisant la méthode des approximations successives, et pour cela on pose :

$$X_t^n = \xi + \int_0^t \alpha\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s.$$

On a :

$$\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 = \left|\int_0^t \left(\alpha\left(s, X_s^n\right) ds - \alpha\left(s, X_s^{n-1}\right)\right) ds + \left(\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)\right) dB_s\right|^2.$$

En utilisant la même technique pour l'unicité, on obtient

$$\mathbb{E}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 \leq C \int_0^t \mathbb{E}\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds.$$

On a

$$\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 \leq 2T\mathbb{E}\int_0^t \left|\alpha\left(s, X_s^0\right)\right|^2 ds + 2\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^0\right)\right|^2 ds.$$

D'après la croissance linéaire α et σ (1.9) , on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 &\leq 2Tc\mathbb{E}\int_0^t \left(1 + |X_s|^2\right) ds + 2c\mathbb{E}\int_0^t (\left(1 + |X_s|^2\right) ds \\
&\leq 2Tc\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\,|X_s|^2\right) ds + 2c\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\,|X_s|^2\right) ds \\
&\leq M\ \left(1 + \mathbb{E}\,|X_s|^2\right)\int_0^t ds \\
&\leq M\left(1 + \mathbb{E}\,|X_s|^2\right) T \\
&\leq C_M T,
\end{aligned}$$

telle que $M = \max(2Tc, 2c)$ et $C_M = M\left(1 + \mathbb{E}\,|X_s|^2\right)$, ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 &\leq C_M\int_0^t \mathbb{E}\left|X_s^1 - X_s^0\right|^2 ds \\
&\leq C_M\int_0^t Cs\ ds \\
&\leq C_M^2\int_0^t s\ ds \\
&\leq C_M^2\frac{T^2}{2}.
\end{aligned}$$

Alors pout tout $n \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 &\leq C_M\int_0^t \mathbb{E}\left|X_t^n - X_t^{n-1}\right|^2 ds \\
&\leq \frac{C_M^{n+1}}{n!}\int_0^t s^n ds \\
&\leq \frac{C_M^{n+1}}{n!}\frac{T^n}{n} \\
&\leq \frac{(C_M T)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

On montre maintenant que X_t^n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left|X_t^m - X_t^n\right|^2\right)^{1/2} &= \left\|X_t^m - X_t^n\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left\|X_t^{k+1} - X_t^k\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left[\frac{(C_M T)^{k+1}}{(k+1)!}\right]^{1/2} \underset{n\to\infty, m\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$, et $m \to \infty$, on obtient :

$$\left(\mathbb{E}\left|X_t^m - X_t^n\right|^2\right)^{1/2} \to 0.$$

Donc X_t^n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ qui est lui même un espace complet, et par conséquence elle est convergente dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Notons X_t la limite de la suite $(X_t^n)_n$, avec $\lim\limits_{n\to\infty} X_t^n = X_t$ dans $(\mathbb{L}^2(\Omega))$, telle que :

$$X_t = \xi + \int_0^t \alpha(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s.$$

On a déjà montré que $X_t^n \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} X_t$ telle que :

$$X_t^n = \xi + \int_0^t \alpha\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s.$$

Il nous reste à montrer que la solution s'écrit sous la forme EDS, en utilisant l'isométrie d'Itô et comme σ est $C-$Lipschzienne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\left(\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) - \sigma(s, X_s)\right) dB_s\right|^2 &= \mathbb{E}\left|\left(\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) - \sigma(s, X_s)\right)\right|^2 ds \\ &\leq C\mathbb{E}\int_0^t \left|X_s^{n-1} - X_s\right|^2 ds \to 0,\end{aligned}$$

car $X_t^n \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} X_t$, alors $\sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} \sigma\left(s, X_s\right))$.

On applique l'inégalité de Hôlder et comme α est $C-$Lipschzienne, on trouve :

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t \alpha\left(s, X_s^{n-1}\right) - \alpha\left(s, X_s\right) ds\right|^2 \leq CT\mathbb{E}\left|X_t^{n-1} - X_t\right|^2 \to 0,$$

car $X_t^n \overset{\mathbb{L}_2(\Omega)}{\to} X_t$, et par la continuité de $\alpha(\omega, t)$. Alors $\alpha\left(s, X_s^{n-1}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \alpha\left(s, X_s\right))$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

En passant à la limite, on obtient :

$$X_t^n = \xi + \int_0^t \alpha\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} X_t = \xi + \int_0^t \alpha\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s.$$

Donc X_t est un solution de l'équation (1.4).

On va montrer que $\mathbb{E}\left(\sup_t |X_t|^2\right) < M$, par l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 2(a^2+b^2+c^2)$, et on passant à l'espérance on a :

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq 3\mathbb{E}|\xi|^2 + 3T\mathbb{E}\left[\int_0^t |\alpha\left(s, X_s\right)|^2\right] ds + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma\left(s, X_s\right)|^2\right] ds.$$

D'après la croissante linéaire de α et σ (1.9) , on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_t|^2) &\leq 3\mathbb{E}|\xi|^2 + 3Tc\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_s|^2\right)\right] ds + 3c\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_s|^2\right)\right] ds \\
&\leq N\mathbb{E}|\xi|^2 + N\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_s|^2\right)\right] ds + N\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_s|^2\right)\right] ds \\
&\leq N\mathbb{E}|\xi|^2 + 2N\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_s|^2\right)\right] ds \\
&\leq c_N\mathbb{E}|\xi|^2 + c_N\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_s|^2\right)\right] ds \\
&\leq c_N\mathbb{E}|\xi|^2 + c_NT + c_N\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s|^2\right] ds \\
&\leq c_N(\mathbb{E}|\xi|^2 + T) + c_N\int_0^t \mathbb{E}|X_s|^2 ds,
\end{aligned}$$

avec $N = \max\,(3, 3c, 3cT)$ et $c_N = \max(2N, N)$, et on applique le lemme de Gronwall 1.4.1, on obtient :

$$\mathbb{E}(\,|X_t|^2) \leq \left[\mathbb{E}|\xi|^2 + T\right] \exp\left(c_N t\right) \leq M.$$

Puis que $\left[\mathbb{E}\,|\xi|^2 + T\right] < \infty$, telle que $M = (\mathbb{E}\,|\xi|^2 + T)\exp(c_N t)$, alors :

$$\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) \leq \infty \;\forall t \in [0, T]\,.$$

Ce qui implique d'après 1.4.2.

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right) \leq C\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) < M.$$

D'où le résultat. ∎

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR)

2.1 Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) sont des nouveaux types d'équations différentielles stochastiques (EDS) qui ne peuvent pas être traitées par les méthodes usuelles pour les EDS. Une des principales raisons est qu'on ne peut pas renverser le "temps". Voyons un exemple simple.

Considérons l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dY_t = 0 \\ Y_T = \xi, \text{ pour tout } t \in [0, T], \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}_T$ -mesurables et de carré intégrables. Puisque l'unique solution de cette EDS est $Y_T = \xi$, pour tout t ; Y est par conséquent n'est pas une solution "adaptée" de (2.1) dans le sens usuel d'Itô. Cependant cet exemple trivial n'a pas de solution adaptée dans les sens usuels.

Dans plusieurs d'applications, il est crucial que la solution de l'EDS soit adaptée à la filtration où le mouvement Brownien est adapté. Un exemple fréquemment cité, qui est l'essentielle à l'origine de la théorie des EDSRs, est qu'on appelle le principe du maximum de Pontryagin pour les problèmes de contrôle optimal stochastique. Ceci est la condition nécessaire pour le contrôle optimal, qui contient une" équation adjointe" qui prend la forme d'une EDSR. Motivé par de tels problèmes (voir SVP le chapitre 03), Bismut [1] est le premier qui proposé la méthode suivante pour trouver une solution adaptée pour les EDSR. Prenant le cas simple (2.1) comme un exemple.

On suppose que la filtration est Brownienne, c'est-à-dire qu'il existe un mouvement Brownien $B_t = (B_t)$ définie dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathcal{F}_t = \overrightarrow{\mathcal{F}_t^{B}}^{\mathbb{P}}$, pour tout $t \geq 0$, ici $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ et $\overrightarrow{\{\}}^{\mathbb{P}}$ définie l'augmentation par les éléments de $\mathbb{P}$-négligeable. Supposons maintenant que $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$, et notons $Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t), t \geq 0$. Alors, Y est une $\mathbb{L}^2-$ martingale et par la théorème Représentation de martingale 1.2.1 existe unique processus prévisible $Z \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t)$ telle que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s. \tag{2.2}$$

La forme différentielle de cette équation est :

$$\begin{cases} dY_t = Z_t \, dB_t, \\ Y_T = \xi, \ \forall t \in [0, T]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Bismut propose que au lieu de regarder seulement le processus Y comme la solution à l'EDSR, on peut considérer le couple (Y, Z) comme une solution de l'EDSR (2.1) et la forme appropriée d'une EDS avec une condition terminale serait de la forme (2.3) que celle de (2.1). On peut écrire (2.3) comme "une équation intégrale". En effet intégrons (2.3) de t à T, on obtient que :

$$Y_T = \xi - \int_t^T Z_s dB_s, \text{ avec } \forall t \in [0, T].$$

Ceci est L'EDSR simple sous sa forme intégrable.

2.2 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, B un mouvement Brownien $d-$dimensionnel, $\mathcal{F}_t = \sigma\left(B_s, 0 \leq s \leq T\right)$.

*$\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^k)$ = { l'espace vectoriel formé par les processus Y progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^k$ telle que $\|Y\|_{\mathbb{S}^2} = \mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right) < \infty$}.

*$\mathbb{S}^2_c$ = {le sous-espace par les processus continue.}.

*$\mathbb{M}^2{}_{n\times d}(\mathbb{R}^{k\times d})$ = { l'espace formé par les processus Z progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ telle que $\|Z\|_{\mathbb{M}^2} = \mathbb{E}\left(\int_0^T ||Z_t||^2 dt\right) < \infty$}, où : si $Z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|Z\|^2_{\mathbb{M}^2} = trace(Z.Z^*)$.

$\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes équivalente de $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Soient les espaces $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^2_c$, et $\mathbb{M}^2$ sont des espaces de Banach pour ces normes. On désigne par $\mathbb{B}^2$ l'espace de Banach $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) :

$$\begin{cases} dY_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right) dt - Z_t \, dB_t \\ \quad Y_T = \xi, \text{ avec } \forall t \in [0, T], \end{cases} \tag{2.4}$$

ou de façon intégrable :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s \, dB_s,$$

où :

$$f : \quad \left([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}\right) \to \mathbb{R}^k$$
$$(t, \omega, y, z) \longmapsto f\left(t, \omega, y, z\right).$$

telle que f s'appelle le générateur et ξ est $\mathcal{F}_T-$mesurable de carré intégrable $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T)$.

Définition 2.2.1 *Une solution d'équation (2.4) est le couple des processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :*

1. *Y et Z progressivement mesurable à valeur respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$.*
2. $\mathbb{P}-ps$ $\int_0^t \{|f(s, y_s, z_s)| + \|Z_s\|^2 ds\} < \infty$.
3. $\mathbb{P}-ps$ *on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\ dB_s\ 0 \le t \le T.$$

Remarque 2.2.1 *Le processus Y est une semi martingale continue, car Y écrit sous la forme $Y_t = M_t + A_t$ telle que M_t est un martingale local et A_t est un processus stochastique a variation finie.*

En effet on a Y est continue car $Y \in \mathbb{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$ et

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s, \text{ avec } 0 \le t \le T.$$

$A_t = \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds$ *est un processus stochastique a variation finie où :*

$$\left\langle \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds, \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds \right\rangle = 0 < \infty.$$

$M_t = -\int_t^T Z_s dB_s$ *est un intégrale d'Itô alors est martingale, et comme tout martingale est un martingale locale .*

Donc Y est un semi-martingale continue.

Hypothèse :(H1) Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\le t\le T} \in \mathbb{M}^2$ est positif et λ un constante positif telle que :

$$\forall (t, y, z) \in \left([0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}\right) : |f(t, y, z)| \le f_t + \lambda (|y| + \|z\|).$$

Proposition 2.2.1 *Supposons que $(H1)$ est vraie et si $\{(Y_t, Z_t)\}$ est solution de l'EDSR (2.4), telle que $Z \in \mathbb{M}^2$, alors $Y \in \mathbb{S}^2$.*

Preuve. Y_0 est déterministe, alors pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}|Y_t| &= |Y_0 - \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_0^t Z_s dB_s| \\ &\leq |Y_0| + |\int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds| + |\int_0^t Z_s dB_s|.\end{aligned}$$

D'après hypothèse $(H1)$, on a :

$$\begin{aligned}|Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^t (f_s + \lambda(|Y_s| + \|Z_s\|))\, ds + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_s dB_s| \\ &\leq \underbrace{|Y_0| + \int_0^t (f_t + \|Z_s\|)ds + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_s dB_s|}_{=:\varepsilon} + \lambda \int_0^t |Y_s|\, ds \\ &\leq \varepsilon + \lambda \int_0^t |Y_s|\, ds.\end{aligned}$$

Si $Z \in \mathbb{M}^2$ donc $\mathbb{E}\left(\int_0^t ||Z_s||^2 ds\right) < \infty$ et d'après l'inégalité de B-D-G (1.10), on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_s dB_s|^2\right) \leq C\mathbb{E}\left(\int_0^t |Z_s|^2 ds\right) < \infty.$$

On sait que Y_0 et $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ sont déterministe et de carrée intégrable, et comme Y_t est un processus continue et $|Y_t| \leq \varepsilon + \lambda \int_0^t |Y_s|\, ds$, donc on peut appliquer de lemme de Gronwall 1.4.1 i.e

$$|Y_t| \leq \varepsilon \exp(\lambda t),$$

telle que $t \in [0,T]$ (d'horizon finie), donc :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|\right] \leq \varepsilon \exp(\lambda t).$$

On a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|\right] \leq \varepsilon \exp(\lambda t) < \infty.$$

Donc $Y \in \mathbb{S}^2$. ■

Lemme 2.2.1 *Si* $Y \in \mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *et* $Z \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$, *alors :*

$$X_t = \left\{ \int_0^t Y_s Z_s \; dB_s, t \in [0,T] \right\}, \tag{2.5}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve. 1) X_t est un intégrale d'Itô, alors il est martingale telle que $Y_s Z_s$ est un bon-processus.

En effet $Y_s Z_s$ est adapté et càdlàg car $Y \in \mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz(1.1) et l'inégalité de Young $[ab \leq a^2 + b^2]$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t |Y_s Z_s| ds\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t |Y_s|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\int_0^t \|Z_s\|^2 \, ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_s|^2\right] \int_0^t ds + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t \|Z_s\|^2 \, ds\right] \\
&\leq \frac{T}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_s|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t \|Z_s\|^2 \, ds\right] \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

car $Y \in \mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$,alors X_t est une martingale.

2) X_t est uniformément intégrable :

D'après l'inégalité de B-D-G (1.10) et l'inégalité de Young $ab \leq a^2 + b^2$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s Z_s \; dB_s\right|\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t |Y_s|^2 \|Z_s\|^2 \; ds\right|\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_s|^2 \int_0^t \|Z_s\|^2 \; ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_s|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_s\|^2 \, ds\right] \\
&\leq C'\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_s|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \||Z_s|\|^2 \, ds\right] \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

avec $C' = \max\left(\frac{C^2}{2}, \frac{1}{2}\right)$ car $Y \in \mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Donc :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|\right] < \infty.$$

Donc X_t est uniformément intégrable. ■

2.3 Cas Lipchitz

Dans cette section, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité. Ce résultat est dû à **Pardoux et Peng** [6], c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Soit l'application $f : \left([0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}\right) \to \mathbb{R}^k$ telle que pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable.

On considère également une variable aléatoire ξ est $\mathcal{F}_T$ –mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Hypothèse (H2) :

Il existe une constante $\lambda > 0$, telle que $\mathbb{P}-ps$

1) Condition Lipchitz en (y,z) pour tout t, y, y', z, z' :

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \lambda\left(|y-y'| + \|z-z'\|\right).$$

2) Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left(|\xi| + \int_0^T |f(s,0,0)|^2\right) < \infty.$$

2.3.1 Cas simple f ne dépend pas ni y ni z

Soit f ne dépend pas ni y ni z i.e : on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$, et on veut trouver une solution de l'EDSR (2.4) :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T. \tag{2.6}$$

Lemme 2.3.1 *Soit* $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$, *l'EDSR* (2.6) *possède unique solution* (Y, Z), *telle que* $Z \in \mathbb{M}^2$.

Preuve. **1) L'existence :** Supposons que (Y, Z) une solution vérifié $Z \in \mathbb{M}^2$, si on prend l'ésperance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on obtient :

$$Y_t = \mathbb{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Comme $\int_0^T Z_s dB_s$ est une martingale, alors on a $\mathbb{E}\left(\int_t^T Z_s dB_s\right) = 0$, on fait dans $\mathbb{S}_c^2$ car F est de carré intégrable, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_s ds \\
&= M_t - \int_0^t F_s ds,
\end{aligned}$$

où M_t est un martingale Brownienne. D'après le théorème de représentation des martingales 1.2.1, il existe un processus prévisible Z carré intégrable $(Z \in \mathbb{M}^2)$, telle que

$$\begin{aligned}
Y_t &= M_t - \int_0^t F_s ds \\
&= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds.
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR (2.6) étudiée et comme $Y_T = \xi$, on a :

$$\begin{aligned}
Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dB_s - \int_0^T F_s ds \right) \\
&= \left(\int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds \right) - \left(\int_0^T Z_s dB_s - \int_0^T Z_s dB_s \right) \\
&= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s.
\end{aligned}$$

Alors :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB.$$

2) L'unicité : Soient (Y_t, Z_t) et (Y'_t, Z'_t) deux solutions de l'EDSR (2.6), et $Y_T = Y'_T$, $F_s = F'_s$, soit : $\mathcal{Y}_t = Y_t - Y'_t$ et $\mathcal{Z} = Z_t - Z'_t$.

Nous allons prouver que $Y_t = Y'_t$ et $Z_t = Z'_t$ $d\mathbb{P} \times dt - ps$.

En effet

$$\mathcal{Y}_t = -\int_t^T \mathcal{Z}_s dB_s.$$

On applique la formule d'Itô telle que $g(\mathcal{Y}_t) = |\mathcal{Y}_t|^2$, donc :

$$\begin{aligned}
d\,|\mathcal{Y}_t|^2 &= 2\mathcal{Y}_t d\mathcal{Y}_t + 2\frac{1}{2}\langle \mathcal{Y}_t \rangle \\
&= 2\mathcal{Y}_t d\mathcal{Y}_t + \|\mathcal{Z}_t\|^2 dt.
\end{aligned}$$

En passant à l'intégrale et comme $\mathcal{Y}_T = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_t^T d\,|\mathcal{Y}_s|^2 &= 2\int_t^T \mathcal{Y}_t d\mathcal{Y}_s + \int_t^T \|\mathcal{Z}_s\|^2 ds \\
0 - |\mathcal{Y}_t|^2 &= 2\int_t^T \mathcal{Y}_s d\mathcal{Y}_s + \int_t^T \|\mathcal{Z}_s\|^2 ds,
\end{aligned}$$

où :

$$\mathcal{Y}_s d\mathcal{Y}_s = -\mathcal{Y}_s \mathcal{Z}_s dB_s.$$

Donc :

$$-|\mathcal{Y}_t|^2 = \int_t^T -\mathcal{Y}_s \mathcal{Z}_s dB_s + \int_t^T \|\mathcal{Z}_s\|^2 ds.$$

Alors :

$$\int_t^T -\mathcal{Y}_s \mathcal{Z}_s dB_s = |\mathcal{Y}_t|^2 + \int_t^T \|\mathcal{Z}_s\|^2 ds.$$

En passe à l'espérance mathématique et comme $\int_t^T -\mathcal{Y}_s \mathcal{Z}_s dB_s$ est un intégrale d'Itô, donc $\mathbb{E}\left[\int_t^T -\mathcal{Y}_s \mathcal{Z}_s dB_s\right] = 0$, alors :

$$\mathbb{E}\left[|\mathcal{Y}_t|^2 + \int_t^T \|\mathcal{Z}_s\|^2 ds\right] = 0,$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} |\mathcal{Y}_t|^2 = 0 \text{ alors } \mathcal{Y}_t = 0, d\mathbb{P} - ps \\ \int_t^T \|\mathcal{Z}_s\|^2 ds = 0 \text{ alors } \mathcal{Z}_s = 0, d\mathbb{P} \times dt - ps \end{cases}$$

Alors $d\mathbb{P} \times dt - ps$

$$\begin{cases} Y_t = Y_t', \\ Z_t = Z_t'. \end{cases}$$

D'où le résultat. ■

2.3.2 Cas où f dépend de y et z

Théorème 2.3.1 ***(Pardoux-Peng 1990 [6])*** *Sous l'hypothèse $(H2)$, l'EDSR (2.4) possède une unique solution (Y, Z), telle que $Z \in \mathbb{M}^2$.*

Preuve. Nous utilisons un argument du point fixe 1.1.1 dans l'espace de Banach $\mathbb{B}^2$, alors soit l'application

$$\Psi : \quad \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$$
$$(Y, Z) \longmapsto \Psi(Y, Z),$$

telle que (Y, Z) est une solution de l'EDSR (2.4) si seulement si Ψ admet un point fixe.

Pour tout $(U,V) \in \mathbb{B}^2$, on définit $\Psi(U,V) = (Y,Z)$ solution de L'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s)_s \, ds - \int_t^T Z_s dB_s, \ 0 \leq t \leq T. \tag{2.7}$$

Remarquons que l'EDSR (2.7) possède une unique solution qui est dans $\mathbb{B}^2$.

En effet, posons $F_s = f(s, U_s, V_s) \in \mathbb{M}^2$ comme f est $\lambda-$Lipchitzienne on a :

$$\begin{aligned} |f(s, U_s, V_s) - f(s, U_s', V_s')| &\leq \lambda(|U_s - U_s'| + \|V_s - V_s'\|) \\ &\leq \lambda |U_s - U_s'| + \lambda \|V_s - V_s'\|. \end{aligned}$$

Soit $U_s' = V_s' = 0$, alors :

$$|f(s, U_s, V_s)| - |f(s, 0, 0)| \leq |f(s, U_s, V_s) - f(s, 0, 0)| \leq \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\|.$$

Alors :

$$|f(s, U_s, V_s)| \leq f(s, 0, 0) + \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\|,$$

avec f et U_s et V_s sont des processus de carré intégrable, alors par suit nous pouvons appliquer le lemme 2.3.1 pour obtenir un unique solution (Y, Z) tel que $Z \in \mathbb{M}^2$.

L'intégrabilité de Z est obtenue par le théorème de représentions de martingale et d'après la proposition 2.2.1, alors $Y \in \mathbb{S}^2$.

Soient (U,V) et $(U',V') \in \mathbb{B}^2$ où $(Y,Z) = \Psi(U,V)$ et $(Y',Z') = \Psi(U',V')$.

Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$ et $y_T = 0$ tel que :

$$dy_t = f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t') - z_t dB_t.$$

On applique la formule d'Itô sur $\exp(\alpha t) |y_t|^2$, soit $g(t, x_t) = \exp(\alpha t) |x_t|^2$, alors il est facile de calculer les dérivées.

Alors :

$$\begin{aligned} d\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right) &= \alpha\exp(\alpha t)|y_t|^2 dt + 2\exp(\alpha t)\, y_t dy_t + \frac{1}{2} 2\exp(\alpha t)\langle dy\rangle_t \\ &= \alpha\exp(\alpha t)|y_t|^2 dt + 2\exp(\alpha t)\, y_t \left[f\left[(t,U_t,V_t) - f\left(t,U_t',V_t'\right)\right] - z_t dB_t\right] \\ &+ \exp(\alpha t)\|z_t\|^2 dt. \end{aligned}$$

En passant à l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_t^T d\left(\exp(\alpha s)|y_s|^2\right) \\ &= \int_t^T \left(\alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2 ds + 2\exp(\alpha s)\, y_s\left[\left[f(s,U_s,V_s) - f\left(t,U_s',V_s'\right)\right] - z_s dB_s\right]\right) \\ &+ \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} &\exp(\alpha s)|y_T|^2 - \exp(\alpha t)|y_t|^2 \\ &= \int_t^T \alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2 ds + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \\ &+ 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s\left[f(s,U_s,V_s) - f\left(t,U_s',V_s'\right) - \int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s\right]. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} &-\left[\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right] \\ &= 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s\left[f\left(t,U_s',V_s'\right) - f(s,U_s,V_s) + \int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s\right] \\ &- \int_t^T \alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2 ds. \end{aligned}$$

Comme f est $\lambda-$Lipchitzienne et on note par $u = U' - U$ et par $v = V' - V$, on a :

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\left\|z_s\right\|^2 ds \\
&= -\int_t^T -\alpha \exp(\alpha s)\left|y_s\right|^2 ds + 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s\left(\lambda\left|U_s' - U_s\right| + \lambda\left\|V_s' - V_s\right\|\right) \\
&+ 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s \\
&\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\left\|z_s\right\|^2 ds \\
&= \int_t^T -\alpha \exp(\alpha s)\left|y_s\right|^2 ds + 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s\left(\lambda\left|u_s\right| + \lambda\left\|v_s\right\|\right) \\
&+ 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s.
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en appliquant inégalité de Yong $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$, on a :

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\left\|z_s\right\|^2 ds \\
&\leq \int_t^T \left[-\alpha + 2\frac{\lambda^2}{\varepsilon}\right]\left|y_s\right|^2 ds \\
&+ \varepsilon \int_t^T \exp(\alpha s)\left(\left|u_s\right|^2 + \left\|v_s\right\|^2\right) ds + 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s.
\end{aligned}$$

Prenant $\alpha = \dfrac{2\lambda^2}{\varepsilon}$ et $R_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T \exp(\alpha s)\left(|u|^2 + \|v\|^2\right) ds$, donc $\forall t \in [0, T]$:

$$\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\left\|z_s\right\|^2 ds \leq R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s.$$

Alors :

$$\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2 \leq R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s\ , \tag{2.8}$$

$$\int_t^T \exp(\alpha s)\left\|z_s\right\|^2 ds \leq R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s. \tag{2.9}$$

D'après (2.9) et $\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right] \leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + 2\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s\right]$, la martingale locale $\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s$ est une martingale nulle en 0 puisque Y, $Y' \in \mathbb{S}^2$, et $Z, Z' \in \mathbb{M}^2$, donc :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right] \leq \mathbb{E}(R_\varepsilon).$$

D'autre part d'après (2.8), et on applique l'inégalité de Doob 1.1.20 et de BGD (1.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] &\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + 2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s\right)\\
&\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + C\mathbb{E}\left(\int_t^T \exp(\alpha s)|y_s|^2\|z_s\|^2 ds\right)\\
&\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + C\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)|y_t|^2\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right)\\
&\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] &\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}(R_\varepsilon)\\
\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] &\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}(R_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] \leq 2\mathbb{E}(R_\varepsilon) + C^2\mathbb{E}(R_\varepsilon).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right] &= \mathbb{E}(R_\varepsilon) + 2\mathbb{E}(R_\varepsilon) + C^2\mathbb{E}(R_\varepsilon)\\
&= \left(3 + C^2\right)\mathbb{E}(R_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Et par suite d'après la définition de R_ε on a :

$$
\begin{aligned}
&\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|y_t\right|^2\right)\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|z_s\right\|^2ds\right]\\
&=\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\varepsilon\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left(\left|u_s\right|^2+\left\|v_s\right\|^2\right)ds\right)\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left|u_s\right|^2ds+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|v_s\right\|^2ds\right)\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|u_t\right|^2\int_0^Tds+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|v_s\right\|^2ds\right)\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|u_t\right|^2T+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|v_s\right\|^2ds\right)\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)K,
\end{aligned}
$$

telle que $K=(1\vee T)$, on prenant telle que :$\varepsilon\left(3+C^2\right)K=\frac{2}{5}$ de sort que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathbb{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme suivante

$$
\left\|U,V\right\|_\alpha=\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|y_t\right|^2\right)+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|z_s\right\|^2ds\right]^{\frac{1}{2}}.
$$

Si on prend le cas que $[\alpha=0]$ alors Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui démontrer l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.4) .

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z\in\mathbb{M}^2$ puisque 2.2.1 implique qu'une telle solution appartient $\mathbb{B}^2$. $\blacksquare$

Remarque 2.3.1 *À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression* « **la solution de l'EDSR** » *signifiera la solution de l'EDSR vérifiant* $Z\in\mathbb{M}^2$.

2.4 Le rôle de Z

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_s dB_s$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul..

Proposition 2.4.1 *Soient* (Y,Z) *la solution de l'EDSR* (2.4) *et un temps d'arrêt majoré par*

T *On suppose, en outre l'hypothèse* (**H2**) *que est* $\mathcal{F}_T$ *–mesurable et que* $f(t, y, z) = 0$ *dès que* $t \geq \tau$ *. Alors si* $t \geq \tau$

$$\begin{cases} Y_t = Y_{t\wedge\tau}, \\ Z_t = 0. \end{cases}$$

Preuve. On a $\mathbb{P}-ps$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s \ , 0 \leq t \leq T.$$

Donc pour $t = \tau$:

$$\begin{aligned} Y_\tau &= \xi + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_\tau^T Z_s dB_s \ , \\ Y_\tau &= \xi - \int_\tau^T Z_s dB_s. \end{aligned}$$

On a :

$$Y_\tau = \mathbb{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}_\tau\right) = \xi,$$

car ξ est $\mathcal{F}_T-$mesurable, et par suite $\displaystyle\int_\tau^T Z_s dB_s = 0$, et par suite :

$$\mathbb{E}\left(\int_\tau^T Z_s dB_s\right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_\tau^T \|Z_s\|^2 \, ds\right) = 0.$$

Finalement

$$\tau_s \mathbf{1}_{s\geq\tau} = 0.$$

Alors si $t > \tau$: $Y_t = Y_\tau$.

Donc :

$$\begin{aligned} Y_\tau &= Y_t + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_\tau^T Z_s dB_s \\ &= Y_t + 0 - 0 = Y_t. \end{aligned}$$

Alors :

$$Y_\tau = Y_{t\wedge\tau} \text{ et } Z_t = 0.$$

Ce qui termine la preuve.

Notons que dans le cas où ξ et f sont déterministe, alors Z est nul et Y la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} dY_t = f\left(t, Y_t, 0\right) dt \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

■

Chapitre 3

Contrôle optimal stochastique pour l'EDSR

Notre but dans ce chapitre est de dérivé les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSRs. Nous nous sommes appuyés sur la recherche sur [2].

3.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré sur lequel on définit un mouvement Brownien d-dimensionnel $B = (B)_{t\geq 0}$, et soit la filtration naturelle de mouvement Brownien $\mathcal{F}_{t\in[0,T]} = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$. T un réel strictement positive fixé. U un fermé convexe de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.1 *On définit un contrôle admissible pour tout processus $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeur dans U tel que :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |v_t|^2\right] < \infty.$$

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des tous les contrôles admissibles.

Pour tout $\upsilon \in \mathcal{U}$, on considère l'équation différentielle stochastique rétrograde contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dy_t^{\upsilon} = f\left(t, y_t^{\upsilon}, z_t^{\upsilon}, \upsilon_t\right) dt - z_t^{\upsilon} dB_t, \\ y_T^{\upsilon} = \xi. \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}_{n\times d} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, et ξ est une variable aléatoire de dimension n, $\mathcal{F}_T$-mesurable et indépendante de mouvement brownien tel que : $\mathbb{E}\left|\xi\right|^2 < \infty$.

Définition 3.1.2 *(Fonction de coût) Soit la fonction de coût donnée par :*

$$\mathcal{J}\left(u\right) = \left[\mathbb{E}\int_0^T h\left(t, y^{\upsilon}\left(\omega\right), z_t^{\upsilon}\left(\omega\right), \upsilon_t\left(\omega\right)\right) dt + g\left(y_0^{\upsilon}\left(\omega\right)\right)\right], \tag{3.2}$$

où

$$h : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}_{n\times d}\left(\mathbb{R}\right) \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

et y_0 est la solution de l'équation (3.1) prise au temps initiale.

Hypothèse (H3) :

Les fonctions f, g et h sont continues en (y, z, υ), et leur dérivées f_y, f_z, g_y, h_y et h_z sont continues en (y, z, υ) et uniformément bornées.

Les fonctions f et h sont bornées et f Lipchitzienne en y, z et υ.

Le but du contrôle optimal est de minimiser la fonctionnelle de coût $\mathcal{J}$ sur l'ensemble des contrôles admissibles, on choisit un contrôle $u \in \mathcal{U}$ tel que

$$\mathcal{J}\left(u\right) = \inf_{\upsilon \in \mathcal{U}} \mathcal{J}\left(\upsilon\right). \tag{3.3}$$

Définition 3.1.3 *Une solution de l'EDSR (3.1) est un couple de processus $\left\{(y_t, z_t)\right\}_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :*

1) *y, z sont progressivement mesurable.*

2).

$$\int_0^T \left\{ |f(s, y_s, z_s, \upsilon_s)| + \|z_s\|^2 \right\} ds < \infty.$$

3) $\mathbb{P}-ps$

$$y_t^{\upsilon} = \int_t^T f(s, y_s^{\upsilon}, z_s^{\upsilon}, \upsilon_s) \, ds - \int_t^T z_s^{\upsilon} dB_s.$$

3.2 Résultats préliminaires

On considère la perturbation convexe suivante :

$$u^{\theta} = u + \theta \upsilon, \forall \upsilon \in \mathcal{U}.$$

Soit y^{θ} trajectoire associe au contrôle $u^{\theta} \in \mathcal{U}$ est donnée par :

$$y_t^{\theta} = \int_t^T f\left(s, y_s^{\theta}, z_s^{\theta}, u_s^{\theta}\right) ds - \int_t^T z_s^{\theta} dB_s.$$

D'après la formule (3.2) et la définition de contrôle perturbé, on a

$$\mathcal{J}(u) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\upsilon).$$

Alors :

$$\mathcal{J}(\upsilon) - \mathcal{J}(u) \geq 0.$$

Mais on sait que $\upsilon \in \mathcal{U}$, alors on peut prendre $\upsilon = u^{\theta}$, donc :

$$\mathcal{J}\left(u^{\theta}\right) - \mathcal{J}(u) \geq 0. \tag{3.4}$$

3.2.1 Estimation des solutions

Proposition 3.2.1 *Soit $\left(y^{\theta}, z^{\theta}\right)$ et (y, z) les solutions de l'équation d'état associe respectivement à u^{θ} et u et $C > 0$, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T}\left|y_t^{\theta} - y_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\int_0^T \left\|z_t^{\theta} - z_t\right\|^2 dt \leq C\theta^2. \tag{3.5}$$

Preuve. On pose $X = \left(y^{\theta} - y\right)$ alors $X^2 = \left(y^{\theta} - y\right)^2$. On applique la formule d'Itô sur $\left(y^{\theta} - y\right)^2$ on a :

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + \frac{1}{2} 2d\left\langle X\right\rangle_t.$$

Alors :

$$d\left(y_t^{\theta} - y_t\right)^2 = 2\left(y_t^{\theta} - y_t\right)\left[\left(f\left(t, y_t, z_t, u_t\right) - f\left(t, y_t^{\theta}, z_t^{\theta}, u_t^{\theta}\right)\right)dt - \left(z_t^{\theta} - z_t\right)dB_t\right] + \left(z_t^{\theta} - z_t\right)^2 dt.$$

En introduisant l'intégrale, on trouve :

$$\begin{aligned}\left(y_T^{\theta} - y_T\right)^2 - \left(y_t^{\theta} - y_t\right)^2 = {} & 2\int_t^T \left(y_s^{\theta} - y_s\right)\left(f\left(s, y_s, z_s, u_s\right) - f\left(s, y_s^{\theta}, z_s^{\theta}, u_s^{\theta}\right)\right)ds \\ & - 2\int_t^T \left(y_s^{\theta} - y_s\right)\left(z_t^{\theta} - z_t\right)dB_s + \int_t^T \left(z_t^{\theta} - z_t\right)^2 ds.\end{aligned}$$

Mais on sait que $\left(y_T^{\theta} - y_T\right)^2 = 0$, alors :

$$\begin{aligned}\left(y_t^{\theta} - y_t\right)^2 = {} & 2\int_t^T \left(y_s^{\theta} - y_s\right)\left(f\left(s, y_s^{\theta}, z_s^{\theta}, u_s^{\theta}\right) - f\left(s, y_s, z_s, u_s\right)\right)ds \\ & + 2\int_t^T \left(y_s^{\theta} - y_s\right)\left(z_t^{\theta} - z_t\right)dB_s - \int_t^T \left(z_t^{\theta} - z_t\right)^2 ds.\end{aligned}$$

Comme f est $\lambda-$Lipchitzienne, on a :

$$\begin{aligned}\left(y_t^\theta - y_t\right)^2 + \int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right)^2 ds \leq 2\int_t^T \left(\lambda \left|y_s^\theta - y_s\right|^2 + \lambda \left|y_s^\theta - y_s\right|\left|z_s^\theta - z_s\right| + \lambda \left|y_s^\theta - y_s\right|\left|u_s^\theta - u_s\right|\right) ds \\ + 2\int_t^T \left(y_s^\theta - y_s\right)\left(z_t^\theta - z_t\right) dB_s.\end{aligned}$$

On sait que $u^\theta = u + \theta \upsilon$, on applique l'inégalité de Young, il vient alors :

$$\begin{aligned}&\left(y_t^\theta - y_t\right)^2 + \int_0^T \left(z_s - z_s^\theta\right)^2 ds \\ &\leq 2\int_t^T \left(\lambda \left|y_s^\theta - y_s\right|^2 + \frac{1}{2}\left|y_s^\theta - y_s\right|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left|z_s^\theta - z_s\right|^2 + \frac{1}{2}\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right) ds \\ &- 2\int_t^T \frac{\lambda^2}{2}\left|\theta\upsilon\right|^2 ds + 2\int_t^T \left(y_s^\theta - y_s\right)\left(z_t^\theta - z_t\right) dB_s.\end{aligned}$$

En passant à l'esperance mathématique et on pose en considération que :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left(y_s^\theta - y_s\right)\left(z_t^\theta - z_t\right) dB_s\right] = 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right) ds\right] \\ &\leq (2\lambda + 2)\int_t^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + \lambda^2 \int_t^T \mathbb{E}\left[\left|z_s^\theta - z_s\right|^2\right] ds \\ &+ \lambda^2\theta^2\upsilon^2 \int_t^T ds \\ &\leq (2\lambda + 2)\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + \lambda^2 \int_0^T \mathbb{E}\left[\left|z_s^\theta - z_s\right|^2\right] ds \\ &+ \lambda^2\theta^2\upsilon^2 \int_0^T ds.\end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[\left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] + \left(1 - \lambda^2\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right)^2 ds\right] \leq (2\lambda + 2)\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + \lambda^2\theta^2\upsilon^2 T$$

En fin on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] + K'\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_s^\theta - z_s\right)^2 ds\right] \leq K \int_0^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + \theta^2 M_t,$$

telle que $K = (2\lambda + 2)$ et $K' = (1 - \lambda^2)$ et $M_t = \lambda^2 \upsilon^2 T$.

Maintenant on peut distinguer deux inégalités :

$$\mathbb{E}\left[\left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] \leq K \int_0^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + \theta^2 M_t, \tag{3.6}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right)^2 ds\right] \leq \frac{K}{K'} \int_0^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + \theta^2 M_t. \tag{3.7}$$

On applique l'inégalité de Gronwall sur l'inégalité (3.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] &\leq \theta^2 M_t \exp K \\ &\leq \theta^2 N, \end{aligned} \tag{3.8}$$

telle que $N = M_t \exp K$, en appliquant inégalité de D-B-G sur (3.8) on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_t \left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] \leq \theta^2 N. \tag{3.9}$$

D'autre part, on remplace (3.8) sur (3.7) , on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right)^2 ds\right] &\leq \frac{K}{K'} \int_0^T \theta^2 N ds + \theta^2 M_t. \\ &\leq \frac{K}{K'} \theta^2 N T + \theta^2 M_t \\ &\leq . \left(\frac{K}{K'} N T + M_t\right) \theta^2 \\ &\leq L\theta^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Alors d'après inégalité (3.9) et (3.10) , on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_t \left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] + K'\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right)^2 ds\right] &\leq (L+N)\,\theta^2 \\ &\leq C\theta^2,\end{aligned}$$

tel que $C = (L+N)$, d'où l'estimation (3.5). ■

Proposition 3.2.2 *Soit l'hypothèse* (**H3**) *est varie et on pose :*

$$Y = \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}\left(y^\theta - y\right). \tag{3.11}$$

Lemme 3.2.1 *Alors Y s'écrit sous la forme :*

$$Y = \int_t^T \left[\left(f_y\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Y_s + f_z\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Z_s + f_u\left(s, y_s, z_s, u_s\right) u_s\right) ds - Z_s dB_s\right]. \tag{3.12}$$

Preuve. Développement de Taylor avec reste intégrale au point (y, z, u) et d'ordre 1 de la fonction $f\left(s, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta\right)$, nous donne

$$\begin{aligned}&f\left(s, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta\right) - f\left(s, y_s, z_s, u_s\right) \\ &= \int_0^1 f_y\left(s, y_s + \lambda\left(y_s^\theta - y_s\right), z_s + \lambda\left(z_s^\theta - z_s\right), u_s + \lambda\left(u_s^\theta - u_s\right)\right)\left(y_s^\theta - y_s\right) d\lambda \\ &+ \int_0^1 f_z\left(s, y_s + \lambda\left(y_s^\theta - y_s\right), z_s + \lambda\left(z_s^\theta - z_s\right), u_s + \lambda\left(u_s^\theta - u_s\right)\right)\left(z_s^\theta - z_s\right) d\lambda \\ &+ \int_0^1 f_u\left(s, y_s + \lambda\left(y_s^\theta - y_s\right), z_s + \lambda\left(z_s^\theta - z_s\right), u_s + \lambda\left(u_s^\theta - u_s\right)\right)\left(u_s^\theta - u_s\right) d\lambda.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$
\begin{aligned}
\left(y_t^\theta - y_t\right) &= \int_t^T \left[f\left(s, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta\right) - f\left(s, y_s, z_s, u_s\right)\right] ds - \int_t^T \left(z_s - z_s^\theta\right) dB_s \\
&= \int_t^T \int_0^1 f_y\left(s, y_s + \lambda\left(y_s^\theta - y_s\right), z_s + \lambda\left(z_s^\theta - z_s\right), u_s + \lambda\theta\upsilon\right)\left(y_s^\theta - y_s\right) d\lambda ds \\
&+ \int_t^T \int_0^1 f_z\left(s, y_s + \lambda\left(y_s^\theta - y_s\right), z_s + \lambda\left(z_s^\theta - z_s\right), u_s + \lambda\theta\upsilon\right)\left(z_s^\theta - z_s\right) d\lambda ds \\
&+ \int_t^T \int_0^1 f_u\left(s, y_s + \lambda\left(y_s^\theta - y_s\right), z_s + \lambda\left(z_s^\theta - z_s\right), u_s + \lambda\theta\upsilon\right)(\theta\upsilon)\, d\lambda ds \\
&- \int_t^T \left(z_s^\theta - z_s\right) dB_s.
\end{aligned}
$$

Puisque $u^\theta = u + \theta\upsilon$, et comme $Y = \lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1}{\theta}\left(y^\theta - y\right)$, alors on obtient :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\left(y_t^\theta - y_t\right) &= \frac{1}{\theta}\int_t^T \left[f\left(s, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta\right) - f\left(s, y_s, z_s, u_s\right)\right] ds - \frac{1}{\theta}\int_t^T \left(z_s - z_s^\theta\right) dB_s \\
&= \int_t^T \int_0^1 f_y\left(s, y_s + \lambda\left(y_s^\theta - y_s\right), z_s + \lambda\left(z_s^\theta - z_s\right), u_s + \lambda\theta\upsilon\right)\frac{\left(y_s^\theta - y_s\right)}{\theta} d\lambda ds \\
&+ \int_t^T \int_0^1 f_z\left(s, y_s + \lambda\left(y_s^\theta - y_s\right), z_s + \lambda\left(z_s^\theta - z_s\right), u_s + \lambda\theta\upsilon\right)\frac{\left(z_s^\theta - z_s\right)}{\theta} d\lambda ds \\
&+ \int_t^T \int_0^1 f_u\left(s, y_s + \lambda\left(y_s^\theta - y_s\right), z_s + \lambda\left(z_s^\theta - z_s\right), u_s + \lambda\theta\upsilon\right)(\upsilon)\, d\lambda ds \\
&- \int_t^T \frac{\left(z_s^\theta - z_s\right)}{\theta} dB_s.
\end{aligned}
$$

On passe à limite quand $\theta \to 0$, et comme f_y, f_z, f_u sont des fonctions bornés, et continues, alors on applique le théorème de la convergence borné de Lebesgue (1.1.6) et comme f_y, f_z, f_u sont des fonctions continues, alors nous pouvons entré la limite à l'intérieure des fonctions

f_y, f_z, f_u, ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
Y = & \int_t^T \int_0^1 f_y \left(\lim_{\theta \to 0} \left[s, y_s + \lambda \left(y_s - y_s^\theta \right), z_s + \lambda \left(z_s - z_s^\theta \right), u_s + \lambda \left(\theta \upsilon \right) \right] \right) \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{y_s - y_s^\theta}{\theta} \right) d\lambda ds \\
& + \int_t^T \int_0^1 f_z \left(\lim_{\theta \to 0} \left[s, y_s + \lambda \left(y_s - y_s^\theta \right), z_s + \lambda \left(z_s - z_s^\theta \right), u_s + \lambda \left(\theta \upsilon \right) \right] \right) \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{z_s - z_s^\theta}{\theta} \right) d\lambda ds \\
& + \int_t^T \int_0^1 f_u \left(\lim_{\theta \to 0} \left[s, y_s + \lambda \left(y_s - y_s^\theta \right), z_s + \lambda \left(z_s - z_s^\theta \right), u_s + \lambda \left(\theta \upsilon \right) \right] \right) \upsilon d\lambda ds \\
& - \int_t^T \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{z_s - z_s^\theta}{\theta} \right) dB_s.
\end{aligned}
$$

Alors :

$$
Y_t = \int_t^T f_y \left(s, y_s, z_s, u_s \right) Y_t ds + \int_t^T f_z \left(s, y_s, z_s, u_s \right) Z_s ds + \int_t^T f_\upsilon \left(s, y_s, z_s, u_s \right) \upsilon ds - \int_t^T Z_s dB_s.
$$

CQCD. ■

Proposition 3.2.3 *On pose*

$$
\tilde{k}_t^\theta = \frac{1}{\theta} \left(y_t^\theta - y_t \right) - Y_t. \tag{3.13}
$$

$$
\hat{z}_t^\theta = \frac{1}{\theta} \left(z_t^\theta - z_t \right) - Z_t. \tag{3.14}
$$

Alors sous l'hypothèse $(H3)$, *on a :*

$$
\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,T]} \left| \tilde{k}_t^\theta \right|^2 \right] \underset{\theta \to 0}{\to} 0 .
$$

$$
\mathbb{E} \left[\int_0^T \left| \hat{z}_t^\theta \right|^2 ds \right] \underset{\theta \to 0}{\to} 0 .
$$

Preuve. On remplace $\left(y^\theta, z^\theta \right)$, (y, z) ,et (Y, Z) par ses valeurs, on obtient

$$
\left\{
\begin{aligned}
\tilde{k}_t^\theta = & \textstyle\int_t^T \left(f \left(s, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta \right) - f \left(s, y_s, z_s, u_s \right) \right) ds - \int_t^T \left(z_s^\theta - z_s \right) dB_s \\
& - \textstyle\int_t^T f_y \left(s, y_s, z_s, u_s \right) ds Y + \int_t^T f_z \left(s, y_s, z_s, u_s \right) Z ds + \int_t^T f_\upsilon \left(s, y_s, z_s, u_s \right) \upsilon ds \\
\tilde{k}_T^\theta = & \; 0
\end{aligned}
\right.
$$

On applique la formule d'Itô sur $\left(\tilde{k}_t^{\theta}\right)^2$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
d\left|\tilde{k}_t^{\theta}\right|^2 &= 2\tilde{k}_t^{\theta} d\tilde{k}_t^{\theta} + \frac{1}{2} 2d\left\langle \tilde{k}_t^{\theta}\right\rangle \\
&= 2\tilde{k}_t^{\theta}\left[\frac{1}{\theta}\left(dy^{\theta} - dy\right) - dY_t\right] - \left(\frac{\left(z^{\theta} - z\right)}{\theta} - Z_t\right)^2 dt \\
&= 2\tilde{k}_t^{\theta}\left(\left[\frac{1}{\theta}\left(f\left(t, y_t^{\theta}, z_t^{\theta}, u_t^{\theta}\right) - f\left(t, y_t, z_t, u_t\right)\right)\right] dt - \frac{1}{\theta}\left(z_t^{\theta} - z_t\right) dB_t\right. \\
&\quad - \left(f_y\left(t, y_t, z_t, u_t\right) dtY + f_z\left(t, y_t, z_t, u_t\right) Zdt + f_v\left(t, y_t, z_t, u_t\right) \upsilon dt\right)\Big) + Z_t dB_t - \hat{z}_t^{\theta 2} dt.
\end{aligned}
$$

Applique développement de Taylor avec reste intégrale au point (y, z, u) et d'ordre 1 de fonction $f\left(s, y_s^{\theta}, z_s^{\theta}, u_s^{\theta}\right)$, et on note par :

$$
A^{\theta,\lambda} = \left(s, y_s + \lambda\left(y_s^{\theta} - y_s\right), z_s + \lambda\left(z_s^{\theta} - z_s\right), u_s + \lambda\left(u_s^{\theta} - u_s\right)\right).
$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{k}_t^{\theta}\right|^2 &= \int_t^T 2\tilde{k}_s^{\theta}\left[\int_0^1\left[-f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)\left(\tilde{k}_s^{\theta} + Y_s\right) - f_z\left(A^{\theta,\lambda}\right)\left(\hat{z}_s^{\theta} + Zs\right) - f_v\left(A^{\theta,\lambda}\right)\upsilon\right] d\lambda\right] ds \\
&\quad + 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta}\left(\hat{z}_s^{\theta} + Z_s\right) dB_s + 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta} f_y\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Yds + 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta} f_z\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Zds \\
&\quad + 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta} f_v\left(s, y_s, z_s, u_s\right) \upsilon ds - 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta} Z_s dB_s + \int_t^T \hat{z}_s^{\theta 2} ds \\
&= \int_t^T 2\tilde{k}_s^{\theta}\int_0^1 -f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)\tilde{k}_s^{\theta} d\lambda ds + \int_t^T 2\tilde{k}_s^{\theta}\int_0^1 f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right) Y_s d\lambda ds \\
&\quad - 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta}\int_0^1 f_z\left(A^{\theta,\lambda}\right)\hat{z}_s^{\theta} d\lambda ds - 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta}\int_0^1 f_z\left(A^{\theta,\lambda}\right) Z_s d\lambda ds \\
&\quad - 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta}\int_0^1 f_v\left(A^{\theta,\lambda}\right)\upsilon d\lambda ds + 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta}\hat{z}_s^{\theta} dB_s - 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta} Z_s dB_s \\
&\quad + 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta} f_y\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Yds + 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta} f_z\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Zds \\
&\quad + 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta} f_v\left(s, y_s, z_s, u_s\right) \upsilon ds - 2\int_t^T \tilde{k}_s^{\theta} Z_s dB_s + \int_t^T \hat{z}_s^{\theta 2} ds.
\end{aligned}
$$

On applique l'inégalité de Young $ab \leq a^2 + b^2$

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{k}_t^\theta\right|^2 \leq & \int_t^T \int_0^1 f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2 \left(\tilde{k}_s^\theta\right)^2 d\lambda ds + \int_t^T \left(Y_s\right)^2 f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2 d\lambda ds \\
& + \int_t^T \int_0^1 f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2 \left(\hat{z}_s^\theta\right)^2 d\lambda ds + \int_t^T \left(\tilde{k}_s^\theta\right)^2 ds + \int_t^T \int_0^1 f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2 \left(\hat{z}_s^\theta\right)^2 d\lambda ds \\
& + \int_t^T \left(\tilde{k}_s^\theta\right)^2 ds + \int_t^T \int_0^1 \left[f_\upsilon\left(A^{\theta,\lambda}\right)\upsilon\right]^2 d\lambda ds - \int_t^T \left(\tilde{k}_s^\theta\right)^2 dB_s \\
& + \int_t^T \left(\hat{z}_s^\theta\right)^2 dB_s + \int_t^T \left(f_y\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Y\right)^2 ds + \int_t^T \left(f_z\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Z\right)^2 ds \\
& + \int_t^T \left(f_\upsilon\left(s, y_s, z_s, u_s\right) \upsilon\right)^2 ds + \int_t^T \hat{z}_s^{\theta 2} ds.
\end{aligned}$$

On passe à l'espérance et on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\tilde{k}_t^\theta\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \hat{z}_s^{\theta 2} ds\right] \leq & -\mathbb{E}\left[\int_t^T \int_0^1 f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2 \left(\tilde{k}_s^\theta\right)^2 d\lambda ds\right] - \mathbb{E}\left[\int_t^T \left(Y_s\right)^2 f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2 d\lambda ds\right] \\
& - \mathbb{E}\left[\int_t^T \int_0^1 f_z\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2 \left(Z_s\right)^2 d\lambda ds\right] - \mathbb{E}\left[\int_t^T \int_0^1 f_z\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2 \left(\hat{z}_s^\theta\right)^2 d\lambda ds\right] \\
& - \mathbb{E}\left[\int_t^T \int_0^1 \left[f_\upsilon\left(A^{\theta,\lambda}\right)\upsilon\right]^2 d\lambda ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left(f_y\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Y\right)^2 ds\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left(f_z\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Z\right)^2 ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left(f_\upsilon\left(s, y_s, z_s, u_s\right) \upsilon\right)^2 ds\right] \\
& - 3\mathbb{E}\left[\int_t^T \left(\tilde{k}_s^\theta\right)^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\theta = & -\mathbb{E}\left[\int_t^T \left(Y_s\right)^2 f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2 d\lambda ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left(f_y\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Y\right)^2 ds\right] \\
& - \mathbb{E}\left[\int_t^T \int_0^1 f_z\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2 \left(Z_s\right)^2 d\lambda ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left(f_z\left(s, y_s, z_s, u_s\right) Z\right)^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Telle que $\lim\limits_{\theta \to 0} \mathcal{P}^\theta = 0$, et comme f_y, f_z, et f_υ sont des fonctions bornées, alors d'après la convergence bornée 1.1.6 de Lebesgue, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|\tilde{k}_t^\theta\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \hat{z}_s^{\theta 2} ds\right] \leq M\mathbb{E}\left[\int_t^T f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2\left(\tilde{k}_s^\theta\right)^2 ds\right]+M\mathbb{E}\left[\int_t^T\int_0^1 f_y\left(A^{\theta,\lambda}\right)^2\left(\hat{z}_s^\theta\right)^2 d\lambda ds\right] - 3\mathbb{E}\left[\int_t^T\left(\tilde{k}_s^\theta\right)^2 ds\right]+\mathcal{P}^\theta.$$

Et comme f_y, f_z, et f_v sont bornées alors d'après la convergence bornée de Lebesgue on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|\tilde{k}_t^\theta\right|^2\right]+N\mathbb{E}\left[\int_t^T \hat{z}_s^{\theta 2} ds\right] \leq N'\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\tilde{k}_s^\theta\right|^2 ds\right]+\mathcal{P}^\theta. \tag{3.15}$$

Alors on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left[\left|\tilde{k}_t^\theta\right|^2\right] \leq N'\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\tilde{k}_s^\theta\right|^2 ds\right]+\mathcal{P}^\theta, \tag{3.16}$$

$$N\mathbb{E}\left[\int_t^T \hat{z}_s^{\theta 2} ds\right] \leq N'\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\tilde{k}_s^\theta\right|^2 ds\right]+\mathcal{P}^\theta. \tag{3.17}$$

On applique inégalité de Gronwall sur (3.16) , on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\left|\tilde{k}_t^\theta\right|^2\right] \leq \mathcal{P}^\theta \exp\left(N't\right)=C. \tag{3.18}$$

En remplaçant inégalité (3.18) sur (3.17) , on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \hat{z}_s^{\theta 2} ds\right] \leq \frac{N'}{N}C(T-t)+\mathcal{P}^\theta.$$

En passant à la limite quand $\theta \to 0$ sur (3.15), et en vertu d'inégalité de BDG, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\tilde{k}_t^\theta\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \hat{z}_s^{\theta 2} ds\right] \to 0.$$

Il est la résultat. ■

Proposition 3.2.4 *Soit 'l'hypothèse* (**H3**) *est vraie alors :*

$$\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[g\left(y_0^\theta\right)-g\left(y_0\right)\right]\underset{\theta\to 0}{\to}\mathbb{E}\left[g_y\left(y_0\right)Y_0\right], \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[h^\theta\left(t\right)-h\left(t\right)\right]\underset{\theta\to 0}{\to}\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{E}\left[h_y\left(t\right)Y-h_z\left(t\right)Z+h_v\left(t\right)v\right]dt. \tag{3.20}$$

Preuve. On applique le développement de Taylor avec un reste intégrale au point y_0 pour la fonction $g\left(y_0^\theta\right)$, et on applique la formule (3.13) on obtient :

$$\begin{aligned}
g\left(y_0^\theta\right)-g\left(y_0\right) &= \int_0^1 g_y\left(y_0+\lambda\left(y_0^\theta-y_0\right)\right)\left(y_0^\theta-y_0\right)d\lambda \\
&= \int_0^1 g_y\left(y_0+\lambda\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)\right)\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)d\lambda \\
&= \int_0^1 g_y\left(y_0+\lambda\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)\right)\theta\tilde{k}_t^\theta d\lambda+\int_0^1 g_y\left(y_0+\lambda\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)\right)\theta Y_0 d\lambda.
\end{aligned}$$

On passe à l'espérance mathématique on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[g\left(y_0^\theta\right)-g\left(y_0\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_y\left(y_0+\lambda\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)\right)\tilde{k}_t^\theta d\lambda\right] \\
&\quad+\mathbb{E}\left[\int_0^1 g_y\left(y_0+\lambda\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)\right)Y_0 d\lambda\right].
\end{aligned}$$

Puisque g_y borné et continue, et on applique le théorème de convergence bornée de Lebesgue et théorème de Fubini, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^1\lim_{\theta\to 0}\left[g_y\left(y_0+\lambda\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)\right)\tilde{k}_t^\theta d\lambda\right]\right] &= \int_0^1\mathbb{E}\left[\lim_{\theta\to 0}\left[g_y\left(y_0+\lambda\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)\right)\tilde{k}_0^\theta\right]\right]d\lambda \\
&= \int_0^1\mathbb{E}\left[g_y\left(\lim_{\theta\to 0}\left(y_0+\lambda\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)\right)\right)\lim_{\theta\to 0}\tilde{k}_0^\theta\right]d\lambda.
\end{aligned}$$

on a $\mathbb{E}\left(\tilde{k}_t^\theta\right)\underset{\theta\to 0}{\to}0$ en vertu de (3.11), alors :

$$\lim_{\theta\to 0}\tilde{k}_t^\theta=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{\theta}\left(y_t^\theta-y_t\right)-Y_t\right)=0,\forall t\in[0,T].$$

De plus :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \lim_{\theta\to 0} g_y\left(y_0+\lambda\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)\right)Y_0 d\lambda\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_y\left(y_0+\lim_{\theta\to 0}\lambda\theta\left(\tilde{k}_0^\theta+Y_0\right)\right)Y_0 d\lambda\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_y\left(y_0\right)Y_0 d\lambda\right].$$

Donc :

$$\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[g\left(y_0^\theta\right)-g\left(y_0\right)\right] \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[g_y\left(y_0\right)Y_0\right].$$

De la même manière telle que : $A_t^\theta = \left(t, y+\lambda\left(y-y^\theta\right), z+\lambda\left(z-z^\theta\right), u+\lambda\left(u-u^\theta\right)\right)$, et on applique les formules (3.13) et (3.14) on obtient :

$$h\left(t, y_t^\theta, z_t^\theta, u_t^\theta\right) - h\left(t, y_t, z_t, u_t\right) = \int_0^1 h_y\left(A_t^\theta\right)\theta\tilde{k}_t^\theta d\lambda + \int_0^1 h_y\left(A_t^\theta\right)\theta Y_t d\lambda$$
$$+\int_0^1 h_z\left(A_t^\theta\right)\left(z^\theta - z\right)d\lambda + \int_0^1 h_u\left(A_t^\theta\right)\theta\upsilon d\lambda.$$

Alors :

$$\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[h\left(t, y_t^\theta, z_t^\theta, u_t^\theta\right) - h\left(t, y_t, z_t, u_t\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^1 h_y\left(A_t^\theta\right)\tilde{k}_t^\theta d\lambda\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^1 h_y\left(A_t^\theta\right)Y_t d\lambda\right]$$
$$+\mathbb{E}\left[\int_0^1 h_z\left(A_t^\theta\right)\frac{z^\theta - z}{\theta}d\lambda\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^1 h_u\left(A_t^\theta\right)\upsilon d\lambda\right].$$

On passe à la limite $\theta \longrightarrow 0$, et applique le théorème de Fubini on obtient :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[h\left(t, y_t^\theta, z_t^\theta, u_t^\theta\right) - h\left(t, y_t, z_t, u_t\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \lim_{\theta\to 0} h_y\left(A_t^\theta\right)\tilde{k}_t^\theta d\lambda\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^1 \lim_{\theta\to 0} h_y\left(A_t^\theta\right)Y_t d\lambda\right]$$
$$+\mathbb{E}\left[\int_0^1 \lim_{\theta\to 0} h_z\left(A_t^\theta\right)\frac{z^\theta - z}{\theta}d\lambda\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^1 \lim_{\theta\to 0} h_u\left(A_t^\theta\right)\upsilon d\lambda\right].$$

Comme h_y, h_zet h_υ sont continue et bornées alors on applique la convergence bornée de

Lebesgue on obtient :

$$\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[h^{\theta}(t)-h(t)\right]\underset{\theta\to 0}{\to}\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{E}\left[h_y(t)\,Y-h_z(t)\,Z+h_v(t)\,v\right]dt.$$

■

3.3 Condition nécessaire d'optimalité

D'après (3.19), et (3.20) , on peut écrire (3.4) sous la forme :

$$\mathbb{E}\left[g_y(y_0)\,Y_0\right]+\mathbb{E}\left(\int_0^T h_y(s)\,Yds\right)+\mathbb{E}\left(\int_0^T h_z(s)\,vds\right)+\left(\mathbb{E}\int_0^T h_z(s)\,Zds\right)\geq 0. \quad (3.21)$$

Théorème 3.3.1 *Soit (u,y,z) la solution optimale pour la problème $\{(2.4),(3.2),(3.3)\}$, alors il existe un unique processus adapté $P\in\mathbb{S}^2\left([0,T],\mathbb{R}^{n+1}\right)$ solution de l'équation différentielle progressive suivante :*

$$\begin{cases} dP_t=H_y(t)\,dt-H_z(t)\,dB_t \\ P_0=g_y(y_0)\,. \end{cases} \quad (3.22)$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t,y_t,z_t,u_t,P)\,(v_t-u_t)\right]\geq 0, \quad (3.23)$$

où le Hamiltonien H est définie de $[0,T]\times\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{M}_{(n+1)\times d}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{n+1}\times\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$H(t,y_t,z_t,u_t,P_t)=h(t,y_t,z_t,u_t)-f(t,y_t,z_t,u_t)\,P_t.$$

Preuve. Tout d'abord, on remarque d'après la formule (3.21) et (3.22) , que :

$$\mathbb{E}\left[g_y(y_0)\,Y_0\right]=\mathbb{E}\left[P_0Y_0\right].$$

On applique la formule d'Itô sur $d\left(P_tY_t\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
d\left(P_tY_t\right) &= dP_tY_t + P_tdY_t + d\left\langle PY\right\rangle_t \\
&= H_y\left(t\right)Y_tdt - H_z\left(t\right)Y_tdB_t + P_tf_y\left(t\right)Ydt + P_tf_z\left(t\right)Zdt + P_tf_v\left(t\right)vdt \\
&- P_tZ_tdB_t + H_z\left(t\right)Zdt \\
&= h_y\left(t\right)Y_tdt - P_tf_y\left(t\right)Y_tdt - h_z\left(t\right)Y_tdB_t + P_tf_z\left(t\right)dB_t + P_tf_y\left(t\right)Ydt + P_tf_z\left(t\right)Zdt \\
&+ P_tf_v\left(t\right)vdt - P_tZ_tdB_t + h_z\left(t\right)Zdt - P_tf_z\left(t\right)Zdt \\
&= h_y\left(t\right)Y_tdt + h_z\left(t\right)Y_tdB_t - P_tf_z\left(t\right)dB_t + P_tf_v\left(t\right)vdt \\
&- P_tZ_tdB_t + h_z\left(t\right)Zdt.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_0^T d\left(P_tY_t\right) = \int_0^T h_y\left(t\right)Y_tdt + \int_0^T h_z\left(t\right)Y_tdB_t + \int_0^T P_sf_z\left(s\right)dB_s + \int_0^T P_sf_v\left(s\right)vds \\
- \int_0^T P_sZ_sdB_s + \int_0^T h_z\left(s\right)Zds.
\end{aligned}$$

Mais on sait que $\int_0^T d\left(P_sY_s\right) = \left(P_TY_T\right) - P_0Y_0$, et on prend l'espérance il vient :

$$\mathbb{E}\left[P_0Y_0\right] = -\mathbb{E}\left(\int_0^T h_y\left(s\right)Y_sds\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^T P_sf_v\left(s\right)vds\right) - \left(\mathbb{E}\int_0^T h_z\left(s\right)Zds\right)$$

Alors, d'après (3.21), on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[P_0Y_0\right] + \mathbb{E}\left(\int_0^T h_y\left(s\right)Y_sds\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T P_sf_v\left(s\right)vds\right) + \left(\mathbb{E}\int_0^T h_z\left(s\right)Zds\right) \\
&= -\mathbb{E}\left(\int_0^T h_y\left(s\right)Y_sds\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^T P_sf_v\left(s\right)vds\right) - \left(\mathbb{E}\int_0^T h_z\left(s\right)Zds\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\int_0^T h_y\left(s\right)Y_sds\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T h_v\left(s\right)vds\right) + \left(\mathbb{E}\int_0^T h_z\left(s\right)Zds\right) \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \left(h_v\left(s\right) - P_sf_v\left(s\right)ds\right)vds \\
&= \mathbb{E}\int_0^T H_v\left(s\right)vds \geq 0.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{U}$ est convexe on peut choisir la perturbation :

$$u_t^\theta = u_t + \theta\left(\upsilon_t - u_t\right) \in \mathcal{U},$$

u est optimale nous avons

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t, y_t, z_t, u_t, P\right)\left(\upsilon_t - u_t\right)\right] \geq 0.$$

CQFD. ■

Remarque 3.3.1 *Comme H_y et H_z sont des coefficients Lipchitzienne, alors d'après théorème 1.4.1 l'équation adjoint (3.22) est une EDS admet un unique solution $P \in \mathbb{S}^2\left([0,T], \mathbb{R}^{n+1}\right)$, (voir preuve du théorème 1.4.1).*

3.4 Conditions suffisante d'optimalité

Dans cette section, on va étudier lorsque la condition nécessaire(3.23) devient suffisante.

Théorème 3.4.1 *Soient g, et H deux concaves, et si $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t, y_t, z_t, u_t, p\right)\left(\upsilon_t - u_t\right)\right] \geq 0$. Alors u est un contrôle optimal pour le problème $\{(2.4), (3.2), (3.3)\}$.*

Preuve. On a $(u, \upsilon) \in \mathcal{U}$ on considère la différence

$$\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(\upsilon) = \mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t, y, z, u\right) - h\left(t, y, z, \upsilon\right)\right] dt + \mathbb{E}\left[g\left(y_0^u\right) - g\left(y_0^\upsilon\right)\right]. \tag{3.24}$$

Puisque g est concave, et d'après l'équation adjoint (3.22) alors :

$$g\left(y_0^u\right) - g\left(y_0^\upsilon\right) \geq g_y\left(y_0^u\right)\left(y_0^u - y_0^\upsilon\right) = P_0\left(y_0^u - y_0^\upsilon\right).$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[g\left(y_0^u\right) - g\left(y_0^\upsilon\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[P_0\left(y_0^u - y_0^\upsilon\right)\right].$$

On applique la formule d'Itô sur $P_t\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right)$, alors :

$$\begin{aligned}
d\left(P_t\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right)\right) &= dP_t\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right) + P_t d\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right) + d\left\langle P_t\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right)\right\rangle \\
&= \left[H_y(t)\,dt - H_z(t)\,dB_t\right]\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right) + P_t\left[\left(f(u) - f(\upsilon)\right)dt - \left(z^u - z^\upsilon\right)dB_t\right] \\
&+ H_z(t)\left(z^u - z^\upsilon\right)dt \\
&= H_y(t)\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right)dt - H_z(t)\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right)dB_t + P_t f(u)\,dt - P_t f(\upsilon)\,dt \\
&- P_t\left(z^u - z^\upsilon\right)dB_t + H_z(t)\left(z^u - z^\upsilon\right)dt + h(u) - h(u) + h(\upsilon) - h(\upsilon)
\end{aligned}$$

Nous intégrons de 0 à T, puis nous prenons l'espérance :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[P_T\left(y_T^u - y_T^\upsilon\right)\right] - \mathbb{E}\left[P_0\left(y_0^u - y_0^\upsilon\right)\right] \\
&= +\mathbb{E}\left[\int_0^T H_y(t)\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right)dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T H_z(t)\left(z^u - z^\upsilon\right)dt\right] \\
&- \mathbb{E}\int_0^T\left[\left(h(u) + P_t f(u)\right) - \left(h(\upsilon) + P_t f(\upsilon)\right)\right]dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T\left(h(u) - h(\upsilon)\right)dt.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[P_0\left(y_0^u - y_0^\upsilon\right)\right] = &-\mathbb{E}\left[\int_0^T H_y(t)\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right)dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T H_z(t)\left(z^u - z^\upsilon\right)dt\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T\left(H(u_t) - H(\upsilon_t)\right)dt\right] - \mathbb{E}\int_0^T\left(h(u_t) - h(\upsilon_t)\right)dt.
\end{aligned}$$

De (3.24) on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(\upsilon) \geq &-\mathbb{E}\left[\int_0^T H_y(t)\left(y_t^u - y_t^\upsilon\right)dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T H_z(t)\left(z_t^u - z_t^\upsilon\right)dt\right] \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T\left[H(u_t) - H(\upsilon_t)\right]dt.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

D'autre part, comme H est concave, alors il vient que :

$$\mathbb{E}\int_0^T (H(u)-H(\upsilon))\,dt \geq \mathbb{E}\left[\int_0^T H_y(t)\left(y_t^u-y_t^\upsilon\right)dt\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T H_z(t)\left(z_t^u-z_t^\upsilon\right)dt\right] \quad (3.26)$$
$$+\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t)\left(u_t-\upsilon_t\right)dt\right].$$

Mais on sait que d'après (3.23) que $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t)\left(u_t-\upsilon_t\right)dt\right]\geq 0$ et on remplace (3.26) dans (3.25) , on obtient :

$$\mathcal{J}(u)-\mathcal{J}(\upsilon)\geq 0.$$

Donc u est contrôle optimal. ■

Nous nous sommes appuyés cet exemple sur [3].

3.5 Exemple d'application

On définit l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$\begin{aligned} dY_t &= (Y_t+Z_t+u_t)\,dt - Z_t\,dB_t \\ Y_T &= \xi, \end{aligned} \quad (3.27)$$

Telle que u le contrôle admissible, et soient la fonction de coût et le Hamiltonien donnés par :

$$\mathcal{J}(u)=\mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{2}\left(Y_t^2+Z_t^2+u_t^2\right)dt+Y_0\right]. \quad (3.28)$$

$$H(t,y_t,z_t,u_t,P_t)=\frac{1}{2}\left(Y_t^2+Z_t^2+u_t^2\right)-P_t\left(Y_t+Z_t+u_t\right).$$

On a le processus adjoint suivant :

$$\begin{cases} dP_t=(Y_t-P_t)\,dt-(Z_t-P_t)\,dB_t \\ P_0=1. \end{cases} \quad (3.29)$$

La minimisation de la fonctionnelle Hamiltonien donne

$$H_u = u_t - P_t = 0.$$

Alors le contrôle optimal est donné par :

$$\hat{u}_t = P_t.$$

Alors on remplace $\hat{u}_t = P_t$ dans les équations (3.27) et (3.29) et on obtient :

$$\begin{cases} d\widehat{Y}_t = \left(\widehat{Y}_t + \widehat{Z}_t - \widehat{P}_t\right) dt - \widehat{Z}_t\ dB_t \\ d\widehat{P}_t = \left(\widehat{Y}_t - \widehat{P}_t\right) dt - \left(\widehat{Z}_t - \widehat{P}_t\right) dB_t, \\ \widehat{P}_0 = 1, \widehat{Y}_T = \xi. \end{cases} \tag{3.30}$$

La solution de (3.30) est donné par

$$\widehat{P}_t = \alpha_t \widehat{Y}_t + \beta_t. \tag{3.31}$$

avec α_t et β_t sont des fonctions déterministes, que l'on veut à déterminer, pour cela on applique la formule d'Itô sur (3.31) on obtient :

$$\begin{aligned} d\hat{P}_t &= \acute{\alpha}_t \hat{Y}_t dt + \alpha_t d\hat{Y}_t + \acute{\beta}_t dt \\ &= \acute{\alpha}_t \hat{Y}_t dt + \alpha_t \left[\left(\hat{Y}_t + \hat{Z}_t + \widehat{P}_t\right) dt - \hat{Z}_t\ dB_t\right] + \acute{\beta}_t dt \\ &= \acute{\alpha}_t \hat{Y}_t dt + \alpha_t \left[\left(\hat{Y}_t + \hat{Z}_t + \left(\alpha \hat{Y}_t + \beta_t\right)\right) dt - \hat{Z}_t dB_t\right] + \acute{\beta}_t dt \\ &= \left(\acute{\alpha}_t \hat{Y}_t + \alpha_t^2 \hat{Y}_t + \alpha_t \hat{Y}_t + \alpha_t \beta_t + \alpha_t \hat{Z}_t + \acute{\beta}_t\right) dt - \alpha_t \hat{Z}_t dB_t \\ &= \left(\left(\acute{\alpha}_t + \alpha_t^2 + \alpha_t\right) \hat{Y}_t + \alpha_t \beta_t + \alpha_t \hat{Z}_t + \acute{\beta}_t\right) dt - \alpha_t \hat{Z}_t dB_t. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{cases} d\hat{P}_t &= \left(\left(\acute{\alpha}_t + \alpha_t^2 + \alpha_t \right) \hat{Y}_t + \alpha_t \beta_t + \alpha_t \hat{Z}_t + \acute{\beta}_t \right) dt - \alpha_t \hat{Z}_t dB_t, \\ \hat{P}_0 &= \alpha_0 \hat{Y}_0 + \beta_0. \end{cases} \tag{3.32}$$

D'un part, on remplace (3.31) dans (3.29) , on trouve :

$$\begin{cases} d\hat{P}_t &= \left(\left(1 - \alpha_t\right) \hat{Y}_t - \beta_t \right) dt - \left(\hat{Z}_t - \alpha_t \hat{Y}_t - \beta_t \right) dB_t, \\ \hat{P}_0 &= 1. \end{cases} \tag{3.33}$$

Par identification entre (3.32) et (3.33) , on obtient :

$$\begin{cases} \acute{\alpha}_t + \alpha_t^2 + \alpha_t = \left(1 - \alpha_t\right), \\ \alpha_t \beta_t + \alpha_t \hat{Z}_t + \acute{\beta}_t = -\beta. \end{cases}$$

Ce implique que :

$$\acute{\alpha}_t = -\alpha_t^2 - 2\alpha_t + 1. \tag{3.34}$$

$$\acute{\beta}_t + \left(\alpha_t + 1\right) \beta_t = -\alpha_t \hat{Z}_t. \tag{3.35}$$

L'équation (3.34) est un équation de Riccati et l'équation (3.35) est une équation différentielle ordinaire.

3.5.1 Solution de l'équation de Riccati

On note $\mathcal{P}\left(\alpha\right) = -\alpha_t^2 - 2\alpha_t + 1$ est un polynôme de deuxième degré, alors on calcul la discriminant $\triangle = \left(-2\right)^2 - 4\left(1\right)\left(-1\right) = 8 > 0$, donc $\mathcal{P}\left(\alpha\right)$ admet deux solutions sont disjoints :

$$\alpha_1 = \frac{+2 - \sqrt{8}}{-2} = -1 + \sqrt{2},$$
$$\alpha_2 = \frac{+2 + \sqrt{8}}{-2} = -1 - \sqrt{2}.$$

On a maintenant :

$$\frac{d\alpha_t}{dt} = -\alpha_t^2 - 2\alpha_t + 1.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\alpha_t} &= \frac{1}{-\alpha_t^2 - 2\alpha_t + 1} \\ &= \frac{a}{\left(\alpha - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right)} + \frac{b}{\left(\alpha - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right)}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Telle que a et b deux réels vérifiant (3.36), on obtient facilement a et b sont donnés par :

$$b = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ et } a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Alors :

$$\int_0^t dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^t \left(-\frac{1}{\left(\alpha_t - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right)} + \frac{1}{\left(\alpha_t - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right)} \right) d\alpha_t.$$

Alors :

$$t = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} -\ln\left(\alpha_t - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right) + \ln\left(\alpha_0 - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right) \\ . + \ln\left(\alpha_t - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right) - \ln\left(\alpha_0 - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right) \end{array} \right\}.$$

On simplifie l'égalité, et on obtient :

$$2\sqrt{2}t + \ln\left[\frac{\left(\alpha_0 - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right)}{\left(\alpha_0 - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right)}\right] = \ln\left[\frac{\left(\alpha_t - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right)}{\left(\alpha_t - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right)}\right].$$

D'où :

$$\frac{\left(\alpha_t - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right)}{\left(\alpha_t - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right)} = \exp\left\{2\sqrt{2}t + \ln\left[\frac{\left(\alpha_0 - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right)}{\left(\alpha_0 - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right)}\right]\right\}.$$

On note $L_t = \left\{2\sqrt{2}t + \ln\left[\frac{\left(\alpha_0 - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right)}{\left(\alpha_0 - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right)}\right]\right\}$, ce qui implique :

$$\exp L_t = \left[\frac{\left(\alpha_0 - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right)}{\left(\alpha_0 - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right)}\right] \exp\left(2\sqrt{2}t\right) = \delta \exp\left\{2\sqrt{2}t\right\},$$

où $\delta = \dfrac{\left(\alpha_0 - \left(-1-\sqrt{2}\right)\right)}{\left(\alpha_0 - \left(-1+\sqrt{2}\right)\right)}$, donc :

$$\alpha_t = \frac{\delta \exp\left\{2\sqrt{2}t\right\}\left(1-\sqrt{2}\right) - 1 + \sqrt{2}}{1 - \delta \exp\left\{2\sqrt{2}t\right\}}.$$

3.5.2 Solution de l'équation différentielle ordinaire

La solution de (3.35) est somme de solution homogène et solution particulier.

Solution homogène est la solution de l'équation

$$\acute{\beta}_t + \left(\frac{\delta \exp\left\{2\sqrt{2}t\right\}\left(1-\sqrt{2}\right) - 1 + \sqrt{2}}{1 - \delta \exp\left\{2\sqrt{2}t\right\}} + 1\right)\beta_t \quad = 0,$$

est donné par $\beta_h = Ke^{-A(t)}$, où $A(t)$ est le primitive de $\dfrac{\delta \exp\left\{2\sqrt{2}t\right\}\left(1-\sqrt{2}\right) - 1 + \sqrt{2}}{1 - \delta \exp\left\{2\sqrt{2}t\right\}}+1$.

Soit

$$\beta_p = K(t)\, e^{-A(t)}, \tag{3.37}$$

la solution particulière de (3.35) i.e :

$$\acute{\beta}_p + (\alpha_t + 1)\,\beta_p = -\alpha_t Z_t.$$

Alors :

$$\acute{K}(t)\, e^{-A(t)} - (\alpha_t + 1)\, K(t)\, e^{-A(t)} + (\alpha_t + 1)\, K(t)\, e^{-A(t)} = -\alpha_t \hat{Z}_t.$$

Donc :

$$\acute{K}(t) = -\alpha_t \hat{Z}_t e^{A(t)}.$$

On passe à l'intégrale : $\int_0^t \acute{K}(s) = -\int_0^t \alpha_{t_s} \hat{Z}_s e^{A(s)} ds$, alors $K(t) = -\int_0^t \alpha_s \hat{Z}_s e^{A(s)} ds + K(0)$.
On remplace $K(t)$ dans (3.37) et alors :$\beta_p = K(t)\, e^{-A(t)}$.

Finalement on obtient :

$$\beta_t = Ke^{-A(t)} + K(t)\, e^{-A(t)}.$$

De plus $\hat{u} = \hat{P}_t$ alors :

$$\hat{u} = \left(\frac{\delta \exp\left\{2\sqrt{2}t\right\}\left(1-\sqrt{2}\right) - 1 + \sqrt{2}}{1 - \delta \exp\left\{2\sqrt{2}t\right\}} \right) \widehat{Y}_t + Ke^{-A(t)} + K\left(t\right)e^{-A(t)} \tag{3.38}$$

Théorème 3.5.1 *Le contrôle optimal feed back est donnée par la formule (3.38) avec α_t est la solution (3.34) et β_t la solution de (3.35).*

Bibliographie

[1] Bismut, J. M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and applications.vol 44, 384-404

[2] Chala,A . (2013). Contribution à L'étude Des Controles optimales stochastique , thèse de doctorant. Université de Biskra.

[3] Chala, A, Khalout, R (2018). A risk-sensitive stochastic maximum principle for fully coupled forward-backward stochastic differential equations with applications, Asian J of control. https ://doi.org/10.1002/asjc.2020.

[4] N. El Karoui, S. Peng, and M.-C. Quenez,(1997) Backward stochastic differential equations in finance. Jornal of Mathematical Finance, Vol. 7, No. 1 , 1–71.

[5] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. cours de master. 2IF. Université d'EVRY.

[6] Pardoux and S. Peng,(1990) Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Jornal of Systems and Control Letters .Volume 14. Issue 1. Pages 55-61.

[7] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Université Savoie Mont Blanc.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\left(\Omega, \mathcal{F}, , \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\, \mathbb{P}\right)$	un espace de probabilité filtré
$\mathbb{L}^2(\Omega)$	l'espace des fonctions définie sur Ω de carré intégrable.
$\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t)$	l'espace des fonctions définie sur Ω de carré intégrable.$\mathcal{F}_t -$ mesurable.
$\mathcal{C}^{n+1}$	Ensemble des fonctions $(n+1)$ fois dérivable et dont la dérivée $(n+1)$ éme est continue
$p.s$	presque surement
$CQFD.$	Ce qu 'il fallait démontrer.
σ^*	Transposée de la matrice σ.
$c\grave{a}dl\grave{a}g$	Continue à droite admet de limite à gauche.
$\mathbb{P} - p.s$	presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$dt \times d\mathbb{P}$	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0;T]$ avec la mesure $d\mathbb{P}$
$trace\,(M)$	La trace de la matrice.M.
Tq	Telle que
$i.e$	C'est à dire

:الملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو إثبات النتيجة ى لوجود وحدانية الحل للمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية.وتنتسب هاته النتيجة إلى الباحثين " باردو" و" بينغ" في حالة ما إذا كان المولد غير خطي.ونحاول تطبيق هاته المعادلات التفاضلية العشوائية المتراجعة في نظرية الفحص الامثل.

الكلمات المفتاحية : الشروط الكافية واللازمة للتحكم الأمثل. المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية. حركة براون. صيغة ايتو.

Résumé :

L'objectif principal de ce travail est de montrer un premier résultat d'existence et d'unicité pour la solution de l'EDSR. Ce résultat est dû à ''Pardoux'' et ''Peng '' dans le cas où le générateur est non-linéaire. Et pour illustrer ce type du problème on applique dans la théorie du contrôle optimale stochastique.

Mots clés : EDSR (l'équations différentielles stochastique rétrograde). Les conditions nécessaire et suffisante d'optimalité sur les EDSRs. Mouvement Brownien. Formule d'itô.

Abstract:

The main objective of this work we will show a first result of existence and uniqueness of the solution of BSDE. This result is due to "Pardoux "and "Pengin" the case where the generator is non-linear. and to illustrate this type of the problem we apply in the theory of stochastic optimal control.

Key word: BSDE (backward stochastic differential equations). the necessary and sufficient conditions of optimal control on the BSDEs. Brownian motion . Itô formula