République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **probabilités**

Par

GAGUI Chahrazed

Titre :

Equations différentielles stochastiques fonctionnelles

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Abba Abedelmajid**	UMKB	Président
Dr.	**Tamer Lazhar**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Aoune Salima**	UMKB	Examinateur

Juin 2020

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, le respect, l'amour, la reconnaissance, c'est tous simplement que :je dédie ce modeste travail :

À mes trés chers parents,

À mes soeurs,

À mes fréres,

À mes amis,

À tous les membres de ma promotion,

Et à tous mes enseignants depuis mes première années d'études

CHAHRAZED

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail,

J'exprime mes profondes gratitudes à mes parents,

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde à mon encadreur le Dr **Tamer Lazhar**, de m'avoir proposé le sujet de mon mémoire. Je le remercie aussi de son suivi permanent de mon travail, ses remarques et suggestions sans les quelles ce mémoire n'aurait pas lieu,

Et je veux exprime tout mon respect aux membres du jury, qui ont acceptés d'évaluer et de juger mon travail,

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation.

À touts mes amaies et toute persoùnnf qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans de nombreuses applications, on suppose que le système considéré est régi par un principe de causalité ; c'est-à-dire que l'état futur du systèmes est indépendant des états de passés et est déterminé uniquement par le présent. Cependant, en y regardant de plus près, il devient évident que le principe de causalité n'est souvent qu'une première approximation d'une situation réelle et qu'un modèle plus réaliste incluront certains des états passés du système. Les équations différentielles fonctionnelles stochastiques donnent une formulation mathématique pour un tel système.

Le type le plus simple de la dépendance du passée dans une équation de différentielle est celui la dépendance de passée est à travers la variable d'état mais non du dérivée de la variable d'état . [2] a propose le modèl :

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)]$$

dans son étude de la distribution d'une prime. [8] propose une équation plus générale

$$\dot{x}(t) = -\alpha \left[\int_{-1}^{0} x(t+\theta)\, d\eta(\theta) \right] [1 + x(t)]$$

dans son étude des modèles de prédateurs-proies, Volterra [7] avait précédemment étudié l'équation

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left(\varepsilon_1 - \gamma_1 y(t) - \int_{-r}^{0} F_1(\theta)\, y(t+\theta)\, d\theta \right) x(t) \\ \dot{y}(t) = \left(\varepsilon_2 + \gamma_2 x(t) + \int_{-r}^{0} F_2(\theta)\, y(t+\theta)\, d\theta \right) y(t) \end{cases}$$

où x et y sont les nombre de proies et prédateurs, respectivement. Selon des hypothèses appropriée l'équation

$$\dot{x}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{k}A_{i}x\left(t-\tau_{i}\right)$$

est un modèle approprié pour décrire le mélange d'un colorant à partir d'un réservoir central lorsque l'eau teinté circule à travers un certain nombre de tuyaux . Toutes ces équations sont des cas spéciaux de l'équations différentielle fonctionnelle générale

$$\dot{x}\left(t\right)=f\left(x_{t},t\right)$$

où $x_{t}=\left\{x\left(t+\theta\right):-\tau\leq\theta\leq0\right\}$ est l'histoire du passée de l'état. En tenant compte du bruit environnemental, nous somes conduits à l'équation différentielle stochastique fonctionnelle

$$dx\left(t\right)=f\left(x_{t},t\right)dt+g\left(x_{t},t\right)dB\left(t\right).$$

Notre mémoire est composé par trois chapitres :

Premier chapitre : Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, ayant pour but de présenté les outils de notre étude, on donne quelques rappels de base concernant le calcul stochastique.

Deuxième chapitre : L'objectif de ce chapitre est de donner le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'un certain type d'équation (EDS fonctionnelle) , puis on étudié quelque proriété de la solution.

Troisième chapitre : Dans ce chapitre nous étudions un classe spéciale et importante d'équation différentielle stochastiques fonctionnelles est les équations différentielle stochastique avec retard dont on peut appliquer les théorémes d'existence et d'unicité de la solution établis dans le chapitre précédente.

Chapitre 1

Rappels sur les calcul stochastique

Dans ce premier chapitre nous introduisons quelques notions fondamentales liées aux processus stochastique

1.1 processus stochastique

Définition 1.1 (espace de probabilité) *: Un espace de probabilité est un triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *où :*

i) Ω est un ensemble non vide.

ii) $\mathcal{F}$ est une tribu de parties de Ω.

iii) $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$.

Définition 1.2 (tribu) *: Un ensemble* $\mathcal{F}$ *de parties d'un ensemble non vide* Ω *est une tribu sur* Ω *si :*

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^{\complement} \in \mathcal{F}$.

iii) $\forall n, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n} A_n \in \mathcal{F}$ (union dénombrable).

Remarque 1.1 *: Que (i) et (ii) impliquent $\Omega \in \mathcal{F}$ et que (ii) et (iii) impliquent :*

$$\forall n, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$$

Définition 1.3 (filtration) *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante de sous-tribus*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré.

Définition 1.4 (processus stochastiques) *: Un processus aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé par un ensemble de temps $T \subset \mathbb{R}_+$, est une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, A, \mathbb{P})$ à valeurs dans un certain espace E.*

Définition 1.5 (processus adapté) *: Soit $\{X_t\}_{t \in T}$ un processus stochastiques sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que le processus est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ si X_t est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \in T$.*

Définition 1.6 (modification et indistinguables) *: Soient $(X_t)_{t \succeq 0}$ et $(Y_t)_{t \succeq 0}$ deux processus stochastique définie sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X est une modification de Y si pour tout T :*

$$\forall t \geq 0, P(X_t = Y_t) = 1, P - ps.$$

X et Y sont indistinguable si P-ps, les trajectoires de X et Y sont les mêmes c'est à dire

$$P(X_t = Y_t ; \forall t \geq 0) = 1, P - ps$$

Définition 1.7 (temps d'arrêt) *: Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. τ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ $-$temps d'arrêt si, pour tout t, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Si τ est un temps d'arrêt, on appelle tribu des événements antérieurs à τ la tribu définie par

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}.$$

1.2 Mouvement brownien et martingale.

Définition 1.8 (Mouvement Brownien standard (M.B)) *: Le mouvement brownien est un processus* $(B_t)_{t\in[0,1]}$ *continu dont les accroissements sont indépendants, stationnaires et gaussiens. Plus précisément.*
un mouvement Brownien standard est un processus $(B_t)_{t\in[0,1]}$ *vérifiant :*

i) $B_0 = 0$ P-p.s.

ii) B est continu.I.e. $t \to B_t(w)$ est continue pour P presque tout w.

iii) B est à accroissements indépendants : si $t \geq s$, $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s^B = \sigma\left(B_u, u \leq s\right)$.

Définition 1.9 (Martingale, sous et surmartingale) *: Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left\{\mathcal{F}_n\right\}_n, \mathbb{P}\right)$ *un espace probabilisé filtré. Un processus* $(X_t, t \geq 0)$ *adapté et tel que, pour tout* $t \geq 0, X_t \in L^1$ *est appelé :*

i) martingale si pour $s < t, \mathbb{E}\left[X_t \backslash \mathcal{F}_s\right] = X_s$.

ii) surmartingale si pour $s < t, \mathbb{E}\left[X_t \backslash \mathcal{F}_s\right] \leq X_s$.

iii) sous-martingale si pour $s < t, \mathbb{E}\left[X_t \backslash \mathcal{F}_s\right] \leq X_s$.

Définition 1.10 (martingale locale) *: Soit* X *un processus* $\left\{f_t\right\}_{t\geq 0}$*-adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que* X *est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt* $\left\{\tau_n\right\}_{n\geq 1}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$ *P-p.s et pour tout* n, $X^{\tau_n} 1_{\tau_n > 0}$ *est une martingale.*

Définition 1.11 (semi-martingale) *: Une semi-martingale continue est un processus* X *qui s'écrit* $X = M + V$*, où* M *est une martingale locale continue et* V *est un processus continu adapté à variation bornée tel que :* $v_0 = 0$.

1.3 calcul d'Itô.

Définition 1.12 (Intégrale stochastique) *: On appelle processus élémentaire $H = (H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de la forme :*

$$H_t = \phi_0 1_0(t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i 1_{]t_{i-1},t_i]}(t)$$

Où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = T$, ϕ_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable bornée et pour $i = 1, ..., p, \phi_i$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{i-1}}-$mesurable et bornée.

Pour un tel processus, on peut définir l'intégrale stochastique par rapport à W comme étant le processus continu $\{I(H)_t\}_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dW_s = \sum_{i=1}^{p} \phi_i (W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t})$$

Soit encore, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{k} \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k}).$$

Définition 1.13 (processus d'Itô) *: On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$P - p.s \quad \forall 0 \leq t \leq T, X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s.$$

Où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, K et H sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les condition,$P - p.s$:

$$\int_0^T |K_s| \, ds < \infty \qquad et \qquad \int_0^T |H_s|^2 \, ds < \infty.$$

Proposition 1.1 (Intégration par parties) . *Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t .$$

Théorème 1.1 (Formule d'Itô)

a. Première formule d'Itô : Soient X un processus d'Itô et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 à dérivées bornée, alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

b. Deuxième formule d'Itô : Soient $(t, x) \to f(t, x)$ une fonction réelle deux fois diférentiable en x et une fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus d'Itô :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s + \int_0^t f'_s(s, X_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, d\langle X, X \rangle_s .$$

1.4 Résultats utiles

Proposition 1.2 (Inégalité de Hölder) *: Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugués.i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f, g sont des applications mesurables, alors :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

En particulier, l'inégalité de Hölder (dans le cas $p = 2$) donne l'inégalité de cauchy-schwarz :

$$|(f/g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Théorème 1.2 (Inégalité de Doop) *: Si X est une martingale continue. Alors*

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right] \leq 4 \sup_{t\in[0,T]} E\left[|X_t|^2\right].$$

Lemme 1.1 (Lemme de gronwall) *: Soit $T > 0$ et soit g une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle $[0, T]$. Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$:*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)ds.$$

Alors, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Théorème 1.3 (Inégalité de burkholder-davis-gundy "BDG") *: Pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives c_p et C_P telles que, pour toute martingale continue $X = (X_t)_{t>0}$, nul en 0 :*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 1.2 *: En particulier, si $T \geq 0$*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{P}{2}}\right].$$

1.5 Equations différentielles stochastiques

Nous avons maintenant tous les éléments en main pour définir la notion de solution d'une équation différentielle stochastique (EDS), de la forme

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t. \tag{1.1}$$

Où $f, g : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes mesurables. La fonction f est communément appelée coefficient de dérive, alors que g est appelée coefficient de diffusion. Dans tout ce chapitre, nous supposons que :

– Soit $X_0 \in \mathbb{R}$ est une constante, et alors $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ désigne la filtration engendrée par le mouvement Brownien.
– Soit $X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, de carré intégrable et indépendante du mouve-

ment Brownien. Dans ce cas, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ désignera la filtration engendrée par le mouvement Brownien et par X_0.

1.5.1 solution forte

Définition 1.14 *: Un processus stochastique $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ est appelé une solution forte de l'EDS 1.1 avec condition initiale X_0 si :*

- X_t est $\mathcal{F}_t$−mesurable pour tout $t \in [0,T]$
- On a les conditions de régularité

$$p\left\{\int_0^T |f(s,X_s)|\,ds < \infty\right\} = p\left\{\int_0^T g(s,X_s)^2 ds < \infty\right\} = 1. \tag{1.2}$$

- Pour tout $t \in [0,T]$, ona

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,X_s)ds + \int_0^t g(s,X_s)dB_s \tag{1.3}$$

avec probabilité 1.

Remarque 1.3 *: On définit de manière similaire la solution forte d'une EDS multidimensionnelle c'est-à-dire qu'on peut supposer que $X \in \mathbb{R}^n$, $f(t,x)$ prend des valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et si B_t est un mouvement Brownien de dimension K, $g(t,x)$ prend des valeurs dans les matrices $n \times K$.*

1.5.2 Existence et unicité de solutions

Nous donnons d'abord un résultat d'existence et d'unicité d'une solution forte sous des conditions un peu restrictives sur les coefficients f et g.

Théorème 1.4 *: Supposons que les fonctions f et g satisfont les deux conditions suivantes :*

1. Condition de lipschitz globale : il existe une constante k telle que

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq K\,|x-y|$$

pour tous $t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}$

2. Condition de croissance : il existe une constante L telle que

$$|f(t,x)| + |g(t,x)| \leq L(1 + |x|)$$

pour tous les $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$

Alors l'EDS 1.1 admet, pour toute condition initiale X_0 de carré intégrable, une solution forte $\{X_t\}_{t\in[0.T]}$, presque sûrement continue. Cette solution est unique dans le sens que si $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ et $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ sont deux solutions presque sûrement continue, alors

$$DP\left\{\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t| > 0\right\} = 0$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques fonctionnelles

L'objectif de ce chapitre est de donner le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSF.

2.1 Existence et unicité

Soient $(\Omega, F, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré complet et la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles, $B(t)$ un mouvement m-dimensionnel brownien défini sur cet espace. Soit $\tau > 0$ et on note par $C([-\tau, 0] : \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues φ de $[-\tau, 0]$ à $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|\varphi\| = \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} |\varphi(\theta)|$. Soit

$$f : [t_0, T] \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \text{ et } g : [t_0, T] \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{d\times m}\ ,\ 0 \leq t_0 < T < \infty$$

deux fonctions mesurables. On considère l'équation différentielle fonctionnelle stochastique de d-dimensionnel :

$$dx(t) = f(t, x_t)\, dt + g(t, x_t)\, dB_t \quad \text{sur } t_0 \leq t \leq T \tag{2.1}$$

où $x_t = \{x(t+\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\}$ est considéré comme un $C([-\tau,0]\,;\mathbb{R}^d)-$processus stochastique.

La première question est la suivante : quel est le problème de la valeur initiale de cette équation ? Plus précisément, quelle est la quantité minimale de données initiales qui doit être spécifiée pour que l'équation 2.1 définisse un processus stochastique $x(t)$ sur $t_0 \leq t \leq T$? Un moment de réflexion indique qu'un processus stochastique doit être spécifié sur tout l'intervalle $[t_0-\tau, t_0]$. Nous imposons donc les données initiales :

$$\begin{array}{ll} x_{t_0} & = \xi = \{\xi(\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\} \text{ est un } \mathcal{F}_{t_0} - \text{mesurable} \\ C\left([-\tau,0] : \mathbb{R}^d\right) & \text{-variable aléatoire telle que } E\left\|\xi\right\|^2 < \infty \end{array} \tag{2.2}$$

Le problème de la valeur initiale pour l'équation 2.1 est maintenant de trouver la solution de l'équation 2.1 satisfaisant les données initiales 2.2. Mais quelle est la solution ?

Définition 2.1 *: Un processus stochastique $x(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sur $t_0-\tau \leq t \leq T$ est appelée une solution de l'équation 2.1 avec les données initiales 2.2 si elle à les propriétés suivantes :*

i) $\{x_t\}_{t_0 \leq t \leq T}$ est continu et $\mathcal{F}_t$-adapté.

ii) $\{f(t,x_t)\} \in L^1([t_0,T]\,;\mathbb{R}^d)$ et $\{g(t,x_t)\} \in L^2([t_0,T]\,;\mathbb{R}^{d\times m})$.

iii) $x_{t_0} = \xi$ et pour tout $t_0 \leq t \leq T$,

$$x(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds + \int_{t_0}^{t} g(s,x_s)dB(s)$$

Une solution $x(t)$ est unique s'il existe une autre solution $\bar{x}(t)$ alors ils sont indistinguables :

$$P\{x(t) = \bar{x}(t) \text{ pour tous } t_0-\tau \leq t \leq T\} = 1$$

Commençons maintenant par établir la théorème de l'existence et l'unicité de la solution, nous montrons d'abord que la condition lipschitz et la condition de croissance linéaire garantissent 'existence et l'unicité.

Théorème 2.1 ?? *: Supposons qu'il existe deux constantes positives K et $\bar{K}$ telles que*

i) (Condition de lipschitz uniforme) pour tous $\varphi, \phi \in C\left([-\tau, 0]\,; \mathbb{R}^d\right)$ et $t \in [t_0, T]$:

$$|f(t, \varphi) - f(t, \phi)|^2 \vee |g(t, \varphi) - g(t, \phi)|^2 \leq \bar{K}\, \|\varphi - \phi\|^2 \tag{2.3}$$

ii) (Condition de croissance linéaire) pour tous $(t, \varphi) \in [t_0 \times T] \times C([-\tau, 0]\,; \mathbb{R}^d)$:

$$|f\,(t, \varphi)|^2 \vee |g(t, \varphi)|^2 \leq K(1 + \|\varphi\|^2) \tag{2.4}$$

Alors il existe une solution unique $x(t)$ à l'équation 2.1 avec les données initiales 2.2, de plus la solution appartient à $M^2([t_0 - \tau, T]\,; \mathbb{R}^d)$.

On donne un lemme afin de prouver ce théorème.

Lemme 2.1 *: Supposons que la condition de croissance linéaire 2.4 est satisfaite et si $x(t)$ une solution de l'équation 2.1 avec les données initiale 2.2, alors*

$$\mathbb{E}(\sup_{t_0 - \tau \leq t \leq T} (x(t))^2) \leq (1 + 4\mathbb{E}\,\|\varepsilon\|^2) \exp(3K(T - t_0)(T - t_0 + 4)) \tag{2.5}$$

en particulier, $x(t)$ appartient à $M^2([t_0 - \tau, T]\,, \mathbb{R}^d)$.

Preuve. : Pour tout entier $n \geq 1$, on défini la suite des temps d'arrêt

$$\tau_n = T \wedge \inf\{t \in [t_0, T] : \|x_t\| \geq n\}$$

Clairement, $\tau_n \nearrow T$ .as. Soit $x^n(t) = x(t \wedge \tau_n)$ pour $t \in [t_0 - \tau, T]$ alors pour $t_0 \leq t \leq T$,

$$x^n(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s^n) I_{[[t_0, \tau_n]]}(s) d(s) + \int_{t_0}^{t} g(s, x_s^n) I_{[[t_0, \tau_n]]}(s) dB_s$$

les inégalité de Holder, Doob et la condition de croissance linéaire donne que

$$\mathbb{E}(\sup_{t_0 - \tau \leq s \leq t} |x^n(s)|^2) \leq 3\mathbb{E}\,|\xi(0)|^2 + 3k(T - t_0 + 4) \int_{t_0}^{t} (1 + E\,\|x_s^n\|^2) ds$$

Notant que

$$\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t}|x^n(s)|^2 \leq \|\xi\|^2 + \sup_{t_0\leq s\leq t}|x^n(s)|^2$$

nous obtenus que

$$1+\mathbb{E}\left(\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t}|x^n(s)|^2\right) \leq 1+4\mathbb{E}\,\|\xi\|^2 + 3k(T-t_0+4)\int_{t_0}^{t}\left[1+\mathbb{E}(\sup_{t_0-\tau\leq r\leq s}|x^n(r))|^2)\right]ds,$$

l'inégalité de Gronwall nos donne

$$1+\mathbb{E}(\sup_{t_0-\tau\leq t\leq T}|x^n(t)|^2) \leq \left(1+4\mathbb{E}\,\|\xi\|^2\right)\exp(3K\,(T-t_0)\,(T-t_0+4))$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(\sup_{t_0-\tau\leq t\leq \tau_n}|x(t)|^2) \leq (1+4\mathbb{E}\,|\xi|^2)\exp(3K(T-t_0)(T-t_0+4))$$

alors on obtient 2.5 si on fait tendre $n\to\infty$. ■

Preuve. ?? : unicité :- Soit $x(t)$ et $\bar{x}(t)$ deux solutions. Par le lemme 2.1, les deux appartiennent à $M^2([t_0-\tau,T]\,;\mathbb{R}^d)$. Notant que :

$$x(t)-\bar{x}(t) = \int_{t_0}^{t}[f(s,x_s)-f(s,\bar{x}_s)]\,ds + \int_{t_0}^{t}[g(s,x_s)-g(s,\bar{x}_s)]\,dB_s,$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{t_0\leq s\leq t}|x(s)-\bar{x}(s)|^2) &\leq 2\bar{K}(T+4)\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}\,\|x_s-\ \bar{x}_s\|^2\,ds\\ &\leq 2\bar{K}(T+4)\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}(\sup_{t_0\leq r\leq s}|x(r)-\bar{x}(r)|^2)ds\end{aligned}$$

L'inégalité de gronwall nos donne que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq t\leq T}|x\,(t)-\bar{x}\,(t)|^2\right) = 0,$$

ceci implique que $x(t)=\bar{x}(t)$ pour $t_0\leq t\leq T$, donc pour tous $t_0-\tau\leq t\leq T$, presque sûrement. L'unicité à été prouvée. ■

Existence : Soient $x_{t_0}^0 = \xi$ et $x^0(t) = \xi(0)$ pour $t_0 \leq t \leq T$ et $n = 1.2...$ et soit $x_{t_0}^n = \xi$ on défini par les itération de picard

$$x^n(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s^{n-1})ds + \int_{t_0}^{t} g(s, x_s^{n-1})dB(s) \tag{2.6}$$

pour $t \in [t_0, T]$, alors $x^n(.) \in M^2\left((t_0 - \tau, T); \mathbb{R}^d\right)$ donc pour tous $n \geq 0$.

$$E(\sup_{t_0 \leq s \leq t} \left|x^{n+1}(s) - x^n(s)\right|^2) \leq \frac{C\left[M(t-t_0)\right]^n}{n!} \quad \text{sur } t_0 \leq t \leq T \tag{2.7}$$

où $M = 2\bar{K}(T - t_0 + 4)$ et C un cobstant que sera défini au plus tard , par un calcul on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} \left|x^1(s) - x^0(s)\right|^2\right) &\leq 2K(T - t_0) \int_{t_0}^{T} \left(1 + \mathbb{E}\left\|x_s^0\right\|^2\right) ds + 8K \int_{t_0}^{T} \left(1 + \mathbb{E}\left\|x_s^0\right\|^2\right) ds \\ &\leq 2K(T - t_0 + 4)(T - t_0)\left(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2\right) := C.\end{aligned}$$

Ainsi 2.7 est vraie pour $n = 0$. Ensuite, supposons que 2.7 est vraie pour un certain $n \geq 0$ alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq s \leq t} \left|x^{n+2}(s) - x^{n+1}(s)\right|^2\right) &\leq 2\bar{K}(t - t_0 + 4)\,\mathbb{E}\int_{t_0}^{t} \left\|x_s^{n+1} - x_s^n\right\|^2 ds \\ &\leq M \int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq r \leq s} \left|x^{n+1}(r) - x^n(r)\right|^2\right) ds \\ &\leq M \int_{t_0}^{t} \frac{C\left[M(s-t_0)\right]^n}{n!} ds = \frac{C\left[M(s-t_0)\right]^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

c'est-à-dire 2.7 est vraie pour $n+1$ donc par induction 2.7 est vraie pour tous $n \geq 0$. De 2.7 nous pouvons alors montrer de la même manière que dans la preuve du théorème 2.3.1 que $x^n(\cdot)$ converge vers $x(t)$ dans $M^2\left([t_0 - \tau, T], \mathbb{R}^d\right)$ au sens de L^2 ainsi de probabilité 1, et $x(t)$ est la solution de l'équation 2.1 satisfaisant la condition initiale 2.2 alors l'existence est prouvée.

Dans la preuve ci-dessus, nous avons montré que par l'itération de picard $x^n(t)$ convergent vers la unique solution $x(t)$ de l'équation 2.1. Le théorème suivant nos donne une estimation de la différence entre $x^n(t)$ et $x(t)$.

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèses du théorème* **??** *sont vérifié et soient* $x(t)$ *l'"unique solution de l'équation 2.1 avec les données initiales 2.2 et* $x^n(t)$ *les itérations de picard définies par 2.6. Alors pour tous* $n \geq 1$ *:*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x^n(t) - x(t)|^2\right) \leq \frac{2C\left[M(T-t_0)\right]^n}{n!} \exp\left(2M(T-t_0)\right) \tag{2.8}$$

où $C = 2K(T-t_0+4)(T-t_0)\left(1+\mathbb{E}\|\xi\|^2\right)$ *et* $M = 2K(T-t_0+4)$.

Preuve. Un calcul simple nod donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x^n(s) - x(s)|^2\right) &\leq M\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left\|x_s^{n-1} - x_s\right\|^2 ds \\ &\leq 2M\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq r \leq s}\left|x^n(r) - x^{n-1}(r)\right|^2\right) ds \\ &+ 2M\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq r \leq s}|x^n(r) - x(r)|^2\right) ds\end{aligned}$$

et par 2.7 on déduit que :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x^n(s) - x(r)|^2\right) \\ &\leq 2M\int_{t_0}^{T} \frac{C\left[M(s-t_0)\right]^{n-1}}{(n-1)!} ds + 2M\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq r \leq s}|x^n(r) - x(r)|^2\right) ds \\ &\leq \frac{2C\left[M(T-t_0)\right]^n}{n!} + 2M\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq r \leq s}|x^n(r) - x(r)|^2\right) ds\end{aligned}$$

l'inégalité 2.8 est obtenue par une application dirècte de l'inégalité de Gronwall. ■

Théorème 2.3 *Supposant que la condition de la croissance linéaire 2.4, est satisfaite mais la condition de Lipschitz uniforme 2.3 est remplacée par la condition de Lipschitz locale suivante : Pour chaque entier* $n \geq 1$, *il existe une constante positive* K_n *telle que, pour tous*

$t \in [t_0, T]$ et ceux $\varphi.\phi \in C\left([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d\right)$ avec $\|\varphi\| \vee \|\phi\| \leq n$.

$$|f(t.\varphi) - f(t.\phi)|^2 \vee |g(t.\varphi) - g(t.\phi)|^2 \leq K_n \|\varphi - \phi\|^2 \tag{2.9}$$

Alors il existe une unique solution $x(t)$ au problème de la valeur initiale 2.1,2.2 de plus la solution appartient à $M^2\left([t_0 - \tau.T]; \mathbb{R}^d\right)$.

Dans ce qui on considère les équation différentielle fonctionnelle stochastique sur $[t_0, \infty)$ à savoir

$$dx(t) = f(t, x_t)\, dt + g(t, x_t)\, dB(t) \quad \text{sur } t \in [t_0, \infty] \tag{2.10}$$

Avec les données initiales 2.2, où f et g sont des applications de $C\left([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d\right) \times [t_0, \infty]$ à $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^{d\times m}$, respectivement. Si les hypothèses du théorème de l'existence et l'unicité est vrai sur chaque sous interval finie $[t_0, T]$ de $[t_0, \infty]$ alors l'équation 2.10 a une unique solution $x(t)$ sur tout l'interval $[t_0 - \tau, \infty]$ une telle solution est appelée une solution globale. Le théoréme suivent est immédiate

Théorème 2.4 *Supposant que pour tout un réel $T > t_0$ et un entier $n \geq 1$, il existe une constante positive $K_{T.n}$, de sorte que pour tous $t \in [t_0, T]$ et tout $\varphi.\phi \in C\left([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d\right)$ avec $\|\varphi\| \vee \|\phi\| \leq n$,*

$$|f(t.\varphi) - f(t.\phi)|^2 \vee |g(t.\varphi) - g(t.\phi)|^2 \leq K_{T.n} \|\varphi - \phi\|^2$$

supposent aussi que pour tout $T > t_0$, il existe une constante positive K_T tel que pour tous $(t.\varphi) \in C\left([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d\right) \times [t_0, T]$

$$|f(t, \varphi)|^2 \vee |g(t, \varphi)|^2 \leq K_T\left(1 + \|\varphi\|^2\right)$$

alors il existe une unique solution globale $x(t)$ de l'équation 2.10 et la solution appartient à $M^2\left([t_0 - \tau, \infty]; \mathbb{R}^d\right)$.

Cependant, si nous supprimons la conditions de croissance linéaire mais maintenons la condition locale lipsthitz, alors, comme dans le cas des équation différentielles fonctionnelles, les équations différentielles fonctionnelles stochastiques peuvent ne pas avoir de solutions globales, qui est une explosion peut se produire à un temps fini. Dans se cas, il est nécessaire de définire la solution locale.

Définition 2.2 *Soit $x(t), t \in [[t_0-\tau, \delta_\infty[[$ un processus local continu $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, où δ_∞ est un temps d'arrêt- il est appelé une solution locale de l'équation 2.1 avec les donné initiales 2.2 si $x_{t_0} = \xi$ et*

$$x(t\wedge\delta_k) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t\wedge\delta_k} f(s,x_s)\,ds + \int_{t_0}^{t\wedge\delta_k} g(s,x_s)dB(s) \qquad \forall t \geq t_0,$$

pour tout $k \geq 1$, où $\{\delta_k\}_{k\geq 1}$ est une suite non décroissante de temps d'arrêt finis tels que $\delta_k \uparrow \delta_\infty$ a.s. En outre, si $\limsup_{k\to\infty}|x(t)| = \infty$ est satisfait pour tout $\delta_\infty < \infty$, il est appelé une solution locale maximale et δ_∞ est appelé le temps d'explosion. Une solution locale maximale $x(t)$, $t \in [[t_0-\tau, \delta_\infty[[$, est dit unique si pour toute autre solution locale maximale $\hat{x}(t), t \in \left[\left[t_0-\tau, \hat{\delta}_\infty\right[\right[$, on a $\delta_\infty = \hat{\delta}_\infty$ et $x(t) = \hat{x}(t)$ pour tout $t \in \left[\left[t_0-\tau, \hat{\delta}_\infty\right[\right[$

Théorème 2.5 *Supposons que pour chaque entier $n \geq 1$, il existe une constante positive K_n tel que, pour tout $t \geq t_0$ et $\varphi.\phi \in C\left([-\tau,0];\mathbb{R}^d\right)$ avec $\|\varphi\| \vee \|\phi\| \leq n$:*

$$|f(t,\varphi) - f(t,\phi)|^2 \vee |g(t,\varphi) - g(t,\phi)|^2 \leq K_n \|\varphi-\phi\|^2$$

alors il existe une unique solution locale maximale $x(t)$ de l'équation 2.1 avec les données initiales 2.2.

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques avec retard

Une classe spéciale mais importante d'équations différentielle stochastiques fonctionnelles est les équations différentielles stochastique avec retard (EDSRs). Commençons par la description de l'équation avec retard suivante :

$$dx(t) = F(t, x(t-\tau), x(t))\, dt + G(t, x(t-\tau), x(t))\, dB(t) \tag{3.1}$$

$t \in [t_0, T]$ et avec les données initiales 2.2. Où $F : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $G : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times m}$, si on définit

$$f(t, \varphi) = F(t, \varphi(-\tau), \varphi(0)) \quad \text{et} \quad g(t, \varphi) = G(t, \varphi(-\tau), \varphi(0))$$

pour $(t, \varphi) \in [t_0, T] \times C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, alors l'équation 3.1 peut être écrit comme une équation 2.1 donc on peut appliquer les théorèmes d'existence et d'unicité établis dans la section précédente à l'équation avec retard 3.1. Par exemple, soit F et G satisfaisont la condition de lipschitz locale et la condition de croissance linéaire c'est-à-dire, pour chaque entier $n \geq 1$, il existe une constante positive K_n tel que pour tous $t \in [t_0, T]$ et tous $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$ avec

$|x| \vee |y| \vee |\bar{x}| \vee |\bar{y}| \leq n$,

$$|F(t,y,x) - F(t,\bar{y},\bar{x})|^2 \vee |G(t,y,x) - G(t,\bar{y},\bar{x})|^2 \leq K_n \left(|y-\bar{y}|^2 + |x-\bar{x}|^2\right). \tag{3.2}$$

et il existe de plus un $K > 0$ tel que pour tous $(t,y,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$|F(t,y,x)|^2 \vee |G(t,y,x)|^2 \leq K \left(1 + |y|^2 + |x|^2\right). \tag{3.3}$$

Alors il existe une unique solution de l'équation avec retard 3.1. Cependant, nous pouvons faire un pas de plus pour affaiblir l'égèrement ces conditions. Notons que sur $[t_0, t_0+\tau]$ l'équation 3.1 devient

$$dx(t) = F(t, \xi(t-t_0-\tau), x(t))\,dt + G(t, \xi(t-t_0-\tau), x(t))\,dB(t).$$

Avec valeur initiale $x(t_0) = \xi(0)$. Mais il s'agit d'une équation différentielle stochastique (sans retard), et il aura une solution unique si la condition de croissance linéaire 3.3 est vérifié et $F(t,y,x), G(t,y,x)$ sont localement lipschitz continue en x.
Si la solution $x(t)$ est connu sur $[t_0, t_0+\tau]$, nous pouvons suivre cet argument sur $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$, $[t_0+2\tau, t_0+3\tau]$ etc . Cet argument montre qu'il est inutile d'exiger que les fonctions $F(t,y,x)$ et $G(t,y,x)$ doit être localement lipschitz continue en y. Nous décrivons ce résultat dans le théorème suivant

Théorème 3.1 *: Supposent que la condition de croissance linéaire 3.3 est vérifié, de plus on suppose que $F(t,y,x)$ et $G(t,y,x)$ sont localement lipschitz continue en x, c'est-à-dire, pour tout entier $n \geq 1$, il existe une constante positive K_n tel que pour tous $t \in [t_0,T]$, $y \in \mathbb{R}^d$ et*

$x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$ *avec* $|x| \vee |\bar{x}| \leq n$,

$$\left|F(t,y,x) - F(t,y,\bar{x})\right|^2 \vee \left|G(t,y,\bar{x}) - G(t,y,\bar{x})\right|^2 \leq K_n \left|x - \bar{x}\right|^2 \tag{3.4}$$

Alors il existe une unique solution de l'équation avec retard 3.1

Ce résultat est évident dans le cas où F et G sont indépendants de l'état actuel $x(t)$, i.e :

$$dx(t) = F(t, x(t-\tau))\,dt + G(t, x(t-\tau))\,dB(t)$$

dans ce cas, nous avons explicitement que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s-\tau))\,ds + \int_{t_0}^{t} G(s, x(s-\tau))\,dB(s) \\ &= \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, \xi(s - t_0 - \tau))\,ds + \int_{t_0}^{t} G(s, \xi(s - t_0 - \tau))\,dB(s) \end{aligned}$$

pour $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$. Alors, pour $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$

$$x(t) = x(t_0 + \tau) + \int_{t_0+\tau}^{t} F(s, x(s-\tau))\,ds + \int_{t_0+\tau}^{t} G(s, x(s-\tau))\,dB(s)$$

On répète cette procédure aux intervalles $[t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$ etc. Nous pouvons obtenir la solution explicite.On considère l' EDSDRs linéaire de dimension 1suivante :

$$dx(t) = [\bar{a}x(t-\tau) + \alpha x(t)]\,dt + \sum_{k=1}^{m} \left[\bar{b}_k x(t-\tau) + b_k x(t)\right] dB_k(t) \quad , t \geq t_0.$$

avec les données initiales $\{x(\theta) : t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0\} = \xi \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-\tau, 0]; \mathbb{R})$. sur $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, le SSDE linéaire devient une EDS linéaire

$$dx(t) = [\alpha_1(t) + \alpha x(t)]\,dt + \sum_{k=1}^{m} [\beta_{k1} x(t) + b_k x(t)]\,dB_k(t).$$

avec valeur initiale $x(t_0) = \xi(0)$, où

$$\alpha_1(t) = \bar{a}\xi(t-\tau), \quad \beta_{k1}(t) = \bar{b}_k \xi(t-\tau).$$

Cette EDS linéaire a la solution

$$x(t) = \Psi_1(t)\left[\xi(0) + \int_{t_0}^{t} \Psi_1^{-1}(s)\left(\bar{a}\xi(s-\tau) - \sum_{k=1}^{m} b_k \bar{b}_k \xi(s-\tau)\right) ds + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \Psi_1^{-1}(s)\,\bar{b}_k \xi(s-\tau)\,dB_k(s)\right]$$

Où

$$\Psi_1(t) = \exp\left[\left(a - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right)(t-t_0) + \sum_{k=1}^{m} b_k (B_k(t) - B_k(0))\right].$$

Si $t \in [t_0+\tau, t_0+2\tau]$, l'EDSRS linéaire devienne une EDS linéaire

$$dx(t) = [ax(t) + \alpha_2(t)]\,dt + \sum_{k=1}^{m} [b_k x(t) + \beta_{k2}(t)]\,dB_k(t).$$

avec la valeur initiale $x(t_0+\tau)$ on $t = \tau$ obtenu ci dessus, où

$$\alpha_2(t) = \bar{a}x(t-\tau), \quad \beta_{k2}(t) = \bar{b}_k x(t-\tau).$$

Cette EDS linéaire à une solution explicite

$$\begin{aligned} x(t) \quad &= \Psi_2(t)\Bigg[x(t_0+\tau) + \int_{t_0+\tau}^{t} \Psi_2^{-1}(s)\left(\bar{a}x(s-\tau) - \sum_{k=1}^{m} b_k \bar{b}_k x(s-\tau)\right) ds \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0+\tau}^{t} \Psi_2^{-1}(s)\, \bar{b}_k x(s-\tau)\, dB_k(s)\Bigg] \end{aligned}$$

Où

$$\Psi_2(t) = \exp\left[\left(a - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right)(t - t_0 - \tau) + \sum_{k=1}^{m} b_k \left(B_k(t) - B_k(t_0+\tau)\right)\right].$$

Répéteons cette procédure sur les intervalles $[t_0+2\tau, t_0+3\tau]$ etc. Nous obtenons la solution explicite pour l'EDRSRs linéaire .

On passe maintenant à la discussion des équations dans les quelles le retard dépend du temps. Soit $\delta : [t_0, T] \to [0, \tau]$ une fonction mesurable. Considérons l'équation différentielle stochastique avec retard

$$dx(t) = F(t, x(t-\delta(t)), x(t)) + G(t, x(t-\delta(t)), x(t))\, dB(t). \tag{3.5}$$

sur $t \in [t_0, T]$ avec les données initiales 2.2. C'est encore un cas particulier de l'équation 2.1 si on définit

$$f(t,\varphi) = F(t, \varphi(-\delta(t)), \varphi(0)) \quad \text{and} \quad g(t,\varphi) = G(t, \varphi(-\delta(t)), \varphi(0))$$

pour $(t,\varphi) \in [t_0, T] \times C\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^d\right)$. Par conséquent, les condition 3.2 et 3.3 garantiront l'existence est l'unicité de la solution à cette équation avec retard.

D'autre part, si le retard est vraiment "vrai" dans le sens que $\sup_{t_0 \le t \le T} \delta(t) > 0$, alors l'argument ci-dessus qui a conduit au théorème 3.1 fonctionne encore et donc les conditions

3.3 et 3.4 garantiront l'existence et l'unicité de la solution à l'équation 3.5.

Cet argument peut être étendu sans aucune difficulté au système stochastique plus général avec plusieurs retards de la forme :

$$dx(t) = F(t, x(t-\delta_1(t)), ..., x(t-\delta_k(t)), x(t))\, dt + G(t, x(t-\delta_1(t)), ..., x(t-\delta_k(t)), x(t))\, dB(t), \tag{3.6}$$

$t \in [t_0, T]$ et avec les données initiales 2.2. Ici

$$F : [t_0, T] \times \mathbb{R}^{d\times(k+1)} \to \mathbb{R}^d, \quad G : [t_0, T] \times \mathbb{R}^{d\times(k+1)} \to \mathbb{R}^{d\times m}$$

et $\delta_i : [t_0, T] \to [0, \tau]$ sont tous mesurables. le résultat suivant est immédiat.

Théorème 3.2 *Supposons que pour tout entier $n \geq 1$, il existe une constante positive K_n tel que pour tout $t \in [t_0, T]$ et tous $x, y_i, \bar{x}, \bar{y}_i \in \mathbb{R}^d$ avec $|x| \vee |y_i| \vee |\bar{x}| \vee |\bar{y}_i| \leq n$,*

$$\begin{aligned} & |F(t, y_1, ..., y_k, x) - F(t, \bar{y}_i, ..., \bar{y}_k, \bar{x})|^2 \\ & \vee |G(t, y_1, ..., y_k, x) - G(t, \bar{y}_i, ..., \bar{y}_k, \bar{x})|^2 \\ & \leq K_n \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i - \bar{y}_i|^2 + |x - \bar{x}|^2 \right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

supposons aussi qu'il y a un $K > 0$ tel que pour tous $(t, y_1, ..., y_k, x) \in [t_0, T]$

$$|F(t, y_1, ..., y_k, x)|^2 \vee |G(t, y_1, ..., y_k, x)|^2 \leq K \left(1 + |x|^2 + \sum_{i=1}^{k} |y_i| \right) \tag{3.8}$$

Alors la condition 3.6 peut être remplacée par la plus faible : pour chaque entier $n \geq 1$, il existe une constante positive K_n telle que pour tous $(y_1, ..., y_k, t) \in \mathbb{R}^{d\times k} \times [t_0, T]$ et tous $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$ avec $|x| \vee |\bar{x}| \leq n$

$$|F(t, y_1, ..., y_k, x) - F(t, y_i, ..., y_k, \bar{x})|^2 \vee |G(t, y_1, ..., y_k, x) - G(t, y_i, ..., y_k, \bar{x})|^2 \leq K_n |x - \bar{x}|^2 \tag{3.9}$$

Bibliographie

[1] Bell, D.R. and Mohammed, S.E.A. (1989), On the solution of stochastic differential equations via smaU delays, Stochastics and Stochastics Reports 29, pp293-299.

[2] Dunkel, G. (1968), Single-species model for population growth depending on past history. Lecture Notes in Math. 60, pp92-99.

[3] Gikhman, I.I. and Skorohod, A.V. (1972), Stochastic Differential Equations, Springer.

[4] Hale, J.K. and Lunel, S.M.V. (1993), Introduction to Functional Differential Equations, Springer.

[5] Mao, X. (1989a), Existence and uniqueness of the solutions of delay stochastic integral equations, Sto. Anal. Appl. 7(1), pp59-74.

[6] X. Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, Horwood, 1997.

[7] Volterra, V. (1928), Sur la theorie mathematique des phenomenes hereditaires, J. Math. Pures Appl. 7, pp249-298.

[8] Wright, E.M. (1961), A functional equation in the heuristic theory of primes. Mathematical Gazette 45, ppl5-16.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{R}^k$	:	Espace réel euclidien de dimension K.
L^1	:	Espace des processus intégrables.
L^2	:	Espace des processus de carré intégrable.
$c\left([-\tau,0]:\mathbb{R}^d\right)$	:	La famille des fonction continues.
$\mathbb{E}[.]$	:	L'espérence mathématique.
1_A	:	Indicatrice de A est noté : $1_A(x)=\left\{\begin{smallmatrix}1 & ,x\in A\\ 0 & ,x\notin A.\end{smallmatrix}\right.$
$P-p.s$	:	presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$t\wedge\delta_k$	:	$t\wedge\delta_k=\min(t,\delta_k)$.
sup	:	Borne supérieure.
inf	:	Borne inférieure.
$i.e$	:	C'est-à-dire.
EDS	:	Equations différentielles stochastique.
$EDSF$	:	Equations différentielles stochastique fonctionnelles stochastiques.
$EDSR_s$	:	Equations différentielles stochastique de retard.