République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

MASMOUDI Ikram

Titre :

Arrêt Optimal et Application

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LABED Boubakeur**	UMKB	Encadreur
Dr.	**MANSOURI Badereddine**	UMKB	présedent
Dr.	**GATT Rafika**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

C'est avec fierté, honneur et enorme joie que je dédie ce modeste travail :

A mon grand amour, ma mère **"Debba Hadda Noura"** qui a sacrifié sa vie pour notre bonheur et notre réussite.

A mon trés cher pére "**Mohamed Nacer"** à qui je témoigne de l'affection et du respect.

Une dédicace du font coeur à mes soeurs : **Fatiha**, **Fouzia**, **Hana** et **Rayane**.

A mes chers frères : **Abdelkader**, **Abdallah**.

A mon fiancé : **Ramzi**.

A mes nièces adorrées : **Mayar** et **Melek**.

A mes beaux frères : **Hassen** et **Mohamed**.

A mes amies proches : **Houda**, **Zahra**, **Nihad**, **Isra**, **Hanane** et **Roukaya**.

Je pris "**ALLAH**" de leurs accorder,longue vie et bonne santé.

REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'adonné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je remercie mes parents d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été une source de motivation d'encouragements et de beaucoup de bonheur.

je remercie mes soeurs et mes frères pour leur soutien et encouragement et pour l'infini patience tout ao long mon parcours scolaire.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements les plus sincéres aux personnes qui m'ont, apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens tout particulièrement à remercier **Pr.LABED Boubakeur** qui a encadré mon travail, qu'il toujours montré à l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de se mémoire, ainsi pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Un grand merci également pour les membres du jury **Dr.MANSOURI Badereddine** et **Dr.GATT Rafika** qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Je remercie mon grand frère **Adel** qui a toujour été là pour m'aider et m'encourager.

Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département **-Mathématiques-** sans exceptions qui ont contribué à ma formation.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

IKRAM

Table des matières

Introduction

De nombreuses méthodes faisant appel en particulier au calcul stochastique ont été développées depuis quelques dizaines d'années pour la valorisation d'actifs financiers. Les premiers travaux dans ce domaine sont dûs a Louis Bachelier autour de 1900, qui a initié l'etude des marchés dans un cadre mathématique formel. Dans les années 1970, Black, Scholes et Merton, en développant des modèles probabilistes permettant de calculer explicitement des prix d'options financières, ont ouvert la voie à une nouvelle branche des mathématiques appliquées concernant l'évaluation et la couverture des options.

De façon générale, on peut définir une option comme un contrat offrant le droit (et non l'obligation) d'acquérir ou de vendre un actif (par exemple, une action) à un prix fixé et dans le futur (à une date fixée, appelée maturité, ou pendant un certain intervalle de temps). Pour fixer les idées, notons S_t le prix (fonction du temps) d'une action S, et considérons le cas classique du call européen : cette option donne le droit a son détenteur d'acheter l'action S, au prix K (appelé strike selon la terminologie anglaise) et au temps T (par exemple, dans un mois, dans un an, etc.).

Si, au temps T, l'action a une valeur d'échange supérieure à K, l'acheteur a intérêt à exercer son option (il réalise un profit $S_T - K$ en achetant l'action a prix K et en la revendant aux prix de marché). Dans le cas contraire, il ne l'exerce pas. Son gain est donc de $h(S_T) = (S_T - K)^+$. h est généralement appelée la fonction de payoff.

En fait, on voit que l'option peut être définie de manière plus synthétique par son payoff et sa date (ou ses dates) d'exercice. Le problème est de déterminer, en fonction de ces paramètres, a quel prix doit être vendue cette option. D'un point de vue mathématique, le prix juste (encore appelé prix d'arbitrage) est celui pour lequel le gain global de l'acheteur (c'est- a-dire

le profit réalisé lors de l'exercice moins le prix d'achat de l'option) est en moyenne nulle.
Parallèlement, le vendeur d'options, qui reçoit au temps initial la prime d'option, cherche à mettre en place avec cet apport une stratégie de couverture, sur le marché, qui lui garantisse au temps T d'être en mesure de payer à l'acheteur ce qu'il lui doit (c'est- à-dire le payoff).
On voit ici apparaître la première motivation pour le développement de modèles dans lesquels les actifs sont décrits par des processus stochastiques, et qui permettent d'exprimer les prix d'options sous la forme de calculs d'espérance. Dans ce document, on s'intéressera au problème de l'évaluation des options dites américaines.

Contrairement à l'exemple du call européen présenté ci-dessus, qui ne peut être exercé qu'à l'instant T (au sens où le payoff ne dépend que de la valeur de l'actif en T), une option américaine peut être exercée sur tout un intervalle de temps, généralement entre l'achat et une maturité T (on notera l'intervalle $[0;T]$). L'acheteur doit donc décider (en fonction de l'information présentée sur le marché) à quel instant il a le plus intérêt a exercer son option. Par conséquent, la valorisation des options américaines passe par l'étude des temps d'arrêt optimaux.

Aprés avoir introduit un cadre probabiliste formel pour l'étude des marchés financiers et des options américaines, on présentera des résultats généraux de la théorie de l'arrêt optimal, puis on verra comment les appliquer au problème de l'évaluation de ces options.

Chapitre 1

Généralités sur le calcul stochastique

Le but de ce chapitre est d'exposer les notions de base qu'on va utiliser dans la suite de ce mémoire. On décrit d'abord les processus stochastiques, en donnant les définitions et les propriétés élémentaires. Ensuite, on présente des généralités sur les temps d'arrêt. Puis, on rappelle les notions essentielles en théorie des martingales. La fin du chapitre est consacrée à l'introduction de la théorie des martingales locales et le mouvement Brownien.

1.1 Rappels : Processus stochastiques

1.1.1 Base Stochastique

Nous donnons tout d'abord quelques définitions de base s'appliquant à tout calcul stochastique. Dans toute la suite de ce chapitre, on supposera donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble d'évènement, $\mathcal{F}$ est une tribu contenue dans l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$.

Définition 1.1 (Processus stochastique) *Soit T un ensemble d'indice. Un processus stochastique X est la donnée de $(X_t)_{t\in T}$ où à t fixé X_t est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeur dans $\left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ et si $\omega \in \Omega$ fixé la fonction $t \longrightarrow X_t(\omega)$ est une trajectoire de processus X.*

L'ensemble T peut être :

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ ce qui correspond aux processus à temps discret.
2. L'ensemble $\mathbb{R}^+$ pour les processus à temps continue.

– On dira que Y est une **modification** du processus X si pour tout $t \in T$, $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.

– Deux processus X et Y sont dit **indistinguables** s'il existe N négligeable tel que pour $\omega \notin N$, on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout $t \in T$, de façon un peu abusive (car $\{X_t = Y_t, \forall t \in T\}$ n'est pas nécessairement un évènement), on écrit :$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in T) = 1$.

Définition 1.2 *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est* ***processus à trajectoires continues*** *(ou simplement* ***processus continu*** *) si* $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : t \longrightarrow X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1$.

-Un processus dit **càdlàg** si ses trajectoires sont continués à droite, pourvues de limites à gauche.

-Un processus dit **càglàd** si ses trajectoires sont continués à gauche, pourvues de limites à droite.

Définition 1.3 (Filtration) *Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une famille croissante de sous-tribu de $\mathcal{F}$ i.e.$\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, pour $0 \leq s < t < \infty$*

Le quadruplet $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$sera appelé **un espace de probabilité filtré** (ou simplement **espace filtré**) ou **base stochastique**.

Définition 1.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. On dit que la filtration satisfait aux conditions habituelles si elle est :*

1. **Compléte :** une filtration est complète si l'espace et complet ,et si tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables appartiennent à $\mathcal{F}_0$.
2. **Continue à droite** : $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est dit continue à droite si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ où $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$.

Définition 1.5 (processus mesurable, processus continu) *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$est dit mesurable si l'application suivante :*

$$\begin{aligned}([0;+\infty[\times\Omega, B([0,+\infty])\otimes\mathcal{F}) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, B\left(R^d\right)\right)\\ (t,\omega) &\longrightarrow X_t(\omega),\end{aligned}$$

est mesurable.

Un processus est dit continu si pour presque sûrement tout $\omega\in\Omega$, $t\longrightarrow X_t(\omega)$ est continue c'est-à-dire les trajectoires sont continués.

Définition 1.6 (Processus adapté) *Un processus est dit adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0,}$ *si pour tout* $t\geq 0$ *;* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

Remarque 1.1 *Un choix minimal de filtration pour que le processus* $X=(X_t)_{t\geq 0}$*soit adapté est la filtration canonique (ou naturelle)*

$$\forall t\geq 0\longrightarrow \mathcal{F}_t=\sigma(X_t, t\geq 0)$$

Définition 1.7 (Processus progressivement mesurable) *Un processus est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si pour tout* $t\geq 0$ *l'application suivante :*

$$\begin{aligned}([0;t]\times\Omega, \beta([0,+\infty])\otimes\mathcal{F}) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\\ (t,\omega) &\longrightarrow X_t(\omega),\end{aligned}$$

est mesurable.

Remarque 1.2 *Chaque processus progressivement mesurable est nécessairement adapté.*

1. On appelle **tribu prévisible** la tribu $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ engendrée par les processus $\mathcal{F}_t-$adapté dont les trajectoires sont continués à gauche.

2. un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit **prévisible** si la fonction $(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est mesurable pour la tribu prévisible $\mathcal{P}$.

Définition 1.8 (Espace complet) *Un espace de probabilités* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est dit complet si pour tout* $B \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mathbb{P}(B) = 0$ *;* $A \subset B$ *implique que* $A \in B$ *(et donc, naturellement, que* $\mathbb{P}(A) = 0$*).*

1.2 Temps d'arrêt

La notion de temps d'arrêt intervient de façon essentielle dans l'étude des processus stochastique.

Définition 1.9 *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration de*$\mathcal{F}$ *un temps d'arrêt adapté à*$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une variable aléatoire* τ *à valeurs dans*$\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *vérifiant* $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *pour tout* $t \geq 0$

Exemple 1.1 *Tout temps déterministe est un* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *temps d'arrêt .*

Définition 1.10 *Soit un* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*temps d'arrêt, l'ensemble*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

est une tribu d'appellée tribu des évènement antérieurs à τ;

Propriétés :

1. Une constante positive est un temps d'arrêt.
2. Si T est un temps d'arrêt, T est $\mathcal{F}_T - mesurable.$
3. Si S et T deux temps d'arrêt, $S \wedge T$ est un temps d'arrêt.
4. Si S et T deux temps d'arrêt tel que $S \leq T$,on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_T$.
5. Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus T temps d'arrêt fini ,on définit $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}$.
6. Si un processus X est adapté, X_T est $\mathcal{F}_T-$mesurable.

1.2.1 Temps d'entrée et temps de sortie

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^d$et $B \in \beta\left(\mathbb{R}^d\right)$

Définition 1.11 (Temps d'entrée) *Soit $\tau_\beta$un temps d'arrêt si*

$$\tau_\beta = \inf\{t \in \mathbb{N}, X_t \in B\},$$

alorsτ_β est un temps d'arrêt.

Définition 1.12 (Temps de sortie) *Soit S_B le temps de sortie de B tel que :*

$$\tau_\beta = \sup\{t \in \mathbb{N}, X_t \in B\};$$

alors S_B n'est pas un temps d'arrêt.

Définition 1.13 *Si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$temps d'arrêt, et $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique, on appelle processus arrêté à l'instant τ la suite aléatoire $(X_{t\wedge t})_{t\geq 0}$.*

Proposition 1.1 *Si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$temps d'arrêt, et $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique, alors la variable aléatoire $X_\tau 1_{\{\tau<+\infty\}}$ est un $F_\tau-$mesurable.*

1.3 Martingales

La notion des martingales joue un roule central dans la théorie des processus stochastiques, en particulier dans le calcul stochastique. Nous nous contentons ici d'une présentation très partielle limitée aux aspects utiles à ce mémoire.

1.3.1 Rappels : Espérance Conditionnelle

Soit l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Conditionnement par rapport à un évènement

Soit A et B deux évènements, on définit la probabilité conditionnelle de A par rapport à B par :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Pour tout B telle que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit X une variable aléatoire intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$,l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X \mid G]$ de X quand G est l'unique variable aléatoire G-mesurable tel que :

$$\int_{\Omega} \mathbb{E}[X \mid G] \, d\mathbb{P} = \int_{A} X d\mathbb{P}, \forall A \in G.$$

C'est aussi l'unique variable G-mesurable tel que :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid G) Y] = \mathbb{E}[XY]$$

pour toute variable Y, G-mesurable.

Espérance conditionnelle par rapport à une variable

On définit l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X intégrable par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu engendrée par Y, donc c'est une fonction de Y. Il existe $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $\mathbb{E}[X \mid Y] = \psi(Y)$,caractérisée par :

1. C'est une variable $\sigma(Y)$.
2. $\int_A \mathbb{E}[X \mid Y] \, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \forall A \in \sigma(Y)$.

Propriétés de l'espérance conditionnelle

Les égalités suivantes sont vraies p.s. à condition que les variables aléatoires soient intégrables, G est une sous tribu de $\mathcal{F}$.

1. **Linéarité** : Soit a et b deux constantes

$$\mathbb{E}\left[aX + bY \mid G\right] = a\mathbb{E}\left[X \mid G\right] + b\mathbb{E}\left[Y \mid G\right]$$

2. **Croissance** : Soit X et Y deux variables aléatoires tel que $X\ Y$. Alors :

$$\mathbb{E}\left(X \mid Y\right) \leq \mathbb{E}\left[Y \mid G\right]$$

3. $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid G\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$
4. Si X est G-mesurable, $\mathbb{E}\left[X \mid G\right] = X.$
5. Si Y est G-mesurable, $\mathbb{E}\left[XY \mid G\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid G\right].$
6. Si X est indépendante de G, $\mathbb{E}[X \mid G] = \mathbb{E}[X]$.
7. Si G est la tribu grossière (composée de l'ensemble vide et de Ω), $\mathbb{E}[X \mid G] = \mathbb{E}[X]$.
8. Si G et H sont deux tribus tel que $H \subset G$, alors

$$\mathbb{E}[X \mid H] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid H] \mid G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid G] \mid H]$$

   On note souvent : $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid H] \mid G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid G] \mid H]$.

1.3.2 Martingale en cas discret

On se donne une filtration croissante $\left(\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}\right)$, $\mathcal{F}_0$ contient les négligeables.

Définition 1.14 *Une suite de variable aléatoires réelles* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *est une* $\mathcal{F}_n-$*martingale si :*

1. X_n est intégrable $\forall n \in \mathbb{N}$;

2. X_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable $\forall n \in \mathbb{N}$;

3. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$;

1.3.3 Martingale en cas continu

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration croissante telle que $(\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t), \forall s \leq t$.

Définition 1.15 *Une famille de variable aléatoire $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ est une **martingale** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si :*

1. X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable, intégrable pour tout $t \geq 0$;

2. $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s, \forall s \leq t$.

-Si X est une martingale $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0), \forall t$.

-Si $(X_t, t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale : $X_t = \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_s]$.

Définition 1.16 *Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ est une **Sur-martingale**(respecti **Sous-martingale**) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si :*

1. X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable et intégrable pour tout t;

2. $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s, \forall s \leq t$. (respectivement $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$)

1.3.4 Propriétés des martingales

1. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale, alors :

$$\mathbb{E}[X_s \mid \mathcal{F}_t] = X_{t\wedge s}, s \in \mathbb{R}_{+.}$$

2. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale (respectivement sous-martingale, sur-martingale), la suite $(\mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$ est constante (i.e.$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0), \forall t \geq 0$), (respectivement croissante, décroissante).

Théorème 1.1 (convergence des martingales) *:*

-Soit $M=(M_t)_{t\geq 0}$une surmartingale càd-làg borné dans $\mathcal{L}^1$ (en particulier si elle est positive). Alors M_t converge p.s quand $t\longrightarrow +\infty$ vers une limite intégrable.

-Soit $M=(M_t)_{t\geq 0}$une martingale càd-làg borné dans $\mathcal{L}^p$ (i.e. $\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\left(\mid M_T\mid^p\right)<\infty$). Alors M_t converge p.s quand $t\longrightarrow +\infty$ vers une limite $\mathcal{L}^p-$intégrable, et converge aussi dans $\mathcal{L}^p$.

Théorème 1.2 (théorème d'arrêt) *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

1. Pour tout temps d'arrêt borné τ, la variable aléatoire M_τ est intégrable et $\mathcal{F}_\tau-$mesurable.
2. Si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés, et si $\sigma\leq\tau$, alors :

$$M_\sigma=\mathbb{E}\left(M_\tau\mid\mathcal{F}_\sigma\right).$$

Proposition 1.2 *Soit X une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$martingale de carré intégrable $(i.e.\mathbb{E}\left[X_t^2\right]<\infty$ pour tout t), alors pour $s\leq t$, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\left(X_t-X_s\right)^2\mid\mathcal{F}_s\right]=\mathbb{E}\left[X_t^2-X_s^2\mid\mathcal{F}_s\right]$$

1.3.5 Martingales locales

Définition 1.17 *On dit qu'un processus adapté à trajectoires continues $\mathbb{M}=(M_t)_{t\geq 0}$ avec $M_0=0$ p.s est une martingale locale (continue) s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\in N}$, telle que $\lim_n\tau_n=+\infty$ p.s et que $M_t^{\tau_n}$ soit une martingale uniformément intégrable pour tout n.*

On dit alors que les temps d'arrêt τ_n localisent ou réduisent $\mathbb{M}$.

Plus généralement, lorsque $M_0\neq 0$, on dit que $\mathbb{M}$ est une martingale locale (continue) si $M_t=M_0+N_t$, où le processus N est une martingale locale issue de 0.

Remarque 1.3 *Toute martingale continue est une martingale locale.*

1.3.6 Propriétés

Voici une collection de propriétés élémentaires pour les martingales locales :

1. Dans la définition d'une martingale locale (issus de 0), on peut remplacer "martingale uniformément intégrable" par "martingale" (en effet, on peut ensuite remplacer τ_n par $\tau_n \wedge n$).
2. La somme de deux martingales locales est une martingale locale .
3. Si M est une martingale locale. Alors pour tout temps d'arrêt σ M^σet $M^\sigma 1_{\{\sigma>0\}}$ sont des martingales locales (M^σ martingale locale arrêtée).
4. Si τ_n réduit M et si σ_n est une suit de temps d'arrêt tel que $\sigma_n \uparrow \infty$. Alors la suite $(\tau_n \wedge \sigma_n)$ réduit aussi M.
5. Si τ réduit M, et si σ est un temps d'arret tel que $\sigma \leq \tau$ .Alors σ réduit M.
6. Si τ et σ réduisent M, il en est de même pour $\tau \vee \sigma$.
7. L'éspace des martingales locales est un espace vectoriel, noté $\mathcal{M}_{loc}$.

Théorème 1.3 (Convergence des martingales locales) *: Si (M_t) est une martingale locale sur $[0,T]$ et si :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s<T} \mid M_t \mid\right) < \infty$$

Alors, $M_T = \lim_{t\uparrow T} M_t$ et $\mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_T)$.

1.4 Mouvement Brownien

Définition 1.18 *Un mouvement Brownien (standard) est un processus W vérifiant :*

1. $W_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.s.
2. W est continus, i.e. $t \longrightarrow W_t(\omega)$ est C^0 pour presque tout ω.
3. W est à accroissements indépendants, i.e.$\forall 0 \leq s < t : W_t - W_s$ est indépendant .
4. les accroissements sont stationnaires, Gaussiens et pour $s \leq t : W_t - W_s \backsim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Définition 1.19 *On appelle mouvement Brownien standard par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, *un mouvement Brownien standard* W *adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et tel que :*$(W_t - W_s) \perp \mathcal{F}_s \forall 0 \leq s < t$.

Définition 1.20 *On dit que* $(W_t)_{t\geq 0}$*un mouvement brownien standard si :*

$$W_0 = 0, \mathbb{P} - \mathbf{p.s.} \quad et\ \mathbb{E}\left[W_t^2\right] = t$$

1.4.1 Propriétés de mouvement Brownien

Proposition 1.3 $(W_t)_{t\geq 0}$ *est* MB *si et seulement si un processus gaussien centré de covariance :*

$$Cov\left(W_t, W_s\right) = t \wedge s$$

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB si et $c > 0$ réel, on pose :

$$X_t = cW_{t|c}$$

alors $(X_t)_{t\geq 0}$ est MB.

Proposition 1.4 *Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un* MB, *on pose pour tout* $t > 0$:

$$Z_t = tW_{1|c}$$

alors $(Z_t)_{t\geq 0}$ *est* MB.

Proposition 1.5 *: Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *est* MB, *alors :*

i) pour tout $s > 0$, $M_t = W_{t+s} - W_s$ est un mouvememt Brownien indépandent de $\mathcal{F}_s$.

ii) Soit c un réel positif, alors $M_t = cW_{\frac{t}{c^2}}$est un mouvement Brownien.

Proposition 1.6 *Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *est* MB, *alors presque sûrement on a :*

i) W_t n'est pas différentiable en aucun point t.

ii) W_t n'est pas à variation finie en aucun point t.

1.4.2 Propriétés trajectorielles

Proposition 1.7

1. Un mouvement Browenien W est un processus presque sûrement continu.
2. En chaque $t \geq 0$, les trajectoires du mouvement Brownien sont presque sûrement non dérivables.

Chapitre 2

Arrêt optimal

La plupart des options négociées sur les marchés organisés sont de type américain. Les options européennes sont plus faciles à analyser et, dans un certain nombre de cas, les propriétés des options américaines sont déduites des options européennes. Tandis que l'option européenne ne peut être exercée qu'à l'échéance, la nouvelle caractéristique des options américaines est la possibilité d'exercer l'option à tout moment avant l'échéance, et ceci complique beaucoup son évaluation. Nous rappelons les notations suivantes :

- S_n la valeur du sous-jacent à la date n.
- T la date de maturité de l'option.
- K le prix d'exercice fixé par l'option.
- r le taux d'intérêt sans risque.
- s la volatilité du prix de sous-jacent.

Définition 2.1 (Option) *En finance, une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas de l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (Strike) pendant un temps donné ou à une date fixée. Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation sur le prix futur de l'actif sous-jacent, ou d'assurance contre une évolution défavorable de ce prix. L'actif sous-jacent peut par exemple être une action, une obligation, un taux de change entre deux devises, une matière première ou encore un contrat à terme sur* *n'importe quel de ces produits.*

Définition 2.2 (Option américaine) *Une option américaine peut être exercée par son détenteur à tout moment avant la date d'échéance. Les options américaines sont en général plus chères que les actions européennes (qui ne peuvent etre exercées qu'à la date d 'échéance), compte tenu de leur plus grande souplesse.*

Définition 2.3 (Option européenne) *Les options européennes sont des options qui ne peuvent être exercée qu'à leur échéance. Il s'agit donc d'un contrat qui donne le droit d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix déterminé et à une date donnée.*

2.1 Options américaines en temps discret

Une option européenne ne peut être exercée qu'à la date de l'échéance, donc si Z est le pay-off de cette option à la date T, Z est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable. Par contre, une option américaine peut être exercée à n'importe qu'elle date $n = 1, 2, ..., T$. Pour modéliser cette propriété, on construit un processus adapté $(Z_n, n \in T)$ où tout Z_n est une option européenne d'une date terminal n. Pour un call américain de prix d'exercice K : $Z_n = \max(S_n - K, 0)$. On appelle $(Z_n, n \in T)$ le processus de pay-off. Nous voulons évaluer le prix de l'option à n'importe quelle date n, donc nous construisons un processus $(U_n,\ n \in T)$ que nous appelons le processus de prix. L'astuce est de procéder par récurrence dans le temps en commençant par la date de l'échéance T pour avoir :

$$U_T = Z_T$$

Quelle est la valeur du processus à la date $T - 1$? A cette date, le titulaire de l'option aura deux choix à prendre :

– Soit il exerce l'option pour gagner Z_{T-1}.

– Ou bien attendre la date T pour gagner Z_T.

Dans le deuxième cas, l'option sera équivalente à une option européenne tenue au cours de la période de temps entre $T - 1$ et T, alors l'émetteur doit être prêt à payer le montant

Z_T. Toutefois, à la date $T-1$, l'émetteur doit gagner le maximum entre Z_{T-1} et le montant nécessaire à la date $T-1$ pour gérer Z_T à la date T. En d'autres termes, l'émetteur aura besoin d'investir $S_{T-1}^0 \mathbb{E}^* \left(\tilde{Z}_T \mid \mathcal{F}_{T-1} \right)$ avec $\tilde{Z}_T = Z_T / S_T^0$ dans une stratégie de portefeuille admissible pour gérer Z_T à la date T. Donc nous pouvons dire que la valeur de l'option à la date $T-1$ doit être :

$$U_{T-1} = \max \left(Z_{T-1}, S_{T-1}^0 \mathbb{E}^* \left[\tilde{Z}_T \mid \mathcal{F}_{T-1} \right] \right)$$

Par analogie, on déduit que le prix de l'option à la date $n-1$ est :

$$U_{T-1} = \max \left(Z_{n-1}, S_{T-1}^0 \mathbb{E}^* \left[\frac{U_t}{S_t^0} \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \right)$$

Si nous assumons que le taux d'intérêt est constant sur une période de temps et égal à r :

$$S_n^0 = (1+r)^n$$

et

$$U_{n-1} = \max \left(Z_{n-1}, \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^* \left[U_n \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \right)$$

où $\tilde{U} = U_n / S_n^0$ est le prix actualisé d'une option américaine. définissons pour tout $n = 1, 2, ..., T$.

$$\tilde{U}_{n-1} = \max \left(\tilde{Z}_{n-1}, \mathbb{E}^* \left[\tilde{U}_n \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \right) \tag{2.1}$$

Cette équation assure qu'à chaque instant $n-1$, l'émetteur de l'option aura suffisamment de fonds pour couvrir le coût d'exercice de l'option à la date $n-1$, ou bien gérer suffisamment de fonds pour la couverture de toutes les éventualités à la date T. D'un point de vue mathématique, la structure obtenue dans 2.1 avait été étudié par des probabilistes qui étaient intéressés par la modélisation de problèmes d'arrêts optimales.

2.1.1 Les temps d'arrêts

Le détenteur d'une option américaine peut exercer ses droits en tout moment jusqu'à la date de maturité. Cette décision est prise selon les informations valables à la date n. Nous construisons les modèles en temps discret sur un espace de filtration finie $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{0\leq n\leq N}, \mathbb{P}\right)$ la date de l'exercice est définie par une variable aléatoire dite temps d'arrêt. Commençons par introduire deux définitions importantes :

Définition 2.4 *Soit $(X_n, n \in \{0,1,2,...,N\})$ une suite de variables aléatoires et v une variable aléatoire à valeur dans $(X_n, n \in \{0,1,2,...,N\})$, notons X_v la variable aléatoire définie par :*

$$X_v(\omega) = X_{v(\omega)}(\omega) \qquad \textit{ou encore } X_v = \sum_{n=0}^{n=N} X_n 1_{v=n}$$

et (X_n^v) la suite de variables aléatoires définie par :

$$X_n^v = X_n^v 1_{n<v} + X_v 1_{n\geq v} \qquad \textit{ou encore } X_n^v = X_{n\wedge v}$$

la suite X^v est la suite X arretée à v.

Définition 2.5 *Une variable aléatoire n qui prend ses valeurs dans $\{0,1,2,...,N\}$ est un temps d'arrêt si pour chaque $n \in \{0,1,2,...,N\}$:*

$$\{v = n\} \in \mathcal{F}_n$$

Soit $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite adaptée à la filtration $\mathcal{F}_{0\leq n\leq N}$ et soit v un temps d'arrêt. La série arrêtée à v est définie par :

$$(X_n^v) = X_{v(\omega)\wedge n}(\omega)$$

Donc sur l'ensemble $v = j$,nous avons :

$$X_t^v = X_j \qquad si \qquad j \leq t$$

$$X_t^v = X_n \qquad si \qquad j > t$$

Notons que $X_n^v(\omega) = X_v(\omega)\,(= X_j \quad sur \quad \{v = j\})$.

Proposition 2.1 *Soit* (X_n) *une suite adaptée et* n *un temps d'arrêt, alors la suite* $(X_n^v)_{0\leq n\leq N}$ *est une suite arrêtée adaptée, de plus si* (X_n) *est une martingale (resp. surmartingale)alors* (X_n^v) *est une martingale (resp. surmartingale).*

Démonstration :

Nous pouvons voir que pour $n \geq 1$:

$$X_{v\wedge n} = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j\left(X_j - X_{j-1}\right)$$

où $\phi_j = 1_{\{j\leq v\}}$. Comme $\{j \leq v\}$ est le complémentaire de l'ensemble $\{v < j\} = \{v \leq j-1\}$, le processus $(\phi_t)_{0\leq t\leq N}$ est un processus prévisible.

On voit que $(X_{v\wedge n})_{0\leq t\leq N}$ est adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq t\leq N}$. De plus si (X_n) est une martingale, $(X_{v\wedge n})$ est aussi une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ puisque c'est la transformée de martingale de (X_n).

2.1.2 L'enveloppe de Snell

Pour mieux comprendre les propriétés du processus défini par 3.1 : soit $Y = (Y_n, n \in N)$ un processus intégrable, adapté, qui définit un nouveau processus $Z = (Z_n, n \in N)$ par :

$$\begin{aligned} Z_T &= Y_T \qquad (2.2)\\ Z_n &= \max\left(Y_n, \mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right), \quad n = 0, 1, ..., T-1. \end{aligned}$$

Le processus (Z_n) est appelé l'enveloppe de Snell du processus (Y_n),qui est un processus adapté.

Théorème 2.1 *Le processus* (Z_n) *est une surmartingale, c'est la plus petite sur martingale majorant* (Y_n) *tel que* $Z_n \geq Y_n$ *pour tout* $n \in T$.

Démonstration : L'intégrabilité de Z découle de l'équation 2.2 et comme le processus Y est intégrable :

$$\mathbb{E}\left[\mid Z_T \mid\right] = \mathbb{E}\left[\mid Y_T \mid\right] < \infty$$
$$\mathbb{E}\left[\mid Z_n \mid\right] \leq \sup\left(\mathbb{E}\left[\mid Y_n \mid\right], \mathbb{E}\left[\mid Z_{n+1} \mid\right]\right), n = 0, 1, ..., T-1.$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[\mid Z_{T-1} \mid\right] < \max\left(\mathbb{E}\left[\mid Y_{T-1} \mid\right].\mathbb{E}\left[\mid Z_T \mid\right]\right) = \max\left(\mathbb{E}\left[\mid Y_{T-1} \mid\right].\mathbb{E}\left[\mid Z_T \mid\right]\right) < \infty$$

En répétant le même argument pour $n - T - 2, ..., 0$, le résultat est établi .

La propriété de surmartingale découle immédiatement de la définition de 2.1, c'est-à-dire : tout $Z_n > \mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$ vérifie le fait que Z domine Y. Pour prouver la propriété de majoration la plus petite, soit $W = (W_n, n \in T)$ une autre surmartingale qui majore le processus Y. Nous devons démontrer que W domine Z. Il est clair que $W_T \geq Y_T = Z_T$. Comme W est une surmartingale :

$$W_{T-1} \geq \mathbb{E}\left[W_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right] \geq \mathbb{E}\left[Z_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right]$$

Comme W majore Y,$W_{T-1} > Y_{T-1}$, alors :

$$W_{T-1} \geq \max\left(Y_{T-1}, \mathbb{E}\left[Z_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right]\right) = Z_{T-1}$$

Le résultat général est obtenu par récurrence.

Les temps d'arrêt jouent un rôle important dans l'étude de l'enveloppe de Snell. Définissons :

$$\tau = \inf\left\{n \in \mathcal{Z}, Z_n = Y_n\right\}$$

Proposition 2.2 :τ *est un temps d'arrêt borné*

Démonstration : comme $Z_T = Y_T$,τ prend ses valeurs dans l'ensemble T, alors $\tau(\omega) \leq T$, pour tout $\omega \in \Omega$. τ est borné.

Pour prouver que τ est un temps d'arrêt, notons que les événements :

$$(\tau = k) = (Z_0 > Y_0) \cap (Z_1 > Y_1) \cap ... \cap (Z_{k-1} > Y_{k-1}) \cap (Z_k > Y_k) \in \mathcal{F}_K$$

Comme τ prend ses valeurs dans T, nous pouvons écrire :

$$\tau = \min \{n \in T, Z_n = Y_n\}$$

D'après le théorème 2.1 et le théorème 2.2, nous trouvons que l'enveloppe de Snell arrêté $(Z_{\tau\wedge n}, n \in T)$ est une surmartingale.

Théorème 2.2 *L'enveloppe de snell arrêté $(Z_{\tau\wedge n}, n \in T)$ est une martingale.*

Démonstration : Nous utilisons la transformée de martingale pour écrire :

$$Z_{\tau\wedge n, n\in T} = Z_0 + \sum_{j=1}^{n} C_j \left(Z_j - Z_{j-1}\right)$$

ou tout $C_j = 1_{\tau \geq j}$.Pour $n \leq T - 1$:

$$\begin{aligned} Z_{\tau\wedge(n+1)} - Z_{\tau\wedge n, n\in T} &= C_{n+1} \left(Z_{n+1} - Z_n\right) \\ &= 1_{\tau\geq n+1} \left(Z_{n+1} - Z_n\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Par définition,$Z_n = \max\left(Y_n, \mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right)$ et pour l'évènement $(\tau \geq n+1)$,on a $Z_n > Y_n$,alors :

$$Z_n = \mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \quad \text{sur} \quad (\tau \geq n+1) \tag{2.4}$$

Nous pouvons montrer que :

$$Z_{(\tau\geq n+1)} - Z_{\tau\wedge n} = 1_{(\tau\geq n+1)} \left(Z_{n+1} - \mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right) \tag{2.5}$$

Supposons que $(\tau \geq n+1)$, le côté gauche de l'équation 2.5 sera $Z_{n+1} - Z_n$ et le côté droit sera $Z_{n+1} - \mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$, ce qui est approuver par 2.4. Maintenant supposons que

$\tau \leq n$, le côté gauche de 2.5 est $Z_\tau - Z_\tau = 0$. Alors le côté droit est aussi égal à 0 quand l'indicateur de la fonction disparaît. La formule 2.5 est vérifiée. Prenons maintenant la probabilité conditionnelle dans 2.5. Comme $(\tau \geq n+1) = (\tau \leq n)^c \in \mathcal{F}_n$, nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left[Z_{(\tau \geq n+1)} - Z_{\tau \wedge n} \mid \mathcal{F}_n\right] = 1_{(\tau \geq n+1)} \mathbb{E}\left[Z_{n+1} - \mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \mid \mathcal{F}_n\right]$$

D'où le resultat.

2.1.3 Décomposition de Doob

Cette décomposition est utilisée en finance pour décomposer l'évolution d'un portefeuille d'actifs financiers en une partie prévisible et une partie non prévisible. La partie non prévisible sera en moyenne nulle.

Proposition 2.3 *:Toute surmartingale $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ admet une décomposition unique :*

$$U_n = M_n - A_n$$

Ou (M_n) est une martingale et (A_n) est un processus croissant nul en 0.

Démonstration : Pour $n = 0, M_0 = U_0, A_0 = 0$,nous avons :

$$U_{n+1} - U_n = M_{n+1} - M_n - (A_{n+1} - A_n)$$

En conditionnant les deux côté de l'équation par rapport à la filtration et en utilisant les propriétés de M et de A :

$$-(A_{n+1} - A_n) = E\left[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] - U_n$$

et

$$M_{n+1} - M_n = U_{n+1} - E\left[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$$

(M_n) et (A_n) sont entièrement déterminés. En utilisant l'équation précédente, nous pouvons voir que (M_n) est une martingale et que (A_n) est un processus prévisible croissant (puisque (U_n) est une surmartingale).

Supposons que (U_n) est une enveloppe de Snell d'une suite adaptée (Z_n). Nous pouvons donner une caractérisation du plus grand temps d'arrêt optimal pour (Z_n) en utilisant un processus croissant (A_n) et la décomposition de Doob pour (U_n).

Proposition 2.4 *: Le plus grand temps d'arrêt optimal pour (Z_n) est donné par :*

$$V_{\max} = \begin{Bmatrix} N & si\ A_N = 0 \\ \inf\{n, A_{n+1} \neq 0 & si\ A_N \neq 0\} \end{Bmatrix}$$

Démonstration : *En utilisant $(A_n)_{0 \leq n \leq N}$ qui est un processus prévisible,nous pouvons voir que nmax est un temps d'arrêt. De l'équation $U_n = M_n - A_n$ An et puisque $A_j = 0$ pour $j \leq V_{\max}$, nous déduisons que , en conclusion Unmax est une martingale. Pour prouver l'optimalitéde nmax il suffit de prouver que :*

$$U_{V_{\max}} = Z_{V_{\max}}$$

Notons que :

$$\begin{aligned} U_{V_{\max}} &= \sum_{j=0}^{N-1} 1_{\{V_{\max}=j\}} U_j = 1_{\{V_{\max}=N\}} U_N \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} 1_{\{V_{\max}=j\}} \max\left(Z_j, \mathbb{E}\left[U_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right]\right) 1_{\{V_{\max}=N\}} Z_N \end{aligned}$$

Nous avons $\mathbb{E}\left[U_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right] = M_j - A_{j+1}$,sur l'ensemble $\{V_{\max} = j\}, A_j = 0$ et $A_{j+1} > 0$,alors $U_j = M_j$ et $\mathbb{E}\left[U_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right] = M_j - A_{j+1} < U_j$.On a $U_j = \max\left(Z_j, \mathbb{E}\left[U_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right]\right) = Z_j$.Finalement :

$$U_{V_{\max}} = Z_{V_{\max}}$$

Reste à démontrer que c'est le plus grand temps d'arrêt optimal. Si v est un temps d'arrêt *tel que* $v \geq v_{\max}$ *et* $\mathbb{P}(v > v_{\max}) > 0$,*alors :*

$$\mathbb{E}[U_v] = \mathbb{E}[M_v] - \mathbb{E}[A_v] = \mathbb{E}[U_0] - \mathbb{E}[A_v] < \mathbb{E}[U_0]$$

Donc U_v *ne peut être une martingale, ce qui établit la démonstration.*

2.2 Temps d'arrêt optimal

2.2.1 Définition et caractérisation

i) On dit que τ^*est un temps d'arrêt optimal, vu de $t = 0$, pour le problème d'arrêt $\left((Z_t)_{t\geq 0}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ si $\mathbb{E}[Z_{\tau^*}] = \mathbb{E}[U_0] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\infty}} \mathbb{E}[Z_\tau]$.

ii) Vu de $t \geq 0$,on même caractérisation : $\mathbb{E}\left[Z_{\tau_t^*}\right] = \mathbb{E}[U_t] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,\infty}} \mathbb{E}[Z_\tau]$.

Du point de vue des options américaines, un temps d'arrêt optimal sera donc un temps d'arrêt qui permet e activement de réaliser la valeur initiale de l'option au moment de l'exercice. On a la caractérisation suivante.

Proposition 2.5 τ^**est optimal vu de* 0 *si et seulement si :*

i) $U^{\tau^*} = (U_{t\wedge\tau^*})_{t\geq 0}$ est une martingale.

ii) $U_{\tau^*} = Z_{\tau^*}$

Avant de s'intéresser a l'existence de temps optimaux, on donne un point de vue déterministe qui éclaire la proposition ci-dessus et le lien entre (U_t) et (Z_t). Supposons donc que tous les processus sont déterministes (ce qui revient a postuler $F_t = \{\emptyset, \Omega\}$ $\forall t$).$Z = (z_s)_{s\geq 0}$ et $U = (u_s)_{s\geq 0}$ sont donc des fonctions et on a $u_t = \sup_{s\geq t} z_s$.

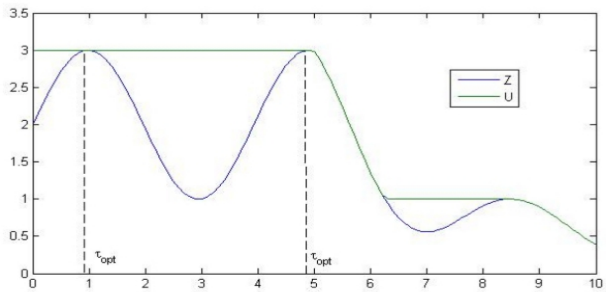

Figure Processus obstacle (Z), enveloppe de Snell (U), et temps d'arrêt optimaux

Sur la figure, on représente les deux processus Z et U. Ici, il y a deux temps d'arrêt optimaux, et l'on voit que, jusqu'au plus grand temps d'arrêt optimal, U est martingale (c'est- a-dire constante ici). Notons qu'entre les deux temps d'arrêt optimaux, il n'y en a aucun autre. Par ailleurs, il peut ne pas exister de temps d'arrêt optimal (par exemple si Z est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$). A horizon fini, si $Z_t \leq Z_T$,$\forall t \leq T$ alors le plus grand temps d'arrêt optimal est toujours T. On verra (et c'est naturel) que l'équivalent aléatoire de cette condition est $Z_t \leq \mathbb{E}\left[Z_T \mid \mathcal{F}_t\right]$.

2.2.2 Existence de temps d'arrêt optimaux

Au vu de ce qui précède, $\tau_* = \inf\left\{t \geq 0 \text{ tq } U_t = Z_t\right\}$ est un candidat naturel pour un temps d'arrêt optimal. On s'intéresse d'abord aux temps d'arrêt -optimaux. On pose, pour $\varepsilon > 0, D_t^{\varepsilon} = \inf\left\{s \geq t; U_s < Z_s + \varepsilon\right\}$. La proposition implique alors que pour $t \geq 0, \varepsilon > 0, D_t^{\varepsilon} < \infty$. C'est un temps d'arrêt comme temps d'entrée d'un processus cad $\mathcal{F}_t$-adapté dans l'ouvert $]-\infty, \varepsilon[$. On a la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Pour $\varepsilon > 0$ et $t \geq 0, D_t^{\varepsilon}$ est un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt et :*

$$\mathbb{E}\left[U_t\right] = \mathbb{E}\left[U_{D_t^{\varepsilon}}\right] \ \ et\ \mathbb{E}\left[U_{D_t^{\varepsilon}}\right] \leq \mathbb{E}\left[Z_{D_t^{\varepsilon}}\right] + \varepsilon$$

Eléments de preuve : *(U_t) est une surmartingale positive de la classe (D), donc par le théorème de Doob-Mayer on peut écrire $U + M - A$ où :*

i) M est une martingale de la classe (D).

ii) A est un processus prévisible, croissant, et $A_0 = 0$

On peut alors montrer que (A_t) et $A_{D_t^\varepsilon}$ sont in distinguable (c'est la partie ‹difficile ›de la preuve qu'on ne détaille pas ici, l'intérêt est d'introduire le processus (A_t) qui sera utile dans la suite).
On a donc facilement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_t] &= \mathbb{E}[M_t] - \mathbb{E}[A_t] \\
&= \mathbb{E}\left[M_{D_t^\varepsilon}\right] - \mathbb{E}\left[A_{D_t^\varepsilon}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[U_{D_t^\varepsilon}\right]
\end{aligned}$$

De plus $D_t^\varepsilon < \infty$ et U et Z sont continués à droite donc $U_{D_t^\varepsilon} \leq Z_{D_t^\varepsilon} + \varepsilon$, et ainsi :

$$\mathbb{E}\left[U_{D_t^\varepsilon}\right] \leq \mathbb{E}\left[Z_{D_t^\varepsilon}\right] + \varepsilon$$

Cette approximation via les temps d'arrêt optimaux permet de prouver l'existence d'un temps d'arrêt optimal dans le cas d'un obstacle (Z_t) régulier.

Théorème 2.3 *On suppose que (Z_t) est régulière, c'est-à-dire qu'il est continu et vérifie $\mathbb{E}[\sup_{\mathbb{R}^+} Z_s] < \infty$.on a :*

i) $(U_t) = Snell(\{Z_t\})$ est lui aussi régulier.

ii) Si l'on pose $\tau_0 = \inf\{s \geq 0 \text{ tq } U_s = Z_s\}$, alors il existe un temps d'arrêt optimal si et seulement si $\mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = 1$,et alors τ_0 est le plus petit temps d'arrêt optimal.

On voit de plus qu'en se plaçant à horizon ni $T > 0$, on a $\mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = \mathbb{P}(\tau_0 < T)$, donc sous les hypothèses de régularité l'existence d'un temps d'arrêt optimal est garantie. Si l'on se place de plus dans un cadre discret, l'hypoth èse de régularité devient superflue, et il y a ainsi toujours un temps d'arrêt optimal au problème.
On peut enfin s'intéresser au plus grand (s'il existe) temps d'arrêt optimal. On a la proposition suivante :

Proposition 2.7 *On suppose toujours que* (Z_t) *est un obstacle régulier.Alors :*

i) Si τ^* est un temps temps d'arret optimal, alors $\tau^* \leq \tau_{\max} = \inf \{s; A_s > 0\}$.

ii) Si $\mathbb{P}(\tau_{\max} < \infty) = 1$, alors $\tau_{\max}$ est optimal.

2.2.3 Arrêt optimal en temps discret

Supremum essentiel. Intégrabilité uniforme

Supremum essentiel Il est bien connu que si $(X_n)_{n\in N}$ est une séquence de variables aléatoires réelles , $\sup_{n\in N} X_n$ est une variable aléatoire (avec des valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Lorsque d'innombrables familles de variables aléatoires doivent être prises en considération, selon la théorie de l'arrêt optimal, la notion de limite supérieure essentielle est nécessaire.

Théorème 2.4

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires réelles (avec un ensemble d'index éventuellement écountable I). Il existe une variable aléatoire $\bar{X}$ avec des valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, qui est unique jusqu'à des événements nuls, tels que

1. Pour tout $i \in I$ $X_i \leq \bar{X}$
2. Si X est une variable aléatoire avec des valeurs dans $\mathbb{R}$ satisfaisant $X_i \leq X$, pour tous $i \in I$, puis $\bar{X} \leq X$

De plus, il existe un sous-ensemble dénombrable J de I tel que $\bar{X} = \sup_{i\in J} X_i$
La variable aléatoire $\bar{X}$ est appellé la limite supérieure essentielle (ou supremum essentiel) de la famille $(X_i)_{i\in I}$ et désigné par $ess\sup_{i\in I} X_i$.

Proof. En utilisant un mappage croissant de un à un de $\bar{\mathbb{R}}$ vers $[0,1]$, nous pouvons supposer que les X_i prennent des valeurs dans $[0,1]$. Maintenant donnant un sous-ensemble dénombrable J de I

$$\bar{X}_j = \sup_{i\in J} X_i$$

■

Ceci définit pour chaque J, une variable aléatoire avec des valeurs dans $[0,1]$. Désignons par $\mathcal{P}_0$ l'ensemble de tous les sous-ensembles dénombrables de I et notons

$$\alpha = \sup_{J\in\mathcal{P}_0} \mathbb{E}\bar{X}_J$$

Considérons une séquence $(J_n)_{n\in N}$ d'éléments en $\mathcal{P}_0$ telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\bar{X}_{J_n} = \alpha$. L'union $J^* = \cup_{n\in N} J_n$ est un sous-ensemble dénombrable de I et nous avons $\alpha = \mathbb{E}\bar{X}_{J^*}$. Nous allons maintenant prouver que la variable aléatoire $\bar{X} = \bar{X}_{J^*}$ satisfait aux conditions requises.
Premier, correctif $i \in I$. L'ensemble $J^* \cup \{i\}$ est un sous-ensemble dénpmbrable de I et $\bar{X}_{J^*\cup\{i\}} = \bar{X} \vee X_i$. Donc, $\mathbb{E}\left(\bar{X} \vee X_i\right) \leq \mathbb{E}\bar{X}$, et $\bar{X} \vee X_i = \bar{X}$. Ce qui signifie $X_i \leq \bar{X}$.
Considérons ensuite une variable aléatoire X telle que $X \geq X_i$, pour tout $i \in I$. Puisque J^* est dénombrable, nous avons $X \geq \sup_{i\in J^*} X_i = \bar{X}$.

Définition 2.6 *Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires de valeur réelle aurait la propriété de réseau si, pour tous indices $i, j \in I$, il existe un index $k \in I$ tel que $X_k \geq X_i \vee X_j$.*

Si $(X_i)_{i\in I}$ a la propriété treillis, il existe une séquence $(i_n)_{n\in N}$ d'indices tels que la séquence $(X_{i_n})_{n\in N}$ est non décroissant (jusqu'à des événements) et $ess\sup_{i\in I} X_i = \sup_{n\in N} X_{i_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} X_{i_n}$.
Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires non négatives avec la propriété de réseau. Nous avons $\mathbb{E}\left(ess\sup_{i\in I} X_i\right) = \sup_{n\in N} \mathbb{E}X_i$ et, plus généralement, pour toute sous$-\sigma-$algèbre B, $\mathbb{E}\left(ess\sup_{i\in I} X_i \mid B\right) = ess\sup_{i\in I} \mathbb{E}\left(X_i \mid B\right)$. Ces égalités restent valables si l'hypothèse de non négativité est remplacée par $\mathbb{E}ess\sup_{i\in I} \mid X_i \mid < \infty$.

Intégrabilité uniforme

Définition 2.7 *Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de vraies variables aléatoires intégrables est appelée uniformément intégrable si* $\lim_{\alpha\longrightarrow+\infty} \sup \mathbb{E}\left(\mid X_i \mid 1_{\{\mid X_i\mid\geq\alpha\}}\right) = 0$. *Qu'une famille nie de variables aléatoires intégrables est uniformément intégrable. on peut également prouver que si $(X_n)_{n\in N}$ est délimité $\mathcal{L}^p$ pour certains $p > 1$, la séquence $(X_n)_{n\in N}$ est uniformément intégrable. Cela* *découle d'Holder est l'inégalité, dont nous dérivons*

$$\mathbb{E}\left(\mid X_i \mid 1_{\{\mid X_i \mid \geq \alpha\}}\right) \leq \parallel X_i \parallel_p \left(\mathbb{P}\left(\mid X_i \mid \geq \alpha\right)^{1-(1/p)} \leq \parallel X_i \parallel_p \left(\frac{\parallel X_1 \parallel_1}{\alpha}\right)^{1-(1/p)} \leq \frac{\parallel X_i \parallel_p^{2-(1/p)}}{\alpha^{1-(1/p)}}\right)$$

Proposition 2.8 *Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires intégrables est uniformément intégrable si et seulement si $\lim_{i\in I\in} \mathbb{E} \mid X_i \mid < \infty$. et, pour toute $\varepsilon > 0$. il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\mathbb{P}(A) \leq \eta \Longrightarrow \sup_{i\in I} \mathbb{E}\left(\mid X_i \mid 1_A\right) \leq \varepsilon$$

Proposition 2.9 *Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une variable aléatoire intégrable , la famille de toutes les attentes conditionnelles $\mathbb{E}(X \mid B)$, où B est tout sous-champ σ de $\mathcal{F}$, est uniformément intégrable.*

Proposition 2.10 *Soit $(X_n)_{n\in N}$ une séquence uniformément intégrable qui converge en probabilité vers une variable aléatoire X. Alors, X est intégrable et nous avons une convergence dans L^1.*

2.2.4 Arrêt optimal en temps continu

L'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est équipé d'une filtration temporelle continue $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Nous supposons que les soi-disant conditions habituelles sont remplies, ce qui signifie la filtration est just continue et complète.

Nous notons γ l'ensemble de tous les temps d'arrêt par rapport à la filtration $\mathbb{F}$ et introduisons le sous-ensemble suivant de γ :

$$\gamma_{t,T} = \{\tau \in \gamma \mid \mathbb{P}(\tau \in [t, T]) = 1\}, \quad 0 \leq t \leq T < \infty.$$

$$\gamma_{t,\infty} = \{\tau \in \gamma \mid \mathbb{P}(\tau \in [t, +\infty]) = 1\}, \quad t \geq 0.$$

Nous rappelons maintenant quelques résultats de base sur les martingales et les supermartingales en temps continu.

Théorème 2.5 *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale droite continue. Si σ, τ sont des temps d'arrêt bornés avec $\sigma \leq \tau$, les variables aléatoires M_σ et M_τ sont intégrables et*

$$\mathbb{E}\left(M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right) = M_\sigma \quad a.s.$$

Théorème 2.6 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une supermartingale non droite continu. La limite $X_\infty = \lim_{t\longrightarrow\infty} X_t$ existe avec probabilité 1, et, si σ, τ, des temps d'arrêt $\sigma \leq \tau$, nous avons*

$$\mathbb{E}\left(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right) = X_\sigma \quad a.s.$$

Notez que dans la déclaration ci-dessus, les temps d'arrêt σ et τ peuvent être infinis.

Théorème 2.7 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un $\mathbb{F}-$supermartingale intégrable. Si $t \longrightarrow \mathbb{E}X_t$ est continu à droite, le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ h a une modification càdlàg qui est un $\mathbb{F}-$supermartingale.*

Nous utiliserons la terminologie suivante.

Définition 2.8 *Un processus adapté droite continue $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit être*

- *régulier si, pour chaque $\tau \in \gamma_{0,\infty}, X_\tau$ est intégrable et, pour chaque séquence non décroissante $(\tau_n)_{n\in N}$ des temps d'arrêt avec $\tau = \lim_{n\longrightarrow\infty} \tau_n$, nous avons $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left(X_{\tau_n}\right) = \mathbb{E}\left(X_\tau\right)$;*
- *de classe D si la famille $(X_\tau)_{\tau\in\gamma_{0,\infty}}$ est uniformément intégrable.*

Notez qu'un processus régulier peut avoir des chemins discontinus. Exemple : soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus $\mathbb{F}-$Poisson d'intensité λ, nous avons $\mathbb{E}N_\tau = \lambda\mathbb{E}\tau$ pour tout temps d'arrêt τ est le processus $(N_{t\wedge 1})_{t\geq 0}$ est régulier.

Chapitre 3

Application : options américaines

3.1 Application aux options américaines

Nous allons travailler dans un marché viable complet. La modélisation sera basée sur un espace de filtration $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{0\leq n\leq \mathbb{N}}, \mathbb{P}\right)$. Notons $\mathbb{P}^*$ l'unique probabilité sous laquelle tout prix d'actif actualisé est une martingale.

3.1.1 Couverture des options américaines

Nous avons défini au début de ce chapitre (U_n) le processus de valeur d'une option américaine décrite par la suite (Z_n) par le système :

$$\begin{aligned} U_N &= Z_N \\ U_n &= \max\left(Z_n, S_n^0 \mathbb{E}^*\left(\frac{U_{n+1}}{S_{n+1}^0} \mid \mathcal{F}_n\right)\right) \end{aligned}$$

Alors, la suite $\left(\tilde{U}_n\right)$ définie par $\tilde{U}_n = U_n \mid S_n^0$ (le prix actualisé de l'option) est l'enveloppe de Snell de la suite $\left(\tilde{Z}_n\right)$ sous $\mathbb{P}^*$.On déduit, que :

$$\tilde{U}_n = S_n^0 \sup_{v\in\tau_{n,N}} \mathbb{E}^*\left[\tilde{Z}_v \mid \mathcal{F}_n\right]$$

En conséquence :

$$U_n = S_n^0 \sup_{v \in \tau_{n,N}} \mathbb{E}^* \left[\frac{Z_v}{S_v^0} \mid \mathcal{F} \right]$$

D'aprés la composition de Doob nous pouvons écrire :

$$\tilde{U}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n$$

où $(\tilde{M}_n)$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale et $(\tilde{A}_n)$ un processus prévisible non négatif nul en 0. Puisque le marché est complet, il existe une stratégie d'autofinancement ϕ telle que :

$$V_N(\phi) = S_N^0 \tilde{M}_N \quad \text{i.e.} \quad \tilde{V}_N(\phi) = \tilde{M}_N$$

La suite est une $\mathbb{P}^*$-martingale, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_N(\phi) &= \mathbb{E}^* \left[\tilde{V}_N(\phi) \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[\tilde{M}_N \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= \tilde{M}_N \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\tilde{U}_n = \tilde{V}_n(\phi) - \tilde{A}_n$$

Alors :

$$U_n = V_n(\phi) - A_n$$

Où $A_n = S_n^0 \tilde{A}_n$.

D'après l'équation précédente, l'auteur d'une option peut lui-même se couvrir parfaitement : une fois qu'il reçoit une prime $U_0 = V_0(\phi)$, il peut gérer une richesse égale à $V_n(\phi)$ à la date n qui est plus grande que U_n et Z_n.

La date de l'exercice optimal sera choisie parmi tous les temps d'arrêts. Pour le titulaire de l'option, il n'y a aucun sens à exercer l'option à la date n quand $U_n > Z_n$, puis qu'il va échanger une option qui vaut U_n pour un montant d'exercice Z_n. Alors il existe une date optimale d'exercice τ tel que $U_\tau = Z_\tau$. D'autre part, il n'y a aucun intérêt à exercer l'option après la date :

$$V_{\max} = \inf \{j, A_{j+1} \neq 0\}$$

qui est égale à $\inf \left\{ j, \tilde{A}_{j+1} \neq 0 \right\}$. A la date d'exercice, vendre l'option fournit au titulaire un bénéfice $U_{v\max} = V_{v\max}$ et, suivant la stratégie ϕ de cette date, il crée un portefeuille d'une valeur strictement plus grande que la valeur de l'option à la date $V_{v\max}+1, V_{v\max}+2, ..., N$. Alors nous posons comme deuxième condition $\tau \leq V_{v\max}$, qui nous permet de dire que U_τ est une martingale. Une date optimale d'exercice est un temps d'arrêt optimal pour la suite $\left(\tilde{Z}_n\right)$ sous la probabilité $\mathbb{P}^*$. Si l'émetteur de l'option se couvre en utilisant une stratégie ϕ définie ci-dessus et ledétenteur exerce son option à la date τ qui n'est pas optimal, alors $U_\tau > Z_\tau$ ou A_τ. Dans les deux cas, l'émetteur fait un bénéfice $V_\tau(\phi) - Z_\tau = U_\tau + A_\tau - Z_\tau$ qui est positif.

3.1.2 Comparaison entre option américaine et européenne

Une option américaine offre à son titulaire plus de possibilités que son homologue européenne, il paraît donc vraisemblable que son prix sera plus élevé, c'est ce que confirme la proposition ci-dessous dans laquelle nous adopterons les notations suivantes :

- $(Z_n, 0 \leq n \leq N)$ désignera une option américaine.
- C_n sera le prix de cette option à la date n.
- c_n désignera le prix à la date n de l'option européenne Z_N.

Conclusion

Ce travail est consacré à l'étude de l'arrêt optimal et leur application aux options américaines. Pour cela, on a défini les temps d'arrêt et on a donné une présentation détaillée des martingales locales. En particulier, nous nous sommes intéressés au arrêt optimal et options américaines. On a donné les définitions et les propriétés de marché financier et les options américaines en particulier ainsi que le temps d'arrêt optimal dans les deux cas : en temps discret et continu .On a consacré le dernier chapitre de ce mémoire à l'application de la théorie des temps d'arrêts à l'étude des options américaines et en donnant une comparaison entre option américaine et européenne.

Bibliographie

[1] F. Ait-Sahlia, Optimal stopping and weak convergence methods for some problems in nancial economics", Ph.D. dissertation, Stanford University, 1995

[2] F. Ait-Sahlia and P. Carr ,American Options : A Comparison of Numerical Methods", in Numerical Methods in Finance, L.C.G. Rogers and D. Talay ed., pp. 67-87, Cambridge University Press, 1997.

[3] J.C. Hull, Options, Futures and other derivatives, Prentice Hall, 2003.

[4] M. Jeanblanc, Cours de calcul stochastique. Cours de master, 2006.

[5] N. Khelfallah, Cours de Martingales 1ère année master, 2018-2019.

[6] B. Labed, Cours de mouvement brownien et calcul stochastique $2^{éme}$ année master, 2019-2020.

[7] D. Lamberton.Optimal stopping and American options.this summer school on financial mathimatics,Septembre 2009.Université de Paris.EST.

[8] D. Lamberton, B. Lapeyre, Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, Ellipses, Paris, 2012.

[9] G. Oger..Arrêt optimal et application à la valorisation des option américaines.Thèse de magistère du DMA

[10] A. Shiryayev, Optimal stopping rules. Springer-Verlag, 1993.

Annexe A : Quelques définitions

Actif sous-jacent :

En commerce des instruments dérivés, un actif sous-jacent est un instrument financier représenté par un produit dérivé, c'est ce qui donne sa valeur au dérivé.

Un actif sous-jacent prend souvent la forme d'une action ou d'une matière première, mais peut être n'importe quel actif pouvant lui procurer de la valeur.

La Maturité :

La maturité financière est le laps de temps qui sépare le moment d'achat d'un actif financier et sa date d'échéance finale. La maturité est aussi qualifiée de durée résiduelle de vie ou maturité résiduelle (le terme français exact étant échéance). Une maturité financière ne s'applique donc qu'à un actif financier qui a une durée de vie tel que :

– Une obligation

– Un emprunt

– Un placement

– Un Futur

– Un warrant (ou bon d'option)

Le prix d'exercice :

Un prix d'exercice ou Strike est le prix auquel peut être acheté ou vendu un actif sous-jacent lors de la souscription de l'option est immuable. Le Strike dictera le comportement du souscripteur d'une option à échéance, si le Strike lui est favorable il exercera l'option sinon il payera la prime sans l'exercer.

Taux sans risque :

Un taux sans risque dans une devise et pour une période particulière est le taux d'intérêt constaté sur le marché des emprunts d'état de pays considérés solvables et d'organisations inter-gouvernementales pour la même devise et la même période.

On désigne donc ainsi l'absence de risque de crédit, et non une quelconque absence de risque de taux, qui lui demeure bien présent.

Pay-off d'une option :

Le pay-off d'une option est son résultat à l'échéance. Le pay-off d'une option est équivalent à sa valeur intrinsèque ce qui signifie pour un call, que son pay-off est égal à la différence entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice et pour un put, au prix d'exercice diminué du prix du sous-jacent. Le pay-off d'une option implique aussi de déduire la prime payée pour acquérir l'option.

La volatilité (en finance) :

La volatilité est l'ampleur des variations du cours d'un actif financier. Elle sert de paramétrer la quantification du risque de rendement et de prix d'un actif financier. Lorsque la volatilité est élevée, la possibilité de gain est plus importante, mais le risque de perte l'est aussi.

Qu'est-ce qu'un call et un put

Un **Call** représente un droit d'achat du sous-jacent au prix d'exercice à l'échéance de l'option.

Un **Put** représente un droit de vente du sous-jacent au prix d'exercice à l'échéance de l'option.

Le sous-jacent représente lui l'actif rattaché à l'option.

Un Call et un put ne sont en aucun cas une obligation d'acheter ou de vendre. Il confère simplement un droit que le détenteur est libre d'exercer ou non à l'échéance de l'option.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filtré.
$\mathbb{P} - p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$s \wedge t$	$\min(s, t)$
$v.a.r$	Variable aléatoire réelle.
MB	Mouvement Brownien.
$\perp$	Indépendance.
$\mathbb{R}^n$	Espace réel eucliden de dimention n.
b	Drift.
$i.e.$	Identiquement.équivalent.
$\mathbb{E}$	Espérance.
min	Minimum.
exp	Exponentiel.
$\mathcal{F}_t$	Filtration naturelle.
lim inf	Limite inferieure.
lim sup	Limite superieure.

Résumé

Le but ce travail est d'étudier le problème d'arrêt optimal. Etant donné un critère à maximiser, notre objectif est de trouver un temps d'arrêt optimal qui assure le maximum de gain et qui permet de calculer sa valeur espérée. Comme exemple, on applique cette théorie aux options américaines.

Mots-clés : Temps d'arrêt, processus stochastique, martingale, mouvement Brownien, Enveloppe de Snell, temps d'arrêt optimal, option américaine.

Abstract

The goal of this work is to study the optimal stopping problem. Given a criterion to be maximized, our objective is to find an optimal stopping time which ensures the maximum gain and which makes it possible to calculate its expected value. As an example, we apply this theory to American options.

Keywords: stopping time, stochastic process, martingale, Brownian motion, Snell envelope, stopping time, American option.

الملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة مشكلة التوقف الأمثل. بالنظر إلى معيار يجب تعظيمه، فإن هدفنا هو إيجاد زمن التوقف الأمثل الذي يضمن أقصى ربح ويجعل من الممكن حساب قيمته المتوقعة. كمثال، نطبق هذه النظرية على الخيارات الأمريكية.

الكلمات المفتاحية : وقت التوقف , عملية العشوائية, مارتينغال, حركة بروان, مغلف سنال, زمن التوقف, الخيار الأمريكي.