République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option :

Probabilités

Par

KINZA LAMRI

Titre :

Approximation du modèle de Cox, Ross et Rubinstein par une marche aléatoire

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**KHELFALLAH NABIL**	UMKB	Encadreur
Dr.	**LABED SALOUA**	UMKB	Examinateur
Dr.	**CHAOUCHKHOUANE NASSIMA**	UMKB	Examinateur

2020

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail à ma famille tout particulièrement mes parents qui m'ont accordé la liberté d'action et la patience nécessaires pour réaliser ce travail.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

REMERCIEMENTS

*Louange à **Allah** qui nous a donné le courage, la puissance et la patience pour terminer ce modeste travail.*

*Nous tenons à remercier vivement notre encadreur **Pr : KHALFELLAH Nabil** qui m'a encadré dans ce mémoire de master et m'a initié aux techniques du calcul stochastique appliqué aux modéles financiers et pour la confiance qu'il nous accordées, ses encouragements, et ses précieux conseils.*

J'exprime également mes vifs remerciements aux membres de jury pour avoir acceptés d'être examinateur de ce modeste travail,

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation.

A toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on s'interesse au **approximation du modéle de Cox Ross-Rubinstein par une marche aléatoire**, ce modèle est une version discrétisée du modèle de Black-Scholes dans laquelle il y a un seul actif a risque et un actif sans risque. Souvant nous utislisons les modéle financier pour évaluer certain options financières telles que les options europiènne, americaine ou asiatique. Le prix d'une option se fond sur des probabilités que le prix de la valeur sous-jacente soit au dessus ou au dessous de prix d'élevé à la date d'échéance. Ces probabilités sont utilisées par des différents modèles d'évaluation dont le plus connu est la formule de Black et Scholes et Cox Ross-Rubinstein. Ce mémoire est organisé comme suit :

- **Chapitre 1 (Généralités et notions de bases) :** Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, ayant pour but de mettre en relief les outils de notre étude, on va présenter une foule de définitions, propositions, théorèmes faits sans démonstrations et des résultats de bases du calcul stochastique : processus stochastique, espérance conditionnelle mouvement Browniens, martingales, calcul d'Itô, Èquation différentielle stochastique (EDS) ...
- **Chaitre 2 (Notations élementaires en mathématiques financieres) :** qu'on l'appelle Terminologie financier, nous présentons quelques notions de mathématique financier comme les actifs, les options, les portefeuille, les arbitrage etc...
- **Chapitre 3 (Application du modèle Black-Scholes)** Dans ce chapitre, le **modèle Black-Scholes** est un modèle mathématique du marché pour une action, dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique en temps continu ; par opposition au "**modèle Cox Ross-Rubinstein**" qui suit un pro cessus stochastique en temps

discret. Ce modèle connaît ce succès car il possède de nombreux avantages : sa simplicité d'application et de formulation, son importante utilisation par les opérateurs du marché mais aussi et surtout parce qu'il permet de calculer un paramètre important en finance : la volatilité. La volatilité mesure la variation moyenne dans le temps d'un actif financier et donne donc une information cruciale sur le risque.

Chapitre 1

Généralités et notions de bases

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques outils de calcul stochastique. Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration sur cet espace.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1 (Processus stochastique) *: Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T. En général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ et on considère que le processus est indexé par le temps t.*

a) *Si T est un ensemble finie, le processus est un vecteur aléatoire.*

b) *Si $T = \mathbb{N}$, le processus est une suite de variable aléatoire.*

c) *Si $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.*

c) *Si $T \subset \mathbb{R}^d$, on parle de champs aléatoire.*

Remarque 1.1

i. Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

ii. Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

Définition 1.2 (filtration) *: Une filtration $(\mathcal{F}_t)$ sur un espace de probabilité* $\leq (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$ ***i.e :***

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad , \forall s \leq t.$$

Définition 1.3 *:*

a) *L'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *s'appelle espace filtré.*

b) *Une filtration est* $\mathbb{P}$*-complète pour une mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *si* $\mathcal{F}_0$ *contient tous les évènements de mesure nulle, i.e* $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.

c) *On dit qu'un espace filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *satisfait les conditions habituelles si :*

- *Les ensembles négligeables sont contenus dans* $\mathcal{F}_0$ *i.e* $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$,
- *La filtration est continue à droite i.e* $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s \geq t \mathcal{F} s}$, $\forall t$.

1.1.1 Espérance conditionnelle et martingales

Pour $T = \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{N}$, on considère un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

1.1.2 Espérance conditionnelle

La notion de martingale est basé sur la notion d'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire integrable X (que possède une espérance finie) par rapport une $\sigma-$**algèbre**.

Définition 1.4 *: Soit* $\mathcal{G}$ *une sous tribu de* $\mathcal{F}$*, l'espérance conditionnelle d'une varaible aleatoire* ***(v.a)*** *intégrable* X *sachant* $\mathcal{G}$ *est la* ***v.a.*** $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ ***(à une classe d'équivalence près)*** *définie par les deux propriétés suivantes :*

a) $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ *est* $\mathcal{G}$*-mesurable ;*

b) $\forall A \in \mathcal{G}$,

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P}.$$

Proposition 1.1 *: L'éspérance conditionnelle possède les propriétés suivantes :*

1. Linéarité :

$$\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}).$$

2. La variable et son espérance conditionnelle ont la méme espérance :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})) = \mathbb{E}(X).$$

   Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition en prenant $A = \Omega$

3. Si la variable aléatoire X et la tribu $\mathcal{F}$ sont indépendantes, alors :

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X).$$

4. Si X est $\mathcal{F}$-mesurable, alors :

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = X.$$

5. Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, alors :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid B) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}).$$

6. Si Z est une variable aléatoire bornée et $\mathcal{F}$-mesurable, alors :

$$\mathbb{E}(ZX \mid \mathcal{F}) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}).$$

7. Monotonie **:**

$$X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}).$$

   Comme conséquence nous déduisons l'inégalitè

$$|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})| \leq \mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{F}).$$

8. Inégalité de Jensen **:** Si φ est une fonction convexe telle que $\mathbb{E}(|\varphi(X)|) < +\infty$ et

$$\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{F}).$$

   En particulier, si on prend $\varphi(x) = |x|^p$ avec $p \geq 1$, on obtient :

$$|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|^p \leq \mathbb{E}(|X|^p|\mathcal{F}).$$

1.1.3 Martingales

Définition 1.5 (martingale) : *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisè et* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration sur cet espace. Le processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale à temps continu si :*

a) $\forall t \geq 0 : \mathbb{E}|X_t\ | \leq +\infty$ *;*

b) $\forall s; t \geq 0$*, telque* $s < t$; X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable ;*

c) $\forall s; t \geq 0$ *pour tout* $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s.$$

Proposition 1.2 *:*

1. Une famille de variables aléatoires réelles $(X_t)_{t\in T}$ est une sous-martingale si $X_t \in L^1$, est adapté et pour tout $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s.$$

2. Une famille de variables aléatoires réelles $(X_t)_{t\in T}$ est une sur-martingale si $X_t \in L^1$,est adapté et pour tout $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s.$$

Remarque 1.2 *: Si* $(X_t)_{t\in T}$ *est une sur-martingale alors ,* $(-X_t)_{t\in T}$ *est une sous-martingale.*

1.2 Mouvement Brownien standard

Définition 1.6 *: Un processus stochastique $(W_t)_{t\geq 0}$ est dit mouvement Brownien si :*

a) $W_0 = 0 \quad \mathbb{P}.p\text{-}s.$

b) *Les trajectoires de W sont continues;*

c) *La variable alèatoire W_t est normal $N(0;t)$;*

d) *W est à accroissements indèpendants et stationnaires (pour $.0 \leq s < t \leq u < v$ les accroissements $(W_t - W_s)$ et $(W_v - W_u)$ sont indépendants).*

$\forall s, t \geq 0$ tel que $0 \leq s \leq t$; les acroissements $(W_t - W_s)$ suit une loi normale $N(0, t-s)$

Proposition 1.3 *: On donne des exemples de martingales que l'on peut construire à partir du mouvement Brownien. Si $(W_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$ movement Brownien standard, alors :*

1. *(W_t) est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
2. *$(W_t^2 - t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
3. *$(exp(\sigma W_t - (\frac{\sigma^2}{2})t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

Définition 1.7 *: On appelle mouvement Brownien avec dèrive un processus stochastique de la forme :*

$$\mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Où : σ, μ sont deux constantes qui représentent respectivement le coefficient de diffusion et $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard, vérifiant :

a) $W_0 = 0$;

b) W_t suit une loi normale de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$: $N\ (\mu t, \sigma\sqrt{t})$;

c) $(W_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires. Ains $(W_t - W_s)$ suit une loi normale de moyenne $\mu(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$: $N(\mu(t-s), \sigma\sqrt{t-s})$;

d) $(W_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements independants.

Lemme 1.1 (Lemme de Gronwall) *: Soit $T > 0$ et soit g une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle $[0, T]$. Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$:*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds.$$

Alors, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

1.2.1 Représentations des martingales Browniennes

Soit $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle de B_t, il existe un processus adapté $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty$ et

$$\forall t \in [0, T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s, \quad p.s.$$

Définition 1.8 *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si :*

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Théoreme 1.1 (Radon-Nikodym) *: Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F})$. Alors $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ si et seulement s'il existe une variable $Z \geq 0$ est $\mathcal{F}$-mesurable et d'éspérence 1 sous $\mathbb{Q}$ telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$,*

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_{1_A}].$$

*On appelle Z la densité de **Radon-Nikodym** de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$ et on écrit formellement :*

$$d\mathbb{P} = Z d\mathbb{Q} \quad et \quad Z = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}.$$

Ceci est motivé par l'écriture suivante :

$$\forall A \in \mathcal{F} : \quad \mathbb{P}[A] = \int_A Z d\mathbb{P}(w) = \int_A Z \tfrac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(w) d\mathbb{Q}(w) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_{1_A}].$$

De plus dans le cas òu $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$, on voit que$Z > 0$ p.s.

Théoreme 1.2 (Girsanov) *: Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien et $(\theta_t)_{t \leq T}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ qui vérifie :*

$$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty \quad , \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

tel que le processus $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$L_t := \exp\left[\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\theta|^2 ds\right].$$

Soit une martingale. Soit Q la probabilité définie par $dQ = L_T d\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$, alors le processus $\left(\tilde{W}_t\right)_{t \leq T}$ défini par

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^T \theta_s ds$$

est un Q-mouvement Brownien. Notons que la condition dîte de Novikov,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right] < +\infty$$

est suffisante pour que L_T soit une martingale sous $\mathbb{P}$.

1.3 Intégrale stochastique et calcul d'Itô

Soit $(W_t)\ _{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien standard sur $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 1.9 *: On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô si il est de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

avec :

a) X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

b) K et H deux processus $\mathbb{F}$-mesurable.

c) K et H deux processus non anticipatifs tels que :

$$\int_0^t \mid K_s \mid ds < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^t \mid H_s \mid dW_s < \infty, \ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Où le coefficient K s'appelle le **drift** ou la **dérivée** et H s'appelle coefficient de **diffusion.**

Théoreme 1.3 (Formule d'Itô) *:*

1) ***Première formule d'Itô :*** *Soient X un processus d'Itô et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 à dérivées bornée, alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

2) ***Deuxième formule d'Itô :*** *Soient $(t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus d'Itô :*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f'_x(s,X_s)\, dX_s + \int_0^t f'_s(s,X_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,X_s)\, d\langle X,X\rangle_s .$$

Proposition 1.4 *: Soit $dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t)$. Si $f(x,t) : \mathbb{R} \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$, fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors le processus $f(X(t),t)$ admet une différentielle stochastique donnée par :*

$$df(X(t),t) = [\frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t) + a(t)\frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t) + \frac{1}{2}b^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),t)]dt + b(t)\frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)dW(t).$$

1.4 Equation Différentielle Stochastique et Equation aux Dérivées Partielles

1.4.1 Equation Différentielle Stochastique (EDS)

Définition 1.10 *: On appelle èquation diferentielle stochastique notée **(EDS)** de condition initiale x_0, de coefficient de diffusion et de coefficient de dérive b un processus X tel que pour tout $t \geq 0$:*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s; X_s)ds + \int_0^t \sigma\ (s; Xs)dW_s. \tag{1.2}$$

Où l'inconnue est le processus X, les donnès sont le mouvement Brownien B d-dimenssionnel et les fonctions b et σ sont donnèes par :

$$b : [0; T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \sigma : [0; T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times d},$$

et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'équation (1.2) sera aussi notèe :

$$\begin{cases} dX_t = b(t; X_t)dt + \sigma(t; X_t)dW_t \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Théoreme 1.4 (d'existence et d'unicitè) *: Si b et σ sont des fonctions continues telles qu' il existe $K > 0$; $x; y$ dans $\mathbb{R}^n$*

a) Conditions de Lipschitz :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|.$$

b) Conditions de croissance linèaire :

$$|b(t, x) - \sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|).$$

Alors, pour tout $t \geq 0$ l'èquation (1.2) admet une solution unique dans $[0; T]$.

1.4.2 Marche aléatoire

Les marches aléatoires sont parmi les modèles probabilistes les plus utiles **(par exemple en physique, mathématiques financières, files d'attente, statistique, etc.)**. Ils sont aussi parmi les modèles les meilleurs compris, car ils permettent souvent des solutions analytiques.

Définition 1.11 (Marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$.) *: Soit $(Z_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires réels i.i.d* ***(c.-à-d. indépendantes et de même loi)****, à valeurs en $\mathbb{R}^d$. Le processus $X_n \in \mathbb{R}^d$, $n = 0, 1, ...$ donné par la somme de ces variables :*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, n \in \mathbb{N},$$

s'appelle marche aléatoire. Comme alternative, la marche aléatoire peut être définie récursivement par la récurrence

$$X_n = X_{n-1} + Z_n.$$

Exemple 1.1 *(Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$) : Typiquement, on s'intéresse au cas où l'espace d'états est un maillage régulier comme $\mathbb{Z}^d$, i.e. $X_0, Z_n \in \mathbb{Z}^d$ ont une loi discrète $p = (p_i, i \in \mathbb{Z}^d)$ (dans ce cas, nous avons à faire à une chaîne de Markov à espace d'états dénombrable).*

Exemple 1.2 *: Si en plus $|Z_n| = 1$, i.e. $p_i \neq 0$ ssi i est un voisin de l'origine, le processus est appelé une* ***marche aléatoire simple****.*

Exemple 1.3 *Pour une marche aléatoire simple en dimension $d = 1$, la loi de Z_n est de la forme $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$, i.e.*

$$\mathbb{P}[Z_n = 1] = p \quad et \quad \mathbb{P}[Zn = -1] = 1 - p, \quad avec\ 0 < p < 1.$$

Si $p = q = 0.5$ on parle d'une ***marche aléatoire symétrique****, et avec $p \neq q$ on parle d'une* ***marche aléatoire biaisée****.*

Chapitre 2

Notations élementaires en mathématiques financières

2.1 Le formalisme des modèles discrets

2.1.1 Actifs financiers

Un modèle de marché financier discret est construit sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{F}, P\ )$, muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une suite croissante de sous-tribus de $\mathbb{F}$: $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_N$. La tribu $\mathcal{F}_n$ représente l'information disponible à l'instant n.

Le marché est constitué de $(d+1)$ actifs financiers, dont les prix à l'instant n sont donnés par des variables aléatoires S_n^0, S_n^1,S_n^2, ... , S_n^d, à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n$ **(les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs)**.

Le vecteur$S_n = (S_n^0, S_n^1, S_n^2, ..., S_n^d)$ est le vecteur des prix à l'instant n. L'actif numéroté 0 est l'actifsans risque et on pose, par convention, $S_0 = 1$. Si le taux d'intérêt des placements sans risque sur une période est constant et égal à r Le coefficient $\beta_n = 1/S_n^0$ apparaît comme le coefficient d'actualisation : c'est la somme d'argent qui, investie à l'instant 0 dans l'actifsans risque, permet de disposer de 1 euro à l'instant n *(si on compte les prix en euros)*. Les actifs numérotés de 1 à d sont appelés actifs risqués.

2.1.2 Stratégies

Une stratégie de gestion est définie par un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$

$$\theta := \left\{ \theta_n = (\theta_n^0, \theta_n^1, ...\theta_n^d)^* \forall\ n \in \mathrm{N} \right\},$$

donnant à chaque instant n les quantités θ_n^i des divers actifs,détenues en portefeuille. On impose à la suite θ d'être prévisible au sens suivan :

$$\forall i \in \{0, 1, ..., d\} \begin{cases} \theta_0^i \text{ est } \mathcal{F}_0\text{-mesurable} \\ \text{est, pour} n \geq 1,\ \theta\ _n^i \text{est} \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable.} \end{cases}$$

Le portefeuille à la date n $(\theta_n^0, \theta_n^1, ...\theta_n^d)$ est constitué au vu des informations disponibles à la date $(n-1)$ et conservé tel qu au moment des cotations de la date n.

La valeur du portefeuille à l'instant n est donnée par le produit scalaire :

$$V_n(\theta) = \theta_n.S_n = \sum_{i=0}^{d} \theta_n^i.S_n^i.$$

Sa valeur actualisée est :

$$\tilde{V}_n(\theta) = \beta_n(\theta_n.S_n) = \theta_n.\tilde{S}_n.$$

Où $\beta_n = 1/S_0$et $\tilde{S}_n = (1, \beta_n S_l, ..., \beta_n S_n)$ est le vecteur des prix actualisés des actifs.

Processus de gains :

Si θ est un processus prévisible alors nous pouvons aussi considérer le processus de gains $\langle \theta \bullet \Delta \tilde{S}\ )$ c'est à dire le processus :

$$(\theta \bullet \Delta \tilde{S})_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\theta \bullet \Delta \tilde{S})_n = \sum_{m=1}^{n} \langle \theta_m, \Delta S_m\ \rangle \quad \text{pour } n \geq 1.$$

2.1.3 Stratégies auto-financée

On dira qu'une stratégie est auto-financée si la relation suivante est vérifiée pour tout $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$:

$$\tilde{V}_n(\theta) = \tilde{V}_0 + \sum_{j=0}^{n} \theta_j.\Delta S_j.$$

Dans notre modèle en temps discret, la condition d'autofinancement de la stratégie θ se traduit par l'équation :

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{n-1} + \sum_{i=0}^{d} \theta_n^i (\tilde{S}_n^i - \tilde{S}_{n-1}^i) = \tilde{V}_{n-1} + \langle \theta_n, \Delta\tilde{S}_n \rangle.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La stratégie θ est auto-financée,
2. Pour tout $n \in \{1, ..., N\}$, $V_n(\theta) = V_0(\theta) + \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_j.\Delta S_j$, Où ΔS_j est le vecteur $S_j - S_{j-1}$,
3. Pour tout $n \in \{1, ..., N\}$, $\tilde{V}_n(\theta) = \tilde{V}_0(\theta) + \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_j.\Delta\tilde{S}_j$.

Où $\Delta\tilde{S}_j$ est le vecteur

$$\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}.$$

2.2 Définitions et généralités sur les contrats d'options

Définition 2.1 (option) *: Le mot option vient du mot latin « **optio** » qui signifie droit et non l'obligation. Une option est donc un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent, à un prix prédéterminé, et ce pendant une période de temps donnée.*

Il existe deux types d'options : les options d'achat **(Call)** et les options de vente **(Put)**

1. **Un Call** est un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance durant une période de temps donnée.

2. **Un Put** est un contrat qui confère à son détenteur le droit de vendre l'actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance durant une période de temps donnée

Les options **(Call et Put)** peuvent être devisées en deux sous familles, les options dites à l'européenne et les options dites à l'américaine.

Définition 2.2 *: Option européenne est une option d'achat ou de vente, elle a la particularité d'avoir une date d'exercice fixée à l'avance ; la date d'échéance. La valeur d'une option européenne, étant donné qu'elle donne moins de possibilités d'exercice relativement aux autres types d'option est moins onéreuse.*

Définition 2.3 (Option américaine) *: Une option américaine peut être exercée à tout moment entre l'instant initial et la date finale fixée.*

En effet, l'acheteur d'une option américaine bénéficie de plus de droit que l'acheteur d'une option européenne, puisqu'il peut exercer à tout moment son droit, alors que le second doit attendre l'échéance pour décider et qui permet donc aux investisseurs d'avoir une plus grande flexibilité. De ce fait la grande majorité des options sont des options américaines.

Cependant ce privilège additionnel a un prix. Il est intégré à la prime de l'option ; c'est pourquoi la valeur de la prime américaine est généralement supérieure à celle des options européenne.

Prix d'option européenne d'achat. Dans tout ce qui suit, nous allons utiliser les notations suivantes :

- K Le prix d'exercice ;
- r Le taux d'intérêt ;
- T Le temps qui reste à l'option avant son échéance ;
- σ La volatilité du sous-jacent ;
- S_0 la valeur actuelle du prix de sous-jacent ;

- P la valeur de la prime.

Le prix théorique d'une option d'achat **(Call)**, qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif sous-jacent S à la valeur K à la date T, est caractérisé par son **Payoff** :

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - k; 0).$$

2.2.1 Caractérisation de la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage(AOA)

Théoreme 2.1 (Condition suffisante d'A.O.A) *: On suppose qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que le processus de prix actualisé $\tilde{S}$ soit une martingale sur $(\Omega, F, \mathbb{Q}; \mathbb{F})$ (on dira également que $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale). Alors, ce marché financier vérifie la condition* ***A.O.A****.*

Définition 2.4 (Mesure neutre au risque) *: On appelle ensemble des mesures de probabilité neutres au risque l'ensemble noté $M(\tilde{S}\ )$ des mesures de probabilité,$\mathbb{Q}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telles que : $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$et le processus $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.*

Nous venons de montrer que : $M(\tilde{S}) \neq \emptyset$ implique **AOA**.

2.2.2 Modèle de Black et Scholes

2.2.3 Présentation du modèle

On considère un marché formé par un actif **sans risque** S^0 et un **actif risqué** S. On suppose que le prix de l'actif sans risque vérifie :

$$S_t^0 = S_0^0 e^{rt}, \tag{2.1}$$

où r est une constante donnée, $r \geq 0$. Sauf mention explicite du contraire nousprennons $S_0^0 = 1$. Pour modéliser l'incertitude concernant le prix de l'actif risqué S, on introduit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que le processus de prix de S, $S = \{S_t, t \geq 0\}$, est décrit par le **modèle de Black et Scholes**

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{2.2}$$

où $B = \{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien sur $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$. Ici μ et σ sont deux constantes données, avec $\sigma > 0$.

- la constante μ est appelée **"tendance"** de S.
- la constante σ est appelée **"volatilité"** de S.

Dans toute la suite de ce chapitre, on note :

$$\tilde{S}_t = \{S_t / S_t^0, t \geq 0\},$$

le prix de S exprimé dans le nouveau numéraire S^0. On note $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration naturelle du processus S. Note $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration naturelle du processus S.

Remarquons que $\mathbb{F}$ est également la filtration naturelle du mouvement Brownien B. Notons que, par application du **Lemme d'Itô**, on a aussi :

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t), \quad \text{et} \quad d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t \; dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t.$$

Chapitre 3

Application du modéle Black-Scholes

Dans ce chapiter,nous avons pu constater que le **modèle binomial** (ou modèle **Cox. Ross et Rubinstein** (**CRR**)) est une méthode numérique trés simple pour calculer les prix de produits dérivés. En fait. L'arbre binomial donne une approximation de l'espérance des flux monnétaires actualisés de l'option dans un univer neutre au risque.
Il a été proposé pour la première fois par Cox, Ross et Rubinstein (1979).

3.1 modèle Cox, Ross et Rubinstein (CRR)

3.1.1 Description du modèle

Le modèle CRR, ou modèle bonomial, est un modèle à temps discret dans le cours de l'actif risqué peut d'un instant à l'autre soit monter, nous allons nous restreindre au cas où le marché contient un seul actif risqué, $d = 1$. Cette simplification est adoptée par souci de clarté du texte, les résultats énoncés dans cette section peuvent être étendus au cas général $d \geq 1$ sans difficulté.

La création de l'arbre de prix s'effectue en partant de la date à laquelle on veut valoriser l'option et ce jusqu'à la date d'expiration de l'option. À chaque étape, on accepte que le sous-jacent augmente **(up)** ou diminue **(down)** en fonction d'un facteur spécifique (u ou d) et ce pour toutes les étapes. (Par définition, $u \geq 1$et $0 \leq d \leq 1$). Par conséquent, si S est le prix actuel, alors le prix de la période suivante sera ou $S_{up} = S_u$ ou $S_{down} = S_d$.

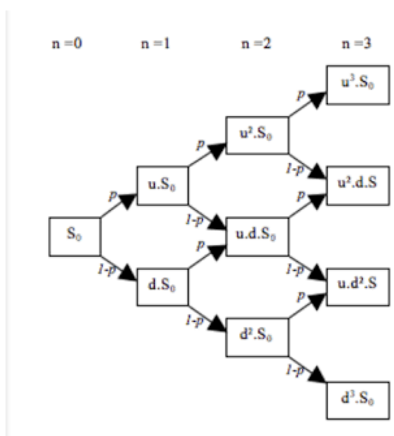
3.1.2 Modélisation probabiliste du marché

La modélisation probabiliste du marché est la donnée de trois choses :

- Ω est l'ensemble des états du monde : 2 états possibles selon la valeur de l'actif risqué en $t = 1$, état **"haut"** w_u ou **"bas"** ω_d, c'est-à-dire $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$.
- P est la probabilite historique sur Ω . $\mathbb{P}(\omega_u) = p$ et $\mathbb{P}(\omega_d) = 1-p$. Le prix a une probabilite réelle p de monter et $1 - p$ de descendre.
- $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ est un tribus représentant l'information globale disponible sur le marché aux instant $t = 0$,$t = 1$ et $t = 2$ et que :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{w_u\}, \{w_d\}, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{w_{dd}\}, \{w_{du}\}, \{w_{ud}\}, \{w_{uu}\}, \Omega\}.$$

Considérons un actif valant S_0 à la période initiale et qui, à chaque période, peut être haussier (et avoir un rendement u) avec une probabilité p ou baissier (rendement d) avec une probabilité $q = (1 - p)$. Sur 3 périodes on a :



L'ensembles des états finaux est $\Omega = \{uuu, uud, udu, udd, duu, dud, ddu, ddd\}$.

Le prix de l'actif à chaque période (sauf à $t = 0$) est une variable aléatoire.

$$S_1 = \begin{cases} S_0.u, \text{ avec probabilité } P, \\ \\ S_0.d, \text{ avec probabilité } 1-p, \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} S_0.u^2, \text{ avec probabilité } P^2, \\ \\ S_0 \cdot u \cdot d, \text{ avec probabilité } 2p(1-p), \\ \\ S_0.d^2, \text{ avec probabilité } (1-p)^2, \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} S_0.u^3, \text{ avec probabilité } P^3 \\ \\ S_0 \cdot u^2 \cdot d, \text{ avec probabilité } 3p^2(1-p) \\ \\ S_0.d^2 \cdot u, \text{ avec probabilité } 3p(1-p)^2 \\ \\ S_0.d^3, \text{ avec probabilité } (1-p)^3 \end{cases}$$

Par ailleurs nous constatons que les variable S^1_{tk} :$\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $Y^1_{tk} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement définies par :

$$S^1_{tk}(w_1, ..., w_N) = S^1_{t_0} \overset{k}{\underset{l=0}{\wedge}} w_l, \quad \text{et} \quad Y_k(w_1, ..., w_N) = w_k.$$

Remarque 3.1 *Un **produit dérivé** (ou **actif contingent**) : G est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable et s'écrit donc sous la forme :*

$$G = \varphi(S^1_{t_0}, S^1_{t_1}, ..., S^1_{t_N}),$$

*avec φ application borélienne. Lorsque φ dépend seulement de la dernière variable on dira que l'actif dérivé est indépendant du chemin : **calls** et **puts européens** (dits aussi **"vanille"**), **calls** et **puts digitaux**, etc.*

Lorsque au contraire φ dépend pleinement de tous les arguments on dira que G est un actif dérivé dépendant du chemin. Un exemple d'actif dépendant du chemin est l'option (**call**

ou put) asiatique dont le **payoff** se calcule comme celui d'un *call* ou *put européen* mais en prenant en compte la *moyenne* des valeurs du sous-jacent entre t_0 et T plutôt que sa valeur terminale. Par souci de clarté nous considèrerons seulement les actifs indépendants du chemin, bien que notre manière de procéder soit facilement extensible à tous les actifs.

Théoreme 3.1 (Existence et unicité de la probabilité risque neutre) *: Supposons que $t_k = k\Delta t$ et que dans le modèle binomial il y a* ***AOA****. Alors :*

1) $d < e^{r\Delta t} < u$ *;*

2) *il existe une unique probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$. Sous cette probabilité les rendements $Y_1, ..., Y_N$ sont indépendants et de même loi (iid) donnée par :*

$$\mathbb{Q}(Y_1 = u) = q \text{ et } \mathbb{Q}(Y_1 = d) = 1 - q, \tag{3.1}$$

où

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{3.2}$$

Proof. Démonstration du point 1 : une stratégie d'arbitrage entre l'actif sans risque et l'actif risqué est immédiate à construire si la condition n'est pas satisfaite. Par exemple si $d \geq e^{r\Delta t}$ ceci veut dire $u > d \geq e^{r\Delta t}$ et alors il suffit d'acheter l'actif risqué et vendre l'actif sans risque pour la même somme d'argent pour obtenir un arbitrage.

Démonstration du point 2 : Supposons qu'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ et montrons qu'elle est nécessairement unique. Une mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ satisfait :

$$E^{Q}(\tilde{S}^1_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \tilde{S}^1_{t_{k-1}} \quad \text{pour tout} \quad k = 1, ..., N,$$

ou encore, selon la définition de Y_k et de

$$\tilde{S} : E^{\mathbb{Q}}(\tilde{S}^1_{t_{k-1}} Y_k e^{-r\Delta t} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \tilde{S}^1_{t_{k-1}}.$$

Puisque $S^1_{t_{k-1}}$ est $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$- mesurable il en découle que

$$E^{\mathbb{Q}}(Y_k|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = e^{r\Delta t},$$

ou encore, après quelques calculs immédiates :

$$uE^{\mathbb{Q}}(1_{Y_k=u}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) + dE^{\mathbb{Q}}(1_{Y_k=u}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = e^{r\Delta t}. \tag{3.3}$$

Par ailleurs1_Ω est certainement $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-mesurable donc $E^{\mathbb{Q}}(1_\Omega|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 1_\Omega = 1$. Mais en décomposant comme avant nous obtenons aussi :

$$E^{\mathbb{Q}}(1_{Y_k=u}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) + E^{\mathbb{Q}}(1_{Y_k=u}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 1. \tag{3.4}$$

Combinant les relations $(3,3)$ et $(3,4)$ nous obtenons :

$$E^{\mathbb{Q}}(1_{Y_k=u}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d},$$

et

$$E^{\mathbb{Q}}(1_{Y_k=d}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d}. \tag{3.5}$$

Nous constatons que les termes de droite des deux égalités ci-dessus ne dépendent ni de ω ni de k, donc sous $\mathbb{Q}$, pour tout $k = 1, ..., N$, la variable aléatoire Y_k est nécessairement indépendante de $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ ce qui implique que sous $\mathbb{Q}$ les variables aléatoires $Y_1, ..., Y_N$ sont nécessairement indépendantes et de même loi $\mathbb{Q}(Y_1 = u) = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = q$ et

$$\mathbb{Q}(Y_1 = d) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = 1 - q, \tag{3.6}$$

où q est donné par (3.2). Ceci détermine $\mathbb{Q}$ de façon unique. Réciproquement, en reprenant les arguments ci-dessus, il est facile de montrer qu'en posant :

$$\mathbb{Q}(\omega_1, ..., \omega_N) = q^{card\{k:\omega_k=u\}}(1-q)^{card\{k:\omega_k=d\}}, \tag{3.7}$$

on définit bien une probabilité risque neutre. ■

Théoreme 3.2 (Évaluation des actifs indépendants du chemin) *: Soit un actif dérivé G indépendant du chemin $G = \varphi(S_T^1)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable.*

Supposons que $t_k = k\Delta t$ et que dans le **modèle binomial** il y a **AOA**. Alors$\forall\ k = 0, ..., N$ le prix de G à la date t_k ne dépend que de la valeur du sous-jacent à cette date.

On not $p_{t_k}^G(X)$ ce prix quand $S_{t_k}^1 = X$ et on a :

$$p_{t_N}^G(X) = \varphi(X) \text{ et } p_{t_k}^G(X) = e^{-r\Delta t}[qp_{t_{k+1}}^G(X_u) + (1-q)p_{t_{k+1}}^G(X_d)] \text{ si } \ k = 0, ..., N-1 \quad (3.8)$$

où q vérifie (3.2). De plus l'actif G admet une stratégie de réplication donnée par :

$$v = E^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\varphi(S_T^1)] \ , \theta_{t_k}^1 = p_{t_k}^G(S_{t_{k-1}}^1 u) - p_{t_k}^G(S_{t_{k-1}}^1 d) S_{t_{k-1}}^1 u - S_{t_{k-1}}^1 d \quad (3.9)$$

Proposition 3.1 *(Prix d'un actif réplicable) : On suppose qu'il existe une mesure de probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$. On suppose que l'actif contingent G admet une stratégie de réplication $\theta \in A$ à partir du capital initial v_0. On suppose de plus que θ est bornée. Si on note par $p_{t_k}^G$ le prix de G à l'instant t_k alors :*

$$\forall k : p_{t_k}^G = e^{rt_k} E^Q[Ge^{\ -rT} | \mathcal{F}_{t_k}].$$

Preuve. On suppose que G est réplicable à partir du capital initial v_0 et de la stratégie admissible $\theta \in A$. Alors, par **A.O.A**, $\forall k \leq N, p_{t_k}^G = V_{tk}^{\ v_0,\theta}$.

Comme θ est bornée, le processus $\tilde{V}^{v_0,\theta}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale. En utilisant le fait que $G = V_T^{v_0,\theta}$, on obtient :

$$E[e^{-rT} G | \mathcal{F}_{t_{k_i}}] = E[\tilde{V}_T^{v_0,\theta} | \mathcal{F}_{t_{k_i}}] = V_{t_k}^{v_0,\theta}.$$

On conclut que :

$$p_{t_k}^G = V_{t_k}^{v_0,\theta} = E[e^{-r(T-t_k)} G | \mathcal{F}_{t_{k_i}}].$$

Preuve. Supposons d'abord que G est réplicable. On sait alors d'après la Proposition (Prix d'un actif réplicable) que en **AOA** pour tout $k = 0, ..., N-1$ le prix de G à la date t_k est donné par :

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t_k)}\varphi(S_T^1)|\mathcal{F}_{t_k}].$$

Mais ici

$$S_T^1 = S_{t_k}^1 \cdot \bigwedge_{l=k+1}^{N} y_l,$$

par conséquent le conditionnement par $\mathcal{F}_{t_k}$ est identique au conditionnement par $S_{t_k}^1$. Ceci est spécifique aux actifs indépendants du chemin. En particulier le prix de l'actif contingent à la date t_k est donné par une fonction de $S_{t_k}^1$. Donc :

$$
\begin{aligned}
p_{tk}^G(S_{t_k}^1) &= E^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t_k)}\varphi(S_T^1)|\mathcal{F}_{t_k}] && (3.10)\\
&= E^{\mathbb{Q}}[[\ E^{Q}[e^{-r(T-t_k)}\varphi(S_T^1)|\mathcal{F}_{t_{k+1}}]|\mathcal{F}_{t_k}] && (3.11)\\
&= E^{\mathbb{Q}}[e^{-r\Delta t}p_{t_{k+1}}^G(S_{t_{k+1}}^1)|\mathcal{F}_{t_k}] && (3.12)\\
&= E^{\mathbb{Q}}[e^{-r\Delta t}1_{\{Y_{k+1}=u\}} + 1_{\{Y_{k+1}=d\}}\}p_{t_{k+1}}^G(S_{t_{k+1}}^1)|\mathcal{F}_{t_k}] && (3.13)\\
&= e^{-r\Delta t}E^{\mathbb{Q}}[1_{\{Y_{k+1}=u\}}p^G t_{k+1}(S_{t_k}^1 u) + 1_{\{Y_{k+1}=d\}}p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 d)|\mathcal{F}_{t_k}] && (3.14)
\end{aligned}
$$

En observant que $p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 u)$ et $p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 d)$ sont des fonctions de$S_{t_k}^1$ alors que $1_{\{Y_{k+1}=u\}}$ et $1_{\{Y_{k+1}=d\}}$ sont indépendantes de $S_{t_k}^1$ on obtient l'expression (3.8) après utilisation des propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle. On remarquera que (3.8), combiné au fait évident que $p_{t_N}^G = \varphi$, détermine de façon unique par récurrence descendante une famille $p_{t_k}^G$, $t_k \in T$, de fonctions définies sur les valeurs possibles de $S_{t_k}^1$ à chaque date t_k.

Montrons à présent, à l'aide de la famille $p_{t_k}^G$, $t_k \in T$, que G est effectivement réplicable en considérant le problème de sa couverture. Nous procédons par récurrence en montrant que pour tout $k = 0, ..., N$ l'actif $p_{t_k}^G(S_{t_k}^1)$est réplicable en suivant la stratégie θ donnée par l'énoncé. Ceci prouvera que G est réplicable puisque $p_{t_k}^G(S_{t_N}^1) = \varphi(S_T^1) = G$. Le cas $k = 0$ est trivial car $p_{t_0}^G(S_{t_0}^1)$ est la constante réelle v, réplicable avec un portefeuille de valeur v investi uniquement en actif sans risque. Supposons à présent que nous avons montré pour k fixé que

$p^G_{t_k}(S^1_{t_k})$ est replicable à l'aide d'une stratégie de valeur initiale v et de θ_1 et $\theta^1_{t_l}(l = 1, ..., k)$ définies comme indiqué ; nous montrons que ceci est encore vrai pour $k + 1$. D'après (2.8), nous sommes donc à la recherche d'une variable $\mathcal{F}_{t_k}$ mesurable $\theta^1_{t_{k+1}}$ telle que :

$$e^{r\Delta t} p^G_{t_k}(S^1_{t_k}) + \theta^1_{t_{k+1}}(S^1_{t_{k+1}} - S^1_{t_k} e^{r\Delta t}) = p^G_{t_{k+1}}(S^1_{t_{k+1}}). \tag{3.15}$$

Ceci, selon les valeurs possibles de $S^1_{t_{k+1}}$, conduit à un système de deux équations :

$$e^{r\Delta t} p^G_{t_k}(S^1_{t_k}) + \theta^1_{t_{k+1}} \ S^1_{t_k}(u - e^{r\Delta t}) \ = p^G_{t_{k+1}} \ (S^1_{t_k} u), \tag{3.16}$$

et

$$e^{r\Delta t} p^G_{t_k}(S^1_{t_k}) + \theta^1_{t_{k+1}} S^1_{t_k}(d - e^{r\Delta t}) = p^G_{t_{k+1}}(S^1_{t_k} d). \tag{3.17}$$

On obtient donc

$$\theta^1_{t_{k+1}} = p^G_{t_{k+1}}(S^1_{t_k} u) - p^G_{t_{k+1}}(S^1_{t_k} d) S^1_{t_k} u - S^1_{t_k} d.$$

C'est à dire la formule attendue pour θ^1. On remarque que θ^1 est égal au quotient entre la variation du prix du dérivé et la variation du produit sous-jacent.
En utilisant les formules (3.9) et (3.10) (et après calculs) nous constatons que p^G et θ vérifient effectivement (3.11). La stratégie θ ainsi construite permet de répliquer G ce qui conclut la preuve.

Remarque 3.2 *: La valeur q ne dépend pas de la probabilité $\mathbb{P}$ donc la probabilité $\mathbb{Q}$ ne dépend pas de la probabilité $\mathbb{P}$. Donc, dans ce modèle, le prix du produit dérivé sera le même dès que les investisseurs s'accordent sur l'ensemble de scénarios possibles, sans nécessité d'accord sur la probabilité de chaque scénario.*

Ainsi deux options ayant le même strike et maturité sur deux sous-jacents différents (mais avec les scénarios "u" ou "d" identiques) auront le même prix, même si par exemple pour le premier$P(Y_k = u) = 90\%$ et pour le deuxième $P(Y_k = u) = 10\%$. Il est possible, avec les mêmes arguments, de démontrer le

Théoreme 3.3 (Évaluation des actifs dépendants du chemin) *Soit un actif dérivé G dépendant du chemin :*

$$G = \varphi(S^1 t_0, S^1_{t_1}, ..., S^1_{t_N}) \quad avec \quad \varphi : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R} \ mesurable.$$

Supposons que $t_k = k\Delta t$ et que dans le ***modèle binomial*** *il y a* ***AOA****. Alors $\forall k = 0, ..., N$ le prix de G à la date t_k ne dépend que de la valeur du sous-jacent aux dates $t_0, ..., t_k$. On note*

$$p^G_{t_k}(X_0, ..., X_k),$$

ce prix quand $(S^1 t_0, ..., S^1 t_k) = (X_0, ..., X_k)$ et on a $p^G t_N(X_0, ..., X_N) = \varphi(X_0, ..., X_N)$ et

$$p^G_{t_k}(X_0, ..., X_k) = e^{-r\Delta t}[q p^G_{t_{k+1}}(X_0, ..., X_k, X_k u) + (1-q) p^G_{t_{k+1}}(X_0, ..., X_k, X_k d)], \tag{3.18}$$

si $k = 0, ..., N-1$où q vérifie (3.2). De plus l'actif G admet une stratégie de réplication donnée par :

$$v = E^{\mathbb{Q}}[e^{-rTG}], \theta^1_{t_k} = p^G_{t_k}(S^1_{t_0}, S^1_{t_1}, ..., S^1_{t_{k-1}}, S^1_{t_{k-1}} u) - p^G t_k(S^1_{t_0}, S^1_{t_1}, ..., S^1_{t_{k-1}}, S^1_{t_{k-1}} d) S^1_{t_{k-1}} u - S^1_{t_{k-1}} d.$$

Remarque 3.3 *: Les arguments de cette section sont encore valables, avec quelques ajustements, pour des arbres plus généraux ayant des valeurs u et d qui peuvent dépendre de t_k et plus généralement de $S^1_{t_0}, ..., S^1_{t_k}$.*

Conclusion

Dans ce memoire est de fournir une introduction aux méthodes mathématiques utilisées dans la modélisation en temps continu des marchés financiers. On s'intéressera plus particulièrement aux problèmes de valorisationdes options. L'ojectif n'est pas de fournir un exposé complet de la théorie mais plutôt d'insister sur les idées et les techniques majeures afin de valoriser une option. De nos jours , la volati lité des marchés financiers est devenue une norme de securité. Puisque dans un contexte de mondialisation, cet environnement économique instable oblige les entreprises à gérer leurs risques de façon plus dynamiques.

Nous avons présenté dans ce mémoire, plusieurs facettes des options exotiques. Notre examen des options exotiques, réparties en deux grandes parties offre un récapitulatif précis notamment sur les éléments de ces options. Nous avons par la suite réalisé une simulation des principales options afin d'apporter un oeilcritique sur ces dernières

L'inconvénient majeur dont souffre **le modèle de Black- Scholes** réside dans le fait qu'il repose sur une volatilité constante. c'est pourquoi il a été procédé à considérer de nouveaux types d 'options. A une unanimité, le **modèle de Blach Scholes** est fiable, souffrant de queluques irrégutalités emergentes ; le temps ne peut, par exemple, êtrep erçu comme une fonction continue.

Bibliographie

[1] M. Eddahbi. Marchés financiers et modèles des taux d'intèrêt. cours de mestre. université Kadi Ayadh Marakch Marok.

[2] K. Abdelhak. (2017). Quelques Applications du modèle de Black-Scholes. Mèmoire de-master. Universitè Dr Tahar Moulay - Saïda.

[3] Lamberton, D. (1991). Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.

[4] H. Pham. (2007). Introduction aux Mathèmatiques et Modèles Stochastiques des Marchès Financiers. Universitè Paris, 7, 2006-2007

[5] Florin Avram, 13 janvier 2014 ,probabilités avancées,http ://avram.perso.univ-pau.fr/proc/Proc/l1f.pdf

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filtré.
L^1	Espace des processus intégrable.
$(\mathcal{F}_t)$	Filtration
W	Mouvement Brownien
$\mathbb{P}$-$p.s.$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathcal{N}(0,t)$	Espace réel euclidien de dimension n
$\mathbb{R}^{n*d}$	Ensemble des matrices réelles $n*d$
(**EDS**)	Equation diffèrentielle stochastique
(EDP)	Equation aux dèrivèe partielles
b	Driftou la dèrive
$t \wedge T$	$\inf(t,T)$
$\sigma.$	Terme de diffusion
$(A.O.A)$	Absence d'opportunitès d'arbitrage
C^1	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la première dérivée est continu
C^2	Ensemble des fonctions deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est continu
CRR	**modèle Cox, Ross et Rubinstein**

Résumé

Le but de ce mémoire est de fournir une introduction aux techniques probabilistes nécessaires à l’étude les modèles financiers les plus célèbres. Les spécialistes de la finance ont en effet recours, depuis des années, à des outils mathématiques de plus en plus sophistiqués (martingales, intégrale stochastique et marche aléatoire, etc …). Pour la description de phénomènes et la mise au point de méthodes de calcul. En réalité, l'intervention du calcul des probabilités en modélisation financière n'est pas récente : c'est en tentant de bâtir une "théorie de la spéculation" que Bachelier (1900) a découvert, au début du siècle dernier, l'objet mathématique appelé aujourd'hui "mouvement brownien". Mais elle a pris une nouvelle dimension à partir de 1973, c’est l’aléatoire.

الملخص

الغرض من هذه المذكرة هو تقديم مقدمة للتقنيات الاحتمالية المطلوبة الأكثر النماذج المالية شيوعا. لسنوات *عديدة ، كان المتخصصون في التمويل يستخدمون أدوات رياضية متزايدة التطور (المارتنغال ، التكاملية ألعشوائية حسابات إيتاو* هي Marche aléatoire . . .) لوصف الظواهر وتطوير طرق الحساب. في الواقع, إن التدخل في حساب الاحتمال في النمذجة المالية ليس حديثا فهو من خلال محاولة بناء "نظرية ألمضاربة التي اكتشفها العزوبية (1900) في بداية القرن الماضي "جسم ذي مفاهيم خاصة يسمى الآن "حركة براو نية ". ولكن الأمر استغرق بُعداً جديداً منذ عام 1973 وهو البُعد العشوائي .

Abstract

The purpose of this master thesis is to provide an introduction to the probabilistic techniques required for the most common financial models. For years, specialists in finance have been using increasingly sophisticated mathematical tools (martingales, stochastic integral, Itô calculus is Marche aléatoire . . .) for the description of phenomena and the development of calculation methods. In reality, the intervention of probability calculation in financial modeling is not recent: it is by trying to build a "theory of speculation" that Bachelier (1900) discovered, at the beginning of the last century, ‘Mathematical object now called "Brownian movement" which took a new dimension from 1973,