République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

BDIRINA Nadjoua

Titre :

Introduction aux problèmes du contrôle

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	TAMER Lazhar	UMKB	Président
Dr.	LABED Saloua	UMKB	Encadreur
Dr.	TABET Moufida	UMKB	Examinateur

Juin 2020

Dédicace

Je dédie cette mémoire

À ma chère Mère **Bdirina Massouda**.

À mon cher père **Amer**.

À mes sœurs **Rima**, **Chaima**.

À mes frères **Hocine, Abd Errahman**, **Moustafa, Ayoub**.

À mes cousines **Afaf, Fatiha, Fatma, Sabah, Mebarka.**

À mes chères amies **El-Maha, Souha, Ahlem, Yousra, Amina, Kaltoum, Noussaiba, Khadidja**, **Roufeyda**

pour leurs aides et supports dans les moments difficiles et dans ma carrière universitaire.

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements à Dieu tout-puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a données pour achever mon humble travail.

Mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à mes parents qui ont toujours été là pour moi.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire **LABED Saloua,** professeur de mathématique à l'université de Biskra.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury **TAMER Lazhar** et **TABET Moufida**.

Table des matières

Introduction

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Pour le problème du contrôle stochastique, nous avons deux approches de résolution. La première, vérifiée dans les années 50 par Pontryagin et son équipe, énonce une condition nécessaire (et suffisante dans certains cas) d'optimalité, c'est le principe du maximum. Il stipule que tout contrôle optimal et la trajectoire associée vérifient un système d'équations différentielles de type hamiltonien. La deuxième approche, la programmation dynamique, consiste, quant à elle à établir une relation entre une famille sous-problèmes considérés, pour ensuite les résoudre à travers une équation aux dérivées partielles du second ordre, l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman . Lorsque cette équation est résoluble analytiquement ou numériquement, la technique de vérification est une méthode utilisée pour obtenir le contrôle optimal. Malheureusement, l'équation HJB n'admet pas toujours des solutions assez régulières.

Dans ce mémoire, nous donnons quelques informations sur la théorie du contrôle. Pour cela, ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Chapitre 01 : Dans ce chapitre on donne un bref rappel sur les processus stochastique, les processus gaussiens, puis on définit mouvement brownien, et à la fin de ce chapitre, nous parlerons du calcul d'Itô qui comprend l'intégrale stochastique, ses propriétés, processus et formule d'Itô.

Chapitre 02 : Ce chapitre est consacré à la présentation des concepts de base de la théorie du contrôle optimale. Il s'organise en cinq parties : Après avoir donné dans le première et la seconde partie, un bref aperçu sur la théorie de contrôle et le contrôle optimal, dans la troisième partie on a parle de la programmation dynamique et au quatrième partie, nous avons présenté l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin. A la fin, nous avons parlé d'Equation d'Hamilton-Jacobi.

Chapitre 03 : Dans ce chapitre, après la présentation du problème de contrôle optimal stochastique nous étudions deux méthodes bien connues de résolution du problème de contrôle optimal stochastique : Le Principe du Maximum Stochastique et la Programmation Dynamique.

Chapitre 1

Calcul stochastique

Le but de ce premier chapitre est d'exposer les notions de base utilisées le long de ce mémoire.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1 *Soit E un ensemble, on appelle processus stochastique indexé par E et à valeur dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ pour tout $t \in E$, X_t est un variable aléatoire.*

Définition 1.2 *On peut noter qu'un processus stochastique peut être un comme une fonction aléatoire à chaque w, on associe la fonction $t \rightarrow X_t(w)$ qui est appelé trajectoire on dit que le processus est à trajectoire continue (ou est continue) si l'application $t \rightarrow X_t(w)$ est continue pour presque tout w.*

Remarque 1.1 *Un processus est dit càdlàg si ses trajectoires sont continues à droite pourvues la limite à gauche même définition pour càglàd.*

Définition 1.3 (Filtration)

1) *Un filtration sur $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ est une famille croissant $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ de sous tribu de $\mathbb{F}$ ($\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$).*

2) *La filtration naturelle du processus X est la suit croissant de tribu complètes $\mathcal{F}_t^x = \sigma(X(s), s \leq t)$.*

1.2 Processus gaussienne

Définition 1.4 *Le vecteur* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *est gaussien si pour tous* $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, *la variable aléatoire réelle*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

est de loi normale.

Définition 1.5 *Un processus aléatoire à valeurs dans* $E = \mathbb{R}^d$ *est dit gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes.*

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus gaussien réel (i.e, $E = \mathbb{R}$) : Pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$m(t) = \mathbb{E}(X_t), \tag{1.1}$$

$$\Gamma(s,t) = cov\,(X_s, X_t) = \mathbb{E}\left[(X_t - m(t))\,(X_s - m(s))\right]. \tag{1.2}$$

Définition 1.6 *La fonction* $m : T \to \mathbb{R}$ *définie en* (1.1) *s'appelle la moyenne du processus gaussien* X.

La fonction $\Gamma : T \times T \to \mathbb{R}$ définie en (1.2) est appelée la covariance du processus gaussien X.

Définition 1.7 *Un processus* X *est dit gaussien si* $\forall d$, $(t_1, ..., t_d)$ *réels positifs le vecteur* $(X_{t_1}, ..., X_{t_d})$ *suit une loi gaussienne. Si la loi de* $(X_{t+t_i}, ..., i = 1, ..., d)$ *ne dépend pas de* t, *on dit que le processus est stationnaire.*

On appelle covariance du vecteur X la matrice

$$\rho(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}(X))\,(X_t - \mathbb{E}(X_t))^T\right], \quad s, t \geq 0$$

où A^T désigne la matrice transposée.

1.2.1 Martingale

Pour $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$ on considère $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\epsilon T}, P)$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.8 *Une famille de variables aléatoire réelles M_t, $t\epsilon T$ est une martingale si :*

1) M_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable* $\forall t \geq 0$.

2) $\mathbb{E}(\,|M_t|) \leq \infty, \quad \forall t \geq 0$.

3) $\forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$.

Remarque 1.2 *Pour M_t, $t\epsilon T$ (sous martingale ou sur martingale) ils ont les même conditions sauf la $3^{éme}$ condition sera :*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s \quad et \quad \mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s$$

respectivement.

•Une conséquence de la définition précédent est que : $\forall t \geq 0 \quad \mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$.

Proposition 1.1 *Si Z est un processus à accroissements indépendants alors :*

1) *Si $Z_t \in L^1$ pour tout, $t \geq 0$, $\tilde{Z}_t = Z_t - \mathbb{E}[Z_t]$ est une martingale.*

2) *Si $Z_t \in L^2$ pour tout, $t \geq 0$, $X_t = \tilde{Z}_t^2 - \mathbb{E}\left[\tilde{Z}_t^2\right]$ est une martingale.*

3) *S'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $\mathbb{E}[\exp(\theta Z_t)] < \infty$ pour tout $t \geq 0$ $X_t = \dfrac{\exp(\theta Z_t)}{\mathbb{E}[\exp(\theta Z_t)]}$ est une martingale.*

Remarque 1.3 – *Si $(M_t)_{t\in T}$ est une sous-martingale, la fonction $t \to \mathbb{E}[M_t]$ est croissante*

$$\mathbb{E}[M_t] \geq \mathbb{E}[M_0], \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

– *Si $(M_t)_{t\in T}$ est une sur-martingale, la fonction $t \to \mathbb{E}[M_t]$ est décroissante*

$$\mathbb{E}[M_t] \leq \mathbb{E}[M_0], \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 1.9 *On dit qu'une martingale $M_t \in L^p$ si :*

$$\sup \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] < \infty.$$

Cas particulier $p = 1$ (resp $p = 2$), alors on dit $M_t \in L^1$ (resp $M_t \in L^2$).

Proposition 1.2 *Soit $(M_t)_{t\in T}$ une martingale de carré intégrable ($M_t \in L^2$ pour tout $t \geq 0$) alors :*

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2M_sE\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] + M_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - M_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right].
\end{aligned}$$

■

Théorème 1.1 (Inégalités de Doob) 1) *Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une sous-martingale continue à droite relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ alors, pour tout $t > 0$, pour tout $c > 0$*

$$P\left(\sup_{s\in[0,t]} M_s \geq c\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|M_s|\right]}{c}$$

et

$$\forall T \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[|M_T|^2\right].$$

2) *Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue à droite telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $M_t \in L^p$, avec $p > 1$ fixé, alors pour tout $t > 0$, pour tout $c > 0$*

$$P\left(\sup_{s\in[0,t]} |M_s| \geq c\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|M_s|^p\right]}{c^p}.$$

3) *Sous les hypothèses du (2), on obtient que :*

$$\sup_{s\in[0,t]} |M_s| \in L^p \quad et \quad \left\| \sup_{s\in[0,t]} |M_s| \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|M_s\|_p .$$

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.10 *On dit que le processus stochastique à valeur réelles $B(t)$ est un mouvement Brownien standard s'il satisfaire les conditions suivante :*

1. *$t \to B(t)$ est continue $P-$p.s.*
2. *Pour $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s)$ est indépendant de la tribu $\sigma\{B(u), u \leq s\}$.*
3. *$B(0) = 0 \quad P-$p.s.*
4. *Pour tout $t > 0$ la variable aléatoire $B(t)$ suit la loi gaussienne centrée de variance t donc de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right)$.*

Théorème 1.2 *Si (Δ_n) est une séquence de subdivision de $[0,t]$ tell que $(\Delta_n) \to 0$, alors $T_t^{\Delta_n}$ converge en probabilité vers t.*

Proof. Nous prouvons fait la convergence en $\mathbb{L}^2$ dénoter

$$\Delta_n = \{t_0^n = 0 \leq t_1^n \leq ... \leq t_k^n = t\}$$

$$\mathbb{E}(\left[T_t^{\Delta_n} - t\right]^2) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}\left(\left[(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\right]^2\right)$$

parce que la variable aléatoire dans la dernière somme est indépendante et centrée. Si Y est une variable aléatoire gaussienne centrée : $\mathbb{E}[Y^4] = 3\mathbb{E}[Y^2]^2$ et donc :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left[(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\right]^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left[\left(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}\right)^4 - 2(t_{j+1}^n - t_j^n)(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 + (t_{j+1}^n - t_j^n)\right]\right) \\
&= 2(t_{j+1}^n - t_j^n)^2 \\
&\leq 2(t_{j+1}^n - t_j^n)\,|\Delta_n|
\end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbb{E}\left(\left[T_t^{\Delta_n} - t\right]^2\right) \leq 2t\left|\Delta_n\right| \longrightarrow 0.$$

■

Remarque 1.4 *Pour* $t \geq 0$, *si* $\Delta = \{t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = t\}$ *est subdivision de* $[0, t]$, *on désigne par* T_t^{Δ} *la variable aléatoire :*

$$T_t^{\Delta} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2.$$

On en déduire le corollaire suivant qui preuve qu'on ne peut définir une intégration riemann-steltjes par rapport au mouvement Brownien.

Corollaire 1.1 *Les chemin Brownien sont* $p - s$ *de variation infinie sur n' importe quel intervalle.*

Proposition 1.3 *Le mouvement Brownien* B *est un processus gaussien continu de covariance*

$$\rho(s, t) = s \wedge t.$$

Réciproquement, tout processus gaussien centré continu de covariance $\rho(s, t) = s \wedge t$ *est un mouvement Brownien.*

Le mouvement Brownien tend "en moyenne" vers zéro :

$$\frac{B_t}{t} \to 0$$

presque sûrement lorsque t tend vers l'infini.

Proposition 1.4 *Tout mouvement Brownien est une martingale relativement à sa filtration ie : pour tout* $s < t$,

$$\mathbb{E}(B_t \mid \mathcal{F}_s) = B_s.$$

Proof. Si $s < t$, l'indépendance de $B_t - B_s$ et $\mathcal{F}_s$ implique que

$$\mathbb{E}(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$$

puisque B est centré. D'où le résultat. ■

Proposition 1.5 *Tout mouvement Brownien est un processus à accroissements indépendants i.e : pour tous $s = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, les variables aléatoires $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ $(k = 1, ..., n)$ sont indépendantes et indépendantes de la tribu $\mathcal{F}_s$.*

Proof. Soient $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ des boréliens de $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{F}_s$. Comme pour tout $k = 1, ..., n$, $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ est indépendante de $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$, on voit facilement par récurrence descendante que :

$$\begin{aligned}
&P\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \in \Gamma_n, ..., B_{t_1} - B_s \in \Gamma_1, A\right) \\
&\qquad = P\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \in \Gamma_n\right) P\left(B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}} \in \Gamma_{n-1}\right) ...\mathbb{P}\left(B_{t_1} - B_s \in \Gamma_1\right) \mathbb{P}(A) \\
&\qquad = \left(\prod_{k=1}^{n} P\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \in \Gamma_k\right)\right) P(A).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve en même temps que les variables aléatoires $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ sont indépendantes (prendre $A = \Omega$) d'où le résultat. ■

Le résultat précédent a pour conséquence l'intéressante propriété suivante du mouvement brownien.

Corollaire 1.2 *Si B est un mouvement Brownien, le processus $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.*

Proof. Soit $t > s$, comme $\mathbb{E}\left(B_t B_s \mid \mathcal{F}_s\right) = B_s^2$ (car B est une martingale) et

$$\mathbb{E}\left((B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(B_t^2 - B_s^2\right)$$

(voir la proposition précédant), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left((B_t - B_s)^2 + B_s^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right) \\ &= t - s + B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s.\end{aligned}$$

■

1.4 Calcule d'Itô

1.4.1 Intégrale stochastique

Le but l'intégrale stochastique est de donner un sens à des equations de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = f(X) + g(X)\frac{dB_t}{dt}. \tag{1.3}$$

Par exemple, si $f \equiv 0$ et $g \equiv 1$, on devrait retrouver $X_t = X_0 + B_t$, décrivant le mouvement sur amorti d'une particule Brownienne.

Le problème est que, comme nous l'avons mentionné, les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas différentiables, ni même à variations bornées.

Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprète une solution de l'équation différentielle (1.3) comme une solution de l'équation intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dB_s, \tag{1.4}$$

c'est à la deuxième intégrale qu'il s'agit de donner un sens mathématique. Si $s \to g(X_s)$ était différentiable, on pourrait le faire à l'aide d'une intégration par parties, mais ce n'est en général pas le cas. Itô a donné une autre définition de l'intégrale stochastique, qui s'applique à une classe beaucoup plus vaste d'intégrants (et donne le même résultat que l'intégration par parties dans le cas différentiable).

1.4.2 Proprietés d'intégrale stochastique

Les propriétés suivantes sont prouvées aisément pour les processus X et Y satisfaisant les conditions d'intégrabilité :

1) **Linéarité :**

$$\int_0^t (X_s + Y_s) dB_s = \int_0^t X_s dB_s + \int_0^t Y_s dB_s.$$

et

$$\int_0^t (cX_s) dB_s = c \int_0^t X_s dB_s.$$

2) **Additivité :** pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t X_v dB_v = \int_s^u X_v dB_v + \int_u^t X_v dB_v.$$

3) Si $\int_0^T \mathbb{E}\{X_t^2\} dt < +\infty$, alors pour tout $t \leq T$:

$$\mathbb{E}\{\int_0^t X_s dB_s\} = 0$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[X_s^2\right] dB_s$$

de plus le processus $\left(\int_0^t X_s dB_s\right)$ est un martingale.

1.4.3 Processus d'Itô

On appelle processus d'Itô, un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ s'écrivent sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \qquad \forall 0 \leq t \leq T$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, b et σ deux processus progressivement mesurable vérifiant les conditions $P-p.s$:

$$\int_0^T |b_s|\, d_s < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^T |\sigma_s|^2\, dB_s < +\infty.$$

1.4.4 Formule d'Itô

C'est un outil qui permet du calcul intégral différentiel, que l'on appelle communément "calcul d'Itô". C'est du calcul sur les trajectoires des processus, donc la connaissance de ce qui se passe pour une réalisation w de l'aléa.

On rappelle d'abord ce qu'est l'intégrale par rapport à des processus à variation finie.

Théorème 1.3 *Supposons f de classe $\mathbb{C}^2$; alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

sous la forme différentielle :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)d\langle X\rangle_t.$$

Théorème 1.4 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à t de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport X, on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{df}{dt}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{df}{dx}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dx^2}(s, X_s)d\langle X_s\rangle.$$

sous la forme différentielle :

$$df(t, X_t) = \frac{df}{dt}(t, X_t)dt + \frac{df}{dx}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(t, X_t)d\langle X\rangle_t.$$

Théorème 1.5 *Soient X et Y deux processus d'Itô issus de x et y, soit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ dérivées bornées, on a :*

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) = f(x, y) &+ \int_0^t \frac{df}{dx}(X_s, Y_s)dX_s + \int_0^t \frac{df}{dy}(X_s, Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dx^2}(X_s, Y_s)d\langle X\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dy^2}(X_s, Y_s)d\langle Y\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dxdy}(X_s, Y_s)d\langle X, Y\rangle_s. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Problème de contrôle déterministe

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final en tenant compte éventuellement de certains critères.

2.1 Théorie du contrôle

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, une proclamation des contraintes physiques et la détermination du critère de performance. Après modélisation, on obtient un système comportant beaucoup de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état seront notées $x_i, i = 1, ..., n$, si le système évolue dans le temps, les variables seront notées $x_i(t)$, $i = 1, ..., n$, où t désigne le temps définit dans un intervalle $[0, T]$. Les n variables $x_i(t)$ seront gouvernées par n équations différentielles du premier ordre, elles sont sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u)$$

où f est un vecteur de n composantes f_i, $i = 1, ..., n$. f peut être linéaire ou non linéaire.

Définition 2.1 *Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle.*

2.2 Formulation du contrôle dans le cas déterministe

Nous présentons la formulation générale (déterministe) du problème de contrôle optimale, soient T $(0 \leq T \leq \infty)$; on considère la dynamique du système à étudier qui est donnés par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t))dt, & t > 0 \\ x(t) = x_0, & t = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

on peut écrire la formulation du problème de contrôle déterministe sur une forme plus simple :

$$\begin{cases} dx(t) = u(t)dt, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

ici, $u(t)$ est une fonction de Γ où Γ est un espace métrique compact. On parle indifféremment de contrôle pour un élément de $u \in \Gamma$ sous l'hypothèse classique que le champ de vecteur $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitz par rapport à sa premier variable, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelée l'état initial et $x(.)$ est une solution de (2.1), que l'on appelle la trajectoire d'état correspondante à $u(.)$.

Un cas particulier de (2.1) est le cas linéaire, où le système contrôlé set de la forme :

$$\begin{cases} dx(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

avec $A : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$ étant des applications mesurables. Parfois, nous appelons (2.2) un système linéaire de temps variée, puisque $A(.)$ et $B(.)$ dépendent du temps.

Contrôle optimal

Lorsqu'on sélectionne un ensemble spécifique de contrôles, on obtient un ensemble de trajectoires qui partent toutes du même point x. Dans les problèmes qui nous intéressent ici, on cherche à minimiser un coût, en suit, nous donnons un coût fonctionnelle qui mesure la performance des contrôles :

$$J(t, x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t))dt + g(x(T)) \tag{2.3}$$

tels que : $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données, où f et g sont appelées respectivement coût fonctionnel et coût terminale.

La plupart du temps, on prend tout les contrôles de l'ensemble Γ et on cherche à minimiser un coût, donc à déterminer :

$$V(t, x) = \inf_{(x,u)\in U} J(t, x, u) \tag{2.4}$$

où U désigne l'ensemble des trajectoires contrôlées admissibles, c'est-à-dire celles qui sont solutions de (2.1) en partant du point x. Souvent, on ne se contente pas que de chercher la valeur de cet infimum ; on cherche aussi la (ou les) bonne(s) stratégie(s) permettant d'obtenir l'inf, i.e. on cherche le où les contrôle(s) optimal(aux) $u(.)$ et la où les trajectoire(s) associée(s) $X(.)$. On distingue deux problèmes importants :

Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(T, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t))dt \tag{2.5}$$

où T est fixé, c'est à dire $g \equiv 0$.

Problème de Mayer

Ici c'est le problème dont le critère est le suivant :

$$J(T, u) = g(T, x(T))$$

c'est à dire $f = 0$, $J(T, u)$ est le coût terminal.

L'unicité de la solution du système (2.1) est assurée par le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles et soit $x(.)$ la solution du système (2.1). $x(.)$ est varie en fonction du contrôle u.

2.3 Programmation dynamique

La première information importante concernant la fonction valeur est qu'elle satisfait le principe de la programmation dynamique (ppd en abrégé) qui se traduit par une équation permettant de relier $V(t, x)$ et la valeur de V en un point voisin : pour tout $T > 0$

$$V(t, x) = \inf_{(x,u) \in U} \left(\int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt + V(x(T)) \right). \tag{2.6}$$

L'une des deux inégalités est facile à obtenir : si $\bar{u} \epsilon \Gamma$ un contrôle optimale pour $V(t, x)$ alors en découpant l'intégrale, en faisant un changent de variable puis en prenant l'inf il vient :

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \int_0^T f(t, x(t), \bar{u}(t)) dt + \int_0^T f(x(t+T), \bar{u}(t+T)) dt \\ &\geq \int_0^T f(x(t), \bar{u}(t)) dt + V(x(T)). \end{aligned}$$

D'où l'inégalités $V(t, x) \geq \ldots$ en prenant l'inf sur toutes les trajectoires admissible. L'autre inégalité s'obtient par un découpage similaire, mais en construisant une suite $\ll$bons$\gg$ contrôle, donnant l'inf à ε prés.

2.4 Principe du maximum de Pontryagin

Dans cette section on donne une version générale du principe du maximum de Pontryagin. Ce théorème est difficile à démontrer. En revanche lorsqu'il n'ya pas de contrainte sur le contrôle, la preuve est simple, et on arrive au principe du maximum dit faible. C'est à cette version plus simple que nous allons d'abord nous intéresser. Puis nous passerons au cas général.

2.4.1 Cas sans contrainte sur le contrôle

Problème de Lagrange

Théorème 2.1 (Principe du maximum faible) *Si le contrôle u associé au système de contrôle (2.1) est optimal pour le coût (2.5), alors il existe une application $p(.)$ absolument continue sur $[0,T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(.), p^0)$ est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0,T]$*

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}\left(t, x(t), p(t), p^0, u(t)\right), \\
p'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}\left(t, x(t), p(t), p^0, u(t)\right), \\
\frac{\partial H}{\partial u}&\left(t, x(t), p(t), p^0, u(t)\right) = 0
\end{aligned}$$

où H est le Hamiltonien associé au système (2.1) et au coût (2.5)

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, b(t, x, u)\rangle + p^0 f(t, x, u).$$

Problème de Mayer

Théorème 2.2 (Principe du Maximum faible, cas de Mayer) *Si le contrôle u est optimal sur $[0,T]$ alors il existe une application $p:[0,T]\to\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ absolument continue, et un réel $p^0\leq 0$, tels que le couple $(p(.),p^0)$ est non trivial, et*

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}\left(t,x(t),p(t),p^0u(t)\right), \\ p'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}\left(t,x(t),p(t),p^0,u(t)\right), \\ \frac{\partial H}{\partial u}&\left(t,x(t),p(t),p^0,u(t)\right)=0, \end{aligned}$$

où

$$H\left(t,x,p,p^0,u\right)=\langle p,b(t,x,u)\rangle+p^0f(t,x,u).$$

2.4.2 Principe du maximum de Pontryagin

Ce théorème est l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin.

Théorème 2.3 *Dans $\mathbb{R}^n$ on considère le système de contrôle (2.1), où b est une application de classe de $\mathbb{R}^{1+n}\times\Gamma$ dans $\mathbb{R}^n$ et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0,T[$de $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $U\subset\Gamma$. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. On note U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps t. Par ailleurs, on définit le coût d'un contrôle u sur $[0,T]$:*

$$J(T,u)=\int_0^T f(t,x(t),u(t))dt+g\left(T,x(T)\right)$$

où $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\Gamma\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sont de classe $\mathbb{C}^1$ et $x(.)$ est la solution de (2.1) associée au contrôle u.

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u\in U$ associé à la trajectoire $x(.)$ est optimal sur $[0,T]$, alors il existe une *application* $p(.) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *absolument continue, appelée vecteur adjoint, et un réel* $p^0 \leq 0$, *tels que le couple* $(p(.), p^0)$ *est non trivial, et tels que, pour presque tout* $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ p'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \end{aligned}$$

où

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, b(t, x, u) \rangle + p^0 f(t, x, u).$$

est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v),$$

si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in U} H(T, x(t), p(t), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T))$$

Remarque 2.1 *La convention* $p^0 \leq 0$ *conduit au principe du maximum. La convention* $p^0 \geq 0$ *conduirait au principe du minimum.*

2.5 Equation d'Hamilton-Jacobi

Etablissons tout d'abord formellement l'équation d'Hamilton-Jacobi. Supposons que pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe une trajectoire optimale $x(.)$ solution de problème de contrôle optimale (2.1), on a alors $x = x(t)$, et donc :

$$V(t, x) = V(t, x(t)) = J(t, x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t))dt + g(x(T)).$$

En dérivant formellement par rapport à t, on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \times b(x(t), u(t)) = f(t, x(t), u(t))$$

et donc :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \times b(x,u(t)) - f(t,x,u(t)) = 0.$$

Introduction par ailleurs le Hamiltonien du problème de contrôle optimale :

$$H(x,p,p^0,u) = \langle p, b(x,u)\rangle + p^0 f(x,u)$$

d'après le principe du maximum, le contrôle optimale $u(.)$ doit vérifier :

$$H(x(t),p(t),p^0,u(t)) = \max_{v\in U} H(x(t),p(t),p^0,v)$$

on obtient par conséquent :

$$-p^0\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \max_{v\in U} H(x, -p^0\frac{\partial V}{\partial x}(t,x), p^0, v) = 0 \tag{2.7}$$

l'équation (2.7) est l'équation générale dite de Hamilton-Jacobi en contrôle optimale.

Remarque 2.2 *En contrôle optimale, si on est capable de résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi alors on est capable d'exprimer les contrôle optimaux comme des feedbacks. En effet, rappelons que le principe du maximum permet d'exprimer les contrôles optimaux comme fonctions de (x,p). Or on vient de voir précédemment que*

$$p(t) = -p^0\frac{\partial V}{\partial x}(t,x(t))$$

(au moins si V est différentiable en ce point). La connaissance de solution V donne donc beaucoup plus que le principe du maximum, mais bien entendu cette équation d'Hamilton-Jacobi est aussi beaucoup plus difficile à résoudre pour les aspects numériques.

Chapitre 3

Problème de contrôle optimal stochastique

Les problèmes de contrôle optimal stochastique ont un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et à la finance, physique..etc.

3.1 Forme standard d'un problème de contrôle stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles, et soit $(B_t)_t$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On se donne un sous ensemble $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^k$, on note par U_0 l'ensemble de tous les processus progressivement mesurables $u = \{u_t,\ t \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{U}$. Les éléments de U_0 sont appelés les processus de contrôles. Soit :

$$b : (t, x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow b(t, x, u) \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\sigma : (t, x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \sigma(t, x, u) \in \mathbb{R}^{n\times d},$$

deux fonctions satisfaisant la condition uniforme de Lipschitz

$$|b(t,x,u) - b(t,y,u)| + |\sigma(t,x,u) - \sigma(t,y,u)| \leq K\,|x-y| \tag{3.1}$$

pour une certaine constante finie K indépendante de (t,x,y,u). On considère l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t,u_t)dt + \sigma(t,X_t,u_t)dB_t, \\ X_s = y, \end{cases} \tag{3.2}$$

si l'équation (3.2) admet une solution unique X, pour des données initiales, alors on dit que X est un processus contrôlé par le processus de contrôle u.

Les éléments de U sont appelés les processus de contrôles admissibles. Cette condition assure l'existence d'un processus contrôlé pour des données initiales, sous la condition uniforme de Lipschitz sur b et σ.

Théorème 3.1 *Supposons que $u \in U$. Alors sous le condition (3.1) et pour toute variable aléatoire $\zeta \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_0-$mesurable, il existe un unique processus X $\mathbb{F}-$adapté vérifiant (3.2) avec la condition initiale $X_0 = \zeta$. De plus, on a :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|^2\right) < \infty.$$

3.1.1 Critère de coût ou performance

Soient $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. On suppose que f et g sont à croissance quadratique en x, i.e. il existe une constante positive C indépendante de (t,u) telle que :

$$|f(t,x,u)| + |g(x)| \leq C(1 + |x|^2), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On peut alors définir la fonction de coût J sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U}$ par :

$$J(t,x,u) = \mathbb{E}\left[\int_0^t f(s,X_s,u_s)ds + g(X_T)\right] \tag{3.3}$$

où X est la solution de EDS (3.2) avec le contrôle u et la condition initiale $X_t = x$.
Observons que les conditions de croissances quadratiques de f et g assurent que $J(t,x,u)$ est bien définie pour tout contrôle admissible $u \in U$, comme une conséquence du Théorème précédent. L'objectif étant de minimiser cette fonction de coût, on introduit la fonction valeur

$$v(t,x) = \inf_{u \in U} J(t,x,u), \qquad \text{pour } (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n.$$

3.2 Principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum représente un outil fondamental dans la théorie de contrôle, il sert à trouver la commande optimale permettant d'amener un système dynamique d'un état à un autre. Dans cette section on donne une généralisation du principe du maximum dans le cas où le coefficient de diffusion dépendant de la variable de contrôle $u \in U$.
Commençons par la formulation du problème de contrôle optimal (3.2) de minimiser la fonction (3.3), l'idée principale de la résolution est d'introduire un processus adjoint $p(t)$ solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$\begin{cases} dp(t) = -H\left(t, X(t), u(t), p(t), q(t)\right) dt + q(t)dB(t) \\ p(T) = g(X(T)). \end{cases} \tag{3.4}$$

Nous définissons le Hamiltonien H comme suit :

$$H(t,X(t),u(t),p(t),q(t)) = f(t,X(t),u(t)) + b^T(t,X(t),u(t)).p(t) + tr(\sigma^T(t,X(t),u(t)).q(t) \tag{3.5}$$

est l'Hamiltonien du système.

Hypothèses

(S_0) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité complet.

(S_1) (U, d) espace polonais et $T > 0$.

(S_2) Les applications b,σ,f et g sont toutes continues. Il existe un constant $L > 0$, et un module de continuité $\varpi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ tel que pour :

$$\psi(t, x, u) = \begin{cases} b(t, x, u) \\ \sigma(t, x, u) \\ f(t, x, u) \\ g(x) \end{cases},$$

on a :

$$\begin{cases} |\psi(t, x, u) - \psi(t, \bar{x}, u)| \leq L\,|x - \bar{x}| + \varpi(d(u; \bar{u})), \\ \qquad \forall t \in [0, T], \quad \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u, \bar{u} \in \mathbb{U}. \\ \qquad |\psi(t, 0, u)| \leq L, \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times \mathbb{U}. \end{cases}$$

(S_3) Les applications b,σ, f et g sont de classe C^2 : Il existe un constant $L > 0$, et un module de continuité $\varpi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ tel que pour :

$$\psi(t, x, u) = \begin{cases} b(t, x, u) \\ \sigma(t, x, u) \\ f(t, x, u) \\ g(x) \end{cases},$$

on a :

$$|\psi_x(t, x, u) - \psi_x(t, \hat{x}, u)| \leq L\,|x - \hat{x}| + \varpi\left(d\left(u; \hat{u}\right)\right)$$

$$|\psi_{xx}(t, x, u) - \psi_{xx}(t, \hat{x}, u)| \leq \varpi\left(|x - \hat{x}| + d(u; \hat{u})\right)$$

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \quad \forall u, \hat{u} \in \mathbb{U}.$$

Théorème 3.2 ***(Principe du maximum de Pontryagin)*** *Soient H défini par (3.5), $\hat{u}(t)$ le contrôle optimal, $(\hat{p}(t); \hat{q}(t))$ solution de l'équation optimal (3.4), $\hat{X}(t) = X^{\hat{u}}(t)$ solution de l'équation (3.2), alors sous les hypothèses de S_0 jusqu'à S_3, on a :*

$$H\left(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) = \max_{u \in U} H\left(t, \hat{X}(t), u(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Proof. Voir le livre de Yong & Zhou 1999. ■

3.3 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique de Bellman permet de résoudre, au travers d'une équation aux dérivées partielles, appelé équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), certain problème analytiquement.

L'idée principale de la méthode de la programmation dynamique consiste à considérer une famille de contrôles à différents états initiaux et d'établir des relations entre les fonctions valeurs associées. L'équation de la programmation dynamique conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire appelée équation d'Hamilton -Jacobi-Bellman (HJB). Lorsque cette EDP peut être résolue par l'obtention explicite ou théorique d'une solution régulière, le théorème de vérification valide l'optimalité de ce candidat, solution d'HJB, et permet aussi de caractériser un contrôle optimal.

La plus part des équations aux dérivées partielles de Bellman n'est pas facile à résoudre et il faut supposer que la solution soit de classe C^2, nous pouvons sinon supposer qu'elle est seulement localement bornée mais dans ce cas la solution sera au sens de la viscosité.

En appliquant formellement ce principe où on peut minimiser la fonction valeur $v(t, x)$ associée au problème de contrôle stochastique à temps continu satisfait à une équation parabolique fortement non linéaire appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Théorème 3.3 *Soit* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$*, alors on a :*

i) *Pour tout* $u \in U$ *et* $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$ *:*

$$v(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s,X_s,u_s)ds + v(\theta,X_\theta)\right].$$

ii) *Pour tout* $\delta > 0$*, il existe* $u \in U$ *tel que pour tout* $\theta \in \mathcal{T}_{t;T}$:

$$v(t,x) + \delta \geq \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s,X_s,u_s)ds + v(\theta,X_\theta)\right].$$

C'est une version plus forte que la version traditionnelle du principe de la programmation dynamique :

$$v(t,x) = \inf_{u\in U} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s,X_s,u_s) + v(\theta,X_\theta)\right] \tag{3.6}$$

pour tout temps d'arrêt $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$.

3.3.1 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Dans ce paragraphe, en appliquant formellement le principe de la programmation dynamique aussi appelé le principe de Bellman, on peut montrer que la fonction de valeur associée à un problème de contrôle stochastique à temps continu satisfait à une EDP non linéaire appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Théorème 3.4 *Supposons que la fonction valeur* $v \in \mathbb{C}^{1,2}\left([0,T], \mathbb{R}^n\right)$*, alors* v *satisfait l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :*

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \inf_{u\in\mathbb{U}}\left[\mathcal{L}^u v(t,x) - f(t,X_t,u_t)\right] = 0 \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

où

$$\mathcal{L}^u v = b(x,u).\nabla_x v + \frac{1}{2} tr\left(\sigma^T(x,u)\, D_x^2 v \sigma(x,u)\right).$$

Proof. Supposons que $v \in \mathbb{C}^{1,2}\left([0,T], \mathbb{R}^n\right)$ et $f(.,.,u)$ est continue en (t,x) pour tout $u \in \mathbb{U}$, alors nous avons par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} v(t+h, x_{t+h}) &= v(t,x) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + b\nabla_x v + tr\left[\left(\sigma\sigma^T\right) D_x^2 v\right]\right)(s, X_s, u_s)\,ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \nabla_x v(t, X_s, u_s)\sigma(s, X_s, u_s) dB_s \\ &= v(t,x) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \mathcal{L}^u v\right)(s, X_s)\,ds + \int_t^{t+h} \nabla_x v\left(s, X_s, u_s\right)\sigma\left(s, X_s, u_s\right) dB_s. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance on obtient :

$$\mathbb{E}\left[v(t+h, x_{t+h})\right] = v(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \mathcal{L}^u v\right)(s, X_s)\,ds\right]$$

d'après le théorème (3.2), on trouve :

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \mathcal{L}^u v\right)(s, X_s) + f\left(s, X_s, u_s\right) ds\right]$$

tendant h vers 0, on obtient :

$$0 \leq \frac{\partial V}{\partial s}(t,x) + \mathcal{L}^u V(t,x) + f(t, X_t, u_t)$$

ceci fournit que :

$$-\frac{\partial v}{\partial s}(t,x) - \inf_{u\in\mathbb{U}}\left[\mathcal{L}^u v(t,x) - f(t, X_t, u_t)\right] \leq 0 \tag{3.7}$$

nous supposerons que $\hat{u} \in \mathbb{U}$, en passant par les mêmes étapes et d'après (3.7) on obtient :

$$-\frac{\partial v}{\partial s}(t,x) - \inf_{u\in\mathbb{U}}\left[\mathcal{L}^u v(t,x) - f(t, X_t, u_t)\right] = 0.$$

Donc, la fonction valeur satisfait l'équation HJB :

$$-\frac{\partial v}{\partial s}(t,x) - \inf_{u\in\mathbb{U}}\left[\mathcal{L}^u v(t,x) - f(t, X_t, u_t)\right] = 0 \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

■

3.3.2 Unicité de la fonction valeur

L'étape la plus importante dans la programmation dynamique consiste à montrer, étant donnée une solution régulière à l'équation d'HJB, sous des conditions suffisantes, coïncide avec la fonction valeur. Ce résultat est appelé théorème de vérification et permet aussi d'obtenir un contrôle optimal. Mieux, il nous propose comment construire un contrôle optimal à partir des sous-problèmes que nous avons énoncés plus haut.

Théorème 3.5 *Soit* $w \in \mathbb{C}^{1,2}\left([0,T[,\mathbb{R}^n\right) \cap \mathbb{C}^0\left([0,T[,\mathbb{R}^n\right)$ *tel que* $\displaystyle\int \nabla w(s,X_s)\sigma\left(X_s,u_s\right)dB_s$ *soit une martingale pour tout* $u \in \mathbb{U}$*, et satisfait :*

$$-\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \inf_{u\in\mathbb{U}}\left[-\mathcal{L}^u w(t,x) - f(x,u)\right] = 0 \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

$$w(T,x) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

alors $w(t,x) \leq v(t,x), \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$*, si de plus pour tout* $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$ *il existe* $\hat{u}(t,x)$ *mesurable à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *tel que :*

$$\inf_{u\in\mathbb{U}}\left[\mathcal{L}^u w(t,x) - f(t,X_t,u_t)\right] = -\mathcal{L}^{\hat{u}(t,x)} w(t,x) - f(t,X_t,\hat{u}(t,x))$$

et tel que l'EDS :

$$dX_t = b(t,X_t,\hat{u}(t,X_t))dt + \sigma\left(t,X_t,\hat{u}(t,X_t)\right)dB_t$$

admette une unique solution, étant donnée une condition initiale, alors :

$$w(t,x) = v(t,x) \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

et $\hat{u}(t,x)$ *est un contrôle optimal feedback i.e.* $v(t,x) = J(\hat{u})$.

Remarque 3.1 *Si ∇w est à croissance linéaire en x :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\nabla w(X_s)\sigma\left(s, X_s, u_s\right)\right|^2 ds\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(1+|X_t|\right)^2 dt\right] \\ &\leq C\left(1+\int_0^T \mathbb{E}\left|X_t\right|^2 dt\right) \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Proof.

i) Puisque $w \in \mathbb{C}^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^n)$ on a pour tout $0 \leq t \leq s \leq T$, par la formule d'Itô :

$$w(s, X_s) = w(t,x) + \int_t^s \frac{\partial w}{\partial t}\left(r, X_r\right) + \mathcal{L}^{u_r} w(r, X_r) dr + \int_t^s \nabla_x w(r, X_r)\sigma\left(r, X_r, u_r\right) dB_r$$

comme le processus $\displaystyle\int \nabla_x w(r, X_r)\sigma\left(X_r, u_r\right) dB_r$ est une martingale, en prenant l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[w(s, X_s)\right] = w(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^s \frac{\partial w}{\partial t}(r, X_r) + \mathcal{L}^{u_r} w(r, X_r) dr\right]$$

puisque w satisfait :

$$-\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \sup_{u\in\mathbb{U}}\left[-\mathcal{L}^u w(t,x) - f(x,u)\right] = 0 \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[w\left(s, X_s\right)\right] \geq w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^s f(r, X_r, u_r) dr\right] \qquad \forall u \in \mathbb{U}$$

comme w est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, en faisant tendre s vers t, on a en utilisant aussi $w(T,x) = g(x), x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{E}\left[g(X_T)\right] \geq w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^s f(r, X_r, u_r) dr\right], \qquad \forall u \in \mathbb{U}$$

et donc :

$$w(t,x) \leq v(t,x) \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

ii) Notant par $\hat{X}_t$ solution de l'EDS :

$$\begin{cases} dX_s = b(s, X_s, \hat{u}(s, X_s))ds + \sigma(s, X_s, u_s)dB_s & s \geq t \\ X_t = x \end{cases}$$

alors en appliquant la formule d'Itô à $w(s, \hat{X}_s)$, on a :

$$\mathbb{E}\left[w(s, \hat{X}_s)\right] = w(t, x) + \mathbb{E}\left[\int_t^s \frac{\partial w}{\partial t}(r, \hat{X}_r) + \mathcal{L}^{\hat{u}(r, \hat{X}_r)} w(r, X_r)dr\right]$$

or par définition de $\hat{u}(t, x)$, on a :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} - \mathcal{L}^{\hat{u}(t,x)} w(t, x) - f(x, \hat{u}(t, x)) = 0$$

d'où :

$$\mathbb{E}\left[w\left(s, \hat{X}_s\right)\right] = w(t, x) - \mathbb{E}\left[\int_t^s f(r, \hat{X}_r, \hat{u}(r, \hat{X}_r))dr\right].$$

En faisant tendre s vers T, on obtient ainsi :

$$w(t, x) = \mathbb{E}\left[\int_t^s f(r, \hat{X}_r, \hat{u}(r, \hat{X}_r))dr + g(\hat{X}_T)\right]$$

où $\hat{u}_s = \hat{u}\left(s, \hat{X}_s\right)$ avec pour état correspondant $\hat{X}$. Donc

$$w(t, x) = J(\hat{u}) \geq v(t, x)$$

et finalement $w = v$.

$\blacksquare$

Bibliographie

[1] BENCHAABANE, A. *Contrôle Optimal Stochastique avec Saut. Application à la Finance : Problème d'investissement à volatilité stochastique*. Thèse de doctorat. Université Badji Mokhtar-Annaba, 2013.

[2] BENHENICHE, A. *Etude comparée de différents techniques de commande de la machine asynchrone.* Thèse de doctorat. Université Badji Mokhtar-Annaba, 2016.

[3] BERGLUND, N. *Introduction aux intégrales stochastiques.* Université d'Orléans France, Octobre 2003.

[4] CHASSEIGNE, E. *Équations aux dérivées partielles, équations non-locales et contrôle optimal déterministe*. Thèse de doctorat. Université François Rabelais de Tours France, 2014.

[5] MOUSSOUNI, N. *Contrôle optimal : optimisation d'une production céréalière*. Thèse de doctorat. Université de Tizi-Ouzou, 2012.

[6] TRÉLAT, E. Contrôle optimal : théorie et applications. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) France, 2005.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

EDS	:	equations différentielles stochastique
$\bar{u}$	:	contrôle optimal
∇v	:	le gradiant de la fonction valeur
ppd	:	principe de la programmation dynamique
HJB	:	équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman
U_0	:	l'ensemble de tous les processus progressivement mesurables
Γ	:	espace métrique compact
$H(t, X, u, p, q)$	:	Hamiltonien du problème de contrôle optimale
$\mathcal{L}^u$	:	générateur infinitesimal associé à v
$J(u(.))$	:	la fonction de coût minimiser dans le cas sans contrainte

Résumé

Le but de ce travail de recherche est de faire une petite introduction à la théorie du contrôle et en c'est intéresser au problème de contrôle optimal. Nous donnons d'abord quelques définitions et propriétés de base sur le calcul stochastique, puis en passe au problème de contrôle déterministe. En fin en parle du problème de contrôle optimal stochastique, nous donnons d'abord une formulation mathématique du problème, pour ensuite examiner deux approches de résolution du problème de contrôle optimal. La première, le principe du maximum stochastique et la deuxième approche est la programmation dynamique.

الملخص

الهدف من هذا العمل البحثي هو التطرق بشكل مقتضب لنظرية التحكم و اهتممنا بشكل خاص بمسألة التحكم الأمثل. بدأنا أولا بذكر بعض التعريفات و الخصائص الأساسية الخاصة بالحساب العشوائي ثم انتقلنا إلى مسألة التحكم الحتمية وفي الأخير تطرقنا إلى مسألة التحكم الأمثل العشوائية حيث بدأنا بذكر الصيغة الرياضية للمسألة ثم ذكرنا طريقتين لحل هذه المسألة. الطريقة الأولى مبدأ النهاية العظمى و الثانية هي البرمجة الديناميكية.

Abstract

The purpose of this research work is to make a small introduction to the theory of control and in it is to interest in the problem of optimal control. We first give some basic definitions and properties on the stochastic calculation, and then turn to the problem of deterministic control. Finally, we speak about the stochastic optimal control; we first give a mathematical formulation of the problem, and then examine two approaches to solving the optimal control problem. The first one is the stochastic maximum principle and the second approach is dynamic programming.