République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

LABED ABIR

Titre :

Évaluation et couverture des options financières : Options Européennes exemple

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	TAMER LAZHAR	UMKB	Président
Pr.	KHELFALLAH NABIL	UMKB	Encadreur
Dr.	ZOUZOU AKILA	UMKB	Examinateur

Juin 2020

Dédicace

Dans toutes les lettres ne peuvent pas trouver les bons mots, tous les mots n'expriment pas l'amour, le respect, la gratitude envers mes chers parents.

Je dédie cet humble travail :

À mon père **ABDELHAFID** la personne qui m'a entouré d'amour et m'a appris à être patiente, m'a appris et dirigé sur le droit chemin.

À ma charmante mère dans l'univers **BOUCHRA** qui m'a toujours soutenue depuis premier pas jusqu'à ce jour et qui toujours su trouver les mots qu'il fallait pour m'encourager et qui m'a donnée la vie, symbole de fierté, et de patience j'espère qu'allah la gardera pour nous, inchallah.

j'espère qu'un jour, je pourrai leurs rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi, que dieu leur prête bonheur et longue vie.

À mon mari **FAROUK**, qui m'a soutenu qui a pour moi le pilier solide durant toutes les années de mes études, que dieu le garde et le protège.

À mes chères frères : **ZOHIR**, **MOHAMED**, **AKRAM**.

À mes chères soeurs : **SOUMIA**, **AMAL**, **SAMIA**, **NINA**.

À **Mr.CHALLA ADEL** pour son aide, ses conseils, ses encouragements précieux, et son soutien régulier.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, le fruit de ma formation, le plus grand merci tout d'abord au bon dieu le tout puissant pour son aide et le courage, la patience et la confiance en soi qu'il m'a donné pour surmonter toutes les difficultés durant mes études ainsi que l'endurance pour terminer ce projet.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et mes profondes gratitudes à mon encadreur **Pr : KHALFELLAH Nabil** pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire, c'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail.

Mes remerciements également à tous les membres du jury qui m'ont fait le grand honneur de bien vouloir accepter de juger mon travail.

Enfin, je remercie mes amis et mes familles pour tous leurs encouragements.

Table des matières

Introduction

La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories :

- la finance d'entreprise (corporate finance) et la finance de marché (market finance).
- La finance d'entreprise utilisé essentiellement des mathématiques simples, et pour la finance de marché s'appuie sur des mathématiques complexes et génère de nombreux travaux mathématiques.

Les origines de la mathématisation de la finance moderne remontent à la thèse de Louis Bachelier intitulée « Théorie de la spéculation » et soutenu à la Sorbonne en 1900, aprés en 1960 Samuelson a eu l'idée de pendre l'exponentielle d'un brownien, jusqu'en 1973 Fisher Black et Myron Scholes publient leurs travaux sur la façon de couvrir une option grâce à la détention du sous-jacent et du cash, afin de construire un portefeuille sans risque, tout en donnant une formule d'évaluation des options, ils ne s'attendent peut être pas à rester dans les annales de la finance. Le modèle peut s'appliquer à un actif suivant un processus stochastique. Ces travaux marquent d'une part la naissance des processus stochastiques à temps continu, et d'autre part celle des stratégies à temps continues pour la couverture de risque en finance. Une des caractéristiques du modèle de Black-Scholes est que le prix de l'action est une fonction continue de temps.

En 1997, Robert Merton et Myron Scholes se voient finalement récompensés par le prix Nobel d'économie (Black ne pouvait être éligible car décédé en 1995). Aujourd'hui, le modèle de Black-Scholes, bien que souvent décrié, est considéré comme une avancée fondamentale pour la finance moderne. La formule de Black-Scholes est utilisée pour évaluer une option européenne ne payant pas de dividendes. Pour une option d'achat (call) et une option de vente (put).

Le but de ce travail est justement de comment valoriser les options européennes et de trouver l'évaluation des produits dérivés. Pour cela, on va introduire ces notions : calcul stochastique, mouvement Brownien, pour atteindre ce but.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Une introduction où on situe notre travail et son plan.

- Le premier chapitre est un chapitre introdictif. Dans ce chapitre, on introduit les principales notions de calcul stochastique qui est une extension du calcul différentiel et intégrale classique,dans laquelle les processus à temps continu remplacent les fonctions, et les martingales jouent le rôle des constantes utilisées dans le modèle de Black et Scholes à temps continu, qu'on va l'étudier en détail au prochain chapitre.

- Dans le deuxième chapitre qu'on l'appelle Terminologie financier, nous présentons quelques notions de mathématique financier comme les actifs, les options, les portefeuilles, les arbitrages etc...

- Dans le troisième chapitre, on définit le modèle de Black-Scholes dans le cas unidimensionnel avec son l'analyse mathématiques détaillés, ce chapitre a consacré à l'évaluation et la couverture d'une option Européenne. On va donner une brève description du modèle de Black-Merton Scholes, en expliquant la formule d'évaluation et de couverture des options Européennes.

Chapitre 1

Introduction générale au calcul stochastique

Ce chapitre regroupe quelques notions éssentielles de la théorie des probabilités et les processus stochastiques, qui sont indispensables pour la suite. Pour un exposé bien complet.

Définition 1.1 *(Espace de probabilité) : Un éspace de probabilité est un triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *où :*

a) Ω *est un ensemble ;*

b) $\mathcal{F}$ *est une tribu (où* σ*-algèbre) sur* Ω;

c) $\mathbb{P}$ *est une mesure de probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Définition 1.2 *(Variable aléatoire) : Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. une variable aléatoire est une application* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(w) \in B\} \in \mathcal{F} \quad , \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Proposition 1.1 *:* X *est aussi dite une fonction (ou v.a)* $\mathcal{F}$*-mesurable si* $\Omega = \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*, alors* X *est dite fonction borélienne.*

Définition 1.3 *(Filtration) : Une filtration* $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ *est une suite croissante de sous tribu de* $\mathcal{F}$ *i.e*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

a) Le quadruplé $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}, \mathbb{P})$ où $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ est une filtration est appelé espace de probabilité filtré.

b) Etant donné un processus X défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la filtration naturelle noté $\left\{\mathcal{F}_t^X; t \geq 0\right\}$ est définie par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t).$$

c) La filtration $\mathcal{F}_t$ s'interprète comme l'information connue à la date t.

Remarque 1.1 *: $\mathcal{F}^X$ est la plus petite filtration qui rende X adapté.*

1.1 Processus stochastique à temps continue

Définition 1.4 *: Un processus stochastique (ou aléatoire) à temps continue $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une famille de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable $\mathbb{R}$ et indicée par un paramétre $t \in \mathbb{R}$ et*

$$\begin{cases} X : \mathbb{R}\times\Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) \mapsto X(t, \omega) = X_t(\omega) \end{cases}$$

Remarque 1.2 *: Dans la pratique l'indice t représente le temps.*

1) *Pour t fixé, $X(t) = X(t, .)$ est une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.*

2) *Pour ω fixé, $X(\omega) = X(., \omega)$ est une réalisation ou une trajectoire du processus stochastique.*

Définition 1.5 *(Processus adapté) : Soit (X_t) un processus et $(\mathcal{F}_t)$ une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si $\forall\ t \geq 0$ X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

1.2 Martingales

On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}, \mathbb{P})$

Définition 1.6 *: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté et intégrable (c'est à dire $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty \ \forall \ t$), on dit que X est :*

a) *Une martingale si :*

$$\forall 0 \leq s \leq t : \ \mathbb{E}\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) = X_s.$$

b) *Une sur-martingale si :*

$$\forall 0 \leq s \leq t : \ \mathbb{E}\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) \leq X_s.$$

c) *Une sous-martingale si :*

$$\forall \ 0 \leq s \leq t : \ \mathbb{E}\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) \geq X_s.$$

1.3 Éspérence conditionnelle

Soit X une v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.7 *L'espérence conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ de X quand $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire vérifié :*

a) *$\mathcal{G}$-mesurable telle que :*

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})dp = \int_A X dp \quad , \forall A \in \mathcal{G}.$$

b) *Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors :*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X).$$

c) *Positivité : si $X \geq 0$, alors : $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0$.*

d) *Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors :*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X.$$

e) *On a :* $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$.

Définition 1.8 *: Soint X, Y deux variables aléatoires, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un éspace de probabilité, $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$:*

a) *Linéarité :* $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}).$$

b) *Monotonie :*

$$X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}).$$

c) *Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, alors :*

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G}).$$

Proposition 1.2 *: Soient $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ deux sous tribus de $\mathcal{F}$. si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors :*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}).$$

Lemme 1.1 *(Lemme de Fatou) : Si $|X_n| \leq Y$ où Y est intégrable et si X_n converge p.s vers X alors $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$ converge p.s vers $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.*

Proposition 1.3 *(Inégalité de Jensen) : Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors :*

$$\varphi\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G}), \ \ p.s.$$

1.4 Mouvement Brownien (MB)

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le mouvement brownien, il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers.

Définition 1.9 *: Il existe un espace de probabilité muni de la filtration naturelle et un processus stochastique $B = (B_t)_{t \geq 0}$, tel que :*

a) *B est continue, i.e : $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue pour tout ω.*

b) *B est à accroissements indépendants,i.e : pour tout $0 \leq s \leq t$ $B_t - B_s$ est indépendant de*

$$\mathcal{F}_s^B := \sigma\{B_s, s \leq t\}.$$

c) *Les accroissements sont stationnaires, et pour $s \leq t$: $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.*

Remarque 1.3 *: Si de plus $B_0 = 0$, on dit que B est un mouvement Brownien standard.*

Proposition 1.4 *: Soit X_t un Mouvement Brownien alors :*

1. *$-X_t$ est aussi MB.*
2. *Pour tout $c > 0, \{cX_{\frac{t}{c^2}}\}$ est un MB.*
3. *Le processus définit par $Y_0 = 0$, et $Y_t = tX_{\frac{1}{t}}$ est un MB.*
4. *Pour $t \geq 0$, $X_{t+s} - X_s$ est un MB.*

Définition 1.10 *(Mouvement Brownien géométrique) : Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit MB géometrique de paramètre μ et σ s'il s'écrit :*

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{1.1}$$

La solution de (1.1) s'écrit :

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\}.$$

Ce modéle est appelé modéle brownien géométrique.

Théoreme 1.1 *(Représentation des martingales Browniennes) : Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration naturelle de B_t, il existe un processus adapté $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que $\mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds) < +\infty$ et*

$$\forall t \in [0,T] : \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s, \quad p.s.$$

On donne des exemples de martingale que l'on peut construire à du MB

Proposition 1.5 *: Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathbb{F}$-mouvement brownien standard alors :*

1. *B_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
2. *$(B_t^2 - t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
3. *$\exp\left(\sigma B_t - \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale, $\sigma \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.11 *(Probabilités équivalentes) : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si :*

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Théoreme 1.2 (Théorème de Girsanov) *: Il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par :*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t := Z_T \; ; \; Z_T := \exp\left\{-\lambda B_T - \frac{(\lambda)^2}{2}T\right\},$$

sous laquelle le processus B_t^* défini par $B_t^* := B_t + \lambda t$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$

1.5 Intégrales stochastiques et calcule d'Itô

Définition 1.12 *(Processus d'Itô) : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien, un processus d'Itô est un processus X $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire pour la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \quad , t \in [0, T], \quad \mathbb{P}.p.s.$$

avec :

a) X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et $b = \{b_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\sigma = \{\sigma_t, 0 \leq t \leq T\}$ sont des processus adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, où le coefficient b s'appelle le drift ou la dérivée et σ s'appelle le coefficient de diffusion.

b) $\int_0^t |b_s| ds < \infty$, $\mathbb{P}.p.s.$

c) $\int\limits_0^t |\sigma_s|^2 dB_s < \infty$, $\mathbb{P}.p.s.$

Ecrit sous sa forme différentielle, le processus d'Itô devient :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

1.5.1 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcule stochastique, cette formule offre un moyen de manipuler les solutions d'équations différentielles stochastiques.

Première formule d'Itô : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ est une fonction deux fois continûment différentiable. on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_x(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(X_s) d\left\langle X, X \right\rangle_s,$$

où par définition : $d\left\langle X, X \right\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds.$

Deuxième formule d'Itô : Si $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ est une fonction de classe $C^{1,2}$ on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{df}{ds}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{df}{dx}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dx^2}(s, X_s) d\left\langle X, X \right\rangle_s,$$

sur la forme différentielle :

$$df(t, X_t) = \frac{df}{dt}(t, X_t) dt + \frac{df}{dx}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(t, X_t) d\left\langle X, X \right\rangle_t.$$

Variation quadratique (sous formule d'Itô) : La variation quadratique d'un MB est résumée dans le tableau suivant :

$\langle d., d. \rangle$	ds	dB_s
ds	0	0
dB_s	0	ds

1.6 Equations Différentielles Stochastiques

Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont les équations qui régissent l'évolution de la plupart des prix des actifs financiers, et dans ce partie en donne une courte introduction pour une étude plus approfondie

Définition 1.13 *: On appelle équation différentielle stochastique noté (EDS) de condition initiale x_0 de coefficient de diffusion σ et de coefficient de dérive b un processus X tel que pour tout $t \geq 0$:*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{1.2}$$

Les donnés sont le MB B d-dimenssionnel et les coefficient b et σ donnée par :

$$b : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$\sigma : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times d},$$
$$x \in \mathbb{R}^n.$$

L'équation (1.2) sera aussi noté :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)ds + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.3}$$

Théoreme 1.3 *(Éxistence et unicité des solutions d'une EDS) : Si b et σ sont deux fonctions continues, telle qu'il existe $k < \infty$, x, y dans $\mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}^+$:*

i) *Condition de Lipschitz :*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k|x-y|.$$

ii) *Condition de croissance lineaire :*

$$|b(t,x) - \sigma(t,x)| \leq k(1+|x|).$$

Alors l'équation différentielles stochastique d'Itô (1.3) admet une solution unique dans $[0, T]$.

Chapitre 2

Terminologie financière

La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories : la finance d'entreprise (corporate finance) et la finance de marché (market finance). La finance d'entreprise utilisé essentiellement des mathématiques simples, et pour la finance de marché s'appuie sur des mathématiques complexes et génère de nombreux travaux mathématiques. Nous verrons dans ce chapitre quelque notion de mathématique financière.

Définition 2.1 *(**Actifs**) : L'actif est une partie du bilan qui représente à une date donnée l'ensemble des biens détenus par une entreprise. Il est composé de l'actif immobilisé et de l'actif circulant. L'actif circulant comprend les actifs court terme, comme les stocks de la société, les créances clients et les disponibilités (liquidités et titres de placement). L'actif immobilisé est composé d'actifs long terme, comme les actifs corporels (équipements), les actifs financiers (prêts long terme) et les actifs incorporels (brevets).*

2.1 Actifs financières

Les actifs financiers sont des contrats où les parties s'échangent des flux d'argent telle que :

- Une **quantité donnée d'un actif financier** (indice boursier, action, devise, obligation, matière-première ou un autre produit dérivé), **appelé actif sous-jacent (underlying asset).**

- **Prix d'un titre financier (price)** : est le montant convenu entre les deux parties en échange du titre.
- **Maturité ou échéance (Maturity)** : c'est la date à laquelle l'échange doit avoir lieu.
- **Prix de livraison ou prix à terme (dettlement price or forward price)** : le prix auquel l'actif sous-jacent est échangé.

Les transactions peuvent être directes entre le **broker** et le client **(over the counter)** ou sur une place financière organisée telle qu'une bourse **(stock exchange).**

Une bourse est un marché financier institutionnel avec un règlement spécifique choisie de manière à améliorer les conditions des transactions.

Le marché financièr est un lieu (parfois virtuel) où l'on achète et vend des titres financièrs (ou bien actifs financièrs).

Définition 2.2 *: Un actif financier est un titre ou un contrat, généralement transmissible et négociable (par exemple sur un marché financier), qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus et/ou un gain en capital, en contrepartie d'une certaine prise de risque.*

On suppose que les marchés financiers offrent des actifs dont les prix dépendent du temps et du hasard, on peut donc les modéliser par des processus stochastiques
Les actifs financiers peuvent être classés en deux grandes catégories :

◁ **L'actif sans risque** : il rapport una rendement constante connue à l'avance,i.e : le rendement du titre entre les dates t et t+1 et connu à la date t, il s'agit en générale d'une obligation émise par l'état, c'est-à-dire sans risque de défaut.

◁ **Les actifs risqués** : ils rapportent un rendement no connu à l'avance. il s'agit par exemple des ations,des obligations émise par des entreprise pouvant faire défaut.

Un modéle de marché financier est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\leq 0}$ où :

- Ω représente tous les états du monde ;
- La tribu $\mathcal{F}$ représente la structure d'information globale disponible sur le marché ;

- $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration croissante décrivant l'information disponible aux agents du marché à la date t;
- Une probabilité $\mathbb{P}$ qui donne les probabilités à priori des évenements considérés. C'est la probabilité historique ou objective.

On suppose qu'il y a sur le marché $d+1$ actifs financiers, dont les prix à l'instant t sont donnés par des variables aléatoires $S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d$ à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$ (les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas les cours futurs).

Le vecteur $S_t = \left(S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d\right)$ est le vecteur des prix à l'instant t. L'actif numéroté 0 représente «Les placements sans risque» et les actifs numérotés de 1 à d seront appelés actifs «à risques».

Portefeuille : Toute collection d'actifs financiers tels que des stocks,des liens et des équivalents d'argent comptant tenus par un établissement ou une compagnie d'investissement est appelée un portefeuille

Définition 2.3 *: Un portefeuille est un ensemble d'investissement possédé par un intervenant sur le marché. Ce sont des positions sur le marché, c.à.d le nombre d'actifs et de produit dérivé qu'il possède. Il peut contenir des actions, des options,des devises. On peut appeler cela un portefeuille initial sans l'action de gestion des risques.*

Produit dérivé : C'est un contrat entre un acheteur et un vendeur dont la valeur est «dérivée» des flux financiers futurs d'un actif sous-jacent, tels que des actions, des obligations, des indices boursiers, des instruments monétaires.

Actif sous-jacent financier : Un actif sous-jacent financier est un actif sur lequel porte un produit dérivé. Il peut être une action,obligation,devise ou même matière première,... ect.

La prime : La prime (premium) est le prix de l'option, une somme d'argent que l'acheteur verse définitivement au vendeur de l'option.

Arbitrage : Combinaison d'opérations pour tirer un profit sans prise de risque.

Stratégie financière : Une stratégie financière est un processus d'investissement dans les actifs sans risques et risqués. On la modélise comme un processus défini $\phi = (\phi_t^0, \phi_t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, les composantes ϕ_t^0 et ϕ_t donnent à l'instant t les quantités d'actifs sans risque S_t^0 et d'actif risqué S_t respectivement détenues en portefeuille.

La valeur du portefeuille à l'instant t, associée à la stratégie ϕ est donnée par :

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t,$$

pour la couverture d'option on s'interésse aux portefeuilles autofinancés.

Définition 2.4 *: Un portefeuille autofinancant est une stratégie d'achat ou de vente de titres,actions, prêts, et emprunts à la banque,et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent, dans le portefeuille entre deux instants successifs,elle consiste à :*

1. Débuter avec une somme initiale d'argent V_0 (réparti entre actif risqué et actif sans risque comme est-t-il expliqué présédament)
2. Modifier cette répartition une fois à chaque pas de temps après avoir eu connaissance des cotations des actifs le contenant, et sans importer ni exporter d'argent.

La condition d'autofinancement est :

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t.$$

Stratégie autofinancée : On dit une stratégie auto-financée est une stratégie pour la quelle les variations de valeur du portefeuille viennent uniquement des gains dus à l'agitation des cours.

Pour répondre aux problèmes d'évaluation et de couverture des options, on a besoin aussi d'une hypothèse fondamentale appelée Absence d'opportunité d'Arbitrage **(A.O.A)**.

Définition 2.5 *(Stratégie d'arbitrage) : On dira qu'une stratégie* (ϕ) *autofinancé est une stratégie d'arbitrage ou plus briévement un arbitrage si elle vérifié les conditions suivantes :*

$$V_0(\phi) = 0; \quad V_T(\phi) \geq 0 \quad et \quad \mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) > 0.$$

Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle (la notion d'arbitrage réalisation d'un profit sans prendre de risques).

On dit donc qu'il existe une opportunité d'arbitrage, s'il existe un portefeuille auto-financant V de valeur nulle en $t = 0$ dont la valeur V_t en T est positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive.

Définition 2.6 *(Stratégie admissible) : Une stratégie* ϕ *est dite admissible si elle autofinanciée et si* $V_t(\phi) \geq 0$ *pour tout* $t \in \{0, 1, ..., T\}$.

Absence d'opportunité d'arbitrage : On dit que le marché financier vérifié la conditions d'absence d'opportunités d'arbitrage **(A.O.A)** s'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur ce marché financier.

Définition 2.7 *: il existe une absence d'opportunité d'arbitrage* ***(A.O.A,*** *non free lunch)* *entre tout instant* 0 *et* T

$$V_0 = 0 \quad et \quad {}_T \geq 0 \quad V \Rightarrow \mathbb{P}(V_T > 0) = 0.$$

L'hypothèse signifie simplement : "Si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle", soit "On ne peut gagner d'argent sans capital initial".

Contrats d'options : Un contrat d'option est un contrat par lequel on peut acheter ou vendre une option d'achat (call) ou une option de vente (put) d'une quantité donnée d'une marchandise quelconque à un prix fixée aujourd'hui, la transaction ayant lieu à une date ultérieure.

Toute les conditions sont fixées aujourd'hui, mais le contrat n'engage que le vendeur de l'option.

L'acheteur a la possibilité d'exercer (de lever) ou non son option.

Cette situation justifie le paiement d'une prime que l'acheteur doit payer au vendeur des la signature du contrat, cette prime reste définitivement acquise au vendeur, que l'option soit levée ou non à l'échéance.

Définition 2.8 *(Option) : Une option est un contrat conférant à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix convenu à l'avance pendant une période de temps donnée. En contrepartie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur une prime qui est le prix de l'option.*

On distingue deux types d'options :

- Un call : est une option d'achat.
- Un put : est une option de vente.

2.1.1 Call Européenne

Définition 2.9 *: On appelle option d'achat Européenne (call Européen), le contrat qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) d'achater une action (unité de l'actif) à la date $T > 0$ (maturité) au prix K (prix d'exercice ou strike) fixé à l'avance. Ce contrat a un prix ; il est échangé sur le marché.*

Remarque 2.1 *: A l'échéance T, deux cas se produisent pour l'acheteur du call :*

1) *A la date de maturité l'actif a un prix $S_T > K$ dans le marché. Dans ce cas le détenteur de l'option exercera son droit, c'est à dire achète une action au prix K et la vend immédiatement dans le marché ouvert au prix S_T, réalisant donc un bénéfice égale à la différence $S_T - K$.*

2) *A la date de maturité l'actif vaut $S_T < K$ dans le marché. Dans ce cas le détenteur de l'option n'a pas d'intérêt à exercer son droit et son profit est donc nul.*

Remarque 2.2 : *On voit donc qu'une option Européenne d'achat permet de réaliser un bénéfice égale*

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0).$$

On appelle $(S_T - K)^+$ *le payoff de l'option..*

Exemple 2.1 : *Option de change sur un dollar dans* 6 *mois pour* K *euros. Si le dollar monte, on exerce l'optoin et on achète le dollar à* K *euros. Si le dollar baisse, on n'exerce pas l'option et on achète au prix du dollar.*

Put Européenne

Définition 2.10 : *On appelle option de vente Européenne (put Européen), le contrat qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) de vendre une action (unité de l'actif) à la date* $T > 0$ *(maturité) au prix* K *(prix d'exercice) fixé à l'avance. Ce contrat à un prix ; il est échangé sur le marché.*

Remarque 2.3 : *A l'échéance* T*, deux cas se produisent pour le vendeur du put :*

1) *A la date de maturité l'actif a un prix* $S_T < K$ *dans le marché. Dans ce cas le détenteur de l'option exercera son droit, vendra une action au prix* K *et peut acheter après dans le marché une action au prix* S_T*, réalisant ainsi un bénéfice égale à la différence* $K - S_T$.

2) *A la date de maturité l'actif vaut* $S_T > K$ *dans le marché. Dans ce cas le détenteur de l'option n'a pas d'intérêt à exercer son droit et son profit est donc nul i.e. (payoff) est* 0.

On voit donc qu'une option Européenne de vente permet de réaliser un bénéfice égale :

$$(K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0).$$

2.1.2 Call Américaine

Définition 2.11 : *On appelle option d'achat Américaine (call Américaine) le contrat qui donne le droit (mais non l'obligatoin) d'acheter à tout moment entre aujourd'hui* $t = 0$ *et* *l'échéance T une action à la date $T > 0$ au prix K (prix d'exercice ou strike) fixée à l'avance. Ce contrat a un prix ; il est échangé sur le marché.*

Put Américaine

Définition 2.12 *: On appelle option de vente Américaine (put Américaine) le contrat qui donne le droit (mais non l'obligatoin) de vendre à tout moment entre aujourd'hui $t = 0$ et l'échéance T une action à la date $T > 0$ au prix K (prix d'exercice ou strike) fixée à l'avance ce contrat a un prix ; il est échangé sur le marché.*

Remarque 2.4 ***(La différence entre les options Européennes et les options Américaines) :*** *Les options Européennes sont les options qui peuvent être exercées seulement le jour de l'échéance, et les options Américaines sont celles pouvant être exercées à tout instant avant leur échéance.*

2.1.3 Option Asiatique

L'option asiatique, ou option sur moyenne du prix du titre sous-jacent, fait partie de la famille des options dépendantes du sentier emprunté par le titre sous-jacent au cours de sa durée de vie. Elle est l'une des options exotiques les plus utilisées et elle est transigée sur le marché de gré à gré. Son habileté à suivre le cours moyen du titre sous-jacent est le principal atout qui la distingue des options ordinaires. En comparaison avec celles-ci, sa valeur marchande est moins volatile durant sa vie et elle est moins sujette à des variations brutales au moment du règlement.

Le flux financier d'une option asiatique est défini en fonction d'une moyenne du prix du titre sous-jacent pour un horizon donné. Cette caractéristique de l'option asiatique contribue à contrôler le prix moyen d'acquisition ou de vente d'une marchandise ou d'un actif financier durant une période donnée.
Trois cas de moyenne sont généralement considérés pour les options asiatiques.

◀ **Moyenne arithmétique :**

$$A(t_N) \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S(t_i),$$

$S(t_i)$ représente le prix du titre sous-jacent au moment où l'observation est effectuée au temps t_i , où i va de 1 à N. Ce type de moyenne est flexible, la fréquence des t_i peut être irrégulière, quotidienne, hebdomadaire, mensuelle... Ce type de moyenne peut s'avérer intéressant dans le cas où une marchandise ou un actif financier est transigé d'une façon régulière pendant l'horizon, ou que, sur le plan budgétaire, certaines dates particulières sont considérées.

◀ **Moyenne arithmétique pondérée :**

$$AP(t_N) \equiv \sum_{i=1}^{N} \omega_i S(t_i), \text{ où la somme des } \omega_i \text{ est égale à un.}$$

Dans le calcul de la moyenne arithmétique, l'importance de chacune des observations est uniforme. Cependant, il est possible de modifier le poids de chaque observation. Ainsi, la moyenne arithmétique est remplacée par une moyenne pondérée arithmétique. Ce type de moyenne peut s'avérer particulièrement utile dans le cas où la quantité de marchandise ou d'actif financier transigée par l'entreprise varie dans le temps.

◀ **Moyenne géométrique :**

$$G(t_N) \equiv \left\{ \prod_{i=1}^{N} S(t_i) \right\}^{\frac{1}{N}}.$$

Ce type de moyenne s'avère cependant plus intéressant dans un cadre académique que pour le marché financier. Notons qu'il est aussi possible de généraliser la moyenne géométrique sous forme de moyenne géométrique pondérée.

Tout comme les options ordinaires, l'option asiatique peut être américaine ou européenne. Rappelons qu'une option américaine permet l'exercice de celle-ci à tout moment durant sa durée de vie. L'option de type européen, par contre, limite le moment de l'exercice de l'option à l'échéance. L'option asiatique peut être une option d'achat ou une option de vente. Nous présentons les caractéristiques fondamentales qui distinguent les options asiatiques en prenant comme exemple le cas d'une option asiatique d'achat de type européen avec moyenne arithmétique.

◄ **Option asiatique à taux moyen** : Option dont le flux monétaire final est donné par l'équation

$$\max\left[A(t_N) - k, 0\right],$$

où k représente le prix d'exercice de l'option.

◄ **Option à prix d'exercice moyen** : Option dont le prix d'exercice K de l'option européenne ordinaire est remplacé par la moyenne du prix du titre sous-jacent au cours de la durée de vie de l'option. Le flux monétaire final de ce type d'option est donné par l'équation :

$$\max\left[S\left(t_N\right) - A(t_N), 0\right],$$

où $S\left(t_N\right)$ représente le prix du titre sous-jacent à l'échéance t_N.

◄ **Option à taux moyen inverse** : Option asiatique où le taux moyen est remplacé par son inverse. Ce type d'option est particulièrement utilisé lors de transaction dans le marché des devises. Le flux monétaire final de ce type d'option est donné par :

$$\max\left[A(t_N)^{-1} - k, 0\right],$$

où $A(t_N)^{-1}$ et k sont exprimés dans la même devise. Dans certains cas, on remplace $A(t_N)^{-1}$ par :

$$\tilde{A}(t_N)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{S(t_i)}}$$

Définition 2.13 (option asiatique) *: Ce sont des options dont le sous-jacent est la moyenne des cours sur une période donné. Elles ont été introduites pour lutter contre la manipulation des cours au voisinage de la maturité.*

Le payoff de ces options dépend de la moyenne du sous-jacent sur l'intervalle $[0, T]$. De cette manière, il est ainsi moins sensible à la valeur finale S_T du sous-jacent. par exempl, la payoff d'un call asiatique est :

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - k\right)^+ .$$

Remarque 2.5 *:*

1) Une option Américaine peut être exercée pendant toute la durée de vie du contrat jusq'à son échéance, Une option Européenne est une option qui ne peut être exercée qu'à l'échéance du contrat et une option Asiatique est une option européenne dont le prix d'exercice dépend de la moyenne des cours comptants de l'actif sous-jacent pendant la durée de l'option.

2) Toutes autres choses restant égales, la prime d'une option américaine sera plus elevée que la prime d'une option européenne.

3) La grande majorité des options sont des options américaines.

Définition 2.14 *(Évaluation ou Pricing en Englais) : Calcul du prix d'une option ou d'un titre*

Définition 2.15 *(Couverture ou Hedging en Englais) : Technique qui consiste à acheter ou vendre des titres pour diminuer le risque d'une position.*

Chapitre 3

Évaluation et couverture des options Européennes

Dans ce chapitre on va calculer le prix d'un produit dérivé dans le cadre du modèle de Black-Merton-scholes.

3.1 Présentation du modèle

On considère un marché formé par un actif sans risque S^0 et un actif risqué S. supposons que le prix de l'actif sans risque vérifie :

$$S_t^0 = S_0^0 e^{rt},$$

où r est une constante donnée, $r \geq 0$. Sauf mention explicite du contraire nous prendrons $S_0^0 = 1$.

Pour modéliser l'incertitude concernant le prix de l'actif risqué S, on introduit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que le processus de prix de S, $S = \{S_t, t \geq 0\}$, est décrit par le modèle de Black-Merton-scholes

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

où $B = \{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ici μ et σ sont deux constantes réelles données :

- μ est appelée ‹‹ tendance ›› ou ‹‹ rendement instantané ›› de S,
- $\sigma > 0$ est appelée ‹‹ volatilité ›› de S. Elle mesure la taille de l'incertitude sur S.

On note :

$$\tilde{S} = \left\{ \frac{S_t}{S_t^0}, t \geq 0 \right\},$$

le prix de S exprimé dans le nouveau numéraire S^0 (le prix actualisé de l'actif risqué) et $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration naturelle du processus S

D'après le lemme d'Itô on a

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right\},$$

et, en notation différentielle,

$$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\, \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t.$$

Stratégie financière : On suppose que les transaction se déroulent de manière continue sur l'horizon de temps $[0, T]$. Ainsi, à chaque instant $t \in [0, T]$, un agent peut modifier l'allocation de portefeuille entre l'actif S^0 et l'actif S. Une stratégie financière est donc décrite par un couple de processus stochastiques :

$$\alpha := \{\alpha_t, t \in [0, T]\} \quad \text{et} \quad \theta := \{\theta_t, t \in [0, T]\}$$

où :

- $\alpha_t \in \mathbb{R}$ représente le nombre d'unités de l'actif S^0 détenues à la date t,
- $\theta_t \in \mathbb{R}$ représente le nombre d'unités de l'actif S détenues à la date t.

Notons V_t la valeur à la date t d'une stratégie et $\tilde{V}_t := \frac{V_t}{S_t^0}$ la valeur actualisé de la même stratégie. Nous avons alors :

$$V_t = \alpha_t S_t^0 + \theta_t S_t \quad \text{et} \quad \tilde{V}_t = \alpha_t + \theta_t \tilde{S}_t.$$

Définition 3.1 (Stratégie autofinancée) *: La stratégie financière (α, θ) est dite autofinancée ou elle vérifie la condition d'autofinancement si :*

$$dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \theta_t dS_t,$$

ou encore par

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= \theta_t d\tilde{S}_t \\ &= \theta_t \left((\mu - r) \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t \right) \\ &= \theta_t (\mu - r) \tilde{S}_t dt + \theta_t \sigma \tilde{S}_t dB_t, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \theta_u (\mu - r) \tilde{S}_u du + \int_0^t \theta_u \sigma \tilde{S}_u dB_u. \tag{3.1}$$

On remarque que l'expression de la richesse actualisée d'une stratégie autofinancée est complètement déterminée par la richesse initiale V_0 et θ. Bien entendu, pour que l'expression (3.1) ait un sens, il faut imposer des condition d'intégrabilité à θ. Pour ce faire nous allons appliquer le théorème de Girsanov (1.2.1). Notons $\lambda^* := (\mu - r) \diagup \sigma$ et considérons la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^*$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par :

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t := Z_t^{\lambda^*} \quad \text{où} \quad Z_t^{\lambda^*} := e^{\left\{ -\lambda^* B_t - \frac{(\lambda^*)^2}{2} t \right\}} \tag{3.2}$$

On appelle ensemble des portefeuilles admissibles et on note $\mathcal{A}$, l'ensemble des processus $\theta = \{\theta_t, t \in [0, T]\}$ défini par :

$$\mathcal{A} := \left\{ \theta \ \mathbb{F}\text{-adapté} : \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[\int_0^t \left| \theta_u \tilde{S}_u \right|^2 du \right] < \infty \right\}.$$

Dans ce qui suit, nous allons décrire une stratégie financière autofinancée par la donnée d'un couple $(x, \theta) \in \mathbb{R}\times\mathcal{A}$ où x représente le capital initial permettant de construire la stratégie et θ est le processus décrivant l'investissement en actif risqué S, θ_t étant le nombre d'unités de S détenues à la date t. On note $V_t^{x,\theta}$ la valeur à la date t de cette stratégie. On a $V_t^{x,\theta} = S_t^0 \tilde{V}_t^{x,\theta}$ et

$$\tilde{V}_t^{x,\theta} = \frac{x}{S_0^0} + \int_0^t (\mu - r)\,\theta_u \tilde{S}_u du + \int_0^t \sigma\theta_u \tilde{S}_u dB_u. \tag{3.3}$$

Condition d'absence d'opportunités d'arbitrage et changement de mesure : Une opportunité d'arbitrage ou plus simplement un arbitrage est un moyen de gagner de l'argent sans prendre aucun risque. Cela se traduit par la définition suivante lorsqu'on suppose que l'invistisseur intervient durant la période $[0, T]$.

Définition 3.2 (Opportunité d'arbitrage) *: Dans ce modèle, une opportunité d'arbitrage est une stratégie financière qui démarre à un capital initial égale à zéro* $(0, \theta) \in \mathbb{R}\times\mathcal{A}$ *et qui vérifie :*

$$\mathbb{P}\left(V_T^{0,\theta} \geq 0\right) = 1 \ \ et\ \mathbb{P}\left(V_T^{0,\theta} > 0\right) > 0.$$

Considérons le cas particulier où $\mu = r$.Dans ce cas, $\tilde{S}_t$ est une martingale et pour $\theta \in \mathcal{A}$:

$$\tilde{V}_t^{0,\theta} = \int_0^t \sigma\theta_u \tilde{S}_u dB_u.$$

Comme $\theta \in \mathcal{A}$ vérifie la condition :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\theta_u \tilde{S}_u\right|^2 du\right] < \infty,$$

on en déduit que le processus $\tilde{V}^{0,\theta} = \left\{\tilde{V}_t^{0,\theta}, 0 \leq t \leq T\right\}$ est une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Par conséquent $\mathbb{E}\left[\tilde{V}_T^{0,\theta}\right] = 0$ et on ne peut donc pas avoir $\mathbb{P}\left(\tilde{V}_T^{0,\theta} \geq 0\right) = 1$ avec $\mathbb{P}\left(\tilde{V}_T^{0,\theta} > 0\right) > 0$.

Ainsi, dans le cas particulier où $\mu = r$, le marché financier considéré vérifie la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage.

Proposition 3.1 *Le prix actualisé $\tilde{S}$ est une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$ et pour toute stratégie financière $(x, \theta) \in \mathbb{R}\times\mathcal{A}$, la valeur actualisée $\tilde{V}^{x,\theta}$ est aussi une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$.*

Proof. On définit le processus $B^* = B_t + \lambda^* t$. Comme B^* est un $\mathbb{F}$-mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$. Donc

$$\tilde{S}_t = e^{\left\{\sigma B_t^* - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}}$$

est une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$. Soit $(x, \theta) \in \mathbb{R}\times\mathcal{A}$. On a $\tilde{V}_t^{x,\theta} = \frac{x}{S_0^0} + \int\limits_0^T \sigma\theta_u \tilde{S}_u dB_u^*$.

En effet : d'aprés (3.3) on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t^{x,\theta} &= \frac{x}{S_0^0} + \int_0^t (\mu - r)\,\theta_u \tilde{S}_u du + \int_0^t \sigma\theta_u \tilde{S}_u dB_u \\
&= \frac{x}{S_0^0} + \int_0^t \theta_u \tilde{S}_u \left[(\mu - r)\, du + \sigma dB_u\right] \\
&= \frac{x}{S_0^0} + \int_0^t \sigma\theta_u \tilde{S}_u \left[\frac{(\mu - r)}{\sigma} du + dB_u\right] \\
&= \frac{x}{S_0^0} + \int_0^t \sigma\theta_u \tilde{S}_u \left[\lambda^* du + dB_u\right] \\
&= \frac{x}{S_0^0} + \int_0^t \sigma\theta_u \tilde{S}_u dB_u^*,
\end{aligned}$$

comme θ satisfait la condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\theta_u \tilde{S}_u\right|^2 du\right] < \infty,$$

alors le processus $\tilde{V}^{x,\theta}$ est une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$. ∎

Proposition 3.2 (A.O.A) *: Le modèle de marché financier considéré vérifie la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage.*

Proof. Considérons la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^*$ définie par (3.2). Supposons qu'il existe une opportunité d'arbitrage $(0, \theta)$. Comme la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^*$ est équivalente à $\mathbb{P}$, on a :

$$\mathbb{Q}^*\left(\tilde{V}_T^{0,\theta} \geq 0\right) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^*\left(\tilde{V}_T^{0,\theta} > 0\right) > 0,$$

donc $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\tilde{V}_T^{0,\theta}\right] > 0$. Mais on a le processus $\tilde{V}^{0,\theta}$ est une $\mathbb{F}$-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$, donc :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\tilde{V}_T^{0,\theta}\right] = 0$$

et ceci contredit ce qui a été dit plus haut. Nous obtenons alors qu'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur ce marché financier. ■

3.2 Évaluation et couverture d'une option Européenne

Maintenant, on va chercher à calculer le prix d'une option. Nous considérons une actif option asiatique de maturité T dont la valeur terminale est décrite par une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, noté G

3.2.1 Évaluation par réplication

Définition 3.3 *: L'actif contingent de payoff G est dit réplicable, ou encore il est dit admettre une stratégie de réplication, s'il existe $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ tel que $G = V_T^{x,\theta}$.*

Proposition 3.3 *: Soit un actif contingent de payoff G pour lequel on suppose que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[G^2\right] < \infty$. Alors :*

1. *l'actif G admet une stratégie de réplication $\left(x^G, \theta^G\right)$.*
2. *sous la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage A.O.A, son prix à la date t, noté p_t^G, est donné par :*

$$p_t^G = S_t^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[G/S_T^0 | \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[e^{-r(T-t)} G | \mathcal{F}_t\right].$$

Proof. Commençons d'abord par le point ii). Supposons donc disposer de θ_t telle que la stratégie (x, θ_t) qui donne le portefeuille $V_t^{x,\theta}$ ou en version actualisée

$$\tilde{V}_t^{x,\theta} = x + \int_0^t \theta_u d\tilde{S}_u$$

satisfasse $V_T^{x,\theta} = G$.

Mais, sous la probabilité $\mathbb{Q}^*$, nous avons $\tilde{V}_t^{x,\theta} = x + \int_0^t \theta_u \sigma \tilde{S}_u dB_u^*$, donc $\tilde{V}_t^{x,\theta}$ est une martingale (l'intégrabilité est obtenue par définition des stratégies admissibles θ). Nous savons que, par A.O.A, $V_t^{x,\theta} = p_t^G$. En particulier, en utilisant la propriété de martingale :

$$\tilde{V}_t^{x,\theta} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\tilde{V}_T^{x,\theta} | \mathcal{F}_t\right],$$

et on a :

$$\tilde{V}_t^{x,\theta} = V_t^{x,\theta}/e^{(rt)}.$$

Alors :

$$e^{-rt} p_t^G = \tilde{V}_t^{x,\theta} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\tilde{V}_T^{x,\theta} | \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[G e^{-rT} | \mathcal{F}_t\right],$$

Ce qui donne par la suite

$$p_t^G = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[e^{-r(T-t)} G | \mathcal{F}_t\right],$$

Revenons maintenant au point i). Introduisons le processus

$$M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[G e^{-rT} | \mathcal{F}_t\right].$$

Par définition M_t est une martingale et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[M_T^2] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[G^2] < \infty$ donc d'après l'inégalité de Jensen $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[M_t^2] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Donc d'après le théorème (1.1) il existe H_t avec $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty$ telle que

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s^*.$$

Alors la stratégie $Z^{(x,\theta)}$ avec $x = M_0$ et $\theta_t = H_t / \left(\sigma \tilde{S}_t\right)$ est une stratégie de réplication pour G car

1. $x = M_0 \in \mathbb{R}$ car la filtration $\mathcal{F}_0$ est triviale ;
2. $Z^{(x,\theta)}$ vérifie $d\tilde{Z}^{(x,\theta)} = \sigma \theta_t \tilde{S}_t dB_t^* = H_t dB_t^* = dM_t$ ce qui implique $\tilde{Z}^{(x,\theta)} = M_t$ et donc $Z_t^{(x,\theta)} = e^{rt} M_t$;

3. si $G \geq 0$ la valeur $e^{rt}M_t$ de cette stratégie à l'instant t est positive ;

4. sa valeur à l'instant T est $e^{rT}M_T = G$.

■

Proposition 3.4 (unicité) *: En A.O.A la probabilité risque neutre est unique dans le modèle Black-Merton-scholes.*

Proof. Toute probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ rend martingale le processus $\tilde{S}_t$. Soit A un ensemble $\mathcal{F}_T$ mesurable et $G = \mathbf{1}_A$. En particulier :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[G^2\right] < \infty \text{ et } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[G^2\right] < \infty.$$

Alors, en utilisant les même arguments que dans le résultat précédent, G est réplicable par une stratégie (x, θ) admissible. Cette stratégie (actualisée) est une martingale par rapport à $\mathbb{P}^*$ (l'intégrabilité résulte de $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[G^2] < \infty$) et donc en particulier

$$x = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\mathbf{1}_A] = e^{-rT}\mathbb{P}^*(A).$$

Donc $\mathbb{P}^*(A) = e^{rT}x$ et ainsi la mesure de toute ensemble $A \in \mathcal{F}_T$ est uniquement déterminée.

■

3.2.2 Équation de Black-Merton-scholes

Soit un actif contingent de payoff G (v.a $\mathcal{F}_T$-mesurable), $\left(x^G, \theta^G\right)$ une stratégie de réplication de G et supposons que le prix v soit une fonction de classe $C^{1,2}$. Appliquons alors la formule d'Itô à la fonction

$$(t, x) \mapsto e^{-rt}v(t, x),$$

et au processus d'Itô S_t, $t \in [0, T]$. Rappelons que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t^*.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
e^{-rt}v(t,S_t) &= v(0,S_0) + \int_0^t \left[e^{-ru}v_u(u,S_u) - re^{-ru}v(u,s_u)\right]dt \\
&+ \int_0^t e^{-rt}v_x(u,S_u)dS_u + \tfrac{1}{2}\int_0^t e^{-rt}v_{xx}(u,S_u)d\left\langle S_u\right\rangle \\
&= \int_0^t e^{-ru}\left[v_u(u,S_u) - rv(u,S_u) + rS_u v_u(u,S_u) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_u^2 v_{xx}(u,S_u)\right]du \\
&+ v(0,S_0) + + \int_0^t \sigma e^{-ru} S_u v_x(u,S_u)dB_u^*.
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
e^{-rt}v(t,S_t) = \tilde{V}_t^{x^G,\theta^G} &= x + \int_0^t \theta_u \tilde{S}_u \sigma dB_u^* \\
&= v(0,S_0) + \int_0^t e^{-ru}\theta_u S_u \sigma dB_u^*.
\end{aligned}$$

Par identification nous en déduit que :

$$\theta_u = v_x(u,S_u),$$

et que la fonction v satisfait :

$$v_t(u,S_u) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_u^2 v_{xx}(u,S_u) + rS_u v_x(u,S_u) = rv(u,S_u).$$

Ce raisonnement nous permet de voir que la fonction prix d'un actif contigent G est liée à l'équation aux dérivée partielles (E.D.P) :

$$v_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) = rv(t,x), \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+.$$

Conclusion

Ce travail est consacré à l'étude du modèle de Black et Scholes dans le cas continu, dans le but de leur application en finance. Le modèle de Black-Scholes a été toujours une référence pour tous ceux touchent de prés ou de loin à la finance des marchés. Il est trés utilisé dans le monde de la finance moderne. Nous avons essayé de valoriser et de couvrir les options Européenne à l'aide de modèle de Black-Merton-Scholes.

Au début, nous étions intéressés par un rappel du calcul stochastique. Puis, nous avons abordé quelques concepts et terminologies de mathématiques financières. Enfin, nous avons introduit le modèle de Black-Merton-Scholes et l'avons utilisé pour résoudre le problème de l'évaluation et de la couverture de l'option Européenne.

RÉSUMÉ

Le but de ce travail est de faire une petite recherche de l'évaluation et la couverture d'une option, qui est une introduction aux technique probabilistes nécessaires à la des modèles financiers les plus courants, en voyant :

1- Quelques définitions et propriétés de base sur le calcul stochastique.

2- Notions et terminologie financière.

3- Application : l'évaluation et la couverture d'une option a l'aide de modèle de Black-scholes.

ملخص

لغرض من هذا العمل هو إجراء القليل من البحث حول تقييم الخيار وتغطيته ، وهو مقدمة للتقنيات الاحتمالية اللازمة للنماذج المالية الأكثر شيوعًا ، مع رؤية:

1- بعض التعاريف والخصائص الأساسية في حساب التفاضل والتكامل العشوائي

2- مفاهيم ومصطلحات مالية

3- التطبيق: تقييم وتغطية خيار باستخدام نموذج بلاك سكول

Abstract

The purpose of this work is to do a little research on the pricing and hedging of an option, which is an introduction to the probabilistic techniques necessary for the most common financial models, seeing:

1- Some definitions and basic properties on stochastic calculus.

2- Notions and financial terminology.

3- Application: the evaluation and coverage of an option using the Black-Scholes model.