République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme

Master en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

Bennadji Meriem

Titre

Équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades faiblements couplées et contrôle optimal

Membres du jurés :

Dr.	**Tabet Moufida**	U.Biskra	**Président**
Pr.	**Mokhtar Hafayed**	U.Biskra	**Encadreur**
Dr.	**Korichi Fatiha**	U.Biskra	**Examinateur**

2020

Didicace

C'est avec grand plaisir que je dédie cette humble œuvre à mes deux étres les plus chers au monde :

À ma chère mère et parce qu'elle me présente comme un signe de gratitude enversceux qui m'ont mis au monde qui m'ont comblé d'affection et d'amour qui n'ont cessé de me soutenir dans les moments les plus difficiles, et qui n'ont cessé de m'encourager dans mes études

Benaiche wanassa

À mon cœur papa signe de graduation et symbole de tous mes progrés, avec beaucoup d'admiration pour ces sacrifices, ses encouragements et son aide pour continuer mes études, le solitaire qui croit en moi et en mes capacités, j'espére étre aussi bon qu'il le pense

Bennadji abdelfateh

Que Dieu les protége le plus longtemps possible

À mes belle sœrs.soumia asma dounia khaoula

le mari de ma sœr houssem

Ma tante fatima son mari et ses enfants

Mes chéris samiha amina bouthaina abir masselya chaima imane douaa yassmine zineb assma ikram

À ma 2émé familles l'assosation Ness el khir wilaya de biskra

tout ce qui me connait de loin ou de proche et tout ce qui occupe une place dans mon cœur

À tous mes amis sans exception

Enfin à tous mes collégues

Remerciements

Cette thése est pour l'accomplissement d'une étape importante dans ma vie, et je tiens à remercier trés vivement les personnes qui ont contribué à sa réalisation. Je tiens à la fin de ce travail à remercier **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis d'en arriver là.

Je remercie infiniment mon encadreur le professeur **Mokhtar hafayed** ,mon directeur de mémoire dont la disponibilité le savoir-faire et le soutien ne m'ont jamais fait défaut. Je remercie trés sincérement les membres de jury **Tabet Moufida** et **Korichi fatiha**, d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examinateur.Enfin je remercie tous les professeurs de la faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie, département de mathématiques. Ainsi que tous mes collégues .Ainsi j'adresse mes remerciements les plus chaleureux à toutes les personnes qui m'ont aidé de prés ou de loin par le fruit de leur connaissance pendant toute la durée de mon parcours éducatif.

Table des matières

Résumé

Ce travail est porte essentiellement sur les problèmes de contrôle optimal stochastique pour des system governés par des équations differentielle stochastique progressive rétrogrades (EDSPRs).

Notre objective est d'établir des conditions necessaires d'obtimalité pour un problème de contrôle optimal stochastique pour des systemes stochastique governés par des équations differentielles stochastique (EDSPRs). Ce problme est consiste à minimiser une fonction de cout de la forme :

$$J\left(u\left(\cdot\right)\right) = \mathbb{E}\gamma\left(y\left(0\right)\right),$$

où($x(t), y(t), z(t)$) est une solution d'une équations differentielles stochastique progréssive rétrogrades nonlineaire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t))dW(t) \\ \\ dy(t) = g\left(x(t), y(t), z(t), u(t), t\right)dt + z(t)dW(t) \\ \\ x(0) = x_0.\ y\left(T\right) = h\left(x\left(T\right)\right). \end{cases}$$

Plus precisement, notre objectif est d'établir des conditions nécéssaires d'optimalité sous forme d'un principe du maximum stochastique de Pontryagin. Ce résultat de principe du maximum a été introduit par Xu [2]. (Xu : Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system. The Journal of the Australian Mathematical Society. B. Applied Mathematics. Volume 37 (02), 1995, 172 185.)

Mots-clés : *Equations differentielle stochastiques progressives rétrogrades, Contrôle optimal stochastique, Processus stochastiques, Principe du maximum.*

Introduction générale

Introduction

Notre objectif dans ce travail est d'établir des conditions necessaires d'optimalités pour un system gouvernés par des équations differentielles stochastiques progressive retrogrades (EDSPRs), sous forme d'un principe du maximum stochastique de Pontryagin.Le domaine de controle est n'est pas nécessairement convexe (general action space).Une méthode variationnelle est utilisée pour résoudre notre probléme de contrôle.

Nous présentons dans ce travail trois chapitres, les deux premiers chapitres sont introductifs et permettent d'introduire les outils essentiels pour le troisième chapitre, ces resultats de deux dérnier chapitre ont été introduit par :Wensheng Xu :Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system. The Journal of the Australian Mathematical Society B Applied Mathematics.Volume 37 (02) 1995 172 185.[2]

Plus precisement, dans le premier chapitre on s'intéresse aux élément de calcul stochastique recement :processus, filtations..etc.

Dans le 2éme chapitre on décrit brièvement les différentes méthodes de résolutions d'un problème de contrôle stochastique les bien- connues qui sont la méthode de *programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin.* Afin d'aborder ce problème de contrôle nous employons la 2ème méthode.

Dans le 3ème chapitre ona établir des conditions necessaires sous forme du principe du maximum d'optimalité pour des systemes gouvernées par des équations differentielle stochastiques progressives retrogrades.Ce resultat a été prouvé par "Xu :Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system.The Journal of the Australian Mathematical Society B Applied Mathematics.Volume 37 (02) 1995 172 185."

Chapitre §1.
processus stochastique et formule d'Itô

Chapitre 1

processus stochastique et formule d'Itô

Dans ce chapitre introductif nous rassemblons les notions basique de théorie de calcul stochastique qui seront utilisées dans la suite du noutre sujet de recherche.Nous commençons par défnir :processus stochastique,l'intégrale stochastique, mouvement brownien.avec l'aide des livres voir le livre de Yong & Zhou 1999, [6] et le document de Jeanblanc 2005. [4] et Pham 2005 [3].

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Processus stochastique

Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ définies sur le méme espace de probabilité.

1.0.1 processus

Définition 1.0.1 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires $X(t)$indexée par un ensemble T. En général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ et on considère que le processus est indexé par le temps t.*

1. Si T est un ensemble finie, le processus est un vecteur aléatoire.

2. Si $T = \mathbb{N}$, le processus est une suite de variable aléatoire.
3. Si $T \subset \mathbb{Z}$,e processus est dit discret.
4. Si $T \subset R^d$, on parle de champs aléatoire.
5. Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
6. Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \to X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

Définition 1.0.2 *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si :les applications* $t \to X_t(\omega)$*sont continues pour presque tout* ω. *Un processus est dit càdlàg (continu 'à droite, pourvu de limites 'à gauche) si ses trajectoires sont continues 'à droite, pourvues de limites 'à gauche. Méme définition pour càglàd.(Yong & Zhou 1999, [6]).*

Définition 1.0.3 ***(Modifcation d'un processus, indistinguabilité)***

Soient X et Y deux processus, X est une modifcation de Y si pour tout t≥0.Les variables aléatoiresX (t) et Y (t) sont égales $\mathbb{P}-p.s$:

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1.$$

X et Y sont indistinguables si,$\mathbb{P}-p.s.$les trajectoires de X et Y sont les même c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t), \forall t \geq 0) = 1.$$

La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification,Notons que si X est une modifcation de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche),alors X et Y sont indistinguables. (Yong & Zhou 1999, [6]).

1.0.2 Filtration

Définition 1.0.4 ***(Filtration)*** *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}.i.e$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ $\forall s \leq t$.

1. *L'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *s'appelle espace filtré.*

2. *Une filtration est* $\mathbb{P}$*-complète pour une mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *si* $\mathcal{F}_0$ *contient tous les évènements de mesure nulle, i.e* $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.

3. *On dit qu'espace filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *satisfait les conditions habituelles si :*

   i) *Les ensembles négligeables sont contenus dans* $\mathcal{F}_0$ *i.e* $\mathcal{N} \in \mathcal{F}_0$.

   ii) *La filtration est continue à droite i.e* $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s \geq t} \mathcal{F}_s \ \forall t$.

Remarque 1.0.1 *La fltration canonique pour le processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est* $\mathcal{F}_t^{\varkappa} = \sigma(X(s), s \leq t) t \geq 0$.

1.1 Mouvement brownien

on se donne un espace (Ω, F, P) et un processus $(W(t)\ , t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.1.1 *le processus* $(W(t)\ , t \geq 0)$ *est un mouvement brownien(standard) si :*

1. $\mathbb{P}(W(0) = 0) = 1$ (le mouvement brownien est issue de l'origine).

2. $s \leq t, W(t) - W(s)$ est une variable réelle de loi gaussienne, centré de variance $(t-s)$ i.e

$$W(t) - W(s) \backsim \mathcal{N}(0, t-s)$$

   "accroissements stationnaires".

3. $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t(1) \leq t(2) \leq ... \leq t(n)$, les variable aléatoire

$$(W(t_n) - W(t_{n-1}), ..., W(t_1) - W(t_0), W(t_0))$$

   sont indépendantes"accroissements indépendantes". Jeanblanc 2005. [4] et Pham 2005 [3].

Remarque 1.1.1 *on peut écrire 3 sous la forme équivalente suivante :*

3$\Leftrightarrow$ soit $s \leq t$ la variable $W(t) - W(s)$ est indépendante de tribu du passé avant s soit $\sigma(W(u), u \leq s)$.

Proposition 1.1.1 *soit W(t) un mouvement brownien standart :*

1. **symétrie** : **-W** est un mouvement brownien.
2. **Autosimilarité** :pour tout $c > 0$:

$$W_t^{(c)} = \frac{1}{\sqrt{c}} W(ct).$$

   définie un mouvement brownien(standard).

3. **Inversion du temps :** le processus $\tilde{W}$ définie par :

$$\begin{cases} \tilde{W}(t) = tW\left(\frac{1}{t}\right) \text{ si } t \neq 0 \\ \tilde{W}(0) = 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

   est un mouvement brownien (standard).

4. **Retournement du temps :** le processus retournement à l'instant T

$$\tilde{W}_t^{(T)} = W(t) - W(T-t).$$

   est encore un mouvement brownien sur $[0, T]$.

1.2 l'intégrale stochastique

Dans cette section, (voir Jeanblanc 2005. [4]) on cherche défnir des variables aléatoire du type

$$I(\phi) = \int_0^T \phi(s) dW(s).$$

où $\{\phi(t), t \geq 0\}$ est un certain processus et $\{W(t), t \geq 0\}$ un mouvement Brownien.

Propriétés de l'intégrale stochastique

1. $\phi \to \int_0^T \phi(s)dW(s)$ est linéaire.
2. le processus $\left(\int_0^T \phi(s)dW(s)\right)_{t\epsilon[0,T]}$ est à trajectoires continues.
3. le processus $\left(\int_0^T \phi(s)dW(s)\right)_{t\epsilon[0,T]}$ est adapté à $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\epsilon[0,T]}$.

4. pour $s \leq t \leq T$:

$$E\left[\int_0^T \phi(s)dW(s)\right] = 0$$
$$Var\left(\int_0^T \phi(s)dW(s)\right) = E\left[\int_0^T \phi^2(s)\,ds\right].$$

Remarque 1.2.1 $\left\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\right\}$ *la filtration naturelle du mouvement brownien* W.

1.2.1 processus d'Itô

Ce sont des processus écrits sous la forme :

$$X(t) = x + \int_0^t f(s)\,ds + \int_0^t \sigma_s dW(s)\,. \tag{1.1}$$

où f est un processus $\mathcal{F}_t^W$–adapté tel que $\int_0^T \mid f \mid \prec +\infty$ $\mathbb{P}.s$ pour tout t$\geq$0,et σun bon processus local on utilise la notation formelle :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t). \\ X(0) = x. \end{cases}$$

Le coefficient b est la dérivée du processus, et σson coefficient de diffusion.

1.2.2 Formul d'Itô

Dans cette sous-section, nous présentons une version stochastique de formule de changement de variable, appelée formule , lemme, d'Itô,qui joue l'un des rôles les plus importants dans le calcul stochastique.

On se donne un processus d'Itô réel X de décomposition (1.1) et une fonction f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière. si on a :

$$dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t); X(0) = x.$$

Théorème 1.2.1 ***(Première formule d'Itô)***

Supposons f de classe $\mathbb{C}^2$ alors :

$$f\left(X\left(t\right)\right)=f\left(x\right)+\int_0^t f^{\prime}\left(X\left(s\right)\right)dX\left(s\right)+\frac{1}{2}\int_0^t f^{\prime}\left(X\left(s\right)\right)\sigma^2\left(s\right)ds. \tag{1.2}$$

Cette formule s'écrit sous forme condensée :

$$df\left(X\left(t\right)\right)=f^{\prime}\left(X\left(t\right)\right)b\left(t\right)dt+f^{\prime}\left(X\left(t\right)\right)\sigma\left(t\right)dW\left(t\right)+\frac{1}{2}f^{\prime}\left(X\left(t\right)\right)d\left\langle X\right\rangle_t.$$

Théorème 1.2.2 ***(Deuxiéme formule d'Itô)***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ de classe C1 par rapport à t, de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à x on a :

$$f(t;X(t))=f(0,X(0))+\int_0^t f_t^{\prime}(s,X(s))ds+\int_0^t f_x^{\prime}(s,X(s))dX(s) \tag{1.3}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{\prime}(s,X(s))\sigma(s)^2ds. \tag{1.4}$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned}df(t;X(t))=&(f_t^{\prime}(t;X(t))+f_x^{\prime}(t;X(t))b(t)+\frac{1}{2}f_{xx}^{\prime}(t;X(t))\sigma(t)^2)dt\\&+f_x^{\prime}(t;X(t))\sigma(t)dW(t).\end{aligned}$$

Théorème 1.2.3 ***(3éme formule d'Ito)***

soient X et Y deux processus d'Itô issus de x et y.

soit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ à dérivée bornée ona :

$$\begin{aligned} f\left(X\left(t\right),Y\left(t\right)\right) = f\left(x;y\right) &+ \int_0^t f'_x(X\left(s\right),Y\left(s\right))dX_s + \int_0^t f'_y(X\left(s\right),Y\left(s\right))dY_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f'_{xx}(X\left(s\right),Y\left(s\right))d\left\langle X\right\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f'_{yy}(X\left(s\right),Y\left(s\right))d\left\langle Y\right\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f'_{xy}(X\left(s\right),Y\left(s\right))d\left\langle X,Y\right\rangle_s . \end{aligned} \tag{1.5}$$

1. pour f indépendant de y_t on trouve la 1ére formule d'Itô.
2. pour $y\left(t\right) = t$ on trouve la 2 éme formule d'Itô.

1.3 Èquations différentielles stochastiques et EDSRs

Définition 1.3.1 *Une équation différentielle stochastique EDSs est une équation différentielle de la forme :*

$$\begin{cases} dx\left(t\right) = f\left(t,x\left(t\right)\right)dt + \sigma\left(t,x\left(t\right)\right)dW\left(t\right), \\ x\left(0\right) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

où sous forme

$$x\left(t\right) = x_0 + \int_0^t f\left(s,x\left(s\right)\right)ds + \int_0^t \sigma\left(s,x\left(s\right)\right)dW\left(s\right). \tag{1.7}$$

Définition 1.3.2 ***Solution d'une EDS***

Soit b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une flltration $\mathcal{F}_t$ et un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien $W\left(\cdot\right)$ sur cet espace. Une solution de 1.6 est un processus $x(\cdot)$: continu $\mathcal{F}_t$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t f\left(s,x\left(s\right)\right)ds < \infty$ et $\int_0^t \sigma\left(s,x\left(s\right)\right)dW\left(s\right) < \infty$ ont un sens. De plus l'égalité :

$$x\left(t\right) = x_0 + \int_0^t f\left(s,x\left(s\right)\right)ds + \int_0^t f\left(s,x\left(s\right)\right)dW\left(s\right),$$

est satisfaite pour tout $t \in [0,T]$

Théorème 1.3.1 ***Existence et unicité***

On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$ x, y dans $\mathbb{R}^n$

1. Les fonctions f et σ sont continues.
2. Il existe $K > 0$ tel que pour tout $t \in [0,T]$ $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y|\,.$$
$$|f(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K^2\,(1+|x|)\,.$$

3. la condition initiale x_0 est indépendante de $(W(t)\,, t \geq 0)$ et est de carré intégrable.

Alors, il existe une unique solution de 1.7 à trajectoires continues pour $t \leq T$: De plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^2) < \infty.$$

Définition 1.3.3 *Une équation différentielle stochastique rétrograde est une équation de la forme :*

$$Y(t) = \zeta + \int_t^T f(r;Y(r),Z(r))dr - \int_t^T Z(r)dW(r), 0 \leq t \leq T. \tag{1.8}$$

où de façon équivalente, sous forme condensées

$$\begin{cases} dY(t) = g(t;Y(t),Z(t))dt - Z(t)\,dW(t)\,. \\ Y(T) = \zeta. \end{cases}$$

la fonctions g s'appelle le générateur de l'EDSR et ζ la condition terminale. $Z(t)$ est un processus stochastique carré intégrable $\mathbb{E}\int_0^T \|Z(r)\|^2\,dt < \infty$ qui rend la solution $Y(t)$ *est* F_t-adapté.

Définition 1.3.4 ***(Solution d'EDSR)*** *Une solution de l'EDSR 1.8 est un couple de processus* $\{(Y(t)\,, Z(t))\}_{0 \leq t \leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^{k\times d}$.

2. $\mathbb{P}.p.s$ $\int_0^T \left\{|g(r;Y(r),Z(r))| + \|Z\left(r\right)\|^2\right\} dr < \infty$.

3. $\mathbb{P}.p.s$, on a :

$$Y(t) = \zeta + \int_t^T g(r;Y(r),Z(r))dr + \int_t^T Z(r)dW(r),\ 0 \leq t \leq T.$$

Chapitre §2.
Contrôle stochastique et méthodes de résolution

Chapitre 2

Contrôle stochastique et méthodes de résolution

Ce chapitre sera organisé comme suit : Dans le première section, nous donnons une formulation du contrôle stochastique.Dans la deuxième section nous étudions deux approches de résolution du problème du contrôle stochastique. La première, vérifiée dans les années 50 par Pontryagin et son équipe, c'est le principe du maximum. La deuxième approche, la programmation dynamique.

2.1 controle stochastique

De façon générale, un problème de contrôle se formule selon les caractéristiques suivantes :

2.1.1 Ètat du systéme

On considère un système dynamique caractérisé par son état à tout instant. Le temps peut être discret ou continu. Nous considérons ici qu'il varie de façon continue et dans

des condition d'incertitude. L'horizon (intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini.

Les variables quantitatives se représentent par l'état du système et elles sont en nombre fini à valeurs réelles.On notera $X_t\left(\omega\right)$l'état du système à l'instant t dans un scénario du nombre $\omega \in \Omega$ espace mésurable muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.

2.1.2 contrôle

La dynamique $X(t)$ de l'état du système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus $u(t)$ dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est-à-dire que $u(t)$ est adapté par rapport à certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.

2.1.3 Critére de coût/performance

Le but de contrôle est de minimiser (ou de maximiser s'il s'agit d'un gain), sur un ensemble U de tous les contrôles admissibles. Généralement ce coût est donné par :

$$J(u(T)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(s, x(s), u(s))ds + g(x(T))\right]. \tag{2.1}$$

La fonction f est la fonction de coût intégrale g est le coût final ou terminal. où g est une fonction :$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathbb{C}^1$

$$|g_x(x)| \leq C[1 + |x|].$$

et à dérivée bornée. C'est à dire :

$$|g_x(x)| \leq M \text{ où } g_x \text{ est le gradient de g en } x.$$

Si en partant d'un état x à l'instant t on définit pour tout processus de contrôle $u(t)$, le coût est donné par :

$$J(u(T)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(s, X(s), u(s))ds + g(X(T))\right].$$

La fonction de valeurs associé à ce problème de contrôle stochastique est donnée par : Pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ et $\forall u \in \mathcal{U}$:

$$V(t;x) = \underset{u(\cdot)\in\mathcal{U}}{inf}\, J(t,x,u)\,. \tag{2.2}$$

Lorsque l'on cherche à maximiser un gain, au lieu de minimiser un coût, alors on écrira :

$$V(t;x) = \underset{u(\cdot)\in\mathcal{U}}{sup}\, J(t,x,u) = -\inf_{u(.)\in\mathcal{U}} \left(-J(t,x,u)\right). \tag{2.3}$$

Un contrôle admissible $u^* \in \mathcal{U}$ est dit optimal si :

$$V(t,x) = J(t;x;u^*)\,. \tag{2.4}$$

2.2 Méthodes de résolutions en contrôle stochastique

Dans le domaine de la théorie du contrôle optimal,il existe essentiellement deux méthodes pour la résolution dans les cas déterministes ou stochastiques, le principe de la programmation dynamique et le principe de maximum de Pontryagin. Le principes de la programmation dynamique qui a une version infinitésimale d'équation d'Hamilton Jaccobi Bellman et de maximum de Pontryagin qui sera au centre de notre intérêt,dans ce travail qui consiste à cherche les conditions nécessaires d'optimalité satisfaites par un contrôle optimal $u^*(.)$.

2.2.1 Le principe de la programmation dynamique

le principe de la programmation dynamique est un principe fondamental de la théorie du contrôle stochastique

le principe de la programmation dynamique de Bellman permet de résoudre, au travers d'une équation aux dérivées partielles, appelé équation deHamilton-Jacobi-Bellman certain probléme analytiquement.

Généralement l'équation aux dérivées partielles de Bellman n'est pas facile à résoudre et il faut supposer que la solution soit de classe $\mathbb{C}^2$, nous pouvons sinon supposer qu'elle est seulement localement bornée mais dans ce cas la solution sera au sens de la viscosité.

En appliquant formellement ce principe où on peut minimiser la fonction valeur $V(t,x)$ associer à un problème de contrôle stochastique à tempe continu satisfait à une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

$$\frac{dV}{dt}(t,x) + \inf_{u\in\mathcal{U}} \left[\mathcal{L}_u V(t,x) + g(t,x,u)\right] = 0, \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

où $\mathcal{L}_u$ est le générateur infinitésimale de second-ordre associé à la diffusion $X(t)$solution de l'équation (2.1) avec un contrôle u donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{L}_u V = g(x,u) D_x(V) + \frac{1}{2} tra\left[\sigma^*(x,u)\sigma(x;u) D_x^2(V)\right].$$

Lorsqu'on cherche à maximiser un gain, l'équation aux dérivées partielles devient sous forme :

$$-\frac{dV}{dt}(t,x) - \sup_{u\in\mathcal{U}} \left[\mathcal{L}_u V(t,x) + g(t,x,u)\right] = 0.$$

On peut avoir cette dernière équation de la façon suivante :

$$-\frac{dV}{dt}(t,x) - H\left(t,x,D_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)\right) = 0 \forall (t,x) \epsilon [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

telle que$\forall (t,x,p,M) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S(n)$ où $S(n)$ est l'ensemble des matrices symétrique$n \times n$:

$$H(t,x,p,M) = \sup_{u\in\mathcal{U}} \left[b(x;u)p + \frac{1}{2} tra\left(\sigma^*\sigma(x,u) M\right) + g(t,x;u)\right]. \tag{2.6}$$

La fonction (2,6) est dite l'Hamiltonien du problème de contrôle associé.En remarquant que si la fonction de valeur est continu et pas nécessairement de classe $\mathbb{C}^2$et satisfait le principe d'optimalité de la programmation dynamique, alors elle est solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante.

2.2.2 Le principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin a été utilisé dans la théorie du contrôle optimal. Il fournit les conditions nécessaires d'optimalité pour minimiser une fonctionnelle coût $J(u(\cdot))$ tout en utilisant l'approche de Lagrange en calcul des variations.La dérivée de la fonctionnelle $J(u(.))$ par rapport à un certain paramètre de perturbation doit être positive.Ceci entraîne que$\frac{dJ(u(\theta))}{d\theta} \mid_{\theta=0} \geq 0$. Ce principe consiste à introduire un processus adjoint, solution d'une certaine équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle.

Chapitre §3.
Principe de maximum stochastique pour EDSPR faiblement couplées

Chapitre 3

Principe de maximum stochastique pour EDSPR faiblement couplées

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité avec un filtration $\mathcal{F}^t$ et $W(\cdot)$ un $\mathbb{R}^d-$M.B standard. Nous supposons $\mathcal{F}^t = \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Nous considérons le système de contrôle stochastique suivant :

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), v(t), t)dt + \sigma(x(t), t)dW(t). \\ x(0) = x_0. \\ dy(t) = g(x(t), y(t); z(t); v, t)\,dt + z(t)dW(t). \\ y(T) = h(x(T)). \end{cases} \tag{3.1}$$

Où

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, T] \to \mathbb{R}^n.$$

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n\right).$$

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m\right) \times \mathbb{R}^k \times [0, T] \to \mathbb{R}^m.$$

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

soit U un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^k$ on fixé

$$\mathcal{V}_{ad} = \left\{u(\cdot)\,\epsilon\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}\left(0, T, \mathbb{R}^k\right) : u(t) \in U, \quad \mathbb{P} - p.s\right\}.$$

Notre problème de contrôle optimal est de minimiser la fonction de coût :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\gamma(y(0)), \tag{3.2}$$

sur $\mathcal{V}_{ad}$,où $\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ on suppose :

3.1 Conditions

Conditions H1 f, g, σ, h, γ sont différenciables en continu par rapport à (x, y, z).

Conditions H2 les dérivées de f, g et σ par rapport à x, y, z sont bornées.

$$|b_x| \leq C \quad \text{pour} \quad b_x = f_x, \sigma_x, g_x, g_y, g_z.$$

et

$$|h_x| \leq C(1 + |x|), \qquad |\gamma_y| \leq C(1 + |y|).$$

Remarque 3.1.1 *Sous les conditions H1, H2 l'EDSPRs-3.1 accépte une solution unique* (x, y, z).

3.2 Èquation variationnelle et Inégalité variationnelle

Le but de cette section est d'introduire les équations variationnelles habituelles du premier ordre et de dériver l'inégalité variationnelle. Soit $(u(.), x(.), y(.), z(.))$ une solution optimale du problème. Nous introduisons le contrôle perturbé suivant (spike variation) :

Spike variation

$$u^{\epsilon}(t) = \begin{cases} v, \ \tau \leq \mathbf{t} \leq \tau + \epsilon. \\ \\ u(t) \ \text{ sinon}, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $\mathfrak{v}$ est une variable aléatoire arbitraire et mesurable en $\mathcal{F}^t$ avec des valeurs dans U, $0 \leq t < T$ et $\sup_{\omega \epsilon \Omega} \mid v(\omega) \mid < \infty$. Soit $(\mathrm{x}^{\epsilon}(\cdot), y^{\epsilon}(\cdot), z^{\epsilon}(\cdot))$ le trajectoire du système 3.1 correspondant au controle perturbé $u^{\epsilon}(\cdot)$.

Nous introduisons les équations variationnelles suivantes :

$$\begin{cases} dx_1(t) = \left[f_x(t)x_1(t) + f\left(u^\epsilon\right) - f\left(u\right)\right]dt + \sigma_x(t)x_1(t)dW(t). \\ x_1\left(0\right) = 0. \\ dy_1(t) = \left[g_x(t)x_1(t) + g_y(t)y_1(t) + g_z(t)z_1(t) + g\left(u^\epsilon\right) - g\left(u\right)\right]dt \\ \qquad\qquad + z_1 dW(t). \\ y_1\left(T\right) = h_x\left(x\left(T\right)\right)x_1\left(T\right). \end{cases} \tag{3.4}$$

Pour plus de simplicité et commodité, nous utilisons la notation suivante :

$$\begin{aligned} f_x &\triangleq f_x\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right). \\ g_x &\triangleq g_x\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), u\left(t\right), t\right). \\ f\left(u^\epsilon\right) &\triangleq f\left(x\left(t\right), u^\epsilon\left(t\right), t\right). \\ f\left(t\right) &\triangleq f\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right). \end{aligned}$$

L'inégalité variationnelle peut être obtenue à partir du fait :

$$J\left(u^\epsilon\left(\cdot\right)\right) - J\left(u\left(\cdot\right)\right) \geq 0.$$

les lemmes suivants sont nécessaires pour établir l'inégalité.

Lemme 3.2.1 *Supposons que* (H_1) *et* (H_2)*détiennent. Pour les variations de premier ordre* x_1, y_1, z_1 *nous avoir les estimations suivantes :*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left|x_1(t)\right|^2 \leq C\epsilon^2. \tag{3.5}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left|x_1(t)\right|^4 \leq C\epsilon^4. \tag{3.6}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2 \leq C\epsilon^2. \tag{3.7}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^4 \leq C\epsilon^4. \tag{3.8}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T (z_1(s))^2\, ds \leq C\epsilon^2. \tag{3.9}$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T (z_1(s))^2\, ds\right)^2 \leq C\epsilon^4. \tag{3.10}$$

Nous prouvons d'abord 3.4, 3.5 et 3.6, La première équation de 3.4 donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|x_1(t)\right|^2 &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \left[f_x x_1 + f(u^\epsilon) - f(u)\right] ds + \int_0^t \sigma_x x_1 dW(t)\right)^2 \\
&\leq 3\left[\mathbb{E}\left(\int_0^t f_x x_1 ds\right)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \left[f(u^\epsilon) - f(u)\right] ds\right)^2 + \mathbb{E}\int_0^t (\sigma_x x_1)^2 ds\right] \\
&\leq 6C^2 T\mathbb{E}\int_0^t x_1^2 ds + 3\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(f(u^\epsilon) - f(u)\right) ds\right)^2.
\end{aligned}$$

Appliquer l'inégalité de Gronwall

$$\mathbb{E}\left|x_1(t)\right|^2 \leq C\epsilon^2, \text{pour t} \in [0,T] \text{ uniformement.}$$

De même 3.6.

Nous estimons ensuite y(1)et z(1).équerrage des deux côtés de

$$\begin{aligned}
&-y_1(t) - \int_0^T z_1(s)\, dW(s) \\
&= -h_x(x(T))\, x_1(T) + \int_t^T \left(g_x x_1 + g_y y_1 + g_z z_1 + g(u^\epsilon) - g(u)\right) ds.
\end{aligned}$$

et en utilisant le fait que

$$\mathbb{E}\left[y_1(t)\int_t^T z_1(s)\,dW(s)\right]=0.$$

Ona

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T (z_1(s))^2\,ds\\
&=\mathbb{E}\left(-h_x(x(T))\,x_1(T)+\int_t^T (g_x x_1+g_y y_1+g_z z_1+g(u^\epsilon)-g(u))\,ds\right)^2\\
&\leq 5C^2\mathbb{E}x_1^2(T)+5C^2T\mathbb{E}\int_t^T x_1^2(s)\,ds+5C^2T\mathbb{E}\int_t^T y_1^2(s)\,ds\\
&+5C^2(T-t)\,\mathbb{E}\int_t^T z_1^2(s)\,ds+5\mathbb{E}\left(\int_t^T (g(u^\epsilon)-g(u))\,ds\right)^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T z_1^2(s)\,ds &\leq 5C^2\mathbb{E}x_1^2(T)+5C^2T\mathbb{E}\int_t^T x_1^2(s)\,ds\\
&+5C^2T\mathbb{E}\int_t^T y_1^2(s)\,ds+5\mathbb{E}\left(\int_t^T (g(u^\epsilon)-g(u))\,ds\right)^2.
\end{aligned}$$

avec $\delta=\frac{1}{10C^2}$, t$\in[T-\delta,T]$

Appliquer l'inégalité de Gronwall

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2 &\leq C\epsilon^2,\ t\in[T-\delta,T]\\
\mathbb{E}\int_t^T z_1^2(s)\,ds\ &\leq C\epsilon^2, t\in[T-\delta,T].
\end{aligned}$$

de même, nous avons

$$-y_1(t)-\int_t^{T-\delta} z_1(s)\,dW(s)=-Y(T-\delta)+\int_t^{T-\delta}(g_x x_1+g_y y_1+g_z z_1+g(u^\epsilon)-g(u))\,ds.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T z_1^2(s)\,ds \leq{}& 5\mathbb{E}\left|y_1(T-\delta)\right|^2+5C^2T\mathbb{E}\int_t^{T-\delta} x_1^2(s)\,ds\\ &+5C^2T\mathbb{E}\int_t^{T-\delta} y_1^2(s)\,ds+5C^2(T-\delta-t)\,\mathbb{E}\int_t^{T-\delta} z_1^2(s)\,ds\\ &+5\mathbb{E}\left(\int_t^{T-\delta}(g(u^\epsilon)-g(u))\,ds\right)^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2 &\leq C\epsilon^2, t\in[T-2\delta,T].\\ \mathbb{E}\int_t^T z_1^2(s)\,ds\ &\leq C\epsilon^2, t\in[T-2\delta,T].\end{aligned}$$

Après un nombre fini d'itérations, 3.7 et 3.9 sont obtenus. 3.8 et 3.10 peuvent être prouvés en utilisant une méthode similaire et l'inégalité

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T z_1(s)\,dW_s\right)^4\geq\beta\mathbb{E}\left(\int_t^T z_1^2(s)\,ds\right)^2, \beta>0.$$

Lemme 3.2.2 *Supposons que* (H_1) *et* (H_2) *détiennent. Ensuite, nous avons les estimations suivantes :*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left|x^\epsilon(t)-x(t)-x_1(t)\right|^2\leq C_\epsilon\epsilon^2, \qquad C_\epsilon\to 0. \tag{3.11}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left|y^\epsilon(t)-y(t)-y_1(t)\right|^2\leq C_\epsilon\epsilon^2, \qquad C_\epsilon\to 0. \tag{3.12}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T\left|z^\epsilon(t)-z(t)-z_1(t)\right|^2 ds\leq C_\epsilon\epsilon^2, \qquad C_\epsilon\to 0. \tag{3.13}$$

Pour prouver 3.11 on observe que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t f(x+x_1,u^\epsilon)\,ds+\int_0^t \sigma(x+x_1)\,dW(s)\\
&=\int_0^t\left[f(x,u^\epsilon)+\int_0^t f_x(x+\lambda x_1,u^\epsilon)\,d\lambda x_1\right]ds\\
&+\int_0^t\left[\sigma(x)+\int_0^t \sigma_x(x+\lambda x_1)\,d\lambda x_1\right]dW(s)\\
&=\int_0^t f(x,u)\,ds+\int_0^t \sigma(x)\,dW(s)+\int_0^t\left[f_x x_1+f(u^\epsilon)-f(u)\right]ds+\int_0^t \sigma_x x_1 dW(s)\\
&+\int_0^t A^\epsilon ds+\int_0^t B^\epsilon dW(s)\\
&=x(t)-x_0+x_1(t)+\int_0^t A^\epsilon ds+\int_0^t B^\epsilon dW(s).
\end{aligned}$$

dans lequel

$$\begin{aligned}
A^\epsilon&=\int_0^t\left[f_x(x+\lambda x_1,u^\epsilon)-f_x(x,u)\right]d\lambda x_1.\\
B^\epsilon&=\int_0^t\left[\sigma_x(x+\lambda x_1)-\sigma_x(x)\right]d\lambda x_1.
\end{aligned}$$

Il résulte facilement du lemme 1 que

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t A^\epsilon ds\right)^2+\left(\int_0^t B^\epsilon dW(s)\right)^2\right\}=o\left(\epsilon^2\right). \tag{3.14}$$

puisque

$$x^\epsilon(t)-x_0=\int_0^t f(x^\epsilon,u^\epsilon)\,ds+\int_0^t \sigma(x^\epsilon)\,dW(s)$$

On a

$$\begin{aligned}
&x^\epsilon(t)-x(t)-x_1(t)\\
&=\int_0^t C^\epsilon(s)\left(x^\epsilon-x-x_1\right)ds\\
&+\int_0^t D^\epsilon(s)\left(x^\epsilon-x-x_1\right)dW(s)+\int_0^t A^\epsilon ds+\int_0^t B^\epsilon dW(s).
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C^{\epsilon}(s) &= \int_0^t f_x\left(x + x_1 + \lambda\left(x^{\epsilon} - x - x_1\right), u^{\epsilon}\right) d\lambda. \\ D^{\epsilon}(s) &= \int_0^t \sigma_x\left(x + x_1 + \lambda\left(x^{\epsilon} - x - x_1\right), u^{\epsilon}\right) d\lambda. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, 3.11 découle de la relation ci-dessus et 3.14 Nous prouvons ensuite 3.12 et 3.13. Il peut être facilement vérifié que

$$\begin{aligned} &\int_t^T g\left(x + x_1, y + y_1, z + z_1, u^{\epsilon}\right) ds + \int_t^T \left(z(s) + z_1(s)\right) dW(s) \\ &= h\left(x(T)\right) + h_x\left(x(T)\right) x_1(T) - y(t) - y_1(t) + \int_t^T G^{\epsilon} ds. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} G^{\epsilon} = &\int_0^1 \left(g_x\left(x + \lambda x_1, y + \lambda y_1, z + \lambda z_1, u^{\epsilon}\right) - g_x\right) d\lambda x_1 \\ &+ \int_0^1 \left(g_y\left(x + \lambda x_1, y + \lambda y_1, z + \lambda z_1, u^{\epsilon}\right) - g_y\right) d\lambda y_1 \\ &+ \int_0^1 \left(g_z\left(x + \lambda x_1, y + \lambda y_1, z + \lambda z_1, u^{\epsilon}\right) - g_z\right) d\lambda z_1. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} &-\left(y^{\epsilon}(t) - y(t) - y_1(t)\right) \\ &= -\left(h\left(x^{\epsilon}(T)\right) - h\left(x(T)\right)\right) + h_x\left(x(T)\right) x_1(T) \\ &+ \int_t^T \left[g\left(x^{\epsilon}, y^{\epsilon}, z^{\epsilon}, u^{\epsilon}\right) - g\left(x + x_1, y + y_1, z + z_1, u^{\epsilon}\right)\right] ds \\ &+ \int_t^T \left(z^{\epsilon}(s) - z(s) - z_1(s)\right) dW_s + \int_t^T G^{\epsilon} ds. \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|y^{\epsilon}(t)-y(t)-y_1(t)\,|^2+\mathbb{E}\int_t^T|z^{\epsilon}(s)-z(s)-z_1(s)\,|^2\,ds\\
&=\mathbb{E}\{-(h(x^{\epsilon}(T))-h(x(T)+x_1(T)))\\
&-\int_0^1[h_x(x(T)+\lambda x_1(T))-h_x(x(T))]\,d\lambda x_1(T)+\int_t^T G^{\epsilon}ds\\
&+\int_t^T[g(x^{\epsilon},y^{\epsilon},z^{\epsilon},u^{\epsilon})-g(x+x_1,y+y_1,z+z_1,u^{\epsilon})]\,ds\}^2.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 1 et $(3,9)$ nous voyons que

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\int_t^T G^{\epsilon}ds\right)^2=o\left(\epsilon^2\right).$$

$$\mathbb{E}\left[h(x^{\epsilon}(T))-h(x(T)+x_1(T))\right]^2=o\left(\epsilon^2\right).$$

Nous obtenons 3.12 et 3.13 en appliquant la méthode itérative utilisée dans le lemme 1 à ce qui précède relation.

Sous les hypothèses (H_1) et (H_2)l'inégalité variationnelle suivante détient :

$$\mathbb{E}\gamma_y(y(0))\,y_1(0)\geq o(\epsilon).$$

Par lemme 2, nous avons l'estimation

$$\mathbb{E}\left[\gamma(y^{\epsilon}(0))-\gamma(y(0)+y_1(0))\right]=o(\epsilon)$$

par conséquent

$$0\leq\mathbb{E}\left[\gamma(y(0))-\gamma(y(0)+y_1(0))\right]+o(\epsilon)=\mathbb{E}\gamma_y(y(0))\,y_1(0)+o(\epsilon).$$

3.3 Equations adjointes

Nous introduisons les équations adjointes et la fonction Hamiltonian pour notre problème. Àpartir de l'inégalité variationnelle obtenue dans le lemme 3, le principe maximum peut être prouvé en appliquant la formule d'Itô. [2] Dans ce travail, les équations adjointes sont :

$$\begin{cases} -dp(t) = \left(f_x^* p(t) + g_x^* q(t) + \sigma_x^* k(t)\right) dt - k(t) dW(t). \\ p(t) = -h_x^* \left(x(T)\right) q(T). \\ -dq(t) = g_x^*(t) q(t) dt + g_z^*(t) q(t) dW(t). \\ q(0) = -\gamma_y \left(y(0)\right). \end{cases} \tag{3.15}$$

Hamiltonien

On definit la fonction hamiltonienne comme suit :

$$H\left(t, x; y; z; v, p(t), q(t), k(t)\right) \triangleq \langle p(t), f(x, v, t)\rangle$$
$$+ \langle q(t), g(x, y, z, v, t)\rangle + \langle k(t), \sigma(x)\rangle$$

Où

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m\right) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n\right) \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$$

Les relations (13) peuvent être réécrites comme :

$$\begin{cases} -dp(t) = H_x(t) dt - k(t) dW(t) \\ p(T) = -h_x^* \left(x(T)\right) q(T). \\ -dq(t) = H_y(t) dt + H_z(t) dW(t). \\ q(0) = -\gamma_y \left(y(0)\right). \end{cases} \tag{3.16}$$

On présent maintenant le théorème de principe du maximum stochastique pour EDSPRs.[2]

Théorème 3.3.1 *Suppossons que (H1) et (H2).. Soit* $(u(.), x(.), y(.), z(.))$ *la solutions optimale de 3.1-3.2, Il existe* $(p(.), q(.), k(.))$ *solution de 3.15 Alors, on a*

$$H\left(x(t), y(t), z(t), v, p(t), q(t), k(t), t\right) \geq H\left(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), q(t), k(t), t\right), \tag{3.17}$$

$$\forall v \in U$$

Preuve. En appliquant la formule d'Ito à $\langle p, x_1 \rangle$ on obtien ■

(1)

$$\begin{aligned}
&E\left(p(T)x_1(T)\right) - E\left(p(0)x_1(0)\right) \\
&= E\int_0^T p(t)dx_1(t) + E\int_0^T x_1(t)dp(t) + E\int_0^T d<p(t), dx_1(t)> . \qquad (3.18) \\
&I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &= E\int_0^T p(t)dx_1(t) \qquad (3.19) \\
&= E\int_0^T p(t)\left[f_x(t)x_1(t) + f\left(u^\epsilon\right) - f\left(u\right)\right]dt
\end{aligned}$$

on sait que$E\int_0^T p(t)\sigma_x(t)x_1(t)dW(t) = 0$.

$$\begin{aligned}
I_2 &= E\int_0^T x_1(t)dp(t) \qquad (3.20) \\
&= -E\int_0^T x_1(t)\left(f_x^*p(t) + g_x^*q(t) + \sigma_x^*k(t)\right)dt
\end{aligned}$$

où $E\int_0^T x_1(t)k(t)dW(t) = 0$.

$$\begin{aligned}
I_3 &= E\int_0^T d<p(t), dx_1(t)> \qquad (3.21) \\
&= E\int_0^T \sigma_x(t)x_1(t)k(t)dt.
\end{aligned}$$

D'aprés 3.18, 3.19, 3.20, et 3.21, on obtient

$$E\left(p(T)x_1(T)\right) = -E\int_0^T x_1(t)g_x^*q(t)dt + E\int_0^T p(t)(f\left(u^\epsilon\right) - f\left(u\right))dt. \qquad (3.22)$$

(2)

D'aprés la formule d'intégration par partie our $(q(t)y_1(t))$ on a

$$\begin{aligned}
&E\left(q(T)y_1(T)\right) - E\left(q(t)y_1(t)\right) \\
&= E\int_0^T q(t)dy_1(t) + E\int_0^T y_1(t)dq(t) + E\int_0^T d < q(t), dy_1(t) > . \\
&= M_1 + M_2 + M_3.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

où

$$\begin{aligned}
M_1 &= E\int_0^T q(t)dy_1(t). \\
&= E\int_0^T q(t)\left[g_x(t)x_1(t) + g_y(t)y_1(t) + g_z(t)z_1(t) + g\left(u^\epsilon\right) - g\left(u\right)\right]dt.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

où $E\int_0^T q(t)z_1(t)dW(t) = 0.$

$$\begin{aligned}
M_2 &= E\int_0^T y_1(t)dq(t) \\
&= -E\int_0^T y_1(t)g_y^*(t)q(t)dt
\end{aligned} \tag{3.25}$$

où $E\int_0^T y_1(t)g_z^*(t)q(t)dW(t) = 0.$

$$\begin{aligned}
M_3 &= E\int_0^T d < q(t), dy_1(t) > . \\
&= -E\int_0^T g_z^*(t)q(t)z_1(t)dt.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

D'aprés 3.23, 3.24, 3.25, et 3.26, on obtient,

$$E\left(q(T)y_1(T)\right) - E\left(q(0)y_1(0)\right) = E\int_0^T q(t)g_x(t)x_1(t)dt$$

on trouve

$$E\left(q(T)y_1(T)\right) = E\left(q(0)y_1(0)\right) + E\int_0^T q(t)g_x(t)x_1(t)dt.$$

où $q(0) = -\gamma_y(y(0))$, $y_1(T) = h_x(x(T))x_1(T)$. On déduit que

$$E(q(T)h_x(x(T))x_1(T)) = -E(\gamma_y(y(0))y_1(0)) + E\int_0^T q(t)g_x(t)x_1(t)dt + E\int_0^T q(t)[g(u^\epsilon) - g(u)]dt. \tag{3.27}$$

(3)

D'aprés 3.22 et 3.27, on obtient

$$\begin{aligned}
-E(h_x^*(x(T))q(T)x_1(T)) &= -E\int_0^T x_1(t)g_x^*q(t)dt + E\int_0^T p(t)(f(u^\epsilon) - f(u))dt. \\
E(q(T)h_x(x(T))x_1(T)) &= -E(\gamma_y(y(0))y_1(0)) + E\int_0^T q(t)g_x(t)x_1(t)dt \\
&\quad + E\int_0^T q(t)[g(u^\epsilon) - g(u)]
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
E(\gamma_y(y(0))y_1(0)) &= E\int_0^T p(t)(f(u^\epsilon) - f(u))dt \\
&\quad + E\int_0^T q(t)[g(u^\epsilon) - g(u)]dt
\end{aligned}$$

on déduit $\forall v \in U$,

$$\begin{aligned}
o(\epsilon) &\leq \mathbb{E}\gamma_y(y(0))y_1(0) \\
&= \mathbb{E}\int_0^T [H(x(t), y(t), z(t), u^\epsilon(t), p(t), q(t), k(t)) \\
&\quad - H(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), q(t), k(t))]dt,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T H(x(t), y(t), z(t), v, p(t), q(t), k(t), t)\,dt \\
&\geq \mathbb{E}\int_0^T H(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), q(t), k(t), t)\,dt,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$\forall v \in U$,

finalement, on obtient

$$\begin{aligned} & H\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v,p\left(t\right),q\left(t\right),k\left(t\right),t\right)dt \\ & \geq H\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),u\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right),k\left(t\right),t\right)dt, \end{aligned} \tag{3.29}$$

$\forall v\in U,\quad \mathbb{P}-p.s, dt-p.p.$

Conclusion

Dan ce travail, un problème du contrôle optimal stochastique pour des équations differentielles stochastiques progrssive retrograde non linear, fiablement couplée **EDSPRs** a été discuté. Des conditions necessaires pour l'optimalité pour les systèmes gouverné par des **EDSPRs** sont prouvées par des techniques de perturbation forte et la formule d'Ito.

Les équations differentielles stochastiques progressives rétrogrades EDSPRs faiblement couplées

$$\begin{cases} dx(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right) dt + \sigma\left(t, x(t)\right) dW(t), \\ \\ dy(t) = g\left(t, x(t), y(t), z(t), u(t)\right) dt - z(t) dW(t) \\ \\ x\left(0\right) = x_0,\ y(T) = h(x\left(T\right). \end{cases}$$

Les équations differentielles stochastiques progressives rétrogrades EDSPRs fortement couplées

$$\begin{cases} dx(t) = f\left(t, x(t), y(t), z(t), u(t)\right) dt + \sigma\left(t, x(t), y(t), z(t), u(t)\right) dW(t), \\ \\ dy(t) = g\left(t, x(t), y(t), z(t), u(t)\right) dt - z(t) dW(t) \\ \\ x\left(0\right) = x_0,\ y(T) = h(x\left(T\right). \end{cases}$$

Bibliographie

[1] A. BENSOUSSAN (1983), Lectures on stochastic contr. In Lect. Notes in Math.972, Springer Varlag, pp. 1-62.

[2] WENSHENG XU : Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system. The Journal of the Australian Mathematical Society. B. Applied Mathematics. Volume 37 (02), 1995, 172 185.

[3] H. PHAM (2005), Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.Vol. 61, Springer-Verlage.

[4] M. JEANBLANC. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes.

[5] Zhou X Y., Li D. : Continuous time mean-variance portfolio selection : a stochastic LQ framework. Appl. Math. Optim. **42**, 19-33 (2000)

[6] J. YONG AND X.Y. ZHOU (1999), *Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations.* Springer Verlag.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filltré.
T	Le temps terminal.
$W(t)$	Mouvement Brownien.
$< X, X >_T$	Variation quadratique de X sur $[0, T]$.
exp	Exponentiel.
lim sup, liminf	Limite superieur, inferieur
f	coefficient de drift
σ	Cofficient de diffusion.
max, min	maximum, minimum
$\mathbb{P} - p.s$	Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$u^*(t)$	Contrôle optimal.
$x^*(t)$	Trajectoire associé à $\hat{u}$.
$(p(t), q(t))$	Processus adjoint.
$H(t, x(t), u(t), p(t), q(t))$	Hamiltonian.