République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Berramdane Ahlem

Titre

Conditions suffisantes d'optimalité pour les systèmes stochastiques avec sauts

Membres du Comité d'Examen :

Dr. TAMER Lazhar, *MCA. Université de Biskra*,________________ **Président**

Dr. LAKHDARI Imad Eddine, *MCB. Université de Biskra*,__________ **Encadreur**

Dr. GHOUL Abdelhak, *MAA. Université de Biskra*,____________ **Examinateur**

2020

Dédicace

Je dédie cette mémoire

À la source de la patience, Ma chère Mère.

À la source de ma force, Mon chèr père.

À mes soeurs.

À mon seul frère.

À mes chères amies.

À tous ceux qui étaient à côtés de moi et qui m'ont soutenu dans ma carrière universitaire.

Ahlem Berramdane

Remerciements

Mes premiers remerciements à Dieu tout-puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a données pour achever mon humble travail.

Mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à mes parents qui ont toujours été là pour moi.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire monsieur **Lakhdari Imad-Eddine,** professeur de mathématique à l'université de Biskra, pour sa patience, ses conseils, sa confiance.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury.

Je remercie à touts les enseignants du département de Mathématiques.

Je remercie également tous ceux qui ont partagé avec moi les moments difficiles.

Table des matières

Introduction générale

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal stochastique ont un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et de la sciences et de façon plus générale dans tout les domaines utilisant les applications des mathématiques surtout dans la finance, par exemple les problèmes d'investissements et de consommations dans un marché, le teaux de fluctuation en bourse, etc ....

Dans ce travail, nous sommes intéressés aux problèmes de contrôle optimal stochastique pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques (EDSs) avec sauts, qui consiste a maximiser une fonction de coût donnée par :

$$J(u(t)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right],$$

avec $X(t)$ est une solution en t d'un système contrôlé de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB\,(t) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, X(t_-), u(t_-), z)\widetilde{N}(dt, dz), \end{cases}$$

où b, σ et γ sont des fonctions données, et $B\,(t)$ est un mouvement brownien.

Notre objectif est d'étudier les conditions suffisantes d'optimalité sous la forme de principe du maximum suffisant. Nous supposons que le domaine du contrôle est nécessairement convexe. Cette étude est basé sur le travail de Framstad et al. [2].

Nous présentons notre travail comme suit :

Le premier chapitre, on donne un bref rappel sur la théorie du calcul stochastique qui nous permet d'étudier les conditions suffisantes d'optimalité pour notre système.
Le deuxième chapitre contient l'essentielle de ce travail, nous étudions les conditions suffisantes d'optimalité pour les systèmes gouvernés par une équation différentielle stochastique avec sauts.
Dans le dernier chapitre, nous appliquons le principe du maximum suffisant au problème de sélection de portefeuille moyenne variance.

Chapitre §.1
Rappel sur le calcul stochastique

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre nous allons rappeler des notions essentielles en théorie du calcul stochastique, nous commençons par définir un processus stochastique, mouvement brownien, l'intégrale stochastique, processus d'itô, nous rappelons ensuite les équations différentielles stochastique et le processus de poisson.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Tribu ou σ-Algebre) *Soit E un ensemble quelconque, on appelle tribu de parties de E, tout sous ensembles $\mathcal{A}$ de E telle que :*

1. $E \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$.
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n) \in \mathcal{A}$.

Définition 1.1.2 (Variable aléatoire) *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec :*

Ω : est un ensemble fondamental.

$\mathcal{F}$: est une tribu définie sur Ω.

$\mathbb{P}$: est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

L'application $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est appelée une variable aléatoire si elle est mesurable par rapport à $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i.e : $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Définition 1.1.3 (Filtration) *Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F})$ est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus telle que pour $s \leq t$, on a : $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Remarque 1.1.1 *Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé un espace de probabilité filtré.*

Définition 1.1.4 (Processus stochastique) *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T.*

1. Si T est un ensemble dénombrable totalement ordonnée comme $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ alors X est un processus stochastique à temps discret.
2. Si $T = \mathbb{R}_+$ alors X est un processus stochastique à temps continu.
3. Pour $t \in T$ fixé : $w \in \Omega \to X_t(w)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
4. Pour $w \in \Omega$ fixé : la fonction $t \in T \to X_t(w)$ est est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus.

Définition 1.1.5 (Indistinguabilité) *On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ sont indistinguables si leurs trajectoires sont les même $\mathbb{P} - p.s$, c'est-à-dire :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \ ;\forall\ t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.1.6 (Modification des processus) *On dira que $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ est une version (ou une modification) de $X = (X_t)_{t\geq 0}$ si :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1;\ \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.1.1 *Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ sont indistinguables alors ils sont modification l'un de l'autre mais la réciproque est en générale fausse.*

Définition 1.1.7 (Équivalence de deux processus stochastiques) *On dit que*

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ sont équivalents si $X = Y$, i.e pour tout $(t_1, t_2, ..., t_n)$ et pour tout n on a :

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) = (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n}).$$

Définition 1.1.8 (Processus adapté) *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.*

Définition 1.1.9 (Processus progressivement mesurable) *On dit que $X(t)$ est progressivement mesurable âr rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si l'application*

$X : (w, t) \rightarrow X_t(w)$ de $\Omega \times [0, s]$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}([0, s])$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Définition 1.1.10 (Processus càdlàg) *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.1.11 (Processus càglàd) *Un processus est dit càglàd (continu à gauche, pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.*

1.2 Mouvement brownien

Définition 1.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs réelles, B est un mouvement brownien standard si :*

1. $B_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$
2. $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ independante de $\mathcal{F}_s$.
3. $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $N(0, t - s)$.

Proposition 1.2.1 *Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique telle que toutes ses trajectoires sont continues et $B_0 = 0$, Alors les propriétées suivantes sont équivalentes :*

1. Le processus B est un mouvement brownien standard.
2. Le processus B est un processus gaussien avec :

$$\begin{cases} \text{Esperance } m(t) = 0, \\ \text{Covariance } \Gamma(s,t) = \min\{s,t\}. \end{cases}$$

Autrement dit, le processus B part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

1.3 Intégrale stochastique (Intégrale d'Itô)

Définition 1.3.1 (Intégrale stochastique) *L'intégrale stochastique est un intégrale de la forme :*

$$\int_a^b X_s(w)dB_s(w),$$

où a et $b \in \mathbb{R}_+$, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB.

Définition 1.3.2 (Bon processus) *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un "bon processus" s'il est $\mathcal{F}_t$-adapté, càdlàg et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

l'integrale stochastique est vérifier les propriétés suivantes :

1. **Linéarité :** Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ deux "bon processus" on donc

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad \int_0^t (\alpha X_s(w) + \beta Y_s(w))dB_s(w) = \alpha \int_0^t X_s(w)dB_s(w) + \beta \int_0^t Y_s(w)dB_s(w).$$

2. **Centrage :** Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un "bon processus" et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB alors on a :
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s(w)dB_s(w)\right] = 0.$$

3. **Appartenance à** $\mathbb{L}^2$: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un "bon processus" et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB alors on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (X_s(w)dB_s(w))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2(w)ds\right]$$

Définition 1.3.3 (Processus d'Itô) *: Un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est appelé processus d'Itô s'il est de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b\,(s)\,ds + \int_0^t \sigma\,(s)\,dB_s,$$

où b_s est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté tq :

$$\int_0^t |b\,(s)|\,ds < \infty, \quad \mathbb{P} - p.s, \quad \forall t \geq 0.$$

σ est un "bon processus local". $x = X_0 \in \mathbb{R}$.

On écrit généralement le processus d'Itô par la forme différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = b\,(t)\,dt + \sigma\,(t)\,dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

le processus $b\,(t)$ s'appelle la derivé (drift) du processus X et $\sigma\,(t)$ s'appelle le coefficient de diffusion ou volatilité.

1.4 Equations différentielles stochastiques

Définition 1.4.1 (Equation differentielle stochastique) *Une équation différentielle stochastique **(EDS)** est une équation de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

sous la forme différentielle :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \quad . \tag{1.1}$$

où $\{B_t,\ t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien.*

Définition 1.4.2 (Solution d'EDS) *Soit* $d, m \in \mathbb{N}, et$

$$b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d.$$

$$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}.$$

Notons $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $B_s,\ s \leq t$ et par X_0, complétée par les ensembles négligeables $\mathcal{N}$.

Un processus stochastique $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est appellé une solution forte de (1.1) si :

1. $X_0 = x$,
2. $\int_0^t \{|b(X(s))^2| + |\sigma(X(s))^2|\}\, ds < \infty$.
3. $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,\ t \in [0, \infty),\ \mathbb{P} - p.s.$

Définition 1.4.3 (Solution forte unique d'EDS) *: On dit que l'équation admet une solution forte unique, si pour chaque deux solutions fortes* X_t *et* Y_t *on a :*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |X_t - Y_t| > 0\right\} = 0,$$

c'est à dire :

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\} = 1.$$

Théoreme 1.4.1 (Existence) *On suppose que :*

1. b et σ deux fonctions continues.
2. il existe une constante $K > 0$.telle que, pour tout $t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{i)}\ |b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y|\,.$$

$$\text{ii)}\ |b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1 - |x|^2).$$

3. La condition initiale X_0 est indépendante de et est de carrée intégrable.

alors il existe une solution unique de à trajectoires continues pour $t \leq T$. de plus cette solution vérife

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2) < \infty.$$

1.5 Processus de Lévy

En théorie des probabilités, un processus de Lévy, nommé d'après le mathématicien français Paul Lévy, est un processus stochastique à temps continu, continu à droite limité à gauche (càdlàg), partant de 0, dont les accroissements sont stationnaires et indépendants (cette notion est expliquée ci-dessous). Les exemples les plus connus sont le processus de Wiener et le processus de Poisson.

Définition 1.5.1 *Un processus stochastique* $X = \{X_t : t \geq 0\}$ *est appelé processus de Lévy, si*

1- $X_0 = 0$ *presque sûrement.*

2- Accroissements indépendants : Pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq \infty, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2} \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *, sont indépendants.*

3- Accroissements stationnaires : Pour tout $s < t, X_t - X_s$, *est égale en loi à* X_{t-s}.

4- $t \to X_t$ *est presque sûrement continue à droite et limitée à gauche (Càdlàg).*

1.6 Processus de poisson

Définition 1.6.1 *Un processus de poisson* N *de paramétre* $\lambda > 0$ *est un processus de comptage*

$$\forall t \geq 0, \;\; N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

associé à une famille $(T_n; n \in \mathbb{N})$ avec $T_0 = 0$ de va représentant les temps d'arrivées, telle que les variables aléatoires $(T_{n+1} - T_n; n \in \mathbb{N})$ sont i.i.d de loi exponentielle de paramétre λ.

1.6.1 Processus de poisson composé

Définition 1.6.2 *Un processus de Poisson avec intensité* $\lambda > 0$ *et loi de sauts* ν_Z *est un processus stochastique défini par :*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k,$$

où $(Z_n)_n$ est une suite de variable aléatoire iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi ν_Z et N est un processus de Poisson de paramètre λ indépendant de la suite $(Z_n)_n$.
En d'autres mots, un processus de Poisson composé est un processus constant par morceaux qui saute aux instants de sauts d'un processus de Poisson standard, et dont les tailles de sauts sont des variables i.i.d. d'une loi donnée.

Définition 1.6.3 (Mesure de saut d'un processus de Poisson composé) *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Poisson composé sur* $\mathbb{R}^d$ *avec intensité* λ *et distribution des tailles de saut* f, *sa mesure de saut* J_X *est une mesure aléatoire de Poisson sur* $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ *avec une* *mesure d'intensité :*

$$\mu(dx \times dt) = \nu(dx)dt = \lambda f(dx)dt.$$

La mesure d'un processus de Poisson composé définit le nombre moyen de sauts par unité de temps.

1.6.2 Processus de poisson compensée

Définition 1.6.4 *On définit la version "centrée" d'un processus de Poisson par :*

$$\widetilde{N}_t = N_t - \lambda t.$$

$(\widetilde{N}_t)$ est dit Processus de Poisson compensé et l'expression déterministe $(\lambda t)_{t\geq 0}$ est dite compensateur de $(\lambda t)_{t\geq 0}$.

Définition 1.6.5 (Mesure de saut d'un processus de Poisson compensé) *La mesure aléatoire de Poisson compensée est définit par*

$$\widetilde{M}(A) = M(A) - \mu(A).$$

Définition 1.6.6 ***(Mesure de saut d'un processus de Poisson composé compensée)*** *La mesure aléatoire un processus de poisson compensée est définit par*

$$\widetilde{J}_X(ds \times dx) = J_X(ds \times dx) - \nu(dx)ds,$$

où $J_X(ds \times dx)$ est la mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé, et $\nu(dx)ds$ sa mesure de saut.

Théoreme 1.6.1 (La formule d'Itô pour une EDS avec sauts.) *On suppose que :*

$X_t \in \mathbb{R}$ *est un processus d'Ito-Lévy de la forme :*

$$dX_t = b(t,w)dt + \sigma(t,w)dB_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z,w)\overline{N}(dt,dz).$$

où :

$$\overline{N}(dt,dz) = \begin{cases} N(dt,dz) - \nu(dz)dt & si \quad \mid z \mid < R. \\ N(dt,dz) & si \quad \mid z \mid \geq R. \end{cases}$$

pour quelque $R \in [0,\infty]$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et on définie $Y_t = f(t,X_t)$, dont Y_t est un processus d'Ito-Lévy et

$$\begin{aligned} dY_t = & \frac{\delta f}{\delta t}(t,X_t)dt + \frac{\delta f}{\delta x}(t,X_t)[b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t] \\ & + \frac{1}{2}\sigma^2(t,X(t))\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(t,X(t))dt \\ & + \int\limits_{|z|<R} \left\{ f(t,X(t_-) + \gamma(t,z)) - f(t,X(t_-)) \right. \\ & \left. - \frac{\delta f}{\delta x}(t,X(t_-))\gamma(t,z) \right\} \nu d(z)dt \\ & + \int\limits_{\mathbb{R}} \left\{ f(t,X(t_-)) + \gamma(t,z)) - f(t,X(t_-)) \right\} \overline{N}(dt,dz). \end{aligned}$$

Notons que :

Si $R = 0$ alors $\overline{N} = N$.

Si $R = \infty$ alors $\overline{N} = \widetilde{N}$.

Chapitre §.2 Conditions suffisantes d'optomalité pour les systèmes stochastiques avec sauts

Chapitre 2

Conditions suffisantes d'optimalité pour les systèmes stochastiques avec sauts

Dans ce chapitre, nous étudions les conditions suffisantes d'optimalité pour les systèmes stochastiques avec sauts, avec le domaine du contrôle U est convexe.

2.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtrée avec T un réel strictement positif, $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien de dimension n et U un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^k$. Un contrôle admissible est un processus $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^n$, on note par $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles tels que :

$$\mathcal{A} = \left\{u : [0,T] \times \Omega \to U,\ u \text{ est mesurable et } \mathcal{F}_t\text{-adapté}\right\}.$$

Supposons que l'état $X(t) = X^{(u)}(t)$ d'une diffusion de saut contrôlée en $\mathbb{R}^n$ est donné par :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB(t) \\ \qquad\qquad + \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, X(t_-), u(t_-), z)\widetilde{N}(dt, dz), \\ X(0) = x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times m},$$

$$\gamma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times l},$$

telle que $\widetilde{N}(dt, dz) = (\widetilde{N}_1(dt, dz_1), ..., \widetilde{N}_\ell(dt, dz_\ell))^\intercal$, et

$$\widetilde{N}_j(dt, dz_j) = N_j(dt, dz_j) - \nu_j(dz_j)dt; \quad 1 \leq j \leq \ell.$$

Supposons que le critère de performance est de la forme :

$$J(u(t)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right], \ u \in \mathcal{A},$$

où

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R},$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

avec f est une fonction continue et g est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $T < \infty$ est un temps déterministe fixe et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f^-(t, X(t), u(t))dt + g^-(X(T))\right] < \infty, \ \forall u \in \mathcal{A}.$$

Le processus $u(t) = u(t, w) \in U \subset \mathbb{R}^k$ est notre contrôle. On suppose que u est adapté et càdlàg, l'équation 2.1 admet une solution unique forte $X^{(u)}(t)$ avec $t \in [0, T]$.

Le problème du contrôle optimal est de trouver $u^* \in \mathcal{A}$ telle que :

$$J(u^*) = \sup_{u \in \mathcal{A}} J(u).$$

On dit que le contrôle u est optimal si :

$$J(u^*) \geq J(u).$$

Définition 2.1.1 (Trace d'une matrice (tr)) *: Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}$, la trace de A notée $tr(A)$ est la somme des éléments de la diagonale principale i.e :*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii},$$

où $\mathcal{M}$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

On définit L'Hamiltonian $\mathbb{H} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(t,x,u,p,q,r) &= f(t,x,u) + b^{\intercal}(t,x,u)p + tr(\sigma^{\intercal}(t,x,u)q) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_{ij}(t,x,u,z_j) r_{ij}(t,z) \nu_j(dz_j), \end{aligned} \tag{2.2}$$

où : $\mathcal{R}$ est l'ensemble des fonctions $r : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que les intégrales dans 2.2 convergent.

On suppose que $\mathbb{H}$ est différentiable par rapport à x.

L'équation adjointe (correspondant à u et $X^{(u)}$) est l'équation différentielle stochastique rétrograde (**EDSR**) suivante :

$$\begin{cases} dp(t) = -\nabla_x \mathbb{H}(t, X(t), u(t), p(t), q(t), r(t,.))dt \\ \qquad\qquad + q(t)dB(t) + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} r(t_-, z)\widetilde{N}(dt, dz), \\ p(T) = \nabla_x g(X(T)), \end{cases} \tag{2.3}$$

où $(p(t), q(t), r(t,z)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{n\times \ell}$ est la solution de l'équation (2.3).

2.2 Conditions suffisantes d'optimalité

Pour établir les conditions suffisantes d'optimalité pour notre problème du contrôle, on suppose que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{\sigma\sigma^{\intercal}(t, X(t), u(t)) + \sum_{k=1}^{\ell}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\gamma^{(k)}(t, X(t), u(t), z_k)\right|^2 \nu_k(dz_k)\right\} dt\right] < +\infty, \ \forall u \in \mathcal{A}.$$

Théoreme 2.2.1 (Conditions suffisantes d'optimalité)

Soit u^* un contrôle admissible avec la solution correspondante $X^* = X^{(u^*)}$, on suppose qu'il existe une solution $(p^*(t), q^*(t), r^*(t,z))$ de l'équation adjointe correspondante (2.3) qui vérifient :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{q^* q^{*\intercal}(t) + \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} r^{(k)}(t, z_k)\right|^2 \nu_k(dz_k)\right\} dt\right] < +\infty. \tag{2.4}$$

De plus, on suppose que :

(H1) L'Hamiolonien $\mathbb{H}$ vérifier :

$$\mathbb{H}(t, X^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t), r^*(t,\cdot)) = \sup_{\upsilon\in U} \mathbb{H}(t, X^*(t), \upsilon, p^*(t), q^*(t), r^*(t,\cdot)).$$

(H2) La fonction g est concave par rapport à x pour tout $t \geq 0$.

(H3) $\mathbb{H}(t, x, \upsilon, p^*(t), q^*(t), r^*(t,\cdot))$ est une fonction concave en x, pour tout $t \in [0,T]$.

$$\mathbb{H}^*(x) := \max_{\upsilon\in U} \mathbb{H}(t, x, \upsilon, p^*(t), q^*(t), r^*(t,\cdot)). \tag{2.5}$$

Sous les conditions **(H1)**, **(H2)** et **(H3)**, alors $\widehat{u}(t)$ est un contrôle optimal.

Pour démontrer le théorème (2.2.1) on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.1 (Intégration par parties) *On suppose que* $\mathbb{E}\left[Y^{(j)}(T)^2\right] < \infty$, *avec :*

$$\begin{cases} dY^{(j)}(t) = b^{(j)}(t,w)dt + \sigma^{(j)}(t,w)dB(t) + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \gamma^{(j)}(t,z,w)\widetilde{N}(dt,dz), \\ Y^{(j)}(0) = y^{(j)} \in \mathbb{R}^n, \ j = 1, 2, \end{cases}$$

où $b^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma^{(j)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *et* $\gamma^{(j)} \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, *alors :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Y^{(1)}(T)\cdot Y^{(2)}(T)\right] = y_1 \cdot y_2 + \mathbb{E}\Bigg[\int_0^T Y^{(1)}(t_-)dY^2(t) \\ + \int_0^T Y^{(2)}(t_-)dY^1(t) + \int_0^T tr[\sigma^{(1)^\intercal}\sigma^{(2)}](t)dt \\ + \int_0^T \left[\sum_{j=1}^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} \gamma_{ij}^{(1)}(t,z_j)\gamma_{ij}^{(2)}(t,x)\right)\nu_j(dz_j)\right] dt\Bigg]. \end{aligned}$$

Preuve. La preuve du lemme 2.2.1 est basé sur la formule d'Itô (voir le livre d'Øksendal [3, Theorem 1.16]). On va démontrer le Théorème (2.2.1) : ■

Preuve. Soit $u \in \mathcal{A}$ un contrôle admissible avec le processus d'état correspondant $X(t) = X^{(u)}(t)$ alors :

$$\begin{aligned} & J(u^*) - J(u) \\ & = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X^*(t), u^*(t))dt + g(X^*(T))\right] \\ & - \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right] \\ & = \mathbb{E}\left[\int_0^T \{f(t, X^*(t), u^*(t)) - f(t, X(t), u(t))\}\, dt + g(X^*(T)) - g(X(T))\right]. \end{aligned}$$

D'après la condition (**H2)**, et le lemme 2.2.1 on obtient :

$$
\begin{aligned}
&J(u^*) - J(u) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T (X^*(t) - X(t))^\top (-\nabla_x \mathbb{H}(t, X^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t), r^*(t,\cdot)))dt\right. \\
&\quad + \int_0^T p^{*\intercal}(t-)\left\{b(t, X^*(t), u^*(t)) - b(t, X(t), u(t))\right\} dt \\
&\quad + \int_0^T tr\left[\left\{\sigma(t, X^*(t), u^*(t)) - \sigma(t, X(t), u(t))\right\}^\intercal q^*(t)\right] dt \\
&\quad + \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \left\{\gamma_{ij}(t, X^*(t), u^*(t), z_j)\right.\right.\right. \\
&\quad - \left.\left.\left.\left. \gamma_{ij}(t, X(t), u(t), z_j)\right\} r^*_{ij}(t, z_j)\right) \nu_j(dz_j)\right) dt\right]. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Par la définition de $\mathbb{H}$ on trouve :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{f(t, X^*(t), u^*(t)) - f(t, X(t), u(t))\right\} dt\right] \qquad (2.7) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{\mathbb{H}(t, X^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t), r^*(t,\cdot)) - \mathbb{H}(t, X(t), u(t), p(t), q(t), r(t,\cdot))\right\} dt\right. \\
&\quad - \int_0^T \left\{b(t, X^*(t), u^*(t)) - b(t, X(t), u(t))\right\}^\intercal p^*(t)dt \\
&\quad - \int_0^T tr\left[\left\{\sigma(t, X^*(t), u^*(t)) - \sigma(t, X(t), u(t))\right\}^\intercal q^*(t)\right] dt \\
&\quad + \left.\int_0^T \left(\sum_{j=1}^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} \left\{\gamma_{ij}(t, X^*(t), u^*(t), z_j) - \gamma_{ij}(t, X(t), u(t), z_j)\right\} r^*_{ij}(t, z_j)\right) \nu_j(dz_j)\right) dt\right],
\end{aligned}
$$

En mettant (2.6) dans (2.7) on obtient :

$$
\begin{aligned}
J(u^*) - J(u) \geq \mathbb{E}^x &\left[\int_0^T \left\{\mathbb{H}(t, X^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t), r^*(t,\cdot))\right.\right. \\
&- \mathbb{H}(t, X(t), u(t), p^*(t), q^*(t), r^*(t,\cdot)) \\
&- \left.\left.(X^*(T) - X(T))^\top \nabla_x \mathbb{H}(t, X^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t), r^*(t,\cdot))\right\} dt\right].
\end{aligned}
$$

Si (2.5) est vérifié, alors $J(u^*) - J(u) \geq 0$, et u^* est un contrôle optimal. ■

Chapitre §.3
Application en finance

Chapitre 3

Application en finance

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats obtenus dans le chapitre précédent au modèle financier pour résoudre le problème d'investissement optimal. (Voir le livre de Sulem & Oksendal [3]).

On considère un marché financier avec deux possibilités d'investissement, un actif sans risque $S_0(t)$ (par exemple une obligation ou un compte bancaire) et un actif risqué $S_1(t)$ (par exemple une action), au temps $t \in [0, T]$ sont donnés par :

$$\text{(bond) } dS_0(t) = \rho_t S_0(t)dt; \quad S_0(0) = 1 \tag{3.1}$$

$$\text{(stock) } dS_1(t) = S_1(t_-)\left[\mu_t dt + \sigma_t dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\widetilde{N}(dt,dz)\right], \quad S_1(0) > 0, \tag{3.2}$$

où $\rho_t > 0$, μ_t, σ_t, et $\gamma(t,z) \geq -1$, sont des fonctions bornées déterministes donnés.

On suppose que la fonction

$$t \to \int_{\mathbb{R}} \gamma^2(t,z)\upsilon(dz) \text{ est localement bornée .} \tag{3.3}$$

On peut considérer ce marché comme une extension de diffusion de saut du marché classique de Black-Scholes. Un portefeuille sur ce marché est un prosessus càdlàg bidimensionnel, $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$ indiquant le nombre d'unités d'obligations et d'actions, respectivement, il est tenu par un agent.

Le processus de richesse correspondant $X(t) = X^{\theta}(t)$ est défini par :

$$X(t) = \theta_0(t)S_0(t) + \theta_1(t)S_1(t); \quad t \in [0, T]. \tag{3.4}$$

Le portefeuille θ est appelé autofinancement si :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \theta_0(s)S_0(s) + \int_0^t \theta_1(s)S_1(s), \tag{3.5}$$

ou de forme différentielle

$$dX(t) = \theta_0(t)dS_0(t) + \theta_1(t)dS_1(t). \tag{3.6}$$

Le portefeuille peut également être exprimé en matière de montants $w_0(t)$, $w_1(t)$ investis dans l'obligation et l'action, respectivement. Ils sont donnés par :

$$w_i(t) = \theta_i(t)S_i(t), \quad i = 0, 1. \tag{3.7}$$

On pose :

$$u(t) = w_1(t). \tag{3.8}$$

Alors

$$w_0(t) = X(t) - u(t),$$

et (3.6) devienne :

$$dX(t) = [\rho_t X(t) + (\mu_t - \rho_t)u(t)]dt + \sigma_t u(t)dB(t) + u(t_-)\int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\widetilde{N}(dt, dz). \tag{3.9}$$

On appelle $u(t)$ admissible ($u(t) \in \mathcal{A}$), si (3.9) admet une solution unique $X(t) = X^{(u)}(t)$ de sorte que $\mathbb{E}[(X^{(u)}(T))^2] < \infty$.

Le problème de sélection de portefeuille moyenne-variance est de trouver $u(t)$ qui minimise

$$Var\,[X(T)] := \mathbb{E}\,[(X(T) - \mathbb{E}\,[X(T)]]^2], \tag{3.10}$$

à condition que

$$\mathbb{E}\,[X(T)] = A. \text{ une constante donnée.} \tag{3.11}$$

Par la méthode de multiplicateur de Lagrange le problème peut être réduite à minimiser, pour une constante donnée $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[(X(T) - a)^2],$$

sans contrainte.

Pour le voir, considérons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(X(T) - A)^2 - \lambda([X(T)] - A)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X^2(T) - 2(A + \frac{\lambda}{2})X(T) + A^2 + \lambda A\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X(T) - (A + \frac{\lambda}{2}))^2\right] + \frac{\lambda^2}{4}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est un constant.}
\end{aligned}$$

On concidère le problème équivalent

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}(X^{(u)}(T) - a)^2\right]. \tag{3.12}$$

Dans ce cas, l'Hamiltonian (2.2) est de la forme :

$$\mathbb{H}(t, x, u, p, q, r) = \{\rho_t x + (\mu_t - \rho_t)u\}p + \sigma_t u q + u \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z) r(t, z) \upsilon(dz).$$

Par conséquent, les équations d'adjoint (3.4) devienne :

$$\begin{cases} dp(t) = -\rho_t dt + q(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}^n} r(t_-, z)\widetilde{N}(dt, dz); & t < T. \\ p(T) = -(X(T) - a). \end{cases} \tag{3.13}$$

Maintenant, nous essayons une solution de la forme :

$$p(t) = \phi_t X(t) + \psi_t, \tag{3.14}$$

où ϕ_t, ψ_t sont des fonctions déterministes de classe $\mathcal{C}^1$. Remplacer (3.14) dans (3.13) et utiliser (3.9) nous obtenons :

$$\begin{aligned} dp(t) &= \phi_t \left[\{\rho_t X(t) + (\mu_t - \rho_t)u(t)\}dt + \sigma_t u(t)dB(t) \right. \\ &\quad \left. + u(t_-)\int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\widetilde{N}(dt, dz)\right] + X(t)\phi_t^{'}dt + \psi_t^{'}dt \\ &= [\phi_t\rho_t X(t) + \phi_t(\mu_t - \rho_t)u(t) + X(t)\phi_t^{'} + \psi_t^{'}]dt \\ &\quad + \phi_t\sigma_t u(t)dB(t) + \phi_t u(t^-)\int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\widetilde{N}(dt, dz). \end{aligned} \tag{3.15}$$

En comparant avec (3.13) nous obtenons :

$$\phi_t\rho_t X(t) + \phi_t(\rho_t - \mu_t)u(t) + X(t)\phi_t^{'} + \psi_t^{'} = -\rho_t(\phi_t X(t) + \psi_t) \tag{3.16}$$

$$q(t) = \phi_t\sigma_t u(t). \tag{3.17}$$

$$r(t, z) = \phi_t u(t)\gamma(t, z). \tag{3.18}$$

Soit $\widehat{u} \in \mathcal{A}$ être un candidat pour le contrôle optimal correspondant à $\widehat{X}$, $\widehat{p}$, $\widehat{q}$ et $\widehat{r}$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(t, \widehat{X}(t), u, \widehat{p}(t), \widehat{q}(t), \widehat{r}(t, \cdot)) = \rho_t\widehat{X}(t)\widehat{p}(t) + u\left[(\rho_t - \mu_t)\widehat{p}(t) + \sigma_t\widehat{q}(t)\right. . \\ \left. + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\widehat{r}(t, z)\upsilon(dz)\right]. \end{aligned}$$

Comme il s'agit d'une expression linéaire en u, il est naturel de deviner que le coefficient de u disparaît, c.-à-d :

$$(\rho_t - \mu_t)\widehat{p}(t) + \sigma_t \widehat{q}(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z) r(t,z) \upsilon(dz) = 0. \tag{3.19}$$

Par (3.17) et (3.18) nous avons :

$$\begin{aligned} \widehat{q}(t) &= \phi_t \sigma_t \widehat{u}(t), \\ \widehat{r}(t,z) &= \phi_t \widehat{u}(t) \gamma(t,z). \end{aligned}$$

D'après (3.19), on a :

$$\widehat{u}(t) = \frac{(\rho_t - \mu_t)\widehat{p}(t)}{\phi_t \Lambda_t} = \frac{(\rho_t - \mu_t)(\phi_t \widehat{X}(t) + \psi_t)}{\phi_t \Lambda_t} \tag{3.20}$$

où

$$\Lambda_t = \sigma_t^2 + \int_{\mathbb{R}} \gamma^2(t,z) \upsilon(dz). \tag{3.21}$$

D'autre part, par (3.16) nous avons :

$$\widehat{u}(t) = \frac{(\phi_t \rho_t + \phi_t^{'})\widehat{X}(t) + \rho_t(\phi_t \widehat{X}(t) + \psi_t) + \psi_t^{'}}{\phi_t(\rho_t - \mu_t)}. \tag{3.22}$$

En combinant (3.20) et (3.22) nous obtenons les équations :

$$\begin{aligned} (\rho_t - \mu_t)^2 \phi_t - [2\rho_t \phi_t + \phi_t^{'}]\Lambda_t = 0; &\qquad \phi(T) = -1, \\ (\rho_t - \mu_t)^2 \psi_t - [2\rho_t \psi_t + \psi_t^{'}]\Lambda_t = 0; &\qquad \psi(T) = a. \end{aligned}$$

avec les solutions

$$\phi_t = -\exp\left(\int_t^T \left\{ \frac{(\rho_s - \mu_s)^2}{\Lambda_s} - 2\rho_s \right\} ds\right); \qquad 0 \le t \le T, \tag{3.23}$$

$$\psi_t = a \exp\left(\int_t^T \left\{ \frac{(\rho_s - \mu_s)^2}{\Lambda_s} - \rho_s \right\} ds\right); \qquad 0 \le t \le T. \tag{3.24}$$

Avec ce choix de ϕ_t et ψ_t les processus

$$\begin{aligned} \widehat{p}(t) &:= \phi_t \widehat{X}(t) + \psi_t, \\ \widehat{q}(t) &:= \sigma_t \sigma_t \widehat{u}(t), \\ \widehat{r}(t,z) &:= \phi_t \widehat{u}(t) \gamma(t,z), \end{aligned}$$

sont des solutions de l'équation adjointe, et par (3.19) nous voyons que toutes les conditions suffisantes du principe du maximum (Théorème (2.2.1)) sont satisfaits. Nous concluons que $\widehat{u}(t)$ donné par (3.20) est un contrôle optimal de forme feedback. Finalement, le contrôle peut être écrit

$$\widehat{u}(t,x) = \frac{(\rho_t - \mu_t)(\phi_t x + \psi_t)}{\phi_t \Lambda_t}. \tag{3.25}$$

Conclusion

Dans ce travail, un problème de controle optimal stochastique pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles avec sauts et des coefficients controllés a été discuté. Des conditions suffisantes d'optimalité ont été prouvées par des techniques de perturbation convexe. À titre d'illustration, en utilisant ces résultats pour résoudre un problème de sélection de portefeuille moyenne-variance

Bibliographie

[1] Breton, J.C. : Processus stochastique. Université de Rennes1 (2013).

[2] Framstad, N.C., Øksendal, B., Sulem, A. : Sufficient stochastic maximum principle for the optimal control of jump diffusions and applications to finance. Journal of Optimization Theory and Applications 121(1), 77-98 (2004).

[3] Øksendal, B., Sulem, A. : Applied stochastic control of jump diffusions. Springer Science & Business Media, (2007).

[4] Jeanblanc, M. : Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc (2006).

[5] Gallardo, Léonard. Mouvement brownien et calcul d'Itô : cours et exercices corrigés. Hermann,(2008).

[6] Yong, Jiongmin, and Xun Yu Zhou. Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations. Vol. 43. Springer Science & Business Media, (1999).