République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des sciences exactes et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

Master en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Bahlali Dounia

Titre

Principe du maximum dans un domaine convexe

Membres du jurés :

Dr.	**Boulakhras Gherbal**	U.Biskra	**Président**
Pr.	**Mokhtar Hafayed**	U.Biskra	**Encadreur**
Dr.	***Berouis Nassima***	U.Biskra	**Examinateur**

Septembre 2020

Didicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes trés chers parents

Qui veillent sans cesse sur moi avec leurs priéres et leurs recommandations.

Que Dieu le tout

puissant les protège et leur réserve une longue et meilleure vie

Mes trés chéres soeurs

Mon trés cher frére

Toute ma famille

Mes chéres amies

Mes collègues de la promotion sans exception.

Dounia

Remerciements

Toutes les louanges à Allah

Qu'Allah tout-puissant m'accorde les bénédictions qui sont innombrables graçe à sa graçe et sa miséricorde, et par commandement, facilite cette recherche scientifique. Je ne peux m'exprimer en quelques mots sur sa graçe. Enfin la premiére et derniére louange d'Allah.

Je tient à remercier mon encadreur, le ***Pr. HAFAYED Mokhtar*** *pour sa confiance et les*

encouragement pour continuer mes études.

Mes remerciements les plus distingués sont adressés aux membres du Jury

Dr.GHERBAL Boulakhras *et* ***Dr.Berouis Nassima*** *qui*

m'ont fait l'honneur de bien vouloir accepter d'évaluer ce madeste travail.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciments à tout mes proches et amis, qui nous ont toujours encouragés au cours de la réalisations de ce mémoire.

Table des matières

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Quelques éléments sur le calcul stochastique **3**

1.1 **Processus stochastique** 3

1.2 **Filtration** 4

1.3 **Espérance** 6

1.4 **Espérance conditionnelle** 7

1.5 **Martingale** 8

1.6 Mouvement Brownien 10

1.6.1 L'intégrale stochastique et les EDSs 11

1.7 Processus d'Itô 12

1.8 Formule d'Itô 13

1.9 **Quelques inégalités utilisables** 15

2 Equations différentielles stochastiques **18**

2.1 **Existence et Unicité** 20

3 Principe du maximum dans un domaine convexe **28**

3.1 **Formulation du problème** 29

3.2 **Conditions sur les coefficients** 30

3.3 **Convergence des trajectoires perturbées** 32

3.4 **Principe du maximum de Bensoussan** 36

3.4.1 **Equation adjointe** 37

Conclusion **39**

Bibliographie **41**

Annexe B : Abréviations et Notations **42**

Résumé

Ce travail est porte essentiellement sur les problèmes de contrôle optimal stochastique. On s'intéresse par un problème de contrôle optimal stochastique pour des systèmes stochastiques gouvernés par des équations différentielles stochastiques (EDSs). Ce problème est consiste à minimiser une certaine fonction de coût de la forme :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(s, X(s), u(s))ds + h(X(T))\right],$$

où $X(t)$ est une solution d'une équation différentielle stochastique nonlinéaire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW(t) \\ \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Plus précisement, notre objectif est d'établir des conditions nécéssaires d'optimalité sous forme d'un principe du maximum stochastique de Pontryagin. Ce résultat de principe du maximum a été introduit par ("A. Bensousan. (1982). Lecture on stochastic control, Lecture Note in Mathematics, 972, 1-62.")" [1].

Mots-clés : *Equations differentielles stochastiques, Contrôle optimal stochastique, Processus stochastique, Domaine convexe. Principe de maximum stochastique de Bensoussan.*

Introduction générale

Introduction

Notre objectif dans ce travail est d'obtenir un principe du maximum stochastique dans le cas où les coefficients sont contrôllées. Le domaine de contrôle est supposé convexe. Une méthode variationnelle est utilisée pour résoudre notre problème de contrôle.

Nous présentons dans ce travail trois chapitres, les deux premiers chapitres sont introductifs et permettent d'introduire les outils essentiels pour le troisième chapitre, ces resultats de dernier chapitre ont été introduit par : ("A. Bensousan. (1982). Lecture on stochastic control, Lecture Note in Mathematics, 972, 1-62.").

Plus précisement, dans le premier chapitre, on s'intéresse aux éléments de calcul stochastique, recement : processus stochastiques, filtations, formule d'Itô, espérance conditionnelle, ...etc.

Dans le deuxième chapitre on s'interrésse aux équations différentielles stochastiques classiques, nous allons énoncer les conditions où un EDS admet une solution (existence) et cette solution est unique, pour prouver ça on va utiliser la méthode itérative de Picard,on va utiliser des lemme comme Growwall, Burkholder-Davis-Gundy, point fixe, Doop...etc.

Dans le troisiéme chapitre, on a établir des conditions necessaires d'optimalité pour des systèmes gouvernés par des équations différentiélles stochastiques. Ces resultats a été prouvé par ("A. Bensousan. (1982). Lecture on stochastic control, Lecture Note in Mathematics, 972, 1-62.") [1].

Chapitre §1. Quelques éléments sur le calcul stochastique

Chapitre 1

Quelques éléments sur le calcul stochastique

Le but de ce chapitre est consacré aux définitions de base et des résultats principaux au calcul stochastique, on va rappeller premièrement les notions essentielles en théorie des calculs stochastiques, puis on va intéresser au calcul d'Itô qui est la base des équations différentielles stochastiques. Il y a des nombreux livres détaillant la théorie classique exposée dans ce chapitre, voir le livre de Yong & Zhou 1999, [6] et le document de Jeanblanc 2005. [4] et Pham 2005 [3].

1.1 Processus stochastique

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et (E, ξ) un espace mesurable où :

Ω : un ensemble (univers des resultats possibles).

$\mathcal{F}$: une tribu de parties.

$\mathbb{P}$: une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

(E, ξ) : espace mesurable appellé l'espace d'état.

Remarque 1.1.1 *Dans l'espace d'état en générale on prend* $(E, \xi) = (\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$ *où* $B(\mathbb{R}^d)$ *s'appelle tribu borélienne.*

Définition 1.1.1 (tribu) *Une tribu est une famille de parties de* Ω*, contenant l'ensemble* *vide, stable par passage au complémentaire, union et intersection dénombrable .*

Définition 1.1.2 (tribu borélienne de $\mathbb{R}$) *C'est la plus petite tribu contenant tout les intervalles de $\mathbb{R}$, on la note $B(\mathbb{R})$.*

Définition 1.1.3 (tribu engendrée) *La tribu engendrée par une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'ensemble :*

$$\sigma(X) = \left\{X^{-1}(A) : A \in \xi\right\},$$

où :

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\},$$

c'est la plus petite tribu de Ω rendant X mesurable.

Définition 1.1.4 (Mesure de probabilité) *Une mesure de probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega; \mathcal{F})$:*

$$\mathbb{P}(\Omega, \mathcal{F}) :\longrightarrow [0,1]$$

est une application satisfaite les conditions suivantes :

i $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

ii Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}, \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$sont deux à deux disjoints (c'est à dire $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$) alors

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i).$$

1.2 Filtration

Définition 1.2.1 ***(Filtration)*** *: Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ $\forall s \leq t$.*

- L'espace $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ s'appelle espace probabilisé filtré.
- On appelle la filtration naturelle (ou canonique) d'un processus stochastique X, $\mathcal{F}_t^x = \sigma(X(s), 0 \leq s \leq t)$; la plus petite $\sigma-$*algébre* par rapport à la quelle $X(s)$ est mesurable pour tout $0 \leq s \leq t$

- Une filtration est $\mathbb{P}$-complète pour une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si $\mathcal{F}_0$ contient tous les évènements de mesure nulle (négligeable), i.e : $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.
- On dit qu'un espace filtré vérifie les conditions habituelles (usuelles) si :
  1. L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complet.
  2. La filtration est complété et continue à droite i.e $\mathcal{F}_t = \cap_{t \leq s} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{t^+}$ $\forall t$.

Définition 1.2.2 (Processus stochastique) *[6] Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t; indexées par un ensemble T ; on considère que le processus est indexé par le temps t.*

1. Si T est un ensemble dénombrable on dit que le processus X est une suite de variable aléatoires ou un processus à temps discret.
2. Si $T = \mathbb{R}_+$, on dit que le processus X est à temps continu.

- Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

Définition 1.2.3 (processus mesurable) *[6] Un processus X est mesurable si, l'application $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $B(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}$ et B ($\mathbb{R}^d$).*

Définition 1.2.4 (processus adapté) *[6] Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, si pour tout $t \geq 0$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Définition 1.2.5 (processus continu) *[6] Un processus X est continu ou à trajectoire continues si les applications $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.2.6 (processus càdlàg) *[6] Un processus est dit càdlàg (continu à droite limites à gauche)si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche ; même pour càglàd.*

Définition 1.2.7 (processus croissant) *[6] Un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est dit croissant si $X_0 = 0$ et $t \to X_t$ est une fonction croissante c'est à dire $X_t(\omega) \leq X_s(\omega)$ $\forall t \leq s$ p.s*

Définition 1.2.8 (processus progressivement mesurable) *[6] Un processus X est dit progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, si pour tout $t \geq 0$, l'application $(s,\omega) \to X_t(\omega)$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $B([0,t])) \otimes \mathcal{F}_t$ et $B(\mathbb{R}^d)$*

Remarque 1.2.1 *[4] Un processus stochastique progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Un processus stochastique adapté telque les trajectoires sont continues à gauche (vu à droite) est progressivement mesurable.

Définition 1.2.9 (égalité en loi, équivalence, indistinguabilité) *[6] Soient $X = (X_t)_{t\in T}$ et $Y = (Y_t)_{t\in T}$ deux processus définis sur le même espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$ il sont dits :*

1. Stochastiquement équivalent au sens large (ou égaux en loi) si pour tous $(t_1, ..., t_n) \in T^n$ et $(B_1, ..., B_n) \in B(\mathbb{R}^d)^n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_n) = \mathbb{P}(Y_{t_1} \in B_1, ..., Y_{t_n} \in B_n)$$

2. Stochastiquement équivalents si, $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1,\ \forall t \in T$ dans ce cas le processus Y est appelé modification de X .
3. Deux variables X et Y sont indistinguables si $\mathbb{P}.p.s$ les trajectoires de X et Y sont les mêmes i.e :

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t), \forall t \in T\ ) = 1$$

Remarque 1.2.2 *Cette derniére définition est la plus forte et implique les deux autres i.e :3)⇒2)⇒1)*

1.3 Espérance

Pour une variable aléatoire $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espérance dans le vocabulaire probabiliste est l'intégrale de X par rapport à $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$$

Pour une $v.a$ positive, $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

1.4 Espérance conditionnelle

Définition 1.4.1 (Espérance conditionnelle) *[4] Soit X une variable aléatoire de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans (E, ξ), soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$; on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ et on note : $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ la variable aléatoire Y :*

1. $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
2. $\forall B \in \mathcal{G}; \int_B X d\mathbb{P} = \int_B Y d\mathbb{P}$, cette définition s'écrit également : $\forall A \in \mathcal{G}$; $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A X] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y]$.

Définition 1.4.2 (Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire) *on définit l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X (intégrable) par rapport une autre variable Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$: "la plus petite tribu engendré par Y ", l'espérance conditionnelle est $\mathbb{E}[X \mid Y]$ caractérisé par : c'est une variable aléatoire $\sigma(Y)$-mesurable telle que :*

$$\int_B \mathbb{E}[X \mid Y] \, d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}; \ \forall B \in \sigma(Y)$$

1. **Linéarité** : Soit a et b deux constantes :

$$\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$$

2. **Croissance** : Soient X et Y deux v.a telles que $X \leq Y$ alors :

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$$

3. **Positivité :** Si $X \geq 0$; alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \geq 0$.

4. Si X est $\mathcal{G}-$mesurable : $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = X$.

5. Si Y est $\mathcal{G}-$mesurable : $\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.

6. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.

7. Si X est indépendante de$\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

8. Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ alors :

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}]$$

9. **Théoréme (convergence monotone conditionnelle)** [4] Si $(X_n(t))_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires croissantes positives (i.e, $X_n(t) \leq X_{n+1}(t)$) et si $\lim_{n\to+\infty} X_n(t) = X(t)$, $X \in L^1$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n(t) \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

10. **Théoréme(convergence dominée conditionnelle ou théoréme de Lebesgue)**[4] **:**Si $(X_n(t))_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que : $|X_n(t)| < Y$; où $Y \in L^1$ et si $\lim_{n\to+\infty} X_n(t) = X(t)$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n(t) \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$$

11. **Théoréme(Lemme de Fatou conditionnelle) :**[4] Si on a $(X_n(t))_{n\geq 0}$une suite de variables aléatoires positive $(p.s)$ alors :

$$\mathbb{E}\left[\lim_{n\to+\infty}\inf\ X_n(t) \mid \mathcal{G}\right] \leq \lim_{n\to+\infty}\inf \mathbb{E}[X_n(t) \mid \mathcal{G}]$$

1.5 Martingale

Définition 1.5.1 ***(Martingale) :****[4] Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté par rapport une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t \in L^1$ est appelé :*

- Une martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$.
- Une sur-martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$.

- Une sous-martingale si pour $s \leq t$: $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$.

Proposition 1.5.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale (resp.une sous-martingale) et soit φ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp convexe croissante). On suppose que $\varphi(X_t) \in \mathbb{L}^1$ pour tout $t \geq 0$ alors, $(\varphi(X_t))_{t\geq 0}$ est une sous-martingale.*

Proposition 1.5.2 *Soit X une martingale locale continue, il existe un unique processus croissant, $\langle X, X\rangle$, nul en 0 tel que $X^2 - \langle X, X\rangle$ soit une martingale locale.*

Propriétés 1.5.1

1. Si pour tout temps d'arrêt borné $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$, alors le processus X est une martingale.
2. Si $(X(t),\, t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale $X(t) = \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_t]$. Cette dernière propriété est d'un usage trés fréquent en finance.

Définition 1.5.2 *[4] On définit la variation infinitésimale d'ordre p d'un processus $(X(t))_{t\in[0,T]}$ sur $[0,T]$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ de $[0,T]$ par la quantité*

$$V_T^p(\Pi_n) := \sum_{i=1}^{n} \left| X(t_i^n) - X(t_{i-1}^n) \right|^p$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ a une limite dans un certain sens (convergence $\mathbb{L}^p$, convergence $p.s$) lorsque

$$\Pi_n = \|\Pi_n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \to 0$$

la limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons variation d'ordre p de X sur $[0,T]$

Si $p = 1$, la limite s'appellera variation totale.

Si $p = 2$, la limite s'appellera variation quadratique.

– Un processus $(X(t))_{t\geq 0}$ est dit à variation bornée sur $[0,t]$ si :

$$\sup_{t_i} \sum_i \left| X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n) \right| < K$$

– Un processus $(X(t))_{t\geq 0}$ est dit à variation fini $[0,t]$ si :

$$\sup_{t_i}\sum_i \left|X(t_{i+1}^n)-X(t_i^n)\right|<\infty$$

Remarque 1.5.1 *[4]*

$$\mathbb{L}^2([0,T]\times\Omega)=\left\{\begin{array}{c}(X(t))_{t\in[0,T]}\textit{processus stochastique } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \textit{ adapté}\\ \textit{càglàd, telle que } \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T X^2(t)dt\right]<+\infty.\end{array}\right\}$$

1.6 Mouvement Brownien

Définition 1.6.1 (Mouvement Brownien) *[4] Un processus $(W(t),\ t\geq 0)$ est un mouvement Brownien (standard) si :*

1 $\mathbb{P}(W(0)=0)=1;$

2 $t\rightarrow W_t(w)$ est continue.$\mathbb{P}-p.s$

3 $\forall s\leq t$, $W(t)-W(s)$ est une variable réelle de loi gaussienne, centré de variance $(t-s)$ i.e $W(t)-W(s)\sim\mathcal{N}(0,t-s)$.

4 $\forall n$, $\forall\ 0\leq t_0\leq t_1\leq ...\leq t_n$, les variables $(W(t_n)-W(t_{n-1}),...,W(t_1)-W(t_0),\ W(t_0))$ sont indépendantes.

Définition 1.6.2 (un mouvement Brownien d-dimensionnele) *un mouvement Brownien d-dimensionnele est un processus $(W(t),t\geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que si on note : $W(t)=\left(W(t)^{(1)},...,W(t)^{(d)}\right)$, les processus $W^{(k)}$, $1\leq k\leq d$, sont des mouvements Browniens standards indépendants à valeurs réelles .*

Proposition 1.6.1 *Soit W un MB standard :*

- *Pour tout $s\geq 0$, $\{W(t-s)-W(s)\}_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{W(u),u\leq s\}$.*
- *$-W$ est aussi un MB.*
- *Pour tout $c>0$, $\{cW(t/c^2)\}_{t\geq 0}$ est un MB.*
- *Le processus défini par $W(0)=0$, $W(t)=tW(\frac{1}{t})$ est un MB.*

Corollaire 1.6.1 *Soit W un MB continu. Alors, presque sûrement, pour tous $0\leq s\leq t$, les trajectoires de W ne sont pas à variation bornée sur $[s,t]$; c'est à* *dire presque sûrement les trajectoires de MB ne sont pas différentiables en aucun point.*

Proposition 1.6.2 *[4] La variation quadratique d'un MB sur* $[0, t]$ *existe dans* $\mathbb{L}^2$ *est vaut* T *; i.e* $\langle W, W \rangle = T$.

Propriétés 1.6.1 ***(MB et martingale)[4] :*** *Si* $(W(t),\, t \geq 0)$ *est un* MB *standard alors*

1. $W(t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.
2. $W(t)^2 - t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.
3. $exp(\alpha W(t) - \frac{\alpha^2}{2} t)$ est $\mathcal{F}_t-$martingale

1.6.1 L'intégrale stochastique et les EDSs

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un mouvement Brownien W sur cet espace, on désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien. Dans cette section, T est un réel positif

Définition 1.6.3 (Intégrale stochastique) *[4] Il s'agit d'une intégrale de la forme*

$$\int_0^t X(s) dW(s) \tag{1.1}$$

Où $(W(t))_{t \geq 0}$ *est un mouvement Brownien, et* $(X(t))_{t\,\geq\,0}$ *un processus stochastique répondant à certains critéres d'intégrabilité. Le problème de donner un sens à l'élément différentiel* $dW(s)$ *puisque la fonction* $s \longmapsto W(s)$ *n'est pas dérivable.*

Définition 1.6.4 (Intégrale de wiener) *: L'intégrale de Wiener est une intégrale du type 1.1 avec* X *une fonction déterministe, c'est à dire ne dépendant pas de* w.

Propriétés 1.6.2 (Intégrale stochastique) *[4] L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :*

1. $X \to \int_0^t X(s) dW(s)$ est linéaire.

2. $t \to \int_0^t X(s)dW(s)$ est continu $p.s.$

3. $(\int_0^t X(s)dW(s))_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t - adapt\acute{e}$.

4. $\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)dW(s)\right] = 0$ et $var(\int_0^t X(s)dW(s)) = \mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)^2 ds\right]$.

5. De maniére plus générale, on a : $\mathbb{E}\left[\int\limits_s^t X(u)dW(r) \mid \mathcal{F}_s\right] = 0$ et

$$\mathbb{E}\left[(\int\limits_s^t X(r)dW(r))^2 \mid \mathcal{F}_s)\right] = \mathbb{E}\left[\int\limits_s^t X(r)^2 dr \mid \mathcal{F}_s\right]$$

6. On a même le résultat plus général

$$\mathbb{E}\left[(\int\limits_s^t X(r)dW(r))(\int\limits_s^u Y(r)dW(r)) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int\limits_s^{t\wedge u} X(r)Y(r)dr\right]$$

7. $(\int_0^t X(r)dW(s))_{0\leq t\leq T}$ $\mathcal{F}$-martingale.

8. Le processus $\left(\int_0^t X(s)dW(s))^2 - \int_0^t X(s)^2 ds\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathcal{F}$-martingale.

9. La variation quadratique de l'intégrale stochastique donné par :

$$\left\langle \int_0^t X(s)dW(s) \right\rangle = \int_0^t X(s)^2 ds$$

10. La covariance quadratique entre deux intégrales stochastiques est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t X(s)dW(s), \int\limits_0^u Y(s)dW(s) \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} X(s)Y(s)ds$$

1.7 Processus d'Itô

Définition 1.7.1 (Processus d'Itô) *[4] toujours on est en espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on appelle processus d'Itô un processus X à valeurs reélles de la forme :*

$$\mathbb{P}\text{-}p.s \quad , \ \forall 0 \leq t \leq T \quad , \ X(t) = X(0) + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s), \tag{1.2}$$

Où :

1 $X_0 - \mathcal{F}_0$mesurable.

2 $(b(t))_{t\in[0,T]}$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté tel que $\forall 0 \leq t, \int_0^t |b(s)|\, ds < \infty, \mathbb{P}-p.s$

3 σ est un "**bon processus local** " c'est à dire *càglàd*, $\mathcal{F}_t-$*adapté*,$\int_0^t |\sigma(s)|^2\, ds < \infty\ \forall 0 \leq t$

On peut réecrira encore la relation 1.2 sous la forme différentielle équivalente :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

Le coefficient b est la dérivée(ou le drift) du processus et σ son coefficient de diffusion ou votalité.

1.8 Formule d'Itô

Dans ce qui suit, X est un processus d'Itô de décomposition :

$$dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

Théoréme 1.8.1 (Premiére formule d'Itô) *[4]Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathbb{C}^2$ à dérivées bornées Alors :*

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\sigma(s)^2 ds \tag{1.4}$$

et sous forme condensée :

$$df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\ f''(X(t))\sigma(t)^2 dt$$

Ou encore

$$\begin{aligned} df(X(t)) &= f'(X(t))b(t)dt + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma(t)^2 dt + f'(X(t))\sigma(t)dW(t) \\ &= f'(X(t))b(t)dt + \frac{1}{2}f''(X(t))d < X >_t + f'(X(t))\sigma(t)dW(t) \end{aligned}$$

Où

$$dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

et

$$d\langle X\rangle_t = dX(t) \times dX(t) = \sigma(t)^2 dt;$$

Théoréme 1.8.2 (Deuxiéme formule d'Itô) *[4]Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$par rapport à t, et de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à X, à dérivées bornées on a :*

$$f(t, X(t)) = f(0, X(0)) + \int_0^t f'_t(s, X(s))ds + \int_0^t f'_x(s, X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X(s))\sigma(s)^2 ds \tag{1.5}$$

Où :

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= \left[f'_t(t, X(t)) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X(t))\sigma(t)^2\right] dt + f'_x(t, X(t))dX(t) \\ &= f'_t(t, X(t))dt + f'_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X(t))d\langle X\rangle_t \\ &= [f'_t(t, X(t)) + f'_x(t, X(t))b_t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X(t))\sigma_t^2]dt + f'_x(t, X(t))\sigma(t)dW(t) \end{aligned}$$

Remarque 1.8.1 *La propriété remarquable d'un processus d'Itô, c'est qu'il reste un processus d'Itô lorsqu'on le transforme par une application deterministe suffisament "lisse".*

Proposition 1.8.1 (Intégration par parties) *[4]La formule d'Itô montre que :*

$$d[X_1 X_2](t) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties. La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au au crochet de X_1, X_2 noté $< X_1,\ X_2 >$ est défini comme le procssus à variation fini

$$\langle X_1, X_2\rangle = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds$$

Exemple 1.8.1 (application se formule d'Itô) *Soit :*

$$dX(t) = X(t)dW(t);\ X_0 = 0$$

et

$$f(x) = \ln(x)$$

On a donc :

$$f_t(X(t)) = 0,\ f_x(X(t)) = \frac{1}{X(t)},\ f_{xx}(X(t)) = -\frac{1}{X^2(t)},\ d < X(t) >= dt.$$

La formule d'itô s'applique :

$$\begin{aligned}
\ln(X(t)) &= \ln(X(0)) + \int_0^t 0ds + \int_0^t \frac{1}{X(s)}X(s)dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{X(s)^2}ds \\
d(\ln(X(t))) &= [0 + 0 + \frac{1}{2}X^2(t)(-\frac{1}{X^2(t)})dt + X(t)\frac{1}{X(t)}dW(t)] \\
&= -\frac{1}{2}dt + dW(t).
\end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$X(t) = x(0)\exp(-\frac{1}{2}t + W(t))$$

1.9 Quelques inégalités utilisables

Théoréme 1.9.1 (Inégalité de Doop) *: Si M est une martingale continu alors :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T} X(s)^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[X(T)^2\right]$$

Lemme 1.9.1 (Lémme de Gronwall) *: Soit $T > 0$ et soit g une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle $[0,T]$. Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0,T]$,*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds$$

Alors, on a pour tout $t \in [0,T]$

$$g(t) \leq \exp a(bt).$$

Théoréme 1.9.2 (Inégalité de Hölder) *: Soient $p, q \in [1, +\infty[$ des exposants conju-*

gués i.e $\frac{1}{P}+\frac{1}{q}=1$*.pour* f, g *mesurables* f, g *sont des applications mesurables, alors*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

En particulier, l'inégalité Hölder (dans le cas $p=2$*) donne* ***l'inégalité de Cauchy Schwarz :***

$$|(f \mid g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

De cette inégalité on obtient

$$\mathbb{E}\left[|f.g|\right] \leq \left[\mathbb{E}\left[|f|^2\right]^{\frac{1}{2}}.\mathbb{E}\left[|g|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right]$$

Théoréme 1.9.3 ***(Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy "BDG")*** *: Pour tout* $p>0$*, il existe des constantes positives* c_p *et* C_p *telles que, pour toute martingale locale continue* $X=(X(t))_{t\geq 0}$*, nul en* 0 *:*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X,X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|X(t)|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle X,X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 1.9.1 *: En particulier, si* $T\geq 0$

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X,X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle X,X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Chapitre §.2

Equations différentielles stochastiques EDSs

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques

Ce chapitre va consacrer aux équations différentielles stochastiques classiques, nous allons énoncer les conditions quand une équation différentielle stochastique possède une solution (existence) et cette solution est unique, pour prouver ça on va utiliser la méthode itérative de Picard on va aussi utiliser des théoremes comme **Growwall**, **point fixe, Doop**...etc dans la démonstration.

Définition 2.0.1 (équation différentielle stochastique) *C'est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = X_0; \end{cases} \tag{2.1}$$

ou sous forme intégrale

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s), \ \forall t \geq 0 \tag{2.2}$$

tel que $\{W(t), t \geq 0; \}$ *est un mouvement Brownien d-dimentionnel, le coefficient* $f(t, X(t))$ *est appelé dérivé et le coefficient* $\sigma(t, X(t))$ *est appelé terme de diffusion. Soient* $m, d \in \mathbb{N}$.

– $X_0 \in \mathbb{R}^m$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable.indépendante de W telle que :

$$\mathbb{E}\left[|X_0|^P\right] < +\infty, \forall p > 1$$

– $(W(t))_{t\ \geq 0}$ est un MB d-dimensionnel.

–

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times d}$$

Deux fonctions boréliennes.

Définition 2.0.2 *On dit un processus* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *est une solution de l'équation* 2.1 *si :*

1. $(X(t))_{t\in[0,T]}$ est continue et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$_adapté.
2. Pour tout $t \in [0,T]$, les intégrales $\int_0^t f(s,X(s))ds$ et $\int_0^t \sigma(s,X(s))dW(s)$ ont un sens où $\mathbb{P}-p.s$

$$\int_0^T |b(s,X(s)|\,ds < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T |\sigma(s,X(s)|^2\,ds < \infty.$$

1. $(X(t))_{t\in[0,T]}$ vérifie 2.1 c'est à dire :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s,X(s))ds + \int_0^t \sigma(s,X(s))dW(s),\ \forall t \geq 0$$

Définition 2.0.3 *On dit que* 2.1 *admet une solution forte unique si pour deux solutions fortes* $X = (X(t))_{t\in[0,T]}$ *et* $Y = (Y(t))_{t\in[0,T]}$ *on a :*

$$\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |X(t) - Y(t)| > 0) = 0$$

C'est à dire

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t), t \in [0,T]) = 1$$

2.1 Existence et Unicité

Nous allons établir le résultat suivant dû à Itô :

Soient f et σ deux fonctions continues vérifient les conditions suivantes 2.3, 2.4 de l'équation (2.1) admet une solution forte unique définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ à trajectoire continue. De plus $\forall T \geq 0$; on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|^P\right] < M, \forall p > 1$$

Où M est une constante.

On suppose qu'il existe une constante K telle que, pour tout $t \in [0,T], x, y \in \mathbb{R}$

1. **Condition de Lipschitz** :

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y| \tag{2.3}$$

2. **Croissance linéaire** :

$$|f(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|) \tag{2.4}$$

3. $\mathbb{E}[\,|X_0|^2] < \infty$;

Théoréme 2.1.1 *Si les coefficients f et σ vérifient les conditions 2.3, 2.4. Alors l'équation* 2.1 *admet une solution forte unique $X = (X(t))_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{F}_t-$adapté et continue avec condition initiale $X(0) = X_0$ de plus cette solution vérifie*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|^P\right] < M,\ \forall p > 1$$

Preuve. On commence par l'unicité, soient $X = (X(t))_{t\in[0,T]}$ et $Y = (Y(t))_{t\in[0,T]}$ deux solutions de (2.1)appliquant l'inégalité

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

Et en utilisant les formules de $X(t)$ et $Y(t)$ on obtient :

$$|X(t)-Y(t)|^2 \leq 2\left|\int_0^t f(s,X(s))-f(s,X(s))ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma(s,X(s))-\sigma(s,X(s))dW(s)\right|^2$$

Passant à l'espérance mathématique on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|X(t)-Y(t)|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f(s,X(s))-f(s,X(s))ds\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(\sigma(s,X(s))-\sigma(s,X(s))\right)dW(s)\right|^2\right]$$

Par l' inégalités de **Cauchy-Schawartz**, **Burlkholder-Davis-Gundy** et **propriété de l'intégrale stochastique** on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|X(t)-Y(t)|^2\right] \leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(s,X(s))-f(s,X(s))|^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s,X(s))-\sigma(s,X(s))|^2 ds)\right]$$

En appliquant la condition de **Lipschiz** on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|X(t)-Y(t)|^2\right] \leq c\int_0^t \mathbb{E}\left[|X(s)-Y(s)|^2\right] ds$$

Où $c = \max(2TK, 2K)$.En appliquant l'inégalité de **Tchébychef** on obtient :

$$\forall\theta > 0; \left(\mathbb{P}\,|X(t)-Y(t)|^2 > \theta\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X(t)-Y(t)|^2\right]}{\theta} = 0$$

Donc pour tout ensemble D dénombrable partout dense dans $[0,T]$ on a :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X(t)-Y(t)|^2 > \theta\right) = 0$$

Enfin le processus $X(t)$ et $Y(t)$ sont continues. On conclut que :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} |X(t)-Y(t)|^2 > \theta\right) = 0$$

Ce qui prouve l'unicité forte de solution.

On montre l'existence d'une solution forte en utilisant la méthode des approximations succesives et pour cela on pose :

$$X^n(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X^{n-1}(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X^{n-1}(s))dW(s) \tag{2.5}$$

On pose

$$X^{n+1}(t) - X^n(t) = \int_0^t \left(f(s, X^n(s)) - f(s, X^{n-1}(s))\right) ds + \int_0^t \left(\sigma(s, X^n(s) - \sigma(s, X^{n-1}(s))\right)dW(s)$$

En utilisant la même téchnique que pour l'unicité, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left|X^{n+1}(t) - X^n(t)\right|^2\right] \leq c \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X^n(t) - X^{n-1}(t)\right|^2\right]$$

Où $c = \max(2TK, 2K)$ d'aprés 2.3 on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|X^1(t) - X^0(t)\right|^2\right] \leq 2cT\left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X^0(t)\right|^2\right]\right)$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X^1(t) - X^0(t)\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f(s, X^0(s))ds\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s, X^0(s))dW(s)\right|^2\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|f(s, X^0(s))\right|^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma(s, X^0(s))\right|^2 ds\right] \\
&\leq 2TK \int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X^0(s)\right|^2\right]\right) ds + 2K \int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X^0(s)\right|^2\right]\right) ds \\
&\leq (2CTK + 2K)(1 + \mathbb{E}\left[\left|X^0(s)\right|^2\right])T \\
&\leq 2cT(1 + \mathbb{E}\left[\left|X^0(s)\right|^2\right])
\end{aligned}$$

Où

$$\mathbb{E}\left[\left|X^1(t) - X^0(t)\right|^2\right] \leq MT$$

tel que $M = 2c(1 + \mathbb{E}\left|X^0(s)\right|^2)$, Par récurrence sur n il résulte que

$$\mathbb{E}\left[\left|X^{n+1}(t) - X^n(t)\right|^2\right] \leq \frac{(MT)^{n+1}}{(n+1)!}$$

et on démontre que

$$\mathbb{E}\left[\left|X^{n+2}(t)-X^{n+1}(t)\right|^2\right] \leq \frac{(MT)^{n+2}}{(n+2)!}$$

Où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|X^{n+2}(t)-X^{n+1}(t)\right|^2\right] &\leq c\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X^{n+1}(t)-X^{n}(t)\right|^2\right] ds \\ &\leq c\int_0^t \frac{(MS)^{n+1}}{(n+1)!}ds = c\frac{(MT)^{n+2}}{(n+2)!}\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X^m(t)-X^n(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}} &= \|X^m(t)-X^n(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\|\sum_{k=n}^{m-1} X^{K+1}(t)-X^K(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left\|X^{K+1}(t)-X^K(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{(MT)^{K+1}}{(K+1)!}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$ on obtient

$$\mathbb{E}\left[|X^m(t)-X^n(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \to 0$$

alors on trouve

$$\mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty}|X^m(t)-X^n(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{2.6}$$

Donc $X^n(t)$ est une suite de cauchy dans $L^2(\Omega)$ est par conséquent elle est convergente dans $\mathbb{L}^2$, notons $X(t)$ sa limite, c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} X^n(t) \to X(t)$$

Notons $X(t)$ sa limite, c'est à dire $\lim\limits_{n\to\infty} X^n(t) \to X(t)$,maintenant, le processus $X^n(t)$

définit par :

$$X^n(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X^{n-1}(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X^{n-1}(s))dW(s)$$

D'aprés l'inégalité 2.6 et le lemme de Fatou on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X(s) - X^n(s)|^2 \, ds\right] \leq \lim_{m\to\infty} \sup \mathbb{E}\left[\int_0^T |X^m(s) - X^n(s)|^2 \, ds\right] \to 0$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\lim_n \int_0^T |X(s) - X^n(s)|^2 \, ds\right] \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \sup \mathbb{E}\left[\int_0^T |X^m(s) - X^n(t)|^2 \, ds\right] \to 0 \end{aligned}$$

En utilisant l'isométrie d'Itô :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s, X^n(s)) - \sigma(s, X(s))dW(s)|^2\right] \\ &\leq c \int_0^t \left(|X^n(s) - X(t)|^2\right) ds \to 0 \end{aligned}$$

Et de plus

$$\int_0^t \sigma(s, X^n(s))dW(s) \to \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$$

On applique l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(s, X^n(s)) - f(s, X(s))ds|^2\right] \\ &\leq cT \int_0^t \left(|X^n(s) - X(t)|^2\right) ds \to 0 \end{aligned}$$

Et par la continuité de $f(t, .)$ on obtient :

$$\int_0^t f(s, X^n(s))ds \underset{n\to\infty}{\to} f(s, X(s))ds$$

En passant à la limite dans 2.6 on obtient :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s),\ \forall t \geq 0$$

Donc $X(t)$ est une solution de l'équation 2.1), montrons que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|^P\right] < M, \forall p > 1$$

par l'inégalité$(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ et on passant aux espérance on a :

$$\mathbb{E}\left[|X(t)|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[|X(0)|^2\right] + 3T\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(s, X(s)|^2 \, ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s, X(s)|^2 \, ds\right]$$

D'aprés la condition de la croissance lineaire :

$$\mathbb{E}\left[|X(t)|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[|X(0)|^2\right] + 3TK\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{E}(1+|X(s)|^2)ds\right] + 3K\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|1+|X(s)|^2\right| ds\right]$$

Posant $M = \max(3, 3TK, 3K)$ et $c = \max(M, 2M)$On obtient

$$\mathbb{E}\left[|X(t)|^2\right] \leq c\left(1 + \mathbb{E}\left[|X(0)|^2\right]\right) + c\int_0^t \mathbb{E}\left[|X(s)|^2\right] ds$$

En appliquant le lemme de Gronwall ; on obtien

$$\mathbb{E}\left[|X(t)|^2\right] \leq c(1 + \mathbb{E}\,|X(0)|^2)\exp(ct), \quad \forall t \in T$$

Puisque $\mathbb{E}\left[|X(0)|^2\right] < \infty$, alors on posont $M = c(1 + \mathbb{E}\left[|X(0)|^2\right]\exp(ct)$. on obtient

$$\mathbb{E}\left[|X(t)|^2\right] \leq M;\ \forall t \in T$$

Ce qui implique

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|^P\right] \leq M;\ \forall p \geq 1$$

D'où le résultat ■

Remarque 2.1.1 *La condition de Lipschizienne 2.3 nous assure l'existence et l'unicité* *de la solution on a :*

$$\begin{cases} dX(t) = 3X(t)^{\frac{2}{3}}dt \\ X(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t \leq a \\ (t-a)^3 \quad \text{si} \quad t > a \end{cases}$$

$b(X(t)) = 3X(t)^{\frac{2}{3}}$n'est pas lipschizienne car la dérivée n'est pas bornée pas dérivable au point $X(0) = 0$.

Remarque 2.1.2 *La condition de croissance 2.4 nous assure l'explosition de la solution et si on n'a pas cette condition l'EDS admettra une solution mais seulement jusqu'au temps d'explosition*

$$\begin{cases} dX(t) = X(t)^2dt \\ X(0) = 1, \end{cases}$$

C'est à dire $b(X(t)) = X(t), \sigma = 0$ sont Lipschitzienne donc il existe une solution unique donné par :

$$X(t) = \frac{1}{1-t}$$

*

Chapitre §.3

Principe du maximum dans un domaine convexe

Chapitre 3

Principe du maximum dans un domaine convexe

Notre objectif dans ce chapitre est étudier et présenter le principe du maximum stochastique établit par Bensoussan dans 1982 ("A. Bensousan. (1982). Lecture on stochastic contrôle, Lecture Note in Mathematics, 972, 1-62."), où le domaine de contrôle est supposé convexe. Cette étude a pour but d'établir des conditions nécessaires d'optimalité. Pour obtenir ces conditions, en utilisant une méthode de perturbation. L'intérêt de la perturbation de contrôle optimal $u^*(\cdot)$ est d'introduire un contrôle $u_\varepsilon(\cdot)$ sur lequel nous pouvons dériver la fonction de coût $J(u_\varepsilon(\cdot))$.

Les caractéristiques du contrôle stochastique : D'une manière générale un problème de contrôle se construit par :

Etat du système : Soit un système dynamique caractérisé par son état à tout instant, le temps peut être continu ou bien discret. L'horizon (l'intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini.

Une fois l'état soit défini, il s'agit de décrire les lois d'évolution de cet état en fonction du temps. L'application $t \rightarrow X(t)$ décrit l'évolution du système.

Contrôle *:* La dynamique $X(t)$ de l'état du système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus u_t dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est à dire que u_t est adapté par rapport à certaine filtration .

Critère de coût *:* L'objectif est de minimiser ou maximiser au cas d'un gain sur les contrôles une fonctionnelle J. qui a deux formes selon le cas déterministe ou stochastique qui l'on va déterminer dans qu'il suit.

3.1 Formulation du problème

Soit T un nombre réel strictement positif fixé et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un éspace de probabilité filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $W(\cdot) = (W(t))_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien définie sur cet espace. Nous supposons que $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle de $W(\cdot)$ augmentée par les ensembles $\mathbb{P}$-nulle de $\mathcal{F}$. L'espace d'action, $\mathbb{A}$ est un sous ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{U}_{ad}([0,T])$ est la classe de processus mesurables, $\mathcal{F}_t$ adaptés et carrés intégrables $u(\cdot) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{A}$.

On considère l'équation différentielle stochastique EDSs

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

La fonctionne de coût est donné par :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, X(t), u(t))dt + h(X(T))\right] \tag{3.2}$$

où

$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

3.2 Conditions sur les coefficients

Soient f, σ deux applications telles que les coefficients f, σ vérifiant les conditions suivantes :

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n.\text{et continuement différentiables en } x \text{ et } u \tag{3.3}$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}.\text{et continuement différentiables en } x \text{ et } u \tag{3.4}$$

$$\text{Les dérivées } f_x, f_u, \sigma_x, \sigma_u \text{ sont bornées} \tag{3.5}$$

$$|f(t,x,u)| \leq K_1 \left(1 + |x| + |u|\right), \tag{3.6}$$

$$|\sigma(t,x,u)| \leq K_1 \left(1 + |x| + |u|\right), \tag{3.7}$$

En remarquant que les dérivées f_x, f_u appartenant à $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $\sigma_x = \left(\sigma_x^1, ..., \sigma_x^n\right)$, et $\sigma_u = \left(\sigma_u^1, ..., \sigma_u^n\right)$ telle que pour tout $i = 1, ..., n$; σ_u^i, $\sigma_x^i \in \mathbb{R}^{n\times n}$.où $\sigma = \left(\sigma^1, ..., \sigma^n\right)$ et $\sigma^i = \left(\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, ..., \sigma_{ni}\right)^T$.

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ est un espace de probabilité filtré donné, satisfaisant les conditions usuelles et $\left(W\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ mouvement Brownien $n-$dimensionnel, et soit $\mathbb{A}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ non vide.

Définition 3.2.1 (un contrôle) *Un contrôle est un processus $(u_t)_{t\geq 0}$ adapté par rapport à une filtration de carré intégrable et prend ses valeurs dans un borélien $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 3.2.2 (contrôle optimal) *Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction coût $J\left(u\right)$ sur un ensemble de contrôle admissible U. On dit que le contrôle $\widehat{u}$ est optimal si*

$$J\left(\widehat{u}\right) \leq J\left(u\right);\ \forall u \in U.$$

Définition 3.2.3 (contrôle admissible) *On appelle contrôle admissible tout processus $\left(u\left(t\right)\right)_{t\in[0,T]}$ appartient à $\mathbb{L}^2\left(\left[0,T\right]\times\Omega\right)$ a valeur dans $\mathbb{A}$.*

Notation 3.2.1 *On note $\mathcal{U}_{ad}\left(\left[0,T\right]\right)$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.*

$$\mathcal{U}_{ad}\left(\left(\left[0,T\right]\right)\right) = \left\{u\left(\cdot\right) : \left[0,T\right]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{A} \text{ où } u\left(\cdot\right) \in \mathbb{L}^2\left(\left[0,T\right]\times\Omega\right)\right\}.$$

Pour tout contrôle admissible.($\forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}([0,T])$)

Remarque 3.2.1 $u(\cdot) \in \mathbb{L}^2([0,T] \times \Omega)$ *implique que* $\mathbb{E}\int_0^T |u(t)|^2 dt = \mathbb{E}\int_0^T |u(t,w)|^2 dt < \infty$.

$$\mathcal{U}_{ad}(([0,T])) = \left\{ u(\cdot) : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{A} \text{ telle que } \mathbb{E}\int_0^T |u(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Notre problème de contrôle optimal stochastique est un problème d'optimisation où le système est gouvernés par l'EDS de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{3.8}$$

où X_0 est une variable aleatoire donnée. Le coût a minimiser est definie par :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, X(t), u(t))dt + h(X(T))\right] \tag{3.9}$$

sous les conditions suivantes :

$$g : \text{ est continuement différentiables en } x \text{ et } u. \tag{3.10}$$

$$|g_x(t,x,u)| \leq C_1(1 + |x| + |u|) \tag{3.11}$$

$$|g_u(t,x,u)| \leq C_2(1 + |x| + |u|) \tag{3.12}$$

$$g(t,0,0) \in \mathbb{L}^\infty([0,T]) \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered} \text{La dérivée de } h(\cdot) \text{ est continue et} \\ |h_x| \leq C_3(1 + |x|) \end{gathered} \tag{3.14}$$

Perturbation convexe : On perturbe le contrôle $u^*(\cdot)$ de la manière suivant :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &= u^*(t) + \varepsilon(u(t) - u^*(t)) \\ &= \varepsilon u(t) + (1-\varepsilon)u^*(t) \end{aligned}$$

où $u^*(\cdot)$ est contrôle optimal et ε est plus petit.

Remarque 3.2.2 *On remarque que $u_\varepsilon(\cdot)$ est contrôle admissible.*

On associées à $u^*(\cdot)$, $u_\varepsilon(\cdot)$ deux équations diffèrentielles stochastiques suivantes :

$$\begin{cases} dX^*(t) = f(t, X^*(t), u^*(t))dt + \sigma(t, X^*(t), u^*(t))dW(t) \\ \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{3.15}$$

et

$$\begin{cases} dX_\varepsilon(t) = f(t, X_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))dt + \sigma(t, X_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))dW(t) \\ \\ X_\varepsilon(0) = X_0 \end{cases} \tag{3.16}$$

On appelle $X_\varepsilon(\cdot)$ est la trajectoire (l'état) correspendant à $u_\varepsilon(\cdot)$ et $X^*(\cdot)$ est la trajectoire (l'état) correspondante à $u^*(\cdot)$.

Notation 3.2.2 *Pour tout $\Psi = f, \sigma, g$ on note $\Psi^*(t) \equiv \Psi(t, X^*(t), u^*(t))$; et $\Psi^\varepsilon(t) \equiv \Psi(t, X_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))$.*

3.3 Convergence des trajectoires perturbées

Lemme 3.3.1 *Pour tout $t \in [0,T]$ on a*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left(\sup_{t \leq T} |X_\varepsilon(t) - X^*(t)|^2\right) = 0 \tag{3.17}$$

C'est à dire la trajectoire $X_\varepsilon(\cdot)$ converge en $\mathbb{L}^2([0,T] \times \Omega)$ vers $X^*(\cdot)$. On dit aussi que $X_\varepsilon(\cdot)$ converge en moyenne quadratique vers $X^*(\cdot)$.

Preuve.

$$|X_\varepsilon(t) - X^*(t)| \leq \int_0^t |f^\varepsilon(s) - f^*(s)| ds + |\int_0^t \sigma^\varepsilon(s) - \sigma^*(s) dW(s)|.$$

on a $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ donc

$$|X_\varepsilon(t) - X^*(t)|^2 \leq 2\left(\int_0^t |f^\varepsilon(s) - f^*(s)| ds\right)^2 + 2|\int_0^t \sigma^\varepsilon(s) - \sigma^*(s) dW(s)|^2$$

d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et l'isométrie d'Itô, on trouve que

$$\mathbb{E}|X_\varepsilon(t) - X^*(t)|^2 \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t |f^\varepsilon(s) - f^*(s)|^2 ds + \int_0^t |\sigma^\varepsilon(s) - \sigma^*(s)|^2 ds\right],$$

comme f, σ sont Lipschitziennes alors

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq \mathbb{E}\left|X_\varepsilon(t) - X^*(t)\right|^2 & \leq & 2k\mathbb{E}\left[\int_0^t |u_\varepsilon(s) - u^*(s)|^2 ds\right] \\ & = & 2k\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |u(s) - u^*(s)|^2 ds\right] \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \end{array}$$

d'où (3.17). ■

L'équation linéairisée : On définit $Z(t)$ de la manière suivante

$$\left\{\begin{array}{rcl} dZ(t) & = & \left(f_x(t) Z(t) + f_u(t)(u(t) - u^*(t))\right) dt \\ & & +\left(\sigma_x^*(t) Z(t) + \sigma_u^*(t)(u(t) - u^*(t))\right) dW(t) \\ Z(0) & = & 0, \end{array}\right. \tag{3.18}$$

D'aprés les conditions $f_x, f_u, \sigma_x, \sigma_u$ sont bornées et continues alors $Z \in \mathbb{L}^2([0,T] \times \Omega)$.

Lemme 3.3.2 *Pour tout $t \in [0,T]$ on a la convergence suivante*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T}\left|\frac{X_\varepsilon(t) - X^*(t)}{\varepsilon} - Z(t)\right|^2\right] \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.19}$$

Preuve. On note $\gamma_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(X_\varepsilon(t) - X(t)) - Z(t)$ et $v(t) = u(t) - u^*(t)$.

$$\begin{array}{rcl} d\gamma_\varepsilon(t) & = & \frac{1}{\varepsilon}\left[f(t, X^*(t) + \varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u_\varepsilon(t)) - f^*(t) - \varepsilon f_x^*(t) Z(t) - \varepsilon f_u^*(t) v(t)\right] dt \\ & & \frac{1}{\varepsilon}\left[\sigma(t, X^*(t) + \varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u_\varepsilon(t)) - \sigma^*(t) - \varepsilon\sigma_x^*(t) Z(t) - \varepsilon\sigma_u^*(t) v(t)\right] dW(t) \\ \gamma_\varepsilon(0) & = & 0. \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} d\gamma_\varepsilon(t) &= \left(\int_0^1 [f_x(t, X^*(t) + \lambda\varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t))(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)) \right. \\ &\quad + f_u(t, X^*(t) + \lambda\varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t)) v(t)] d\lambda) dt \\ &\quad - \left(\int_0^1 [f_x^*(t) Z(t) + f_u^*(t) v(t)] d\lambda \right) dt \\ &\quad + \left(\int_0^1 [\sigma_x(t, X^*(t) + \lambda\varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t))(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)) \right. \\ &\quad + \sigma_u(t, X^*(t) + \lambda\varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t)) v(t)] d\lambda) dW(t) \\ &\quad - \left(\int_0^1 [\sigma_x^*(t) Z(t) + \sigma_u^*(t) v(t)] d\lambda \right) dW(t) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} d\gamma_\varepsilon(t) = &\left(\int_0^1 [f_x(t, X^*(t) + \lambda\varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t)) \gamma_\varepsilon(t)] d\lambda \right) dt \\ &\left(+ \int_0^1 [\sigma_x(t, X^*(t) + \lambda\varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t)) \gamma_\varepsilon(t)] d\lambda \right) dW(t) \\ &+ \left(\int_0^1 [f_x(t, X^*(t) + \lambda\varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t)) - f_x^*(t)] Z(t) d\lambda \right) dt \\ &+ \left(\int_0^1 [\sigma_x(t, X^*(t) + \lambda\varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t)) - \sigma_x^*(t)] Z(t) d\lambda \right) dW(t) \\ &+ \left(\int_0^1 [f_u(t, X^*(t) + \lambda\varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t)) - f_u^*(t)] v(t) d\lambda \right) dt \\ &+ \left(\int_0^1 [\sigma_u(t, X^*(t) + \lambda\varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t)) - \sigma_u^*(t)] v(t) d\lambda \right) dW(t), \end{aligned}$$

d'aprés (3.5), l'isométrie d'itô et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve que

$$\mathbb{E}|\gamma_\varepsilon(t)|^2 \leq c\mathbb{E}[\int_0^t |\gamma_\varepsilon(s)|^2 ds] + \rho(\varepsilon)$$

où

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon) = c_1 \mathbb{E} &\left(\int_0^t |Z(s)| \int_0^1 (f_x(s, X^*(s) + \lambda\varepsilon(Z(s) + \gamma_\varepsilon(s)), u^*(s) + \lambda\varepsilon v(s)) - f_x^*(s)) d\lambda ds \right)^2 \\ + c_2 \mathbb{E} &\left(\int_0^t |v(s)| \int_0^1 (f_u(s, X^*(s) + \lambda\varepsilon(Z(s) + \gamma_\varepsilon(s)), u^*(s) + \lambda\varepsilon v(s)) - f_u^*(s)) d\lambda ds \right)^2 \\ + c_3 \mathbb{E} &\int_0^t |Z(s)|^2 \int_0^1 |\sigma_x(s, X^*(s) + \lambda\varepsilon(Z(s) + \gamma_\varepsilon(s)), u^*(s) + \lambda\varepsilon v(s)) - \sigma_x^*(s)|^2 d\lambda ds \\ + c_4 \mathbb{E} &\int_0^t |v(s)|^2 \int_0^1 |\sigma_u(s, X^*(s) + \lambda\varepsilon(Z(s) + \gamma_\varepsilon(s)), u^*(s) + \lambda\varepsilon v(s)) - \sigma_u^*(s)|^2 d\lambda ds \end{aligned}$$

comme $f_x, f_u, \sigma_x, \sigma_u$ sont continues, Alors $\rho(\varepsilon) \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

et on trouve aussi d'après le lemme de Gronwall on a

$$0 \leq \mathbb{E}|\gamma_\varepsilon(t)|^2 \leq \rho(\varepsilon)\exp(ct) \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

ce qui termine preuve de (3.19) . ■

On défini aussi $\zeta(t)$ par

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta(t)}{dt} &= g_x^*(t) Z(t) + g_u^*(t) v(t) \\ \zeta(0) &= 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

où $v(t) = u(t) - u^*(t)$

Lemme 3.3.3 *Le coût $J(\cdot)$ est différentiable au sens de Gâteaux au u^* qui donner par la formule suivante :*

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon} J(u_\varepsilon(\cdot))\right|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}[h_x(X(T))Z(T) + \zeta(T)] \tag{3.21}$$

Preuve. On a

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon} J(u_\varepsilon(\cdot))\right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(u_\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))}{\varepsilon}.$$

En déduit que la valeur

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon}\left(J(u_\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{\varepsilon}(g(t, X_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - g(t, X^*(t), u^*(t)))dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\frac{1}{\varepsilon}(h(X_\varepsilon(T)) - h^*(X(T))\right] \\ &= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

où $I_1(\varepsilon)$ est donné par le terme suivant

$$\begin{aligned}
I_1(\varepsilon) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{\varepsilon}[g(t, X_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - g(t, X^*(t), u^*(t))]dt\right] \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [g_x^*(t, X(t) + \lambda(X_\varepsilon(t) - X^*(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t)) . (Z(t) + X_\varepsilon(t)) \\
&+ g_u^*(t, X(t) + \lambda(X_\varepsilon(t) - X(t)), u^*(t) + \lambda\varepsilon v(t)) .v(t)]\, d\lambda dt
\end{aligned}$$

et $I_2(\varepsilon)$ est donné par le terme suivant

$$\begin{aligned}
I_2(\varepsilon) &= \mathbb{E}\left[\frac{h(X_\varepsilon(T)) - h(X^*(T))}{\varepsilon}\right] \\
&= \mathbb{E}\int_0^1 h_x\left(X^*(T) + \lambda(X_\varepsilon(T)) - X^*(T))\right) . (X_\varepsilon(T) + Z(T))\, d\lambda
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} I_1(\varepsilon) &= \mathbb{E}[\zeta(T)] \\
\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} I_2(\varepsilon) &= \mathbb{E}[h_x(X^*(T))Z(T)],
\end{aligned}$$

à cause de la continuité de g_x, h_x et (3.17),(3.19). D'où (3.21). ■

3.4 Principe du maximum de Bensoussan

Dans cette section ; on présente le théorème de principe du maximum introduit par Bensoussan (1982) [1]. L'objectif de ce principe du maximum présenté ici est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité vérifié par une contrôle dite optimal dans le cas où le domaine de contrôle est supposé convexe.

3.4.1 Equation adjointe

Définition 3.4.1 *Soit $u^*(t)$ un contôle optimal et $X^*(t)$ la trajectoire optimale correspondante. L'équation adjointe est donnée par :*

$$\begin{cases} \text{-}dp\,(t) & = & [(f_x^*(t))^\top p\,(t) + g_x^*(t)]dt - \sum\limits_{i=1}^{n} (\sigma_x^{*i}(t))^\top q_i(t)dt \\ & & +q\,(t)\,dW\,(t) \\ p(T) & = & h_x(X^*(T)) \end{cases} \tag{3.22}$$

$p\,(t)$ s'appelle processus adjoint où $q\,(\cdot) = (q_1\,(\cdot)\,, ..., q_n\,(\cdot)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

Remarque 3.4.1 *Dans $\mathbb{R}$, le processus adjoint devient sous la forme*

$$\begin{cases} -dp\,(t) & = & [f_x(t)p\,(t) + g_x^*(t) - \sigma_x^*(t)q(t)]\,dt + q\,(t)\,dW\,(t) \\ p(T) & = & h_x(X(T)). \end{cases}$$

Définition 3.4.2 *On définissons l'Hamiltonien $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U_{ad} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ comme suit :*

$$H\,(t, X\,(t)\,, u\,(t)\,, p\,(t)\,, q\,(t)) = f(t, X\,(t)\,, u\,(t)).p\,(t) + g^*(t, X\,(t)\,, u\,(t)) \\ - tr\left(q^\top\,(t)\,\sigma\,(t, X\,(t)\,, u\,(t))\right)$$

Dans $\mathbb{R}$, on a

$$H\,(t, X\,(t)\,, u\,(t)\,, p\,(t)\,, q\,(t)) = f(t, X\,(t)\,, u\,(t))p\,(t) - q\,(t)\,\sigma\,(t, X\,(t)\,, u\,(t)) \\ + g(t, X\,(t)\,, u\,(t))$$

Remarque 3.4.2 *Nous pouvons écrire l'équation (3.22) comme suit :*

$$\begin{cases} -dp(t) & = & H_x\,(t, X^*\,(t)\,, u^*\,(t)\,, p\,(t)\,, q\,(t))\,dt + q\,(t)\,dW\,(t) \\ p(T) & = & h_x(X^*(T)) \end{cases}$$

Théoréme 3.4.1 (Principe du maximum de Bensoussan) *Soit $(u^*(t), X^*(t))$ une paire optimal. Alors il existe un processus adjoint $p\,(t)$ vérifie l'équation (3.22) telle que pour* *tout* $u(t) \in \mathcal{U}_{ad}([0,T])$ *on a*

$$\mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X^*(t), u^*(t), p(t), q(t))(u(t) - u^*(t))\, dt \geq 0 \tag{3.23}$$

Preuve. On a $J(u^*(\cdot)) = \inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}([0,T])} J(u(\cdot))$, donc $J(u_\varepsilon(\cdot)) \geq J(u^*(\cdot))$ ceci implique que

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_\varepsilon(\cdot))\bigg|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}[h_x(X^*(T))Z(T) + \zeta(T)] \geq 0.$$

Il reste de démontrer qu'on a l'égualité suivante :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X^*(t), u^*(t), p(t), q(t))(u(t) - u^*(t))\, dt \\ &= \mathbb{E}[h_x(X(T))Z(T) + \zeta(T)],\end{aligned}$$

où H_u est la dérivé de l'Hamiltonian par rapport à u. D'après la formule d'intégration par partie, (formule d'Itô $\mathbb{E}[p(t)Z(t)]$), on obtient

$$\begin{aligned} p(t)Z(t) &= p(0)Z(0) + \int_0^t p(s)\, dZ(s) + \int_0^t Z(s)\, dp(s) + \int_0^t d < p(s), Z(s) > \\ &= \int_0^t p(s)\, dZ(s) + \int_0^t Z(s)\, dp(s) + \int_0^t d < p(s), Z(s) >, \end{aligned}$$

où $Z(0) = 0$ et le crochet stochastique $< p(s), Z(s) >$ détermine par la valeur

$$\begin{aligned} d < p(s), Z(s) > &= -tr\left(q^\top(s)\left(\sigma_x^*(s)Z(s) + \sigma_u^*(s)(u(s) - u^*(s))\right)\right) ds \\ &= -tr\left(q^\top(s)\sigma_x^*(s)Z(s)\right) ds - tr\left(q^\top(s)\sigma_u^*(s)(u(s) - u^*(s))\right) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^t d < p(s), Z(s) > = \mathbb{E}\int_0^t < dp(s), dZ(s) > \\ &= \mathbb{E}\int_0^t q(t)\left(\sigma_x^*(t)Z(t) + \sigma_u^*(t)(u(t) - u^*(t))\right) ds\end{aligned}$$

Remarque 3.4.3 $\dfrac{\partial tr\left(q^\top(t)\sigma^*(t)\right)}{\partial x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sigma_x^{*i}(t)\right)^\top q_i(t)$

d'aprés (3.22) et (3.18) on obtient,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[p\left(t\right)Z\left(t\right)\right] \\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^t p\left(s\right)\left(f_x^*\left(s\right)Z\left(s\right)+f_u^*\left(s\right)\left(u\left(s\right)-u^*\left(s\right)\right)\right)ds-\int_0^t\left(Z\left(s\right)\left(f_x^*(s)\right)^\top p\left(s\right)+g_x^*(s)\right)ds\right. \\
&+\int_0^t Z\left(s\right)\sum_{i=1}^n\left(\sigma_x^{*i}(s)\right)^\top q_i(s)ds-\int_0^t\frac{\partial tr\left(q^\top\left(s\right)\sigma^*\left(s\right)\right)}{\partial x}Z\left(s\right)ds, \\
&\left.-\int_0^t\frac{\partial tr\left(q^\top\left(s\right)\sigma^*\left(s\right)\right)}{\partial u}(u\left(s\right)-u^*\left(s\right))ds\right] \\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^t(f_u^*\left(s\right)p\left(s\right)-\frac{\partial tr\left(q^\top\left(s\right)\sigma^*\left(s\right)\right)}{\partial u})\left(u\left(s\right)-u^*\left(s\right)\right)ds-\int_0^t Z\left(s\right)g_x^*(s)ds\right].
\end{aligned}
$$

On sait que le processus adjoint $p(t)$ verifié une équation différentielle stochastique rétrograde EDSRs avec une condition terminale $p(T)=h_x(X^*(T))$, alors on déduit

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[p(T)Z\left(T\right)+\zeta\left(T\right)\right] \\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^T p\left(s\right)f_u^*\left(s\right)\left(u\left(s\right)-u^*\left(s\right)\right)ds-\int_0^T Z\left(s\right)g_x^*(s)ds\right. \\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(s,X\left(s\right),u^*\left(s\right),p\left(s\right),q\left(s\right)\right)\left(u\left(s\right)-u^*\left(s\right)\right)ds\right]
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t,X^*\left(t\right),u^*\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right)\right)\left(u-u^*\left(t\right)\right)dt\right]=\mathbb{E}\left[p(T)Z\left(T\right)+\zeta\left(T\right)\right]. \quad \forall u\in\mathbb{A}
$$

d'où 3.23. Alors on a d'aprés (3.21)

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u\left(t,X^*\left(t\right),u^*\left(t\right),p\left(t\right),q\left(t\right)\right)\left(u-u^*\left(t\right)\right)dt\right]\geq 0,\ \forall u\in\mathbb{A}
$$

Ce qui termine la preuve de théorème de principe du maximum stochastique de Bensoussan. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté le principe du maximum stochastique de Bensoussan (1982). Ce principe conduit à établir des conditions necessaires d'optimalité où le domaine de contrôle est supposé convexe. Le système étudié est gouverné par des équations différentielles stochastiques contrôllées. Le coefficient de diffusion est contrôllé. Cette étude nous permis de voir de prés les différentes étapes de calcul pour établir ces conditions.

Bibliographie

[1] A. Bensoussan (1982), Lectures on stochastic contr. In Lect. Notes in Math.972, Springer-Varlag, pp. 1-62.

[2] B.Øksendal,A.Sulem (2004), Applied Stochastic Control of Jump Diffusions, Springer, Berlin.

[3] H. Pham (2005), Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.Vol. 61, Springer Verlage.

[4] M.Jeanblanc. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes.

[5] M. Hafayed (2009), Gradient généralisés et contrôle stochastique, Université Mohamed khider Biskra, pp 102.

[6] J. Yong and X.Y. Zhou (1999), *Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations.* Springer Verlag.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filltré.
T	Le temps terminal.
MW	Mouvement Brownien.
$< X, X >_T$	Variation quadratique de X sur $[0, T]$.
exp	Exponentiel.
lim sup	Limite supérieur
f	Drift.
σ	Cofficient de diffusion.
max, min	maximum, minimum
$\mathbb{P} - p.s$	Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
L^1	Espace des processus intégrables
$A^\top$	Transposée de la matrice A.
u^*	Contrôle optimal.
X^*	Trajectoire associé à $\hat{u}$.
$p(t)$	Processus adjoint.
$H(t, X, u, p, q)$	Hamiltonian.