République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

ABBA Khadidja

Titre du Mémoire

Les conditions suffisantes d'optimalité pour les EDSRs de type champ moyen

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	GHERBAL Boulakhras	UMKB	Encadreur
Dr.	YEKHLEF Samia	UMKB	Président
Dr.	BOUGHERARA Saliha	UMKB	Examinateur

septembre 2020

Dédicace

je dédie cet événement marquant de ma vie à la mémoire de ma grand-mére disparu trop tot.

A ma famille, elle qui ma doté d'une éducation digne,son amour a fait de moi ce qui je suis aujourd'hui, particuliérement à mon père Dr. ABBA Abdelmadjid à mon support dans ma vie, qui m'appris m'a supporter et ma dirigé vers la gloire.

A ma mère, je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me porter depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours .

A vous mon frére et mes soeur qui m'avez toujours soutenu et encouragé.

A mes amis pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

Je vous propose cette recherche, et j'espère qu'elle vous satisfera.

ABBA Khadidja,

REMERCIEMENTS

Louange à Allah qui nous a donné le courage, la puissance et la patience pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier particulièrement Dr. Boulakhras GHERBAL, mon encadreur pour m'avoir bien suivi durant mon travail et de me faire profiter de son savoir, ainsi de ses conseils et pour toute l'aide, les remarques constructives qui m'ont permis d'améliorer ce travail. Mes précieux remerciements vont aux président et membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce travail. Mes grands remerciements s'adressent aussi à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude d'équations différentielles stochastiques dont la solution est donnée en temps terminal T. Ce type d'équations est appelé équations différentielles stochastiques rétrogrades $(EDSR)$.

Les EDSR ont apparu pour la première fois en (1973) dans un article de Bismut [1] dans le cas où le générateur est linéaire. Cependant le point de départ de la théorie des EDSRs est l'article de Pardoux et Peng (1990) [2] dans lequel le générateur est non linéaire.

Rappelons ici brièvement dans quel contexte la notion d'EDSR a été introduite. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'un mouvement Brownien B (d-dimensionnel) dont la filtration naturelle et augmentée est notée par $\mathcal{F}^B = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Une EDSR à horizon déterministe T est définie par une équation dont la forme générique est la suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T b(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T Z_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T,$$

dont les paramètres sont la condition terminale $Y_T = \xi$ et la fonction b qui est le générateur.

Depuis le premier résultat d'existence et d'unicité, la théorie des EDSR s'est considérablement développée en raison du lien existant avec les équations aux dérivées partielles (EDP) et des applications possibles aux problèmes des contrôles stochastiques et aux problèmes des mathématiques financières : un grand nombre de travaux ont été consacrés pour étudier ces applications et élargir la classe d'EDSR admettant des solutions.

L'objectif de ce mémoire est l'étude Les conditions suffisantes d'optimalités des contrôles relaxés pour les EDSRs de type champ moyen.

Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la théorie du calcul stochastique, en donnant les défénitions et les propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux (processus stochastiques, mouvement Brownien, martingales) qui nous permettre de défénir l'intégrale stochastique et puis l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique (EDS).

Le deuxième chapitre a pour objectif l'etude de la théorie de base des EDSR. Dans ce chapitre, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR dans le cas le générateur est Lipschitzien en y et z.

Dans le troisième chapitre nous étudions un problème de contrôle stochastique où le système est gouverné par une équation différentielle stochastique rétrograde non linéaire (EDSR) du type champ moyen suivante :

$$\begin{cases} dy_t = -\int_{\mathcal{A}} b(t, y_t^v, \mathbb{E}\left[y_t^v\right], z_t^v, \mathbb{E}\left[z_t^v\right], a) q_t(da)dt + z_t^v dB_t \\ y_T = \xi, \end{cases}$$

où b est dit le génerateur de l'EDSR, $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$,satisfaisant les conditions habituelles. La variable de contrôle q_t,est appelé contrôle relaxé, est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté à valeur mesure dans $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$. On note $\mathcal{R}$ la classe de tous les contrôles relaxés. Notre objectif dans ce chapitre, est d'établir les conditions suffisantes d'optimalités pour un système de type champ moyen sous forme d'un principe de maximum stochastique, pour les contrôles relaxés. L'idée est d'utiliser le fait que l'ensemble des contrôles relaxés est convexe. Nous établissons les conditions d'optimalités suffisantes en utilisant la méthode classique de la perturbation convexe (faible).

Nous obtenons l'équation variationnelle de l'équation d'état,et l'inégalité variationnelle d'après l'optimalité de μ c'est-à-dire

$$0 \leq J(\mu^\theta) - J(\mu).$$

Pour parvenir à cette partie du chapitre, nous démontrons sous des hypothèses supplémentaires minimales, que les conditions nécessaires d'optimalités sont également suffisantes.

Chapitre 1

Equation différentielles stochastiques

1.1 Processus stochastiques

La notion de processus stochastique modélise les phénomènes naturels où des expériences dont l'evolution au cours du temps dépend du hasard. C'est l'équivalent de la notion de variable aléatoire pour les problèmes à temps fixé.

Un traitement complet de la théorie générale des processus est donné dans (Dellacherie-Meyar[3]), Ghikhman-Skorokhod [4]).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathbb{T}$ un ensemble d'indices (qui peut être $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R})$ ou une partie de $\mathbb{R}$. Et (E, ξ) est un espace mesurable.

Définition 1.1 *On appelle processus stochastique définit sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admettant $\mathbb{T}$ comme ensemble d'indice et (E, ξ) comme espace d'etats ; toute famille du variables aleatoires $(X_t; t \in \mathbb{T})$. Pour tout $\omega \in \Omega$ l'application $t \in [0, \mathbb{T}] \to X_t(\omega)$ est appelée trajectoire (où realisation) du processus X correspondant à ω.*

Remarque 1.1 *On peut regarder le processus X comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace des trajectoires. C'est-à-dire l'application*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to E^{\mathbb{T}},$$

definie par

$$X(\omega) = (X_t(\omega); t \in \mathbb{T}),$$

où $E^{\mathbb{T}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{T}$ dans E.

1.2 Processus mesurable, adapté, progressivement mesurable

On suppose que $\mathbb{T}$=$\mathbb{R}_+$, (Ω ,$\mathcal{F}$) un espace mesurable.

– Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit mesurable si l'application

$$X : \mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F} \to (E, \xi)$$

$$(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega) = X(t; \omega),$$

est mesurable.

– Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une filtration de $\mathcal{F}$, un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ si les variables aléatoires sont $\mathcal{F}_t$ -mesurables pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$, la v.a

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \xi) \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable.}$$

C'est-à-dire

$$\forall B \in \xi; X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t.$$

Il est clair que $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est adapté par rapport à sa filtration naturelle

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t).$$

– $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est progressivement mesurable si

$$[0; t] \times \Omega, \mathcal{B}([0; t]) \otimes \mathcal{F}_t \to X_t(\omega) = X(t; \omega),$$

est mesurable .

1.2.1 Modification, indistingabilité des processus

– Deux processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont dit modification l'un de l'autre si :

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1; \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

C'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, X_t(\omega) = Y_t(\omega), \mathbb{P}-ps.$$

– Deux processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont dit indistingable s'il existe un ensemble $N - \mathbb{P}$-négligeable tel que :

$$\mathbb{P}(\omega \notin N : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in \mathbb{R}^+) = 1.$$

C'est-à-dire :

$$\forall \omega \notin N \Longrightarrow X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in \mathbb{R}^+; \mathbb{P}-ps,$$

ce qui signifier que les processus X et Y ont les mêmes trajectoires sauf peut-être sur un ensemble négligeable.

1.2.2 Filtration

Une filtration définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, est une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de sous tribus de $\mathcal{F}$ telle que :

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},$$

pour tout $0 \leq s \leq t$ dans $\mathbb{T}$.

La filtration $\mathcal{F}_t$ s'interprète comme l'information connue jusqu'à le temps t, et elle augmente en fonction du temps. On pose $\mathcal{F}_k = \sigma(\cup_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{F}_t)$ la plus petite sous tribu σ contenant tous les

$\mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{T}$.

Exemple 1.1 *(Canonique de filtration) est le suivant :*

Si $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est un processus stochastique, la filtration naturelle (ou canonique) de* X_t *est* $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t \text{ tel que } t \in \mathbb{T})$. *La plus petite sous tribu* σ *par rapport à la quelle* X_s *est mesurable pour tout* $0 \leq s \leq t$.

Remarque 1.2 *On dit q'une filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *satisfaite les conditions habituelles si elle est continue à droite c'est-à-dire :*

$$\mathcal{F}_t = \cap_{s\leq t}\mathcal{F}_s, \forall t \in \mathbb{T}.$$

Et si elle complète c'est-à-dire : $\mathcal{F}_0$ *contient les ensembles négligeables de* $\mathcal{F}$.

1.3 Mouvement Brownien

Un mouvement Brownien standard est un processus aléatoire à temps continu $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ tel que :

- $B_0 = 0$ p.s .
- Pour tout $0 \leq s \leq t$; dans $\mathbb{T}$, l'acroissement $(B_t - B_s)$ est independant de $\sigma(B_u, u \leq s)$ et suit une loi gaussienne centrée de variance $(t - s)$.
- (B_t) est à trajectoire continue.

1.3.1 Un mouvement Brownien vectoriel

On dit un mouvement Brownien vectoriel ($d-$dimensionnel), sur $[0, T]$ ou $\mathbb{R}^+$, tout processus aléatoire à temps continu à valeur dans $\mathbb{R}^d$, et donné par :

$$(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+} = (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^d)_{t\in\mathbb{T}},$$

tel que :

1. $B_0 = 0$ p.s,
2. pour tout $0 \leq s \leq t$; dans $\mathbb{T}$, l'acroissement $(B_t - B_s)$ est independant de $\sigma(B_u, u \leq s)$ et suit une loi gaussienne centrée de matrice de variance $(t-s)Id$, où Id est la matrice d'unité $d \times d$.

Les coordonnées ($B_t^i)_{t\in\mathbb{T}}$, $i = 1, ..., d$ .un mouvement Brownien vectoriel sont des mouvements Browniens réels est indépendent .

Réciproquement des mouvements Browniens réels et indépendants engendrés un mouvement Brownien vectoriel.

1.3.2 Martingale

Définition 1.2 *Une famille de variables aléatoires* $(X_t, t \in [0, \infty[)$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si :*

- X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable pour tout t.
- $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_s] = X_s, s \leq t$.
- $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty, \forall t \geq 0$.

Lemme 1.1 *Le movement Brownien standard* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Proof. 1. Par Cauchy-Schwartz, on a :

$$\mathbb{E}[|B_t|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[|B_t|^2]} = \sqrt{t} < \infty.$$

2. $\forall 0 \leq s \leq t$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[B_t|\mathcal{F}_t^B\right] &= \mathbb{E}\left[B_t + B_s - B_s|\mathcal{F}_t^B\right] = \mathbb{E}\left[B_t - B_s|\mathcal{F}_t^B\right] + \mathbb{E}\left[B_s|\mathcal{F}_t^B\right] \\ &= \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s. \end{aligned}$$

Les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t^B)$. ■

Exemple 1.2 *Voici deux exemples pour les martingales :*

1

$$M_t = B_t^2 - t, t \geq 0.$$

2

$$N_t = \exp(B_t - \frac{t}{2}), p.s, t \geq 0.$$

Définition 1.3 *: Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une sur-martingale (resp.sous-martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

1. X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable pour tout t .
2. $\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_s\right] \leq X_s, s \leq t$.(resp. $\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_s\right] \geq X_s$).
3. $\mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty, \forall t \geq 0$.

Exemple 1.3 *:si X est une martingale, alors X^2 est une sous martingale.*

Exemple 1.4 *:si X est une martingale et A un processus croissant, alors $X + A$ est une sous-martingale.*

Théorème 1.1 *(Théorème de lévy) Soit (X_t) un processus à trajectoire continue adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et tel que :*

1. X_t est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_t$.
2. $X_t^2 - t$ est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_t$.

Alors X_t et un mouvement Brownien standard.

On cherche maintenant à définir la variable aléatoire $\int_0^t f(s) dB_s$ quand $\{f(s), s \geqslant 0\}$ est un processus stochastique.

1.4 Integrale stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filté où $\mathcal{F}_t = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ c'est une filtration de $\mathcal{F}$, satisfaisant les conditions habituelles et $B_t = (B_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est un mouvement Brownien défini dans espace de probabilité.

Définition 1.4 *Un processus stochastique $X_t = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit simple si il existe une subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$, de l'interval $[0, T]$ et une famille $(\varsigma_i)_{i\geq 0}$ des variables aléatoires avec $\sup_i |\varsigma_i| \leq c \leq \infty$, telle que ς_i est $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable $\forall i \geq 0$:*

$$X_i = \varsigma_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \varsigma_i 1_{[t_i, t_{i+1}]}(t).$$

Où $\mathbb{I}_A$ désigne l'indicatrice de l'ensemble A, c'est-à-dire :

$$\mathbb{I}_A = \begin{cases} 1 : si\ x \in A \\ -1 : \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.3 *L'ensemble des processus simples sera noté S_T.*

Définition 1.5 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ progressivement mesurables est dit de classe M_T si*

$$M_T = \left\{ X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}} \text{ progressivement mesurable } \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_t|^2 \, dt < \infty \right] \right\}.$$

C'est-à-dire : M_T est l'ensemble des processus progressivement mesurables et de carré intégrable.

Définition 1.6 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ progressivement mesurable est dit de classe $\mathbb{P}_T$ si :*

$$\mathbb{P}_T = \left\{ X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}} \textit{ progressivement mesurable } \mathbb{P}\left\{ \int_0^t |X_t|^2 \, dt < \infty \right\} = 1 \right\}.$$

C'est-à-dire : $\mathbb{P}_T$ est l'ensemble des processus progressivement mésurables et de carré intégrable presque surement.

Lemme 1.2 *Pour les espaces précédent, on a l'inclusion suivante :*

$$S_T \subset M_T \subset \mathbb{P}_T.$$

Dans ce qui suit, on va constuire et donner les propriétés des intégrales stochastiques par rapport au mouvement Brownien $B = (B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ du type $I(t) = \int_0^t X_s dB_s$. Qu'on ne peut pas définir les intégrales de ce type comme intégrales de Lebesgue-Stieljes puisque les trajectoires du movement Brownien contiennent toutes les propriétés qui en un certain sens sont l'analogue de la finitude de la variation.

1.4.1 Cas de processus simple

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus stochastique simple, on définit formellement intégrale stochastique X par rapport au mouvement Brownien $B = (B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ comme suit :

$$I(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \varsigma_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \varsigma_n(B_T - B_{t_n}),$$

et

$$I(t) = \int_0^t X_s dB_s,$$

donc

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t \left[\varsigma_0 1_{\{0\}}(s) + \sum_{i=0}^{n} \varsigma_i 1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\right] dB_s \\ &= \int_0^t \varsigma_0 1_{\{0\}}(s) dB_s + \sum_{i=0}^{n} \varsigma_i \int_0^t 1_{[t_i,t_{i+1}]}(s) dB_s \\ &= \varsigma_0 B_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \varsigma_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \varsigma_n(B_T - B_{t_n}), \end{aligned}$$

puisque

$$P(\varsigma_0 = 0) = 1.$$

On conclut , et en vérifiant que pour tout $i \neq j$:

$$\mathbb{E}\left[\delta(t_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\delta(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] = 0.$$

De plus

$$\mathbb{E}[I(t)] = 0,$$

et

$$Var[I(t)] = \mathbb{E}[\int_0^t (\delta(s))^2 ds].$$

Dans se qui suit, on se donne les propriétés fondamentales de l'intégrale stochastique, concernant la linéarité et la propriété de martingale.

1. $t \geq 0, I(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
2. Linearité : soient $I(t)$ et $J(t)$ deux intégrales stochastiques donnés par :

$$I(t) = \int_0^t \delta(s) dB_s, \text{ et } J(t) = \int_0^t \phi(s) dB_s.$$

   Alors on obtient le resultat suivant :

$$I(t) + J(t) = \int_0^t (\delta(s) + \phi(s)) dB_s,$$

   et

$$\alpha I(t) = \int_0^t \alpha \delta(s) dB_s$$

3.

$$(I(t))_{t \geq 0} \text{ est une martingale}$$

4.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \delta(s) dB_s\right]^2 = \mathbb{E}\left[I^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \delta^2(s) ds\right].$$

1.4.2 Cas de processus général

L'ensemble des processus simples S_T est dense dans M_T. Soient $T > 0$ et δ un processus tel que : I et δ sont $\mathcal{F}_t$-adapté. De plus,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \delta^2(t)dt\right] < \infty; \forall T > 0.$$

Il existe une suite de processus étagées δ_n tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta_n - \delta|^2 dt\right] = 0 \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \|\delta_n - \delta\|^2_{L^2(\Omega,[0,T])} \to 0.$$

On définit l'intégrale $\int_0^t \delta(s)dB_s$ par la limite suivante dans $L^2(\Omega, [0,T])$.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \delta_n(s)dB_s = \int_0^t \delta(s)dB_s.$$

1. $I(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, ce qui implique que :

$$I(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \delta_n(s)dB_s.$$

2. Linearité : soient $I(t)$ et $J(t)$ deux intégrales stochastiques donnés par :

$$I(t) = \int_0^t \delta(s)dB_s, \text{ et } J(t) = \int_0^t \phi(s)dB_s.$$

$$I(t) + J(t) = \int_0^t (\delta(s) + \phi(s))dB_s,$$

   et

3.
$$\alpha I(t) = \int_0^t \alpha\delta(s)dB_s.$$

$(I(t))_{t\geqslant 0}$ est une martingale

4.
$$t \to \int_0^t \delta_n(s)dB_s \text{ est continue.}$$

5.
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \delta(s)dB_s\right]^2 = \mathbb{E}\left[I^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \delta^2(s)ds\right].$$

Exemple 1.5 *Calculer* $\int_0^t B(s)dB_s$

$$\delta_n(s) = \begin{cases} B(0) : \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t}{n}, \\ B(\frac{t}{n}) : \text{si } \frac{t}{n} \leq s \leq \frac{2t}{n}, \\ . \\ . \\ . \\ B(\frac{n-1}{n}t) : \text{si } \frac{n-1}{n}t \leq s \leq t. \end{cases}$$

$$\int_0^t B(s)dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \delta_n(s)dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} B(\frac{k}{n}t)[B(\frac{k+1}{n}t) - B(\frac{k}{n}t)].$$

On pose

$$B_k = B(\frac{k}{n}t),$$

on obtient,

$$\int_0^t B(s)dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} B_k[B_{k+1} - B_k]$$

de plus

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(B_{k+1} - B_k)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(B_{k+1})^2 - \sum_{i=0}^{n-1} B_{k+1}B_k + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(B_k)^2,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(B_{k+1} - B_k)^2 = \frac{1}{2}B_n^2 - \sum_{i=0}^{n-1} B_k(B_{k+1} - B_k),$$

et

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_k(B_{k+1} - B_k) = \frac{1}{2}B_n^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(B_{k+1} - B_k)^2.$$

Par le passage à la limite on trouve

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_k(B_{k+1} - B_k) = \frac{1}{2}B^2(t) - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} B_k(B_{k+1} - B_k)^2 = \frac{1}{2}B^2(t) - \frac{1}{2}t.$$

Ceci est d'après la variation quadratique.

1.5 Formule d'Itô

1.5.1 Premiére formule d'Itô

Soit B un mouvement Brownien défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 et bornée.

Alors :

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \int_0^t f''(B_s)ds,$$

calculer $\int_0^t B_s dB_s$ tel que : $f(x) = x^2$

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + \int_0^t ds.$$

Ce qui donne , d'après l'intégration

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

1.5.2 Deuxiéme formule d'Itô

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}$, on a :

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t f'(s, B_s)dB_s + \int_0^t f''(s, B_s)ds + \int_0^t f'_t(s, B_s)ds.$$

Formule d'intégration par partie

Soient

$$\begin{aligned} X(t) &= x_0 + \int_0^t f(s)dB_s + \int_0^t g(s)ds, \\ Y(t) &= x_0 + \int_0^t h(s)dB_s + \int_0^t k(s)ds, \end{aligned}$$

deux processus d'Itô, avec les fonctions $f, g, h, k \in \mathbb{L}^2_{Loc}$, d'après la formule d'Itô vectorielle on a :

$$\phi(X(t), Y(t)) = X(t)Y(t),$$

donc

$$dX(t)dY(t) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + d\langle X, Y\rangle_t,$$

et on obtient la formule d'intégration par parties suivantes :

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \int_0^t g(s)k(s)ds.$$

Exemple 1.6 *Soient B_1, B_2 deux mouvements Browniens independants seulement aux temps t*

$$B_1(t)B_2(t) = \int_0^t B_1(t)dB_2(t) + \int_0^t B_2(t)dB_1(t).$$

Théorème 1.2 *(Représentation des martingales Browninnes) Soit M une martingale (càdlàg) de carré intégrable pour la filtration $(\mathcal{F}_t^B)_{t\in[0,T]}$ .Alors il existe un unique processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$, appartenant à $M^2(\mathbb{R}^k)$, tel que :*
$\mathbb{P}-p.s$ $\forall t \in [0,T]$,

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s.$$

1.6 Existence et un unicité

Soit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t,x)dt + \sigma(t,x_t)dB_t, \\ x_0 = \xi, \end{cases} \tag{1.1}$$

vérifier les conditions suivantes :

$$P(x_0 = \xi) = 1,$$

$$P(\int_0^t |b(s,x_s)| + \sigma^2(s,x_s)ds < \infty) = 1,$$

$$x_t = \xi + \int_0^t b(s,x_s)ds + \int_0^t \sigma(s,x_s)dB_s.$$

Le problème est, -comme les équations différentielles stochastiques constituent une généralisation des équations différentielles ordinaires- de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients b, σ, l'équation différentielle a une unique solution. On suppose que

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq k|x-y|^2, \tag{1.2}$$

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq k(1 + |x_t|^2). \tag{1.3}$$

Maintenant, on se donne ci-dessous le théorème d'existence et d'unicité dû à K.Itô.

Théorème 1.3 *Si les coefficients* b *et* σ *vérifient les conditions* (1.2) *et* (1.3). *Alors l'équation* $(1,1)$ *admet une solution forte unique* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$, $\mathcal{F}_t$*-adapté et continue avec condition initiale* $X_0 = \xi$ *de plus cette solution est markovienne et vérifie*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right] \leq M, \forall p > 1.$$

Où M *est une constante qui dépend de* $k; p; T$ *et* ξ.

Remarque 1.4 *Remarquant que la condition de Lipshitz* (1.2) *nous assure l'existence et l'unicité de la solution de l'equation* (1.1).

Exemple 1.7

$$\begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = 3x_t^{\frac{2}{3}}, \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

et

$$x_t = \begin{cases} 0 : si\ t \leq a \\ (t-a)^3 : si\ t > a, \end{cases}$$

$b(x_t) = 3x_t^{\frac{2}{3}}$ *n'est pas Lipshitzienne car les dérivées n'est pas bornnées, n'est pas dérivable au points* $x_0 = 0$.

Remarque 1.5 *La condition de croissance* (1.3) *nous évite l'éxplosition de la solution et si on n'a pas cette condition l'équation* $(1,1)$ *admettra une solution unique mais seulement jusqu'au temps d'éxplosition.*

Exemple 1.8 *On considere l'équation différentielle suivante :*

$$\frac{dx_t}{dt} = x_t^2, x_0 = 1.$$

C'est-à-dire $b(x) = x^2, \sigma = 0$, *sont Lipchitziennes donc, il existe une solution unique donnée par :*

$$x_t = \frac{1}{1-t} : 0 \leq t \leq 1,$$

car

$$\lim_{t \to 1} x_t = +\infty.$$

La preuve du théorème d'existence et d'unicité de la solution, est basée sur les deux lemmes suivants :

Lemme 1.3 ***Lemme de Gronwall***

Soit f *une fonction intégrable et non négative définie pour* $t \geq 0$ *et vérifiant*

$$f(t) \leq \beta + c \int_0^t f(s)ds,$$

où c *est une constante positive. Alors on a :*

$$f(t) \leq \beta \int_0^t \exp(cs)ds.$$

Lemme 1.4 ***Inégalité de Bulkholder-Davis-Gundy***

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\sigma(s,X_s)dB_s\right|^2\right]\leq C\mathbb{E}\left[\left|\sigma(s,X_s)\right|^2 ds\right],$$

où C est constante positive.

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques Rétrogrades

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé), et de préciser la terminologie employée dans ce contexte. Nous montrerons le résultat classique d'existence et d'unicité des solutions pour les ESDR.

2.1 Notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet de B un $d-$dimensionnel sur cet espace. On note $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien. On travaillera avec deux espaces de processus :

- On notera tout d'abord S_2^k l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$,et $\mathcal{F}_t^B$-adapté tel que :

$$\|Y\|_{S_2^k} = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y|^2\right] < \infty.$$

Et $S_c^k(\mathbb{R}^k)$ le sous espace formé par les processus continus.

Et ensuite $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ celui formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, et $\mathcal{F}_t^B$-adapté tel que :

$$\|Z\|_{S_2^{k\times d}} = \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2 ds\right] < \infty.$$

Les espaces $\mathcal{S}^2, \mathcal{S}_c^2$ et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)\times$ $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.
Dans tout ce chapitre, ainsi que dans le suivant, nous donnons une application aléatoire f définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(Y,Z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,Y,Z)_{0\leq t\leq T}\}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ, mesurable pa rapport à $\mathcal{F}_t$ et à valeur
dans $\mathbb{R}^k$.

Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dB_t, 0\leq t\leq T \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

où, de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0\leq t\leq T. \tag{2.1}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR (2.1) et ξ la condition terminale. Sans plus tarder, précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR $(2,1)$.

Définition 2.1 *Une solution de l'EDSR* $(2,1)$ *est un couple de processus* $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y *et* Z *sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$.

2. $\mathbb{P}-p.s$

$$\left\{\int_0^T |f(s,Y_s,Z_s)|ds - \int_0^T |Z_s|^2 ds\right\} < \infty;$$

3. $\mathbb{P}-p.s$, *on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \le t \le T.$$

Remarque 2.1 *On cherche un couple de processus* (Y, Z) *tel que :*

– (Y, Z) *est* $\mathcal{F}_t^B$*-adapté.*

–
$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \le T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s|^2 ds\right] < \infty.$$

–
$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, B, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s. \qquad \text{(EDSR}(f,\xi))$$

Exemple 2.1 (EDO) :

$$\begin{cases} dY_t = f(Y_t)dt \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Supposon $f(Y) = 0$*. La solution de l'équation* (EDO) *est* $Y_t = \xi, \forall t \le T$*, mais* Y_t *n'est pas* $\mathcal{F}_t^B$*-adapté où* ξ *est seulement* $\mathcal{F}_T^B$*-adapté. La solution de EDRS* $(0, \xi)$ *tel que* $f = 0$*. La meilleurs approximation dans* $L^2(\mathcal{F}_t^B)$ *de* ξ *est* $\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right]$ *que est* $\mathcal{F}_t^B$*-martingale. D'aprés le théorème de réprésentation des martingales Brownien on obtient :*

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right] = \mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right] + \int_0^t Z_s dB_s.$$

$\forall Z$ *est* $\mathcal{F}_t^B$ *prévisible et* $\mathbb{E}\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right] < \infty$,

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right] = \mathbb{E}\left[\xi\right] + \int_0^t Z_s dB_s.$$

On pose $t = T$:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_T^B\right] - \mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right] = \int_t^T Z_s dB_s,$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right] = \xi - \int_t^T Z_s dB_s,$$

c'est-à-dire

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s,$$

donc $\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right]$ *est une solution de l'EDRS* $(0, \xi)$.

2.2 Théorème d'existence et d'unicité des EDSR a coefficient Lipshtizien

Théorème 2.1 *Sous les données précedentes* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T^B)$, *on suppose de plus que :*

$\mathbf{H}_1$ f *est* k*-uniforme Lipshtizien par rapport* Y *et* Z, *c'est-à-dire :*

$\exists k > 0, \forall (Y, Z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$, $\forall (\acute{Y}, \acute{Z}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$:

$$|f(t, B, Y, Z) - f(t, B, \acute{Y}, \acute{Z})| \leq k(|Y - \acute{Y}| + |Z - \acute{Z}|).$$

$\mathbf{H}_2$

$$|f(t, B, Y, Z)| \leq h_t(B) + \lambda(|Y| + |Z|),$$

où $h_t(\omega) \geq 0, \forall t, B$ *et* $\mathbb{E}(\int_0^T h_s^2 ds) < \infty$

$\mathbf{H}_3$

$$\mathbb{E}\left[|\xi| + |\int_0^T f(t, B, 0, 0)|^2 ds\right] < \infty.$$

Alors l'EDRS (f, ξ) *possède une solution.*

Proof.

Etape1 : On suppose que $f(t, B, Y, Z) = f(t, B)$, ce qui implique l'EDSR suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, B)ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

Le processus $M_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f(s, B)ds|\mathcal{F}_t^B\right]$ est une martingale. D'aprés le théorème de réprésentation des martingales Brownien on obtient :

$\forall (Z_t)$ $\mathcal{F}_t^B$ previsible processus tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^t |Z_s|^2 \, ds\right] < \infty$.

Et

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s,$$

donc

$$M_T - M_t = \int_t^T Z_s dB_s,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f(s,B)ds | \mathcal{F}_T^B\right] - \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f(s,B)ds | \mathcal{F}_t^B\right] \\
= & \ \xi + \int_0^T f(s,B)ds - \left(\mathbb{E}\left[\int_0^t f(s,B)ds | \mathcal{F}_t^B\right] - \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s,B)ds | \mathcal{F}_t^B\right]\right) \\
= & \ \xi + \int_0^T f(s,B)ds - \int_0^t f(s,B)ds - \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s,B)ds | \mathcal{F}_t^B\right] \\
= & \ \xi + \int_t^T f(s,B)ds - \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s,B)ds | \mathcal{F}_t^B\right].
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s,B)ds | \mathcal{F}_t^B\right] = \xi + \int_t^T f(s,B)ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

c'est-à-dire

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,B)ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

Etape2 : $f(t, B, Y, Z)$ est vérifie (H_1, H_2, H_3). ■

Lemme 2.1 *On suppose que* (H_2) *est vérifiée, soit* (Y, Z) *une solution de l'EDRS* (f, ξ)*, on suppose de plus que* $Z \in M_2^{k\times d}$*,* $(\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2 ds\right] < \infty)$*. Alors* $Y \in S_2^k$*.*

Proof.

On a

$$Y_t = Y_0 + \int_0^T f(s, B, Y_s, Z_s)ds - \int_0^t Z_s dB_s,$$

car (Y_s, Z_s) verifié l'EDRS (f, ξ). On obtient :

$$\begin{aligned}|Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^T |f(s,B,Y_s,Z_s)|\,ds + \left|\int_0^t Z_s dB_s\right| \\ &\leq |Y_0| + \int_0^T |f(s,B,Y_s,Z_s)|\,ds + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_s dB_s\right|.\end{aligned}$$

D'après (H_2) on obtient :

$$\begin{aligned}|Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^T (h_t(B) + \lambda|Y_s| + \lambda|Z_s|)\,ds + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_s dB_s\right| \\ &\leq |Y_0| + \int_0^T (h_t(B) + \lambda|Z_s|)\,ds + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_s dB_s\right| + \int_0^T \lambda|Y_s|ds.\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall et l'inégalité de Bulkholder-Davis-Gundy on obtient :

$$|Y_t| \leq \eta_T \times \exp(\lambda t),$$

où

$$\eta_T = |Y_0| + \int_0^T (h_t(B) + \lambda|Z_s|)\,ds + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_s dB_s\right|,$$

donc

$$\sup_{t\leq T}|Y_t|^2 \leq \eta_T^2 \times \exp(2\times\lambda t),$$

passant a l'esperance, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|Y_t|^2\right] \leq \exp(2\times\lambda t)\times\mathbb{E}\left[\eta_T^2\right] < \infty.$$

Alors $Y \in S_2^k$. ■

Lemme 2.2 *Soit* $(Y,Z)\in S_2^k \times M_2^{k\times d}$ *c'est-à-dire*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|Y_t|^2\right] < \infty \;\; et \;\; \mathbb{E}\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right] < \infty.$$

Alors la martingale locale $M_t = \int_0^t Y_s Z_s dB_s$ *est une martingale uniformement dans* L^1 *c'est-à-dire*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|M_t|^2\right] < \infty.$$

Proof. Ona :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dB_s\right|\right] &\leq C_P\mathbb{E}\left[\left\langle\int_0^t Y_s Z_s dB_s\right\rangle_T^{\frac{1}{2}}\right] = C_P\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left(\int_0^t |Y_s|^2|Z_s|^2 dB_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C_P\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sup_{t\leq T}|Y_s|^2|Z_s|^2 dB_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C_P\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\leq T}|Y_s|^2\int_0^t |Z_s|^2 dB_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C_P\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|Y_s|^2 + \int_0^t |Z_s|^2 dB_s\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

(Car $a.b \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \leq (a^2+b^2), (Y,Z) \in S_2^k \times M_2^{k\times d}$) ■

2.2.1 Démonstration du théorème d'existence par le théorème du point fixe

Sous les condition (H_1, H_2, H_3), soit $(U,V) \in \mathcal{B}^2 = S_2^k \times M_2^{k\times d}$, alors l'EDRS (f,U,V) suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,U,V)ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

possède une seule solution $(Y,Z) \in \mathcal{B}^2$, ceci définit une application :

$$\psi : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$$

$$(U,V) \mapsto \psi(U,V) = (Y,Z).$$

Solution de l'EDRS (f,U,V).

Remarque 2.2

$$\|Y,Z\|^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2\int_0^t |Z_s|^2 dB_s\right] \sim \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\exp(\alpha t)|Y_t|^2 + \int_0^t \exp(\alpha t)|Z_s|^2 ds\right]$$

– – Soit (U,V,Y,Z) et $(\acute{U},\acute{V},\acute{Y},\acute{Z})$ tel que :

$$(Y,Z) = \psi(Y,Z), (\acute{Y},\acute{Z}) = \psi(\acute{Y},\acute{Z}).$$

On pose

$$\bar{U} = U - \acute{U}, \bar{V} = V - \acute{V}, \bar{Y} = Y - \acute{Y}, \bar{Z} = Z - \acute{Z}.$$

On applique la formule d'Itô à la fonction :

$$H(t,Y) = \exp(\alpha t)|Y|^2 \in C^{1,2}.$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha t)|\bar{Z}_s|^2 ds \\
= &\int_t^T \exp(\alpha s)\left(-\alpha|\bar{Y}_s|^2 + 2\bar{Y}_s(f(U,V) - f(\acute{U},\acute{V}))ds\right) \\
&\qquad - \int_t^T 2\exp(\alpha s)\bar{Y}_s\bar{Z}_s dB_s).
\end{aligned}$$

D'après la condition de Lipschitz on obtient :

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha t)|\bar{Z}_s|^2 ds \\
\le &\int_t^T \exp(\alpha s)\left(-\alpha|\bar{Y}_s|^2 + 2\bar{Y}_s L(\bar{U} - \bar{V})ds\right) - \int_t^T 2\exp(\alpha s)\bar{Y}_s\bar{Z}_s dB_s),
\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon > 0$, on a :

$$2ab = 2a\sqrt{2}\times\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{2},$$

alors

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha t)|\bar{Z}_s|^2 ds \\
\leq &\int_t^T \exp(\alpha s)\left(-\alpha|\bar{Y}_s|^2 + 2\frac{L^2}{\varepsilon}|\bar{Y}_s|^2 ds\right) + R_\varepsilon - \int_t^T 2\exp(\alpha s)\bar{Y}_s\bar{Z}_s dB_s),
\end{aligned}$$

où

$$R_\varepsilon = \int_0^T \varepsilon \exp(\alpha s)(\left|\bar{U}_0\right|^2 - \left|\bar{V}_0\right|^2)ds.$$

On pose $\varepsilon = \frac{2L^2}{\alpha}$

$$\exp(\alpha s)|\bar{Y}_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}|^2 ds \leq R_\varepsilon - \int_t^T 2\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s||\bar{Z}_s|dB_s, \tag{2.2}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha t)|\bar{Z}|^2 ds\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right], \forall t \in T,$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\alpha t)|\bar{Z}|^2 ds\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.3}$$

Par aillieurs, (2.2) implique :

$$\sup_{t\leq T} \exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2 \leq R_\varepsilon + \sup_{t\leq T}\left|\int_t^T 2\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s||\bar{Z}_s|dB_s\right|,$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} \exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T 2\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s||\bar{Z}_s|dB_s\right|\right],$$

alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} \exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\left\langle\int_t^T 2\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s||\bar{Z}_s|dB_s\right\rangle_T^{\frac{1}{2}}\right].$$

Car $(\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} M_t\right] \leq \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_T^{\frac{1}{2}}\right])$ aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+C\mathbb{E}\left[\int_t^T 4\exp(2\alpha s)|\bar{Y}_s|^2|\bar{Z}_s|^2 dB_s\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+C\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}_s|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2 C^2\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}_s|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha \frac{s}{2})|\bar{Y}_s|(C^2\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}_s|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}_s|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}_s|^2 ds\right],
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] = \frac{2+C^2}{2}\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right],$$

ce qui nous donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2\right] \leq (2+C^2)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.3}$$

D'après (2.3) et (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|\psi(\bar{U},\bar{V})\right\|_{2,\alpha} &= \left\|(\bar{Y},\bar{Z})\right\|_{2,\alpha} \leq (3+C^2)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] \\
&\leq (3+C^2)\mathbb{E}\left[\int_0^T \varepsilon\exp(\alpha s)(\left|\bar{U}_s\right|^2+\left|\bar{V}_s\right|^2)ds\right] \\
&\leq (3+C^2)\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\alpha s)(\left|\bar{U}_s\right|^2+\left|\bar{V}_s\right|^2)ds\right] \\
&\leq (3+C^2)\varepsilon\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\alpha s)\left|\bar{U}_s\right|^2 ds\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\alpha s)\left|\bar{V}_s\right|^2 ds\right]\right) \\
&\leq (3+C^2)\varepsilon\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)\left|\bar{U}_s\right|^2 ds\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\alpha s)\left|\bar{V}_s\right|^2 ds\right]\right) \\
&\leq (3+C^2)\varepsilon\left(\int_0^T ds\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha t)\left|\bar{U}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\alpha s)\left|\bar{V}_s\right|^2 ds\right]\right).
\end{aligned}$$

On pose $\varepsilon = 2(T+1)(3+C^2)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|\psi(\bar{U},\bar{V})\right\|_{2,\alpha} &= \left\|(\bar{Y},\bar{Z})\right\|_{2,\alpha} \\
&\leq (T+1)(3+C^2)\varepsilon\left(\int_0^T ds\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha t)\left|\bar{U}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\alpha s)\left|\bar{V}_s\right|^2 ds\right]\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left\|\psi(\bar{U},\bar{V})\right\|_{2,\alpha} \leq \frac{1}{2}\left\|(\bar{U},\bar{V})\right\|_{2,\alpha}.$$

Donc l'aplication ψ est contractante de $(\mathcal{B}^2, \|\|_{2,\alpha})$ dans $(\mathcal{B}^2, \|\|_{2,\alpha})$. Elle possède donc un point fixe. C-à-dire

$$\exists!(Y,Z)\in\mathcal{B}^2 \text{ tel que } (Y,Z)=\psi(Y,Z).$$

Donc

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

Chapitre 3

Les conditions suffisantes d'optimalité pour les EDSR de type champ moyen

3.1 Introduction

Nous étudions un problème de contrôle stochastique où le système est gouverné par une équation différentielle stochastique rétrograde non linéaire (EDSR) du type champ moyen suivante :

$$\begin{cases} dy_t = -b(t, y_t^v, \mathbb{E}[y_t^v], z_t^v, \mathbb{E}[z_t^v], v_t)dt + z_t^v dB_t \\ y_T = \xi, \end{cases} \tag{3.1}$$

où b est dit le génerateur de l'EDSR (3.1), $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, satisfaisant les conditions habituelles. La variable de contrôle $v = (v_t)$, est appelé contrôle strict (régulier), est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté à valeur dans un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^m$. On note $\mathcal{U}$ la classe de tous les contrôles stricts.

L'objective est de minimise, sur l'ensemble des contrôles $\mathcal{U}$, un fonctionnel de coût de la forme

$$J(v) = \mathbb{E}\left[g(y_0^v, \mathbb{E}[y_0^v]) + \int_0^T h(t, y_t^v, \mathbb{E}[y_t^v], z_t^v, \mathbb{E}[z_t^v], v_t)dt\right], \tag{3.2}$$

où g et h sont des fonctions données et (y_t^v, z_t^v) est les trajectoires associées à v.

Un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est dit optimal s'il satisfait

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v). \tag{3.3}$$

Dans le modèle relaxé, le systéme est gouverné par l'EDSR

$$\begin{cases} dy_t^q = -\int_{\mathcal{A}} b(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], z_t^q, \mathbb{E}\left[z_t^q\right], a) q_t(da) dt + z_t^q dB_t \\ y_T^q = \xi. \end{cases} \tag{3.4}$$

Le fonctionnel de coût à minimiser sur la classe $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés est défini par :

$$J(q) = \mathbb{E}\left[g(y_0^q, \mathbb{E}(y_0^v)) + \int_0^T \int_{\mathcal{A}} h(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], z_t^q, \mathbb{E}\left[z_t^q\right], a) q_t(da) dt \right]. \tag{3.5}$$

Un contrôle relaxé μ est dit optimal s'il vérifié :

$$J(\mu) = \inf_{q \in \mathcal{R}} J(q). \tag{3.6}$$

Notre objectif dans ce chapitre, est d'établir les conditions suffisantes d'optimalités pour un système des EDSR de type champ moyen sous forme d'un principe de maximum stochastique, pour les contrôles relaxés. Pour atteindre cet objectif, nous obtenons ces résultats comme suit. Tout d'abord, nous donnons les conditions nécessaires d'optimalités pour les contrôles relaxés. L'idée est d'utiliser le fait que l'ensemble des contrôles relaxés est convexe. Nous établissons les conditions nécessaires d'optimalités en utilisant la méthode classique de la perturbation convexe (faible).

Plus précisément, si l'on note μ un contrôle relaxé optimal et q est un élément arbitraire de $\mathcal{R}$, puis pour un réel suffisamment petit $\theta > 0$ et pour chaque $t \in [0, T]$, on peut définir un contrôle perturbé comme suit

$$\mu_t^\theta = \mu_t + \theta(q_t + \mu_t).$$

Nous obtenons l'équation variationnelle de l'équation d'état, et l'inégalité variationnelle d'après l'optimalité de μ c'est-à-dire

$$0 \leq J(\mu^\theta) - J(\mu).$$

Pour parvenir à cette partie du chapitre, nous démontrons sous d'hypothéses supplémentaires minimales, que ces conditions nécessaires d'optimalités sont également suffisantes. Dans ce chapitre, nous désignons par C une constante positive et nous avons besoin des notations matricielles suivantes. On note $\mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles $d \times n$ et par $\mathcal{M}^n_{d\times n}(\mathbb{R})$ l'espace linéaire des vecteurs $M = (M_1, ..., M_d)$ où $M_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Pour tout $M, N \in \mathcal{M}^d_{n\times n}(\mathbb{R})$, $L, S \in \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$, $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{R}^n$, nous utilisons les notations suivantes

$\alpha\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \in \mathbb{R}^n$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$;

$LS = \sum\limits_{i=1}^{d} L_iS_i \in \mathbb{R}^n$, où $L_i$et S_i sont la colonne i^{th} de L et de S;

$$\begin{aligned}
ML &= \sum_{i=1}^{d} M_iL_i \in \mathbb{R}^n;\\
M\alpha\gamma &= \sum_{i=1}^{d} (M_i\alpha)\gamma_i \in \mathbb{R}^n;\\
MN &= \sum_{i=1}^{d} M_iN_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R});\\
MQN &= \sum_{i=1}^{d} M_iQN_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R});\\
MQ\gamma &= \sum_{i=1}^{d} M_iQ\gamma \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

On note L^* la transposée de la matrice L et $M^* = (M_1^*, ..., M_d^*)$.

3.2 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant aux conditions habituelles, sur lequel un $d-$dimension mouvement Brownien $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est défini. Nous supposons que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est l'augmentation $\mathbb{P}$-nuls de la filtration naturelle de B. Soit T un nombre réel strictement positif et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$.

3.2.1 Le problème de contrôle strict

Définition 3.1 *Un contrôle strict $v = (v_t)$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté à valeur dans $\mathcal{A}$ de telle sorte que*

$$\mathbb{E}\left[\sup |v_t|^2\right] < \infty.$$

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des contrôles stricts admissibles. Pour tout $v \in \mathcal{U}$, nous considérons l'EDSR contrôlée suivante

$$\begin{cases} dy_t^v = -b(t, y_t^v, \mathbb{E}\left[y_t^v\right], z_t^v, \mathbb{E}\left[z_t^v\right], v_t)dt + z_t^v dB_t \\ \qquad\qquad y_T^v = \xi, \end{cases}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times M_{n\times d}(\mathbb{R}) \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ et ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable à n dimensions de telle sorte que

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2\right] < \infty.$$

La fonction de coût à minimiser est définie de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$J(v) = \mathbb{E}\left[g(y_0^v, \mathbb{E}\left[y_0^v\right]) + \int_0^T h(t, y_t^v, \mathbb{E}\left[y_t^v\right], z_t^v, \mathbb{E}\left[z_t^v\right], v_t)dt\right],$$

où,

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ h &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times M_{n\times d}(\mathbb{R}) \times M_{n\times d}(\mathbb{R}) \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Un contrôle strict u est appelé contrôle optimal s'il satisfait

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v).$$

Nous supposons l'hypothèse suivante (H) :

Les fonctions b, g et h sont continûment différentiable par rapport à (y, z).

Ils sont majorées par $C(1 + |y| + |z|)$ et leurs dérivées, par rapport à (y, z) sont continues et uniformément bornées.

Sous l'hypothèse ci-dessus, l'équation $(3, 1)$ a une unique solution forte et le coût J est bien définie de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.

3.2.2 Le modèle relaxé

L'idée est de relaxer le problème de contrôle strict défini ci-dessus est basée sur la remplaçement de l'ensemble $\mathcal{A}$ des contrôles stricts par une classe plus large qui donne une structure topologique plus approprité. Dans le modéle relaxé, en remplaçant les processus v a valeur dans $\mathcal{A}$ par des processus q a valeur dans $\mathbb{P}(\mathcal{A})$, où $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ désigne l'espace des mesures de probabilité sur $\mathcal{A}$ muni de la topologie de la convergente stable.

Définition 3.2 *Un contrôle relaxé $(q_t)_t$ est un processus a valeurs dans $\mathbb{P}(\mathcal{A})$, progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_t$ et de telle sorte que pour chaque t ,$1_{]0,t]}.q$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Nous désignons par $\mathcal{R}$ l'ensemble de tous les contrôles relaxés.*

Remarque 3.1 *L'ensemble des contrôles stricts est injecté dans l'ensemble des contrôles relaxés par la fonction*

$$f : v \to f_v(dt, da) = dt\delta_{v_t}(da),$$

où δ_v est la mesure de Dirac concentrée en un seul point v.

Notation 1 *Si on pose*

$$\begin{aligned}
\bar{b}(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], q_t) &= \int_{\mathcal{A}} b(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], a) q_t(da), \\
\bar{h}(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], q_t) &= \int_{\mathcal{A}} h(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], a) q_t(da).
\end{aligned}$$

Alors, l'équation $(3,4)$ *devient*

$$\begin{cases} dy_t^q = -\bar{b}(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], q_t)dt + z_t^q dB_t \\ y_T^q = \xi. \end{cases} \tag{3.7}$$

Avec une fonction de coût donnée par :

$$J(q) = \mathbb{E}\left[g(y_0^q, \mathbb{E}[y_0^q]) + \int_0^T \bar{h}(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], q_t)dt\right].$$

Par conséquent , en introduisant les contrôles relaxés, nous avons remplacé l'ensemble $\mathcal{A}$ par un espace plus grand $\mathbb{P}(\mathcal{A})$. On gagné l'avantage que $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ est à la fois cmpact et convexe. De plus, les nouveaux coefficient de l'équation (3.7) et le fonctionnel de coût sont linéaires par rapport à la variable de contrôle relaxé.

Remarque 3.2 *Le cofficient $\bar{b}$ (défini dans la notation ci-dessus) vérifié les mêmes hypothèses que b. Puis, sous les hypothèses (H), $\bar{b}$ est uniformément Lipschitzienne avec une croissance linéaire. Alors par les résultats classique sur EDSR, pour chaque $q \in \mathcal{R}$ l'équation* (3.4) *admet une unique solution forte.*
D'autre part, il est facile de voir que $\bar{h}$ vérifie les mêmes hypothèses que h. Alors la fonction de coût J est bien definie de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.3 *si $q_t = \delta_{v_t}$ est une mesure de dirac concentrée en un seul point $v_t \in \mathcal{A}$, et* *pour chaque* $t \in [0,T]$ *on a*

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}} b(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], a) q_t(da) &= \int_{\mathcal{A}} b(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], a) \delta_{v_t}(da) \\ &= b(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], v_t),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}} h(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], a) q_t(da) &= \int_{\mathcal{A}} h(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], a) \delta_{v_t}(da) \\ &= h(t, y_t^q, \mathbb{E}[y_t^q], z_t^q, \mathbb{E}[z_t^q], v_t)\end{aligned}$$

Dans ce cas $(y^q, z^q) = (y^v, z^v), J(q) = J(v)$ *et nous obtenons un problème de contrôle strict.Donc, le problème des contrôle strict* $\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$, *c'est un cas particulier du problème de contrôle relaxé* $\{(3.4), (3.5), (3.6)\}$.

3.3 Les conditions suffisantes d'optimalités pour les contrôles relaxés

Dans cette section, nous étudions le problème de contrôle relaxé $\{(3.4), (3.5), (3.6)\}$, nous donnons les conditions nécessaires d'optimalités et nous établissons les conditions nécessaires d'optimalités pour ce genre de problème de contrôle stochastique.

3.3.1 Conditions nécessaires d'optimalités pour les contrôles relaxés

Puisque l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxé est convexe, alors la méthode classique pour obtenir les conditions nécessaires d'optimalités pour les contrôles relaxés est d'utiliser la méthode de perturbation convexe. Plus précisément, laissez μ un contrôle relaxé optimal et (y_t^μ, z_t^μ) la solution de l'équation $(3,4)$ contrôlée par μ. Donc, nous pouvons définir un contrôle relaxé perturbé comme suit :

$$\mu_t^\theta = \mu_t + \theta(q_t + \mu_t), \tag{3.8}$$

où, $\theta > 0$ est un réel suffisamment petit et q est un élément arbitraire de $\mathcal{R}$. Désignons par (y_t^θ, z_t^θ) la solution de l'équation (3.4) associée à μ^θ.

D'après l'optimalité de μ, l'inégalité variationnelle sera dérivée du fait que :

$$0 \leq J(\mu_t^\theta) - J(\mu). \tag{3.9}$$

Nous donnos dans la proposition précédente les conditions nécessaires d'optimalités pour les contrôles relaxés pour l'EDSR de type champ moyen (3.4).

Proposition 3.1 *Soit μ un contrôle relaxé optimal qui minimise la fonction J sur $\mathcal{R}$ et (y_t^μ, z_t^μ) la solution de* (3.4) *associée à μ. Alors, il existe un unique processus adapté p^μ, qui est la solution de l'équation différentielle stochastique (appelée équation adjointe) suivante :*

$$\begin{cases} dp_t^\mu = \left(\mathcal{H}_y(t,\mu_t) + \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{y'}(t,\mu_t)\right]\right)dt + \left(\mathcal{H}_z(t,\mu_t) + \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{z'}(t,\mu_t)\right]\right)dB_t \\ p_0^\mu = g_y(y_0^\mu, \mathbb{E}\left[y_0^\mu\right]) + \mathbb{E}\left[g_{y'}(y_0^\mu, \mathbb{E}\left[y_0^\mu\right])\right], \end{cases} \tag{3.10}$$

tel que

$$\mathcal{H}(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu) \leq \mathcal{H}(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], q_t, p_t^\mu), \forall q_t \in \mathbb{P}(\mathcal{A}), pp, ps, \tag{3.11}$$

où le Hamiltonien $\mathcal{H}$ est défini à partir $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times M_{n\times d}(\mathbb{R}) \times M_{n\times d}(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}(\mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, y, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], q, p) &= p\int_{\mathcal{A}} b(t, y, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], a) q_t(da) \\ &\quad + \int_{\mathcal{A}} h(t, y, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], a) q_t(da), \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H}_\alpha(t,\mu_t) = \mathcal{H}_\alpha(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu), \text{ pour } \alpha = y, y', z, z'.$$

3.3.2 Conditions suffisantes d'optimalités pour les contrôles relaxés

Dans ce paragraphe, nous étudions sous quelles hypothèses, les conditions nécessaures d'optimalités (3.10) devient suffisantes. Nous rappelons les hypothèses (H) et l'équation adjointe (3.10). Pour tout $q \in \mathcal{R}$, on note par (y^q, z^q) la solution de l'équation (3.5) correspondente à q.

Nous présentons dans le théorème suivant le résultat principal de ce mémoire.

Théorème 3.1 (*Conditions suffisantes d'optimalités pour les contrôles relaxés*) *Supposons que la fonction g et $(y, y', z, z') \to \mathcal{H}(t, y, y', z, z', q, p)$ sont convexe. Alors, μ est une solution optimale du problème de contrôle relaxé* $\{(3.4), (3.5), (3.6)\}$, *si elle satisfaite la condition* (3.11).

Proof. Soit μ un élément quelconque de $\mathcal{R}$ (candidat pour être optimal). Pour tout $q \in \mathcal{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} J(q) - J(\mu) &= \mathbb{E}[g(y_0^q, \mathbb{E}\left[y_0^q\right]) - g(y_0^\mu, \mathbb{E}\left[y_0^\mu\right])] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_{\mathcal{A}} h(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], z_t^q, \mathbb{E}\left[z_t^q\right], a) q_t(da) \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \int_{\mathcal{A}} h(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], a) \mu_t(da)\right) dt\right]. \end{aligned}$$

Puisque g est convexe, on a

$$g(y_0^q, \mathbb{E}\left[y_0^q\right]) - g(y_0^\mu, \mathbb{E}\left[y_0^\mu\right]) \geq g_y(y_0^\mu, \mathbb{E}\left[y_0^\mu\right])(y_0^q - y_0^\mu) + \mathbb{E}\left[g_{y'}(y_0^\mu, \mathbb{E}\left[y_0^\mu\right])\mathbb{E}\left[y_0^q - y_0^\mu\right]\right].$$

Donc

$$J(q)-J(\mu)\geq\mathbb{E}\left[g_y(y_0^\mu,\mathbb{E}\left[y_0^\mu\right])(y_0^q-y_0^\mu)+\mathbb{E}\left[g_{y'}(y_0^\mu,\mathbb{E}\left[y_0^\mu\right])\mathbb{E}\left[y_0^q-y_0^\mu\right]\right]\right] \tag{3.12}$$
$$+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_{\mathcal{A}}h(t,y_t^q,\mathbb{E}\left[y_t^q\right],z_t^q,\mathbb{E}\left[z_t^q\right],a)q_t(da)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_{\mathcal{A}}h(t,y_t^\mu,\mathbb{E}\left[y_t^\mu\right],z_t^\mu,\mathbb{E}\left[z_t^\mu\right],a)\mu_t(da)\right)dt\right].$$

On remarque à partir de (3.10) que

$$p_0^\mu=g_y(y_0^\mu,\mathbb{E}\left[y_0^\mu\right])+\mathbb{E}\left[g_{y'}(y_0^\mu,\mathbb{E}\left[y_0^\mu\right]\right].$$

Donc l'inégalité (3.12) devient

$$\begin{aligned}J(q)-J(\mu)\quad\geq\quad&\mathbb{E}\left[p_0^\mu(y_0^q-y_0^\mu)\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_{\mathcal{A}}h(t,y_t^q,\mathbb{E}\left[y_t^q\right],z_t^q,\mathbb{E}\left[z_t^q\right],a)q_t(da)\right.\right. \\ &\left.\left.-\int_{\mathcal{A}}h(t,y_t^\mu,\mathbb{E}\left[y_t^\mu\right],z_t^\mu,\mathbb{E}\left[z_t^\mu\right],a)\mu_t(da)\right)dt\right].\end{aligned} \tag{3.13}$$

En appliquant la formule d'Itô (l'intégration par partie) à $p_t^\mu(y_t^q-y_t^\mu)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}d\left(p_t^\mu(y_t^q-y_t^\mu)\right)&=p_t^\mu d(y_t^q-y_t^\mu)+(y_t^q-y_t^\mu)dp_t^\mu+d\left\langle p^\mu,y^q-y^\mu\right\rangle_t, \\ &=-p_t^\mu\left(\int_{\mathcal{A}}b(t,y_t^q,\mathbb{E}\left[y_t^q\right],z_t^q,\mathbb{E}\left[z_t^q\right],a)q_t(da)\right. \\ &\left.-\int_{\mathcal{A}}b(t,y_t^\mu,\mathbb{E}\left[y_t^\mu\right],z_t^\mu,\mathbb{E}\left[z_t^\mu\right],a)\mu_t(da)\right)dt \\ &+p_t^\mu(z_t^q-z_t^\mu)dB_t+(y_t^q-y_t^\mu)\left(\mathcal{H}_y(t,\mu_t)+\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{y'}(t,\mu_t)\right]\right)dt \\ &+(y_t^q-y_t^\mu)\left(\mathcal{H}_z(t,\mu_t)+\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{z'}(t,\mu_t)\right]\right)dB_t \\ &+\left(\mathcal{H}_z(t,\mu_t)+\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{z'}(t,\mu_t)\right]\right)(z_t^q-z_t^\mu)dt.\end{aligned}$$

Passant a l'intégrale de 0 à T, on trouve :

$$
\begin{aligned}
& p_T^\mu(y_T^q - y_T^\mu) - p_0^\mu(y_0^q - y_0^\mu) \\
= \quad & -\int_0^T p_t^\mu \left(\int_{\mathcal{A}} b(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], z_t^q, \mathbb{E}\left[z_t^q\right], a) q_t(da) - \int_{\mathcal{A}} b(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], a) \mu_t(da) \right) dt \\
& + \int_0^T p_t^\mu (z_t^q - z_t^\mu) dB_t + \int_0^T (y_t^q - y_t^\mu) \left(\mathcal{H}_y(t, \mu_t) + \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{y'}(t, \mu_t)\right]\right) dt \\
& + \int_0^T (y_t^q - y_t^\mu) \left(\mathcal{H}_z(t, \mu_t) + \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{z'}(t, \mu_t)\right]\right) dB_t + \int_0^T \left(\mathcal{H}_z(t, \mu_t) + \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{z'}(t, \mu_t)\right]\right)(z_t^q - z_t^\mu) dt.
\end{aligned}
$$

Passant à l'espérance, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[p_0^\mu(y_0^q - y_0^\mu)] = \mathbb{E} & \left[\int_0^T p_t^\mu \left(\int_{\mathcal{A}} b(t, y_t^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], z_t^q, \mathbb{E}\left[z_t^q\right], a) q_t(da) \right.\right. \\
& \left.\left. \qquad - \int_{\mathcal{A}} b(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], a) \mu_t(da) \right) dt \right] \\
& - \mathbb{E}\left[\int_0^T (y_t^q - y_t^\mu) \left(\mathcal{H}_y(t, \mu_t) + \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{y'}(t, \mu_t)\right]\right) dt \right] \\
& - \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\mathcal{H}_z(t, \mu_t) + \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{z'}(t, \mu_t)\right]\right)(z_t^q - z_t^\mu) dt \right].
\end{aligned}
$$

Remplacant cette quanlité dans l'équation (3.13), on obtient :

$$
\begin{aligned}
J(q)-J(\mu) \geq\ & \mathbb{E}\left[\int_0^T p_t^\mu\left(\int_{\mathcal{A}} b(t,y_t^q,\mathbb{E}\left[y_t^q\right],z_t^q,\mathbb{E}\left[z_t^q\right],a)q_t(da)\right.\right. \\
& \left.\left. -\int_{\mathcal{A}} b(t,y_t^\mu,\mathbb{E}\left[y_t^\mu\right],z_t^\mu,\mathbb{E}\left[z_t^\mu\right],a)\mu_t(da)\right)dt\right] \\
& -\mathbb{E}\left[\int_0^T (y_t^q-y_t^\mu)\left(\mathcal{H}_y(t,\mu_t)+\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{y'}(t,\mu_t)\right]\right)dt\right] \\
& -\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\mathcal{H}_z(t,\mu_t)+\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{z'}(t,\mu_t)\right]\right)(z_t^q-z_t^\mu)dt\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_{\mathcal{A}} h(t,y_t^q,\mathbb{E}\left[y_t^q\right],z_t^q,\mathbb{E}\left[z_t^q\right],a)q_t(da)\right.\right. \\
& \left.\left. -\int_{\mathcal{A}} h(t,y_t^\mu,\mathbb{E}\left[y_t^\mu\right],z_t^\mu,\mathbb{E}\left[z_t^\mu\right],a)\mu_t(da)\right)dt\right].
\end{aligned}
$$

D'après la définition de Hamoltonien $\mathcal{H}$, on a :

$$
\begin{aligned}
J(q)-J(\mu) \geq\ & \mathbb{E}\left[\mathcal{H}(t,y^q,\mathbb{E}\left[y_t^q\right],z_t^q,\mathbb{E}\left[z_t^q\right],q_t,p_t^\mu)-\mathcal{H}(t,y_t^\mu,\mathbb{E}\left[y_t^\mu\right],z_t^\mu,\mathbb{E}\left[z_t^\mu\right],\mu_t,p_t^\mu)\right] \\
& -\mathbb{E}\left[\int_0^T (y_t^q-y_t^\mu)\left(\mathcal{H}_y(t,\mu_t)+\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{y'}(t,\mu_t)\right]\right)dt\right] \\
& -\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\mathcal{H}_z(t,\mu_t)+\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{z'}(t,\mu_t)\right]\right)(z_t^q-z_t^\mu)dt\right]. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Comme $\mathcal{H}$ est convexe en (y, z) et linéaire en μ, en utilisant (3.11), nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(t, y^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], z_t^q, \mathbb{E}\left[z_t^q\right], q_t, p_t^\mu) - \mathcal{H}(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu) \\
&\geq \mathcal{H}_y(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu)(y_t^q - y_t^\mu) \\
&+ \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{y'}(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu)\mathbb{E}\left[y_t^q - y_t^\mu\right]\right] \\
&+ \mathcal{H}_z(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu)(z_t^q - z_t^\mu) \\
&+ \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{z'}(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu)\mathbb{E}\left[z_t^q - z_t^\mu\right]\right],
\end{aligned}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(t, y^q, \mathbb{E}\left[y_t^q\right], z_t^q, \mathbb{E}\left[z_t^q\right], q_t, p_t^\mu) - \mathcal{H}(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu) \\
&- \mathcal{H}_y(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu)(y_t^q - y_t^\mu) \\
&- \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{y'}(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu)\mathbb{E}\left[y_t^q - y_t^\mu\right]\right] \\
&- \mathcal{H}_z(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu)(z_t^q - z_t^\mu) \\
&- \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{z'}(t, y_t^\mu, \mathbb{E}\left[y_t^\mu\right], z_t^\mu, \mathbb{E}\left[z_t^\mu\right], \mu_t, p_t^\mu)\mathbb{E}\left[z_t^q - z_t^\mu\right]\right] \geq 0,
\end{aligned}$$

remplaçant cette différence dans (3.14), nous obtenons

$$J(q) - J(\mu) \geq 0, \forall q_t \in \mathbb{P}\left(\mathcal{A}\right).$$

■

Ce qui termine la preuve du théorème.

Conclusion

On a établi dans ce mémoire les conditions suffissantes d'optimalité satisfaites par un contrôle relaxé admissible pour qu'il soit optimal, pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques rétrogrades non linéaires de type champ moyen (EDSRs). Ici les coefficients dépendent des processus d'état ainsi que de leur distribution via l'espérance d'une fonction. De plus, la fonctionnelle de coût est également de type champ moyen. Comme l'ensemble des contrôle relaxés est convexe, donc la methode de démonstration est basée sur la méthode classique pour le cas non linéaire où on a utiliser une perturbation convexe.

Le probléme de contrôle relaxé est une généralisation du problème de contrôle strict. En effet, si $q_t(da) = \delta_t(da)$ est une mesure de Dirac concentrée en un seul point qu'est le contrôle strict $v_t \in \mathcal{A}$, alors nous obtenons que le problème de contrôle strict est un cas particulier du problème de contrôle relaxé.

Bibliographie

[1] Bismut, J.M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44(2) ; 384 –404.

[2] Pardoux, E.& Peng, S. G. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems Control Lett., 14(1), 55 – 61.

[3] Dellacherie, C et Mayer. P.A, (1980). Probabilités et Potentiel. Hermann.

[4] Skorokhod, A.V, (1965). Studies in theory of random processes. Reading Mass. Addi-son Wesley.

[5] Chassagneux, J.F, Chotai.H, and Muûls. M, (2017). A Forward-Backward SDEs Approach to Pricing in Carbon Markets. Springer.

[6] Philippe Briand, (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique du processus stochastique X.
u_t	Variable de contrôle strict.
$\mathcal{U}$	L'ensemble des contrôles stricts admrssibles.
$\mathcal{A}$	L'ensemble des valeures des contrôles stricts.
q_t	Variable de contrôle relaxé.
$\mathcal{R}$	L'ensemble des contrôles relaxés admrssibles.
$\mathbb{P}(\mathcal{A})$	L'espace des mesures de probabilité sur $\mathcal{A}$.
δ_v	Masse de Dirac concentrée en un point v.
EDS	Equation différentielle stochastique.
$EDSR$	Equation différentielle stochastique rétrograde.
$\mathcal{F}_t$	Filtration
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilté filtré.
ξ	La condition terminale de l'EDSR.
b	Le générateur de de l'EDSR.
B_t	Un mouvement Brownien.
$\mathcal{H}$	Le Hamiltonien.

Résumé

Dans ce travail ,nous étudions Les conditions suffisantes d'optimalité des contrôles pour les EDSR de type champ moyen .Dans le premier chapitre, nous donnons quelque généralités de calcul stochastique .le deuxième chapitre est consacré à l'étude des résultats d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dans le cas le générateur est Lipschitzien en y et Dans le troisième chapitre nous établir les conditions suffisantes d'optimalités pour un système de type champ moyen sous forme d'un principe de maximum stochastique ,pour les contrôles relaxés.

Abstract

In this work we study The sufficient conditions of optimality of the controls for the EDSR of type medium field.in the first chapter, we give some generalities of stohastic calculus.the second chapter is dedicated to thestudy of the results of existence and uniqueneness of solutions of BSDEs in the case the generator is Lipschitzian in y and z. In the third ,we introduce the we establish the sufficient conditions of optimalities for a mean-field-type system in the form of a stochastic maximum principle, for relaxed controls.

الملخص

في هذا العمل نقوم بدراسة الشروط الكافية لأمثلة ضوابط للمعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية التراجعية ، وفي الفصل الأول نقوم بتقديم بعض المفاهيم العامة في الحساب العشوائي الزمني ، الفصل الثاني يتضمن برهان نتائج تتعلق بوجود ووحدانية الحل للمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية في الحالة العامة لبشيتز.وفي فصل الثالث ندرس الشروط الكافية للمثاليات لنظام متوسط المجال في شكل مبدأ أقصى عشوائي لعناصر التحكم المريحة.