République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Merieme TADJINE

Titre de mémoire :

Les conditions nécessaires d'optimalité pour l'EDSPRs

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	LABED Saloua	UMKB	Président
Dr.	GHERBAL Boulakhras	UMKB	Encadreur
Dr.	GATT Rafika	UMKB	Examinateur

september 2020

Dédicace

Je dédie mon travail

A

Mes parents Abdelrahmen et Aicha sont trés proche de mon coeur

A mes frères Karime, Boulame, Houssine et ma soeur Batoule.

Je suis trés fier.

A toutes mes amies proche Hanine, Yasmine, Samia, Donia, Nejète

abd ou Bentahar et mes collègues de

ma promotion de Mathématiques.

Tadjine Merieme

REMERCIEMENTS

Je remercie "Dieu" pour finir ce travail d'abord et tous ceux qui m'ont donné un coup de main et mes remerciement à mon encadreur. Dr. Boulakhras GHERBAL qui a pris tout le soin.

Mes remerciement vont aussi à tous les membres du jury qui ont bien acceptent de lire ce modeste mémoire pour l'évaluer.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades $(EDSPR)$ ont été introduites par Bismut en 1973 dans le but de résoudre un problème de théorie du contrôle. A l'époque, il s'agissait de résoudre un système découplé ne comprenant qu'une équation différentielle stochastique progressive classique (EDSP) et une équation différentielle stochastique linéaire rétrograde qui représente l'équation adjointe.

La recherche s'est naturellement concentrée sur l'étude de l'équation rétrograde car, dans ce contexte, elle seule posait réellement des difficultés. Des nombreuses avancées théoriques ont ainsi été réalisées sur le thème des équations différentielles stochastique rétrogrades, et bon nombre de domaines ont pu en profiter.

L'objectif de cette mémoire est d'étudier un problème de contrôle relaxé pour des systèmes dirigés par des équations différentielles stochastique progressives rétrogrades (EDSPR). En particulier, on va établir les conditions nécessaires d'optimalité pour le contrôle relaxé optimal pour un problème de contrôle gouverné par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} dx_t^q = \int_U b(t, x_t^q, a) q_t\,(da)\,dt + \sigma(t, x_t^q) dW_t, \\ x_0^q = \xi, \\ dy_t^q = -\int_U f(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t\,(da)\,dt + z_t^q dW_t, \\ y_T^q = \varphi(x_t^q), \end{array}\right. \tag{1}$$

où b, σ, f et φ sont fonctions donnés, $W = (W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, satisfaisant les conditions habituelles et $q = (q_t)$ c'est la variable de contrôle relaxé qu'est une mesure de probabilité à valeur dans

$\mathbb{P}(U)$ avec U un sous ensemble de $\mathbb{R}^k$.

La fonction de coût a minimiser sur l'ensemble des contrôles relaxés $\mathcal{R}$ est définie par :

$$J(q)=\mathbb{E}\left[g(x_T^q)+h(y_0^q)+\int_0^T\int_U l(t,x_t^q,y_t^q,z_t^q,a)q_t(da)dt\right], \tag{2}$$

et un contrôle relaxé admissible μ est dit optimal s'il vérifie :

$$J(\mu)=\inf_{q\in\mathcal{R}} J(q). \tag{3}$$

Le mémoire est organisé comme suite, nous avons deux chapitres. Dans le premier chapitre, nous donnons un rappel sur le calcul stochastique ainsi que les théories de probabilités : espace de probabilité, processus stochastique, processus de mouvement Brownien, l'espérance, martingale à temps continu, l'intégrale stochastique, théorème d'existence et d'unicité de solution pour les équations différentielle stochastique et des résultats principaux utilisables pour le prochain chapitre.

Notre objectif dans le deuxième chapitre, est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité sous la forme de principe de maximum stochastique, pour les contrôles relaxés. Pour atteindre cet objectif, nous donnons les étapes nécessaires. L'idée est d'utiliser le fait que l'ensemble des contrôles relaxés est convexe, donc dans la première étape en utilisant la manière classique de la méthode de perturbation convexe. En suite dans le deuxième étape nous allons estimer entre le contrôle relaxé perturbé μ^θ et le contrôle relaxé optimal μ et après on linéarité notre système pour obtenir les équations variationnelles. Nous tirons l'inégalité variationnelle d'après l'optimalité μ et le fait que

$$0\leq J(\mu^\theta)-J(\mu).$$

Dans le dernière étape, on défini les équations adjointes correspondantes a notre système des (EDSPR). En utilisant l'inégalité variationnelle et application de la formule d'Itô, pour démontre notre résultat de principe de maximum.

Chapitre 1

Calcul stochastique

Dans ce chapitre on va rappeler les notions essentielles en théorie des calculs stochastique, en suite nous rappelons l'intégrale stochastique et les équations différentielles stochastiques.

1.1 Espace de probabilité

Définition 1.1.1 *On appelle un espace de probabilité, tout triple* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *où* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace mesurable et* $\mathbb{P}$ *est une probabilité sur* $\mathcal{F}$.

Proposition 1.1.1 *L'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est dit complet si* $N \subset \mathcal{F}$ *telle que* N *la famille de toute les ensembles négligeable de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.1.1 Variable aléatoire

Définition 1.1.2 *Soient* (Ω, A) *et* (E, F) *deux espaces mesurables. On appelle variable aléatoire toute application de* Ω *dans* E *telle que :* $\forall B \in F$, $X^{-1}(B) \in A$ *avec*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

Définition 1.1.3 *On dit que* X *définie sur un espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans un espace me-*

surable (E, B), *est mesurable si* $X^{-1}(B) \subset \mathcal{F}$, $\forall A \in B$ *et*

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \ / X(\omega) \in A\} = (X \in B) \in \mathcal{F}.$$

1.2 Processus stochastique

Définition 1.2.1 *Soit* $T \subset \mathbb{R}_+$, *toute famille* $X = (X_t)_{t \in T}$ *des variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, *est appelée un processus stochastique.*

– Pour t fixé, X_t est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

– Pour ω fixé, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est appelée trajectoire.

Remarque 1.2.1 *Un processus stochastique peut être vu comme une famille des variables aléatoires indixée par le temps : pour* $t \in T$

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d)).$$

Si T est un ensemble dénombrable totalement ordonnée comme $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+$, X est appelé une suite des variables aléatoires ou un processus à temps discret.

Si $T \subset \mathbb{R}_+$, X est appelé un processus stochastique à temps continu.

Notation 1.2.1 *Un processus stochastique peut être vu comme une fonction de deux variable*:

$$\underset{(\omega,t) \longrightarrow X_t(\omega),}{X : \Omega * T \mapsto \mathbb{R}^d}$$

sera notée X *où* $(X_t)_{t \in T}$.

Définition 1.2.2 *Soit* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *un processus stochastique définie sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Une filtration naturellement associée à* X *c'est la filtration* $\mathcal{F}_t$.

– *Le processus* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est dit à trajectoire continue si pour tout* $\omega \in \Omega$, *la fonction* $t \longrightarrow X_t(\omega)$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.

– *Le processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est dit stochastiquement continue en probabilité au point* $s \in \mathbb{R}_+$ *si*

$$\lim_{t\longrightarrow s} \mathbb{P}(|X_t - X_s| > \varepsilon) = 0,\ \forall\varepsilon > 0.$$

Remarque 1.2.2 *La continuité stochastique n'implique pas la continuité des trajectoires du processus.*

1.2.1 Filtration

Définition 1.2.3 *Une filtration sur un espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$, *c'est une famille* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *croissante au sens de l'inclusion de sous-tribus de* $\mathcal{F}$*.*

On supposera en général $t \in \mathbb{R}^+$ mais on peut avoir $t \in \mathbb{N}$, dans tous les cas on a :

$$\forall\ s \leq t,\ \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Remarque 1.2.3 *Un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *muni de filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, *devient* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ *qu'est un espace de probabilité filtré.*

Remarque 1.2.4 *Un processus est toujours adapté à sa filtration naturelle.*

Définition 1.2.4 *On dit que* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-adapté si pour tout* $t \geq 0$, *la variable aléatoire* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 1.2.5 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est progressivement mesurable pour la filtration* $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ *si* $\forall t \geq 0$, $\forall A \in B(\mathbb{R})$:

$$\{(s, \omega)/0 \leq s \leq t;\ X_s(\omega) \in A\} \in B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t,$$

c'est à dire que l'application sur $([0, t] \times \Omega, B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$:$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable.

1.3 Mouvement Brownien

On se donne un espace de probabilité muni d'une filtration $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \mathbb{P})$.

Définition 1.3.1 *On appelle mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles, $(W_t)_{t\geq 0}$ qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :*

- Continuité : $\mathbb{P}$-$p.s$ la fonction $s \longrightarrow W_t(\omega)$ est une fonction continue.
- Indépendance des accroissement : si $s \leq t$, $W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(W_r, r \leq s)$ est de loi gaussienne centré de variance $(t-s)$.

Définition 1.3.2 *Un mouvement Brownien (MB) est dit standard si : $W_0 = 0\ \mathbb{P} - p.s$*

$$\mathbb{E}\left[W_t\right] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left[W_t^2\right] = t.$$

Dans la suite on parlera de mouvement Brownien sans précision, il s'agira d'un mouvement Brownien standard.

Proposition 1.3.1 *Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard, alors W_t est un processus gaussien i.e. pour tout n et tous $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

W est mouvement Brownien standard si et seulement si W est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance : $cov(W_t, W_s) = t \wedge s = \min(t, s)$.

1.3.1 Espérance

Définition 1.3.3 *X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on appelle espérance de X, et on note $\mathbb{E}[X]$, l'intégrale de Lebesgue de X relativement à la mesure $\mathbb{P}$:*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

Définition 1.3.4 *Soit X un vecteur aléatoire continu à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ avec fonction de densité $f_X : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$.*

Soit $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) f_X(x) dx.$$

1.3.2 Espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire réelle intégrable et $\mathcal{G}$ une sous -tribu de $\mathcal{F}$. Il existe une unique variable aléatoire réelle Y- à un négligeable près- appelée espérance conditionnelle de X relativement à $\mathcal{G}$, telle que :

– Y est $\mathcal{G}-$mesurable.

– Y est intégrable.

– $\forall G \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}[X/G] = \mathbb{E}[Y/G]$ c'est-à-dire :

$$\int_G X(\omega)P(d\omega) = \int_G Y(\omega)P(d\omega).$$

Définition 1.3.5 *Soit Z une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on a :*

$$\mathbb{E}[X/Z] = \mathbb{E}[X/\sigma(Z)].$$

1.3.3 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Propriété 1.3.1 *$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité, G sous tribu de $\mathcal{F}$ et X, Y deux variables aléatoires dans $L^1(\Omega, \mathbb{P})$, on a*

– Linéarité si X, $Y \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, $\forall a$, $b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[aX + bY/G\right] = a\mathbb{E}\left[X/G\right] + b\mathbb{E}\left[Y/G\right].$$

– Croissance :

$$X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}\left[X/G\right] \leq \mathbb{E}\left[Y/G\right].$$

– $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X/G\right]\right] = \mathbb{E}(X)$.

– Si X est $G-$mesurable alors :

$$\mathbb{E}\left[X/G\right] = X.$$

– Si Y est une variable aléatoire G-mesurable alors :

$$\mathbb{E}\left[XY/G\right] = Y\mathbb{E}\left[X/G\right].$$

– Si X indépendant de G alors:

$$\mathbb{E}\left[X/G\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

– Soient G, H deux sous tribus de $\mathcal{F}$, si $H \subset G$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X/G\right]/H\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X/H\right]/G\right] = \mathbb{E}\left[X/H\right].$$

– Si X variable aléatoire telle que $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $p \geq 1$ alors:

$$\left\|\mathbb{E}\left[X/G\right]\right\|_{L^p} \leq \left\|X\right\|_{L^p}.$$

– L'espérance conditionnelle est dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.4 Martingale à temps continue

Dans ce paragraphe on a un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration c.-à-d. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Ainsi, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ par hypothèse, et cette propriété joue un rôle important. Un processus réel X sera dit de puissance $p^{ième}$ intégrable si $\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] < \infty$ pour tout t, et simplement intégrable quand $p = 1$.

Définition 1.4.1 *Un processus réel adapté et intégrable X est appelé*

– Une martingale si

$$\mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_s\right] = X_s \forall t > s.$$

– Une sur-martingale si

$$\mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_s\right] \leq X_s \forall t > s.$$

– Une sous-martingale si

$$\mathbb{E}\left[X_t/\mathcal{F}_s\right] \geq X.$$

– Une martingale est à la fois une sous-martingale est une sur-martingale .

– Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale si seulement si $(-X_t)_{t\geq 0}$ est sur-martingale.

– Toute martingale X vérifie :

$$\forall t \leq T, \ \mathbb{E}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right].$$

– Si $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ sont deux martingales, alors $(X_t + Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

– Si $(X_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{F}$-martingale, alors $(\mathbb{E}\left[X_t\right])_{t\in\mathbb{R}_+}$ est constante (resp croissante, resp décroissante).

1.5 Intégrale stochastique

On cherche à définir la variable aléatoire $\int_0^t \theta_s dW_s$ quand $\{\theta_s, \ s \geq 0\}$ est un processus stochastique. Le caractère aléatoire de θ exige des conditions supplémentaires par rapport a l'intégrale de Wiener, on note par $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de mouvement Brownien.

Définition 1.5.1 *On dit que* $\{\theta_t,\ t\geq 0\}$ *est un "bon processus" s'il est* $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in\mathbb{R}_+}$*-adapté, continu à gauche limité à droite et*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] \leq \infty, \forall t \geq 0.$$

Propriété 1.5.1 *Pour tout "bon processus"* θ *et* φ *et pour* $s,\ t\geq 0$ *on a*

$$\mathbb{E}\left[I_s(\varphi)I_t(\theta)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{s\wedge t} \theta_u\ \varphi_u\ du\right],$$

de plus le processus

$$I_t(\theta)I_t(\varphi) = \int_0^t \theta_u\varphi_u du,$$

est une $(\mathcal{F}_t^W)$*-martingale.*

Définition 1.5.2 *Un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est appelé processus élémentaire s'il existe une subdivision* $0=t_0\leq t_1\leq ...\leq t_n=T$ *est un processus discret* $(X_i)_{i\in[0,n-1]}$ *tel que tout* X_i *est* $\mathcal{F}_{t_i}$*-adapté et dans* $L^2(\Omega)$ *tel que :*

$$X_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega)\ \mathbf{I}_{]t_i,t_{i+1}]}(t).$$

On note ε l'ensemble des processus élémentaires qui est un sous espace de $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega,[0,T])$.

Définition 1.5.3 *(Les processus d'Itô) ces sont des processus à valeurs réelles qui s'écrivent sous la forme :*

– $\forall 0\leq t\leq T$,

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

– b_s est un processus $\mathcal{F}_t^W - adapt\acute{e}$ tel que

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty.$$

– σ_s est un "*bon processus local*"(continu à droite limité à gauche, $\mathcal{F}_t^W$-adapté et

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty, \; p.s., \; \forall t \geq 0.$$

On écrit généralement le processus d'Itô en utilisant la forme différentielle (EDS *équation différentielle stochastique*)

$$\begin{cases} dX_t = b_t \; dt + \sigma_t \; dW_t, \\ X_0 = x, \; \text{condition initiale.} \end{cases}$$

b_t s'appelle la dérivée ($drift$) de processus X et σ_t s'appelle le coefficient de diffusion (*volatilité*).

– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, la formule d'Itô visée à donner une formule de changement de variable par le processus $f(X_t)$ qui sera un processus d'Itô.

Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors :

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\left\langle X, X \right\rangle_s \forall t \leq T,$$

si f à des dérivées bornées, et si on a

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$

cette formule s'écrite

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d < X_t >,$$

et

$$df(X_t) = (f'(X_t)b_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2)dt + f'(X_t)\sigma_t dW_t,$$

donc $f(X_t)$ est un processus d'Itô.

– Soit

$$U : \underset{(t,x)\longrightarrow U(t,x),}{[0,\infty[\times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}.}$$

Une fonction continûment différentiable par rapport à t et deux fois continûment différentiable par rapport à x. Alors le processus stochastique $Y_t = U(t, X_t)$ satisfait l'équation

$$dY_t = \frac{\partial U}{\partial t}(t, X_t)\ dt + \frac{\partial U}{\partial x}(t, X_t)\,[f_t\ dt + g_t\ dW_t] + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, X_t) g_t^2\ dt. \tag{1.1}$$

Proposition 1.5.1 (Intégration par parties) *:Si X et Y deux processus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_S + d\left\langle X, Y\right\rangle_s.$$

1.6 Équation différentielle stochastique (EDS)

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\ dt\ + \sigma(t, X_t)\ dW_t \\ \qquad X_0 = x, \end{cases} \tag{1.2}$$

où sous forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\ ds\ + \int_0^t \sigma(s, X_s)\ dW_s.$$

– Soient n, $d \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n(condition\ initiale)$, et $(W_t)_{t\geq 0}$ est un $MB\ d-dimensionnel$.

– Les fonctions

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ et } \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d},$$

sont mesurables et bornées.

L'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients b et σ, l'EDS (1.2) a une unique solution.

1.6.1 Solution forte d'EDS

Définition 1.6.1 *Une solution de l'EDS (1.2) avec condition initiale x, c'est un processus continu X tel que*:

- X est *progressivement mesurable.*
- On a la condition de régularité

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\{|b(s,X_s)| + \|\sigma(s,X_s)\|^2\right\} ds\right] < +\infty,$$

où $\|\sigma\|^2 = trace(\sigma\sigma^*)$.

- $\mathbb{P} - p.s$ on a :

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\ dW_s,\ 0 \leq t \leq T.$$

Théorème 1.6.1 (Existence et unicité) *:Soient b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante λ telle que, pour tout $t \in [0,T]$, x, $y \in \mathbb{R}^n$,*

1) Condition de *Lipschitz* :

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq \lambda |x-y|.$$

2) Condition de croissance linéaire : Il existe une constante $\lambda > 0$, telle que

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq \lambda(1+|x|),$$

et de plus, la condition initiale $X_0 = x$ est indépendante de $(W_t)_{t\geq 0}$ et est de carré intégrable *i.e.*

$$\mathbb{E}\left[|x|^2\right] < \infty.$$

Alors l'EDS (1.2) admet, pour toute condition initiale x, une unique solution forte X_t, pour tout t.

1.6.2 Résultats utilisés

Lemme 1.6.1 (Lemme de Gronwall) *: Soit $T > 0$ et soit g une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle $[0, T]$.*

Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$:

$$g(t) \leq b \int_0^t g(s)ds + a.$$

Alors, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Théorème 1.6.2 (Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy "BDG") *Pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives c_p et C_p*

telles que, pour toute martingale locale continue $X = (X_t)_{t\geq 0}$, nul en 0 :

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 1.6.1 *En particulier, si $T \geq 0$*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Proposition 1.6.1 (Inégalité de Young) *Soient* a, $b \geq 0$ *et* $1 < p$, $q < +\infty$ *deux exposants conjugués i.e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Théorème 1.6.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit* $(E, \langle ., . \rangle)$ *un espace préhilbertien réel ou complexe. Alors, pour tous vecteurs* X *et* Y *de* E,

$$\forall (x, y) \in E^2, \;\; |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \,,$$

Théorème 1.6.4 (Formule de Taylor avec reste intégrale) *Supposons que* f *soit de classe* C^{n+1} *sur* I. *Alors, pour tout* $h \in \mathbb{R}$ *tel que* $x_0 + h$ *appartienne à* I *on a*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) dt.$$

Chapitre 2

Les conditions nécessaires d'optimalité pour l'EDSPR

2.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre, un problème de contrôle stochastique relaxé, où le système est gouverné par une équation différentielle stochastique progressive rétrograde non linéaire $(EDSPR)$.

L'idée d'utiliser les contrôles relaxés est basée sur le remplacement des processus (v_t) a valeurs dans un sous ensemble U de $\mathbb{R}^k$, par une autre classe des processus (q_t) à valeurs dans $\mathbb{P}(U)$, où $\mathbb{P}(U)$ est l'espace de mesures de probabilité sur U muni par la topologie de la convergence stable.

Cette nouvelle classe de processus est appelée contrôles relaxés qu'est riche par une structure de compacité et de convexité, pour la quelle le problème de contrôle dévient résolvable.

Le problème de contrôle relaxé est une généralisation du contrôle strict. En effet, si $q_t(da) = \delta_{v_t}(da)$ est une mesure Dirac concentrée à un seul point $v_t \in U$, alors nous obtenons un problème de contrôle strict comme un cas particulier du problème de contrôle relaxé.

Notre objectif dans ce chapitre, est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité sous la forme du principe de maximum stochastique pour les contrôles relaxés. Pour atteindre cet objectif, nous utilisant le fait que l'ensemble des contrôles relaxés est convexe, pour appliquer la méthode de perturbation convexe. Plus précisément, si on note par μ un contrôle relaxé optimal et par q un élément arbitraire de $\mathcal{R}$, puis $\theta > 0$ suffisamment petit et pour chaque $t \in [0, T]$, nous pouvons définir un contrôle relaxé perturbé comme suit

$$\mu_t^\theta = \mu_t + \theta(q_t - \mu_t).$$

Nous obtenons l'équation variationnelle de l'équation de l'état, et l'inégalité variationnelle d'après l'inégalité

$$0 \leq J(\mu^\theta) - J(\mu).$$

2.2 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles, sur lequel un mouvement Brownien d-dimension, $W = (W_t)_{t\geq 0}$ est défini. Nous supposons que $(\mathcal{F}_t)$ c'est la $\mathbb{P}$-augmentation de la filtration naturelle de W. Soit T un nombre réel strictement positive et U un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^k$.

2.2.1 Le problème de contrôle strict

Définition 2.2.1 *Un contrôle strict $v = (v_t)$, est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté à valeur dans U de telle sorte que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |v_t|^2\right] < \infty.$$

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des contrôles stricts admissibles. Pour tout $v \in \mathcal{U}$, nous considérons l'$EDSPR$ contrôlée suivante

$$\begin{cases} dx_t^v = b(t, x_t^v, v_t)dt + \sigma(t, x_t^v)dW_t, \\ x_0^v = \xi, \\ dy_t^v = -f(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t)dt + z_t^v dW_t, \\ y_T^v = \varphi(x_T^v), \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longmapsto \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}),$$

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times U \longmapsto \mathbb{R}^m,$$

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m,$$

et ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable à n-dimension telle que

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2\right] < \infty.$$

La fonction de coût à minimiser, est définie de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$J(v) = \mathbb{E}\left[g(x_T^v) + h(y_0^v) + \int_0^T l(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t)dt\right], \tag{2.2}$$

où,

$$g : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R},$$

$$h : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R},$$

$$l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times U \longmapsto \mathbb{R}.$$

Un contrôle strict μ est appelé contrôle optimal s'il satisfait

$$J(\mu) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v). \tag{2.3}$$

Supposons les hypothèses (H) suivante :

b, σ, f, g, h, l, φ sont des fonctions continûment différentiable par rapport a (x, y, z), elles sont majorées par $C(1 + |x| + |y| + |z| + |v|)$ et leurs dérivées par rapport a (x, y, z) sont continues et bornées.

Sous cette hypothèse et pour tout $v \in \mathcal{U}$, l'équation (2.1) admet une solution forte unique et la fonction de coût J est bien définie de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.

2.2.2 Modèle relaxé

Définition 2.2.2 *Un contrôle relaxé $(q_t)_t$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{P}(U)$, progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_t$ et de telle sorte que pour chaque t, $I_{]0,t]}.\ q$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Nous désignons par $\mathcal{R}$ l'ensemble de tous les contrôles relaxés.*

Remarque 2.2.1 *L'ensemble des contrôles stricts est injecté dans l'ensemble des contrôles relaxés par la fonction*

$$\Psi : v \mapsto \Psi_v(dt; da) = dt\delta_{v_t}(da),$$

où δ_v est la mesure de Dirac concentrée en un seul point v. Pour tout $q \in \mathcal{R}$, nous considérons $(EDSPR)$ relaxé suivante

$$\begin{cases} dx_t^q = \int\limits_U b(t, x_t^q, a) q_t(da)dt + \sigma(t, x_t^q)dW_t, \\ x_0^q = \xi, \\ dy_t^q = -\int\limits_U f(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da)dt + z_t^q dW_t, \\ y_T^q = \varphi(x_T^q). \end{cases} \tag{2.4}$$

La fonction de coût à minimiser sur l'ensemble des contrôles relaxés, est défini de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$J(q) = \mathbb{E}\left[g(x_T^q) + h(y_0^q) + \int_0^T \int_U l(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt \right]. \tag{2.5}$$

Un contrôle relaxé μ est appelle contrôle optimal s'il satisfait :

$$J(\mu) = \inf_{q \in \mathcal{R}} J(q). \tag{2.6}$$

Notation 2.2.1 *Si nous posons :*

$$\begin{aligned}
\bar{b}(t, x_t^q, q_t) &= \int_U b(t, x_t^q, a) q_t(da), \\
\bar{\sigma}(t, x_t^q) &= \sigma(t, x_t^q), \\
\bar{f}(t, x_t^q, q_t) &= \int_U f(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da), \\
\bar{l}(t, x_t^q, q_t) &= \int_U l(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da).
\end{aligned}$$

Alors, l'équation (2.4) devient

$$\left\{ \begin{array}{c}
dx_t^q = \bar{b}(t, x_t^q, q_t) dt + \bar{\sigma}(t, x_t^q) dW_t, \\
x_0^q = \xi, \\
dy_t^q = -\bar{f}(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, q_t) dt + z_t^q dW_t, \\
y_T^q = \varphi(x_T^q),
\end{array} \right. \tag{2.7}$$

et la fonction de coût devient :

$$J(q) = \mathbb{E}\left[g(x_T^q) + h(y_0^q) + \int_0^T \bar{l}(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, q_t) dt \right]. \tag{2.8}$$

Remarque 2.2.2 *Les coefficients $\bar{b}$, $\bar{\sigma}$ et $\bar{f}$ (définies précédemment) vérifier respectivement les mêmes hypothèses que b, σ et f. Puis, sous hypothèses (H), $\bar{b}$, $\bar{\sigma}$ et $\bar{f}$ sont uniformément Lipschitziennes et à croissance linéaire. Alors les résultats classiques sur l'EDSPR, pour tout $q \in \mathcal{R}$ l'équation (2.7) admet une unique solution forte (x_t^q, y_t^q, z_t^q). Par conséquent, pour tout $q \in \mathcal{R}$ l'équation (2.4) possède une unique solution forte.*

D'autre part, il est facile de voir $\bar{l}$ qui vérifie les mêmes hypothèses que l. Alors le fonctionnel coût J est bien défini sur $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.2.3 *Si $q_t = \delta_{v_t}$ est une mesure de Dirac concentrée à un seul point $v_t \in U$, alors pour tout $t \in [0,T]$ nous avons*

$$\int_U b(t, x_t^q, a) q_t(da) = \int_U b(t, x_t^q, a) \delta_{v_t}(da) = b(t, x_t^q, v_t),$$

$$\int_U f(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) = \int_U f(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) \delta_{v_t}(da) = f(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, v_t),$$

$$\int_U l(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) = \int_U l(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) \delta_{v_t}(da) = l(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, v_t).$$

Dans ce cas $(x^q, y^q, z^q) = (x^v, y^v, z^v)$, $J(q) = J(v)$ et nous obtenons un problème de contrôle strict. Donc, le problème de contrôle strict $\{(2.1), (2.2), (2.3)\}$ est un cas particulier du problème de contrôle relaxé $\{(2.4), (2.5), (2.6)\}$.

2.3 Conditions nécessaires d'optimalité pour le contrôle relaxé

Dans ce paragraphe, nous étudions le problème $\{(2.4), (2.5), (2.6)\}$ et nous établissons les conditions nécessaires d'optimalité pour le contrôle relaxé.

2.3.1 Résultats Préliminaires

Puisque l'ensemble de contrôle relaxé est convexe, alors la méthode classique pour obtenir les conditions nécessaires d'optimalité est d'utiliser la méthode de perturbation convexe. Plus précisément, soit μ un contrôle relaxé optimal et $(x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu)$ la solution de (2.4) contrôlée par μ. Alors, on peut définir un contrôle perturbé relaxé comme suit :

$$\mu_t^\theta = \mu_t + \theta(q_t - \mu_t), \tag{2.9}$$

où, $\theta > 0$ est suffisamment petit et q est un élément arbitraire de $\mathcal{R}$. On note par $(x_t^\theta, y_t^\theta, z_t^\theta)$ la solution de (2.4) associé à μ^θ.

D'après l'optimalité de μ, l'inégalité variationnelle sera dérivée du fait que

$$0 \leq J(\mu^\theta) - J(\mu). \tag{2.10}$$

Pour cette fin, nous avons besoin des lemmes classique suivants.

Lemme 2.3.1 *Selon les hypothèses (H), nous avons :*

$$\lim_{\theta \to 0} (\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| x_t^\theta - x_t^\mu \right|^2 \right]) = 0, \tag{2.11}$$

$$\lim_{\theta \to 0} (\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| y_t^\theta - y_t^\mu \right|^2 \right]) = 0, \tag{2.12}$$

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| \left| z_t^\theta - z_t^\mu \right| \right|^2 dt \right] = 0. \tag{2.13}$$

Preuve. Nous avons

$$
\begin{aligned}
x_t^\theta - x_t^\mu &= \int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da) \right) ds \\
&\quad + \int_0^t \left(\sigma(s, x_s^\theta) - \sigma(s, x_s^\mu) \right) dW_s \\
x_t^\theta - x_t^\mu &= \int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s(da) \right) ds \\
&\quad + \int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da) \right) ds \\
&\quad + \int_0^t \left(\sigma(s, x_s^\theta) - \sigma(s, x_s^\mu) \right) dW_s.
\end{aligned}
$$

En utilisant la définition de μ_t^θ. Nous avons

$$
\begin{aligned}
x_t^\theta - x_t^\mu &= \int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da) \right) ds \\
&\quad + \theta \int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\theta, a)q_s(da) - \int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s(da) \right) ds \\
&\quad + \int_0^t \left(\sigma(s, x_s^\theta) - \sigma(s, x_s^\mu) \right) dW_s.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'isométrie d'Itô et par passage à l'espérance on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right] \\ &+ C\theta^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\int_U b(s, x_s^\theta, a)q_s(da) - \int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right] \\ &+ C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma(s, x_s^\theta) - \sigma(s, x_s^\mu)\right|^2 ds\right].\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H), b et σ sont unifurmement lipschtiz par x on a :

$$\left|\int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da)\right|^2 \leq K\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2,$$

$$\left|\sigma(s, x_s^\theta) - \sigma(s, x_s^\mu)\right|^2 \leq K\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2,$$

et comme b est bornée et d'après l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left|\int_U b(s, x_s^\theta, a)q_s(da) - \int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s(da)\right|^2 \leq M^2, M \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|x_s^\theta - x_s^\mu\right|^2 ds\right] + C\theta^2.$$

En utilisant le lemme de Fubini et le lemme Gronwall, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] ds + C\theta^2$$

$$\mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] \leq C\theta^2 \exp(Ct).$$

Par passage à la limite, quand θ tend vers 0 on a :

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] = 0,$$

et utilisant l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy pour trouver

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] \le \mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right],$$

ce qui implique

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] = 0.$$

Prouvons maintenant (2.12) et (2.13)

Appliquant la formule d'Itô à $(y_t^\theta - y_t^\mu)^2$, nous avons :

$$\begin{aligned}(y_t^\theta - y_t^\mu) &= \varphi(x_T^\theta) - \varphi(x_T^\mu)\\ &\quad + \int_t^T \left[\int_U f(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a)\mu_s(da)\right] ds\\ &\quad - \int_t^T (z_s^\theta - z_s^\mu) dW_s,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}d(y_t^\theta - y_t^\mu)^2 &= 2(y_t^\theta - y_t^\mu)d(y_t^\theta - y_t^\mu) + d\left\langle y^\theta - y^\mu, y^\theta - y^\mu\right\rangle_t,\\ d(y_t^\theta - y_t^\mu)^2 &= 2(y_t^\theta - y_t^\mu)d(y_t^\theta - y_t^\mu) + (z_t^\theta - z_t^\mu)^2 dt,\end{aligned}$$

passant à l'intégrale entre 0 et T, on trouve

$$\begin{aligned}(y_t^\theta - y_t^\mu)^2 &= (y_T^\theta - y_T^\mu)^2 \\ &-2\int_t^T (y_s^\theta - y_s^\mu)\left(\int_U f(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a)\mu_s(da)\right) ds \\ &+2\int_t^T (y_s^\theta - y_s^\mu)(z_s^\theta - z_s^\mu)dW_s - \int_t^T (z_s^\theta - z_s^\mu)^2 ds,\end{aligned}$$

Appliquant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|z_s^\theta - z_s^\mu\right|\right|^2 ds\right] = \mathbb{E}\left[\left|\varphi(x_T^\theta) - \varphi(x_T^\mu)\right|^2\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|(y_s^\theta - y_s^\mu)\left(\int_U f(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a)\mu_s(da)\right)\right| ds\right],\end{aligned}$$

en appliquant la formule de Young ($2ab \leq \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$), pour chaque $\varepsilon > 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|z_s^\theta - z_s^\mu\right|\right|^2 ds\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|\varphi(x_T^\theta) - \varphi(x_T^\mu)\right|^2\right] + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] \\ &+ \varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right].\end{aligned}$$

Puis,

$$\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|z_s^\theta - z_s^\mu\right|\right|^2 ds\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\left|\varphi(x_T^\theta) - \varphi(x_T^\mu)\right|^2\right] + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right]$$

$$+ C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U f(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right]$$

$$+ C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right]$$

$$+ C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\theta, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right]$$

$$+ C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\theta, a)\mu_s(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right],$$

par la définition de μ_t^θ, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|z_s^\theta - z_s^\mu\right|\right|^2 ds\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\left|\varphi(x_T^\theta) - \varphi(x_T^\mu)\right|^2\right] + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right]$$

$$+ C\varepsilon\theta^2\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a)q_s(da) - \int_U f(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right]$$

$$+ C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right]$$

$$+ C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\theta, z_s^\theta, a)\mu_s(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\theta, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right]$$

$$+ C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\theta, a)\mu_s(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a)\mu_s(da)\right|^2 ds\right].$$

Comme φ et f sont uniformément Lipschitziennes en x, y, z, on a

$$\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|z_s^\theta - z_s^\mu\right|\right|^2 ds\right] \leq \left(\frac{1}{\varepsilon} + C\varepsilon\right) \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] \tag{2.14}$$
$$+ C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|z_s^\theta - z_s^\mu\right|\right|^2 ds\right] + \alpha_t^\theta,$$

où α_t^θ est donné par

$$\alpha_t^\theta = \mathbb{E}\left[\left|x_T^\theta - x_T^\mu\right|^2\right] + C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|x_s^\theta - x_s^\mu\right|^2 ds\right] + C\varepsilon\theta^2.$$

D'après l'estimation (2.11), nous avons

$$\lim_{\theta\to 0} \alpha_t^\theta = 0. \tag{2.15}$$

Choisir $\varepsilon = \frac{1}{2C}$, alors (2.14) devient

$$\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|z_s^\theta - z_s^\mu\right|\right|^2 ds\right] \leq \left(\frac{1}{2} + 2C\right) \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] + \alpha_t^\theta.$$

D'après l'inégalité ci-dessus, nous tirons deux inégalités

$$\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] \leq \left(\frac{1}{2} + 2C\right) \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] + \alpha_t^\theta, \tag{2.16}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|z_s^\theta - z_s^\mu\right|\right|^2 ds\right] \leq (4C+1)\,\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] + 2\alpha_t^\theta. \tag{2.17}$$

Appliquant le lemme de Fubini et le lemme Gronwall à (2.16), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] \leq \left(\frac{1}{2} + 2C\right) \int_t^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2\right] ds + \alpha_t^\theta,$$

$$\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] \leq \alpha_t^\theta \exp\left((\frac{1}{2} + 2C)t\right),$$

par passage à la limite, quand θ tend vers 0 et (2.15) on a :

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] = 0,$$

et l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy, nous donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right].$$

Ce qui implique

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] = 0.$$

Nous obtenons (2.12). Enfin, (2.13) est dérivé de (2.17), (2.15) et (2.12). ■

Lemme 2.3.2 *Laissez $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont respectivement les solutions des équations linéaires suivantes (appelées équations variationnelles)*

$$\begin{cases} d\tilde{x}_t = \int_U b_x(t, x_t^\mu, a)\mu_t(da)\tilde{x}_t dt + \sigma_x(t, x_t^\mu)\tilde{x}_t dW_t \\ + \left(\int_U b(t, x_t^\mu, a)\mu_t(da) - \int_U b(t, x_t^\mu, a)q_t(da)\right) dt, \\ \tilde{x}_0 = 0, \end{cases} \tag{2.18}$$

et

$$\begin{cases} d\tilde{y}_t = -\int\limits_U \left[f_x(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a)\tilde{x}_t + f_y(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a)\tilde{y}_t + f_z(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a)\tilde{z}_t \right] \mu_t(da)dt \\ \qquad + \left(\int\limits_U f(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a)\mu_t(da) - \int\limits_U f(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a)q_t(da) \right) dt + \tilde{z}_t dW_t, \\ \tilde{y}_T = \varphi_x(x_T^\mu)\tilde{x}_T. \end{cases} \tag{2.19}$$

Alors on a les estimations suivantes

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E} \left[\left| \frac{x_t^\theta - x_t^\mu}{\theta} - \tilde{x}_t \right|^2 \right] = 0, \tag{2.20}$$

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E} \left[\left| \frac{y_t^\theta - y_t^\mu}{\theta} - \tilde{y}_t \right|^2 \right] = 0, \tag{2.21}$$

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E} \left[\int\limits_0^T \left\| \frac{z_t^\theta - z_t^\mu}{\theta} - \tilde{z}_t \right\|^2 dt \right] = 0. \tag{2.22}$$

Preuve. Pour simplification, nous posons

$$X_t^\theta = \frac{x_t^\theta - x_t^\mu}{\theta} - \tilde{x}_t, \tag{2.23}$$

$$Y_t^\theta = \frac{y_t^\theta - y_t^\mu}{\theta} - \tilde{y}_t, \tag{2.24}$$

$$Z_t^\theta = \frac{z_t^\theta - z_t^\mu}{\theta} - \tilde{z}_t. \tag{2.25}$$

Preuve de (2.20). Nous avons

$$
\begin{aligned}
X_t^\theta &= \frac{1}{\theta}\int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s^\theta(da) \right) ds \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da) \right) ds \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_0^t \left(\sigma(s, x_s^\theta) - \sigma(s, x_s^\mu) \right) dW_s \\
&- \int_0^t \int_U b_x(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da)\tilde{x}_t ds - \int_0^t \sigma_x(s, x_s^\mu)\tilde{x}_s dW_s \\
&- \int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)q_s(da) \right) ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant la définition de μ^θ, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
X_t^\theta &= \frac{1}{\theta}\int_0^t \int_U \left(b(s, x_s^\theta, a) - b(s, x_s^\mu, a) \right) \mu_s^\theta(da) ds \\
&+ \int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\mu, a)q_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da) \right) ds \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_0^t \left(\sigma(s, x_s^\theta) - \sigma(s, x_s^\mu) \right) dW_s \\
&- \int_0^t \int_U b_x(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da)\tilde{x}_t ds - \int_0^t \sigma_x(s, x_s^\mu)\tilde{x}_s dW_s \\
&- \int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)q_s(da) \right) ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant dévlopment Taylor avec reste intégrale et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'isométrie d'Itô et par passage à l'espérance on trouve

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_t^\theta\right|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^1\int_U \left|b_x(s,x_s^\mu+\lambda\theta(X_s^\theta+\tilde{x}_s),a)X_s^\theta\right|^2\mu_s(da)d\lambda ds\right] \\
&+C\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^1 \left|\sigma_x(s,x_s^\mu+\lambda\theta(X_s^\theta+\tilde{x}_s))X_s^\theta\right|^2 d\lambda ds\right] \\
&+C\mathbb{E}\left[\left|\beta_t^\theta\right|^2\right],
\end{aligned}
$$

où, β_t^θ est donné par

$$
\begin{aligned}
\beta_t^\theta &= \int_0^t\int_0^1\int_U b_x(s,x_s^\mu+\lambda\theta(X_s^\theta+\tilde{x}_s),a)(x_s^\theta-x_s^\mu)q_s(da)d\lambda ds \\
&-\int_0^t\int_0^1\int_U b_x(s,x_s^\mu+\lambda\theta(X_s^\theta+\tilde{x}_s),a)(x_s^\theta-x_s^\mu)\mu_s(da)d\lambda ds \\
&+\int_0^t\int_0^1\int_U b_x(s,x_s^\mu+\lambda\theta(X_s^\theta+\tilde{x}_s),a)\tilde{x}_s\mu_s(da)d\lambda ds \\
&+\int_0^t\int_0^1 \sigma_x(s,x_s^\mu+\lambda\theta(X_s^\theta+\tilde{x}_s))\tilde{x}_s d\lambda dW_s \\
&-\int_0^t\int_U b_x(s,x_s^\mu,a)\mu_s(da)\tilde{x}_s ds-\int_0^t \sigma_x(s,x_s^\mu)\tilde{x}_s dW_s.
\end{aligned}
$$

Puis que b_x et σ_x sont continues et bornées, alors

$$
\mathbb{E}\left[\left|X_t^\theta\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^\theta\right|^2 ds\right]+C\mathbb{E}\left[\left|\beta_t^\theta\right|^2\right],
$$

$$
\text{et } \lim_{\theta\longrightarrow 0}\mathbb{E}\left[\left|\beta_t^\theta\right|^2\right]=0.
$$

En utilisant le lemme de Fubini et le lemme Gronwall, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_t^\theta\right|^2\right] &\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^\theta\right|^2\right] ds + C\mathbb{E}\left[\left|\beta_t^\theta\right|^2\right], \\
\mathbb{E}\left[\left|X_t^\theta\right|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left|\beta_t^\theta\right|^2\right] \exp(Ct).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, quand θ tend vers 0, nous obtenons (2.20).

Preuve de (2.21) et (2.22).

Pour simplification, nous mettons

$$\Lambda_t^\theta(a) = (t, x_t^\mu + \lambda\theta(X_t^\theta + \tilde{x}_t), y_t^\mu + \lambda\theta(Y_t^\theta + \tilde{y}_t), z_t^\mu + \lambda\theta(Z_t^\theta + \tilde{z}_t), a).$$

D'après (2.24) et (2.25), nous avons l'$EDSPR$ suivante

$$\begin{cases}
dY_t^\theta = (F_t^y Y_t^\theta dt + F_t^y Z_t^\theta - \gamma_t^\theta)dt + Z_t^\theta dW_t, \\
Y_T^\theta = \frac{\varphi(x_T^\theta) - \varphi(x_T^\mu)}{\theta} - \varphi(x_T^\mu)\tilde{x}_T,
\end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}
F_t^y &= -\int_0^1 \int_U f_y(\Lambda_t^\theta(a))\mu_t(da)d\lambda, \\
F_t^z &= -\int_0^1 \int_U f_z(\Lambda_t^\theta(a))\mu_t(da)d\lambda,
\end{aligned}$$

et γ_t^θ donné par

$$\begin{aligned}
\gamma_t^\theta =& \int_t^T \int_U f_x(\Lambda_s^\theta(a)) X_s^\theta \mu_s(da)ds \\
&+ \int_t^T \int_U \left[f_x(\Lambda_s^\theta(a))(x_s^\theta - x_s^\mu) + f_y(\Lambda_s^\theta(a))(y_s^\theta - y_s^\mu) + f_z(\Lambda_s^\theta(a))(z_s^\theta - z_s^\mu) \right] q_s(da)ds \\
&- \int_t^T \int_U \left[f_x(\Lambda_s^\theta(a))(x_s^\theta - x_s^\mu) + f_y(\Lambda_s^\theta(a))(y_s^\theta - y_s^\mu) + f_z(\Lambda_s^\theta(a))(z_s^\theta - z_s^\mu) \right] \mu_s(da)ds.
\end{aligned}$$

Puis que f_x, f_y et f_z sont continues et bornées, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left| \gamma_t^\theta \right|^2 \right] \leq& C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left| X_s^\theta \right|^2 ds \right] + C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left| x_s^\theta - x_s^\mu \right|^2 ds \right] \\
&+ C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left| y_s^\theta - y_s^\mu \right|^2 ds \right] + C\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left| z_s^\theta - z_s^\mu \right|\right|^2 ds \right].
\end{aligned}$$

Utilisant (2.11), (2.12), (2.13), (2.20), nous avons

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\left| \gamma_t^\theta \right|^2 \right] = 0. \tag{2.26}$$

L'application de formule d'Itô à $(Y_t^\theta)^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
d(Y_t^\theta)^2 &= 2Y_t^\theta dY_t^\theta + d\left\langle Y^\theta, Y^\theta \right\rangle_t \\
d(Y_t^\theta)^2 &= 2Y_t^\theta \left[(F_t^y Y_t^\theta + F_t^z Z_t^\theta - \gamma_t^\theta)dt + Z_t^\theta dW_t \right] + (Z_t^\theta)^2 dt, \text{ donc} \\
(Y_T^\theta)^2 - (Y_t^\theta)^2 &= 2\int_t^T Y_s^\theta (F_s^y Y_s^\theta + F_s^z Z_s^\theta - \gamma_s^\theta)ds + 2\int_t^T Y_s^\theta Z_s^\theta dW_s + \int_t^T (Z_s^\theta)^2 ds,
\end{aligned}$$

passant a l'espérance, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\left| Y_t^\theta \right|^2 \right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left| Z_s^\theta \right|\right|^2 ds \right] = \mathbb{E}\left[\left| Y_T^\theta \right|^2 \right] + 2\mathbb{E}\left[\int_t^T \left| Y_s^\theta (F_s^y Y_s^\theta + F_s^z Z_s^\theta - \gamma_s^\theta) \right| ds \right].$$

En utilisant la formule Young, pour chaque $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|Y_t^\theta\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|Z_s^\theta\right|\right|^2 ds\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left|Y_T^\theta\right|^2\right] + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\theta\right|^2 ds\right] \\ &+ \varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|(F_s^y Y_s^\theta + F_s^z Z_s^\theta - \gamma_s^\theta)\right|^2 ds\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|Y_T^\theta\right|^2\right] + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\theta\right|^2 ds\right] + C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|F_s^y Y_s^\theta\right|^2 ds\right] \\ &+ C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|F_s^z Z_s^\theta\right|^2 ds\right] + C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\gamma_s^\theta\right|^2 ds\right].\end{aligned}$$

Puis que F_t^y et F_t^z sont bornée, alors

$$\mathbb{E}\left[\left|Y_t^\theta\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|Z_s^\theta\right|\right|^2 ds\right] \leq (\frac{1}{\varepsilon} + C\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\theta\right|^2 ds\right] + C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|Z_s^\theta\right|\right|^2 ds\right] + \eta_t^\theta,$$

où

$$\eta_t^\theta = \mathbb{E}\left[\left|Y_T^\theta\right|^2\right] + C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\gamma_s^\theta\right|^2 ds\right].$$

Choisir $\varepsilon = \frac{1}{2C}$, alors nous avons

$$\mathbb{E}\left[\left|Y_t^\theta\right|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|Z_s^\theta\right|\right|^2 ds\right] \leq (\frac{1}{2} + 2C)\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\theta\right|^2 ds\right] + \eta_t^\theta.$$

De l'inégalité ci-dessus, nous déduisons deux inégalités

$$\mathbb{E}\left[\left|Y_t^\theta\right|^2\right] \leq (\frac{1}{2} + 2C)\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\theta\right|^2 ds\right] + \eta_t^\theta, \tag{2.27}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|Z_s^\theta\right|\right|^2 ds\right] \leq (4C + 1)\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|Y_s^\theta\right|^2 ds\right] + 2\eta_t^\theta. \tag{2.28}$$

D'autre part, nous avons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|Y_T^\theta\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\tilde{y}_T - \frac{y_T^\theta - y_T^\mu}{\theta}\right|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\varphi_x(x_T^\mu)\tilde{x}_T - \frac{\varphi(x_T^\theta) - \varphi(x_T^\mu)}{\theta}\right|^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^1 \left|\left(\varphi_x(x_T^\mu) - \varphi_x(x_T^\mu + \lambda\theta(\tilde{x}_T + X_T^\theta))\right)\tilde{x}_T\right|^2 d\lambda\right] \\
&+ 2\mathbb{E}\left[\int_0^1 \left|\varphi_x(x_T^\mu + \lambda\theta(\tilde{x}_T + X_T^\theta))X_T^\theta\right|^2 d\lambda\right].
\end{aligned}
$$

En utilisant (2.20) et la continuité de φ_x, nous obtenons

$$
\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\left|Y_T^\theta\right|^2\right] = 0, \tag{2.29}
$$

de (2.26) et (2.29), nous déduisons que

$$
\lim_{\theta \longrightarrow 0} \eta_t^\theta = 0. \tag{2.30}
$$

En utilisant (2.27), (2.30), le lemme de Gronwall et l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy, nous obtenons (2.21). Finalement, (2.22) est dérivé d'après l'utilisation de (2.21) et (2.28) dans (2.30). ■

Lemme 2.3.3 *Soit μ un contrôle optimal minimisant le fonctionnel J sur $\mathcal{R}$ et $(x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu)$*

la solution de (2.1) *associée à* μ. *Alors pour n'importe quel contrôle relaxé* $q \in \mathcal{R}$, *nous avons*

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \mathbb{E}\left[g_x(x_T^\mu)\tilde{x}_T\right] + \mathbb{E}\left[h_y(y_0^\mu)\tilde{y}_0\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)q_t(da) - \int_U l(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\mu_t(da)\right)dt\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l_x(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\mu_t(da)\tilde{x}_t + \int_U l_y(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\mu_t(da)\tilde{y}_t\right)dt\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_U l_z(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\mu_t(da)\tilde{z}_t dt\right]. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Preuve. Soit μ un contrôle relaxé optimal minimisant la fonction de coût J sur $\mathcal{R}$, alors de (2.10) nous avons

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \mathbb{E}\left[g(x_T^\theta) - g(x_T^\mu)\right] + \mathbb{E}\left[h(y_0^\theta) - h(y_0^\mu)\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,a)\mu_t^\theta(da) - \int_U l(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\mu_t(da)\right)dt\right] \\ =\ & \mathbb{E}\left[g(x_T^\theta) - g(x_T^\mu)\right] + \mathbb{E}\left[h(y_0^\theta) - h(y_0^\mu)\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,a)\mu_t^\theta(da) - \int_U l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,a)\mu_t(da)\right)dt\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,a)\mu_t(da) - \int_U l(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\mu_t(da)\right)dt\right]. \end{aligned}$$

Utilisant la définition de μ_t^θ, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \mathbb{E}\left[g(x_T^\theta) - g(x_T^\mu)\right] + \mathbb{E}\left[h(y_0^\theta) - h(y_0^\mu)\right] \\ & + \theta\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,a)q_t(da) - \int_U l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,a)\mu_t(da)\right)dt\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_U \left(l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,a) - l(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\right)\mu_t(da)dt\right]. \end{aligned} \tag{2.32}$$

On appliquant le développement de Taylor on trouve

$$g(x_T^\theta) - g(x_T^\mu) = \int_0^1 g_x(x_T^\mu + \lambda(x_T^\theta - x_T^\mu))(x_T^\theta - x_T^\mu)d\lambda,$$
$$h(y_0^\theta) - h(y_0^\mu) = \int_0^1 h_y(y_0^\mu + \lambda(y_0^\theta - y_0^\mu))(y_0^\theta - y_0^\mu)d\lambda,$$

donc (2.32) devient

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left[g_x(x_T^\mu + \lambda\theta(\tilde{x}_T + X_T^\theta))\tilde{x}_T\right] d\lambda\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left[h_y(y_0^\mu + \lambda\theta(\tilde{y}_0 + Y_0^\theta))\tilde{y}_0\right] d\lambda\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1\int_U \left[l_x(\Lambda_t^\theta(a))\tilde{x}_t + l_y(\Lambda_t^\theta(a))\tilde{y}_t + l_z(\Lambda_t^\theta(a))\tilde{z}_t\right] \mu_t(da)d\lambda dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a)q_t(da) - \int_U l(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a)\mu_t(da)\right) dt\right] + \rho_t^\theta, \end{aligned} \tag{2.33}$$

où ρ_t^θ est donné par

$$\begin{aligned} \rho_t^\theta =\ & \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left(g_x(x_T^\mu + \lambda\theta(\tilde{x}_T + X_T^\theta))X_T^\theta\right) d\lambda\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left(h_y(y_0^\mu + \lambda\theta(\tilde{y}_0 + Y_0^\theta))Y_0^\theta\right) d\lambda\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1\int_U \left(l_x(\Lambda_t^\theta(a))(x_t^\theta - x_t^\mu) + l_y(\Lambda_t^\theta(a))(y_t^\theta - y_t^\mu) + l_z(\Lambda_t^\theta(a))(z_t^\theta - z_t^\mu)\right) q_t(da)d\lambda dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1\int_U \left(l_x(\Lambda_t^\theta(a))(x_t^\theta - x_t^\mu) + l_y(\Lambda_t^\theta(a))(y_t^\theta - y_t^\mu) + l_z(\Lambda_t^\theta(a))(z_t^\theta - z_t^\mu)\right) \mu_t(da)d\lambda dt\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1\int_U \left(l_x(\Lambda_t^\theta(a))X_t^\theta + l_y(\Lambda_t^\theta(a))Y_t + l_z(\Lambda_t^\theta(a))Z_t^\theta\right) \mu_t(da)d\lambda dt\right]. \end{aligned}$$

Puis que les dérivées g_x, h_y, l_x, l_y, l_z sont continues et bornées, donc en utilisant (2.11), (2.12), (2.13), (2.20), (2.21), (2.22) et l'inégalité de Cauchy-schwartz, nous avons

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \rho_t^\theta = 0.$$

En laissant θ tend vers 0 sur (2.33) avec la continuité de g_x et h_y, la preuve est terminée. ■

2.3.2 Les équations adjointes et inégalités variationnelles

Introduisant le système suivant d'équations différentielles stochastiques, appelés équations adjointes

$$\begin{cases} dp_t^\mu = -\mathcal{H}_x(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, k_t^\mu)dt + P_t^\mu dW_t, \\ p_T^\mu = g_x(x_T^\mu) + \varphi_x(x_T^\mu)k_T^\mu, \end{cases} \tag{2.34}$$

et

$$\begin{cases} dk_t^\mu = \mathcal{H}_y(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, k_t^\mu)dt \\ +\mathcal{H}_z(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, k_t^\mu)dW_t, \\ k_0^\mu = h_y(y_0^\mu). \end{cases} \tag{2.35}$$

Où le *Hamiltonian* $\mathcal{H}$ est défini à partir de $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}(\mathbb{U}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x, y, z, q, p, k) = & \int_U l(t, x, y, z, a)q_t(da) + p\int_U b(t, x, a)q_t(da) \\ & - P\sigma(t, x) + k\int_U f(t, x, y, z, a)q_t(da). \end{aligned}$$

De puis

$$p_T^\mu = g_x(x_T^\mu) + \varphi_x(x_T^\mu)k_T^\mu \text{ et } k_0^\mu = h_y(y_0^\mu),$$

puis (2.31) devient

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & \mathbb{E}\left[p_T^\mu \tilde{x}_T\right] + \mathbb{E}\left[k_0^\mu \tilde{y}_0\right] - \mathbb{E}\left[\varphi_x(x_T^\mu) k_T^\mu\right] \qquad (2.36)\\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U l_x(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \tilde{x}_t \mu_t(da) dt\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U \left(l_y(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \tilde{y}_t + l_z(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \tilde{z}_t\right) \mu_t(da) dt\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) q_t(da) - \int_U l(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \mu_t(da)\right) dt\right].
\end{aligned}
$$

En appliquant l'intégration par parties sur $(p_t^\mu \tilde{x}_t)$ et $(k_t^\mu \tilde{y}_t)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
dp_t^\mu \tilde{x}_t &= p_t^\mu d\tilde{x}_t + \tilde{x}_t dp_t^\mu + d\left\langle p^\mu, \tilde{x}\right\rangle_t, \\
dp_t^\mu \tilde{x}_t &= p_t^\mu d\tilde{x}_t + \tilde{x}_t dp_t^\mu - P_t^\mu \sigma_x(t, x_t^\mu) \tilde{x}_t dt, \\
dp_t^\mu \tilde{x}_t &= p_t^\mu \left(\int_U b(t, x_t^\mu, a) q_t(da) - \int_U b(t, x_t^\mu, a) \mu_t(da)\right) dt + P_t^\mu \tilde{x}_t dW_t \\
&\quad - \int_U f_x(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \mu_t(da) \tilde{x}_t k_t^\mu dt - \int_U l_x(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \mu_t(da) \tilde{x}_t dt \\
&\quad - p_t^\mu \sigma_x(t, x_t^\mu) \tilde{x}_t dW_t,
\end{aligned}
$$

par passage de l'intégrale et l'espérance on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[p_T^\mu \tilde{x}_T\right] = & -\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U f_x(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \mu_t(da) k_t^\mu + \int_U l_x(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \mu_t(da)\right) \tilde{x}_t dt\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T p_t^\mu \left(\int_U b(t, x_t^\mu, a) q_t(da) - \int_U b(t, x_t^\mu, a) \mu_t(da)\right) dt\right],
\end{aligned}
$$

de même façon

$$
\begin{aligned}
dk_t^{\mu}\tilde{y}_t &= k_t^{\mu}d\tilde{y}_t + \tilde{y}_t dk_t^{\mu} + d\left\langle k^{\mu},\tilde{y}\right\rangle_t, \\
dk_t^{\mu}\tilde{y}_t &= k_t^{\mu}d\tilde{y}_t + \tilde{y}_t dk_t^{\mu} + \mathcal{H}_z(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},\mu_t,p_t^{\mu},k_t^{\mu})\tilde{z}_t dt, \\
dk_t^{\mu}\tilde{y}_t &= -k_t^{\mu}\int_U \left(f_x(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\tilde{x}_t + f_y(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\tilde{y}_t + f_z(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\tilde{z}_t\right)\mu_t(da)dt \\
&\quad + k_t^{\mu}\left(\int_U f(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\mu_t(da) - \int_U f(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)q_t(da)\right)dt + k_t^{\mu}\tilde{z}_t dW_t \\
&\quad + \tilde{y}_t\left(\int_U l_y(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\mu_t(da)dt + k_t^{\mu}\int_U f_y(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\mu_t(da)\right)dt \\
&\quad + \tilde{y}_t\left(\int_U l_z(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\mu_t(da)dt + k_t^{\mu}\int_U f_z(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\mu_t(da)\right)dW_t,
\end{aligned}
$$

par passage de l'intégrale et l'espérance on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[k_0^{\mu}\tilde{y}_0\right] &= \mathbb{E}\left[k_T^{\mu}\tilde{y}_T\right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U l_y(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\mu_t(da)\tilde{y}_t + \int_U f_x(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\mu_t(da)\tilde{x}_t k_t^{\mu}\right)dt\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^T k_t^{\mu}\left(\int_U f(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)q_t(da) - \int_U f(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\mu_t(da)\right)dt\right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_U l_z(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a)\mu_t(da)\tilde{z}_t dt\right].
\end{aligned}
$$

Puis pour chaque $q \in \mathcal{R}$, (2.36) devient

$$
0 \le \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\mathcal{H}(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},q_t,p_t^{\mu},k_t^{\mu}) - \mathcal{H}(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},\mu_t,p_t^{\mu},k_t^{\mu})\right)dt\right]. \tag{2.37}
$$

2.3.3 Les conditions nécessaires d'optimalité pour des contrôles relaxés

À partir de l'inégalité variationnelle (2.37), nous pouvons maintenant énoncer les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème de contrôle relaxé $\{(2.4), (2.5), (2.6)\}$ sous la forme globale.

Théorème 2.3.1 (Les conditions nécessaires d'optimalité pour le contrôle relaxé) *Soit μ un contrôle relaxé optimal minimisant le fonctionnelle de coût J sur $\mathcal{R}$ et $(x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu)$ la solution de* (2.4) *associée à μ. Alors, il existe deux processus adaptés uniques p^μ et k^μ, qui sont respectivement des solutions de* (2.34) *et* (2.35)*, de telle sorte que*

$$\mathcal{H}(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, k_t^\mu) \leq \mathcal{H}(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, q_t, p_t^\mu, k_t^\mu);\ \forall q_t \in \mathbb{P}(U);\ \mathbb{P} - ps. \tag{2.38}$$

Preuve. Le résultat fait suite immédiatement à (2.37). ■

Conclusion

En conclusion, on a établi dans ce mémoire les conditions nécessaires d'optimalité satisfaites par un contrôle relaxé optimal pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades non linéaires $(EDSPR)$. Comme l'ensemble des contrôles relaxés est convexe, donc la méthode de démonstration est basée sur la méthode classique pour le cas non linéaire où on a utilisé une perturbation convexe.

Le problème de contrôle relaxé est une généralisation du problème de contrôle strict. En effet, si $q_t(da) = \delta_{v_t}(da)$ est une mesure de Dirac concentrée en un seul point $v_t \in U$, alors nous obtenons un problème de contrôle strict comme un cas particulier du problème de contrôle relaxé.

Alors pour établir les conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles stricts, l'idée est de remplacer les contrôles relaxés par une mesure de Dirac chargée en un contrôle strict . Ainsi, nous réduisons l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés et nous minimisons le fonctionnel de coût J sur le sous-ensemble $\delta(\mathcal{U}) = \{q \in \mathbb{R} \setminus q = \delta_v \ ; v \in \mathcal{U}\}$. Les conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles stricts sont alors obtenues directement à partir de ceux du contrôle relaxé.

Bibliographie

[1] Laleuf, Jean-Claude, (2014). Processus et intégrales stochastiques : cours et exercices corrigés.Ellipses.

[2] Dalang, C. Robert, and Daniel Conus. Introduction a la théorie des probabilités. 2e édition revue et augmentée.

[3] F. Antonelli, (1993). Backward-Forward stochastic differential equations. Annals of Applied Probability, 3. pp. 777-793.

[4] S.Bahlali, (2007). Necessary and sufficient conditions of optimality for relaxed and strict control problems, SIAM J.Control and Optim, Vol 46, Issue 2, pp 427-444.

[5] Z. Wu, (1998). Maximum Principle for Optimal Control Problem of Fully coupled Forward-Backward Stochastic Systems, Systems Sci. Math. Sci, 11, No.3, pp 249-259.

[6] Azencott, Robert, (1982). Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynmann."Séminaire de Probabilités XVI,1980/81,Supplément : Géométrie Différentielle Stochastique. Springer,Berlin,Heidelberg, 237-285.

[7] Steele, J. Michael. The Cauchy-Schwars master class :an introduction to the art of mathematical inequalities. Cambridge University Press, 20

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité filtré.
W_t	:	Mouvement Brownien.
EDS	:	Équation différentielle stochastique.
$EDSPRs$	:	Équation différentielle stochastique progressive rétrograde.
$J(\mu)$	:	La fonction de coût.
μ	:	Contrôle optimal.
μ^θ	:	Contrôle perturbé.
$\inf$	:	La borne inférieure.
$\lim$	:	La limite.
$\mathbb{P}-p.s$	:	Presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$i.e$	:	C'est-à-dire.
MB	:	Mouvement Brownien.