République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option :**Probabilités**

Par

ATAOUA Selma

Titre :

Calaul de Malliavin

Membres du Comité d'Examen :

M.C.A	**YAKHLEF Samia**	UMKB	Encadreur
Dr.	**AOUNE Salima**	UMKB	Examinateur
Pr.	**CHIGHOUB Farid**	UMKB	Président

Septembre 2020

Dédicace

C'est avec fierté, honneur et énorme joie que je dédie ce modeste travail.

A mes chers parents qui veillent sans cesse sur moi.

Avec leurs prières et leurs recommandations.

Je souhaite qu'Allah leurs donne une longue vie.

A mes frères Younes, Adel, Hicham, Oussama.

A mes s*œurs Soumia, Nawal, Loubna, Abir.*

A *ma grande famille et mes amies Khadjidja, Imane, Fatima, Assia.*

A *tous ceux qui sont proches á mon cœur.*

A Mon encadreur " YAKHAEF Samia ".

Et à la promotion de mathématique.

Je demande qu'Allah leurs accorder longue vie et bonne santé.

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur **Madame YAKHLEF Samia** pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigé tout le long de mon travail, ses critiques et les conseils m'ont été précieux..

Je voudrais également remercier les membres du jury d'avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que le personnel administratif et les enseignants du département de mathématiques de l'université **MOHAMED KHIDER, BISKRA** et tous mes compagnons de promotion.

Et enfin j'adresse mes sincères remerciments à mes parents, mon frère et ma soeur, mes amis et à tous qui sont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction

La théorie mathématique maintenant connue sous le nom de calcul de Malliavin a été d'abord introduite par Paul Malliavin en 1978, comme une intégration infinie-dimensionnelle par technique d'intégration par partie. Le but de ce calcul était de prouver les résultats sur la régularité des densités de solutions d'équations différentielles stochastiques pilotées par le mouvement brownien. Pendant plusieurs années, c'était la seule application connue.

En 1984, Ocone a obtenu une interprétation explicite de la formule de représentation de Clark en termes de dérivé de Malliavin (formule de Clark-Ocone). En 1991 Ocone et Karatzas appliqué ce résultat à la finance : Ils ont prouvé que la formule de Clark-Ocone peut être utilisée pour obtenir des formules explicites pour répliquer des portefeuilles de créances conditionnelles sur des marchés complets. Depuis lors, le calcul de Malliavin a été applique dans divers domaines au sein de la finance et en dehors de cela. Dans l'intervalle, le potentiel même des applications a créé le besoin d'une extension du calcul à d'autres types de bruit que le mouvement brownien.

Ce mémoire ce compose de trois chapitres :

Le premier chapitre : est un rappelle sur l'intégrale d'Itô.

Le deuxième chapitre : est une introduction sur l'intégrale itérée d'Itô avec quelques propriété fondamentale.

Le troisième chapitre : dans ce chapitre il ya :

1- La célèbre expression du chaos de Wiener-Itô qui est fondamentale dans l'analyse stochastique.

Dans en particulier, elle joue un rôle crucial dans le calcul de Malliavin. La première version de ce théorème a été prouvée par Wiener en 1938. Plus tard, Itô. (1951) a montré que dans l'espace de Wiener, l'expression pourrait être exprimée en termes d'intégrales itérée d'Itô.

2- Définition de la dérivée de Malliavin par cette expression du chaos avec quelque régle de calcule.

3- L'intégrale de Skorohod qui a était introduite pour la première fois par A Skorohod en 1975, peut être considérée comme une extension de l'intégrale Itô aux intégrands qui ne sont pas forcément F-adaptés l'intégrale de Skorohod est également reliée au dérivé de Malliavin, qui est présenté avec tous les détails.

4- Le résultat central est la célébre formule de Clark-Ocone qui donne une représentation d'une variable aléatoire en termes d'une intégrale stochastique où l'intégrant est explicitement caractériser par une dérivée de Malliavin.

Chapitre 1

Intégrale Stochastique d'Itô

L'intégrale d'Itô, appelée en l'honneur du mathématicien Kiyoshi Itô, est un des outils fondamentaux du calcul stochastique. Elle a d'importantes applications en mathématique financière et pour la résolution des équations différentielles stochastiques.

Elle généralise de façon stochastique l'intégrale de Stieltjes. L'intégrande H et l'intégrateur sont tous deux des processus stochastiques

1.1 Processus stochastique

Dans cette section nous allons donner un rappelle sur quelques définitions et résultas concernant le processus stochastique

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires* $(X_t; t \in [0, +\infty[)$ *définies sur le même espace de probabilité.*

Définition 1.1.2 ***(Filtration)*** *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$, *c'est-à-dire telle que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ *pour tout* $t \leq s$.

Remarque 1.1.1 *Les fonctions* $t \to X_t(w)$ *sont appelées les trajectoire du processus stochastique* X_t.

Définition 1.1.3 *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \to X_t(w)$ sont continues pour presque tout w.*

Définition 1.1.4 ***(Processus adapté)*** *Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$ si X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t.*

Définition 1.1.5 *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limite à gauche. Même définition pour càglàd.*

1.1.1 Martingale

Définition 1.1.6 ***(Martingale)*** *Un processus alétoire M est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

i) M_t est $\mathcal{F}_t-$adapté, pour tout $t \leq T$.

ii) $M_t \in L^1(\Omega)$, i.e. $E\|M_t\| < \infty$.

iii) $E(M_t/\mathcal{F}_s) = X_s$, $\forall s \leq t$.

Proposition 1.1.1 *Toute martingale M vérifie :*

$$\forall t \leq T, \; E[M_t] = E[M_0].$$

Proposition 1.1.2 *Soit M une $\mathcal{F}-$maryingale de carré intégrable (i.e. $E[M_t^2] < \infty$ pour tout t), alors pour $s \leq t$, on a :*

$$E\left[(M_t - M_s)^2/\mathcal{F}_s\right] = E\left[M_t^2 - M_s^2/\mathcal{F}_s\right].$$

1.1.2 Mouvement Brownien

On se donne un espace (Ω, F, P) et un processus $(B(t), t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.1.7 *Le processus $(B(t), t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (M B) (standard) si :*

i) $P(B(0) = 0) = 1$ *(le mouvement Brownien est issu de l'origine).*

ii) $\forall s \leq t$, $B(t) - B(s)$ *est une variable reelle de loi gaussienne, centrée de variance* $(t - s)$.

iii) $\forall n$, $\forall t_i$, *les variables* $(B(t_n) - B(t_{n-1}), ..., B(t_1) - B(t_0), B(t_0))$ *sont indépendantes.*

1.1.3 Généralisation

le processus $X_t = a + B(t)$ est un Brownien issu de a. On dit que X est un Brownien généralisé où un MB de derivé μ si :

$$X_t = x + \mu t + \sigma B(t),$$

où B est un mouvement Brownien. La variable X_t est une variable gaussienne d'espérance $x + t$ et de variance $\sigma^2 t$. les v.a. $(X_{t_i+1} - X_{t_i}, t_0 \leq ... \leq t_n)$ sont indépendantes.

Proposition 1.1.3 *Soit* $(B(t))_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien standard alors* $B(t)$ *est un processus gaussien, i.e. pour tout* n *et tous* $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_{n-1} \leq t_n$, $(B(t_0), B(t_1), ..., B(t_n\ ))$ *est un vecteur gaussien.*

Proposition 1.1.4 *Si* B *est mouvement Brownien et* F *sa filtration naturelle, les processus* $(B(t)), (B^2(t) - t)$ $,(\exp B(t)\sigma - \sigma^2 \frac{t}{2})$ *sont des* $F - martingales$

Théorème 1.1.1 *Soit* B *est mouvement Brownien standard si et seulement si* B *est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance*

$$cov(B(t) - B(s)) = t \wedge s = \min(t, s)$$

Proposition 1.1.5 *Soit* B *est mouvement Brownien on a :*

1. *$\forall t, P.p.s$, $B(t)$ n'est pas différentiable en aucun point t.*
2. *$B(t)$ n'est pas à variation fini en aucun point t.*

Proposition 1.1.6 *Le mouvement Brownien (standard) $(B(t)\ ,t\ \geq\ 0)$ est un martingale par rapport à sa filtration naturelle*

$$\mathcal{F}_t^B = \sigma\left\{B(s), s \leq t\right\}.$$

1.2 Intégrale de Wiener

Définition 1.2.1 *On note $L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ l'ensemble des fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, c'est -à-dire telles que $\int_0^{+\infty}\left|f\left(s\right)\right|^2 ds < +\infty$.*

Si (B_t) est un mouvement Brownien, on va défini $\int_0^t f\left(s\right)dB_s$.

1.2.1 Fonction en escalier

Une fonction en escalier est une fonction aléatoire réelle de la forme

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} 1_{]t_{i-1},t_i]}(s),$$

pour $f = 1_{]u,v]}$, on pose :

$$\int_0^{+\infty} f\left(s\right)dB_s = \left(B\left(v\right) - B\left(u\right)\right).$$

soit f une fonction en escalier, on pose :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f\left(s\right)dB_s &= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}\left(B\left(t_i\right) - B\left(t_{i-1}\right)\right) \\ &= I(f).\end{aligned}$$

1.2.2 Cas générale

On montre en analyse que, si $f \in L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$, il existe une suite f_n de fonction en escalier qui converge (dans $L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$) vers f, c'est-à-dire qui vérifie

$$\int_0^{+\infty}\left|f_n - f\right|^2(s)\,ds \rightarrow_{\rightarrow+\infty} 0,$$

dans ce cas, la suite f_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.

La suite de variable aléatoire $F_n = \int_0^{+\infty} f_n(s)dB_s$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ en efiet :

$$\|F_n - Fm\|_2 = \|f_n - f_m\| \to 0 \text{ quand } n, m \to +\infty,$$

donc elle est convergente.

Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, on pose :

$$\begin{aligned} I(f) &= \lim_{n\to+\infty} I(f_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(s)dB_s, \end{aligned}$$

La limite est dans $L^2(\Omega)$.

On dit que $I(f)$ est l'intégrale stochastique (ou intégrale de Wiener) de f par rapport à mouvement Brownien.

Remarque 1.2.1 *Le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé par les variables alétoires $\int_0^{+\infty} f(s)dB_s$ coincide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement Brownien.*

Proposition 1.2.1 **a)** *L'intégrale est linéaire $I(f+g) = I(f) + I(g)$ et isométrique*

$$E\left[\int_0^{+\infty} f(s)dB_s\right]^2 = \int_0^{+\infty} f^2(s)ds.$$

b) $E[I(f)] = E\left[\int_0^{+\infty} f(s)dB_s\right] = 0$ *et var* $\left[\int_0^{+\infty} f(s)dB_s\right] = \int_0^{+\infty} f^2(s)ds = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}$.

c) $E\left[I(f)I(g)\right] = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s)ds$ *et*

$$\begin{aligned}
var\left[I(f+g)\right] &= var\left[I(f)+I(g)\right] \\
&= var\left[I(f)\right] + var\left[I(g)\right] + 2E\left[I(f)I(g)\right] \\
&= \int_0^{+\infty} f^2(s)ds + \int_0^{+\infty} g^2(s)ds + 2\int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds \\
&= \int_0^{+\infty} (f+g)^2(s)ds \\
&= \|f+g\|_2^2 .
\end{aligned}$$

La propriété d'isométrie implique

$$E\left[I(f)I(g)\right] = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s)ds.$$

d) *Soit* $f \in L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$, *la variable* $I(f)$ *est une variable alétoire gaussienne centrée et de variance* $\int_{\mathbb{R}^+} f(s)^2 ds$ *appartenant à l'espace gaussien engendré par* $(B_t,\ t \geq 0)$ *et elle vérifie pour tout* t

$$E\left[B_t \int_0^{+\infty} f(s)dB_s\right] = \int_0^t f(s)ds.$$

Remarque 1.2.2 *Puisque* f *est déterministe la variable* $\int_{\mathbb{R}^+} f(s)dB_s$ *est gaussienne comme limite de variables alétoires gaussiennes sa loi est* $\mathcal{N}\left(0, \int_{\mathbb{R}^+} f(s)^2 ds\right)$.

Bien plus, le processus

$$\begin{aligned}
t \to & \int_0^t f(s)dB_s \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} 1(s)_{]0,t]} f(s)dB_s,
\end{aligned}$$

est un processus gaussien la même raison.

1.2.3 Processus liés à l'intégrale de Wiener

On définit pour $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ la variable aléatoire

$$\int_0^t f(s)dBs = \int_0^{+\infty} 1_{[0,t]}(s)f(s)dBs$$

on peut de la même façon définir $\int_0^t f(s)dB_s$ pour toute fonctions f qui vérifie

$$\int_0^T |f(s)|^2 \, ds < \infty, \ \forall T > 0,$$

ce qui permet de définir l'intégrale stochastique pour une classe plus grande de fonctions, on notera L^2_{Loc} cette classe de fonctions.

Théorème 1.2.1 *Soit $f \in L^2_{Loc}$ et $M_t = \int_0^t f(s)dB_s$.*

a) Le processus M est une martingale continue, la variable aléatoire M_t est d'espérance 0 et de variance $\int_0^t f^2(s)ds$.

b) Le processus M est un processus gaussien centrée de covariance $\int_0^{t\wedge s} f^2(u)du$ àaccroissements indépendants.

c) Le processus $\left(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds, \ t \geq 0\right)$ est une martingale.

d) Si f et g sont dans L^2_{Loc} on a :

$$E\left(\int_0^t f(u)dB_u, \int_0^s g(u)dB_u\right) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du.$$

1.2.4 Intégration par parties

Théorème 1.2.2 *Si f est une fonction de classe C^1*

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f'(s)B_s ds,$$

on pent aussi écrire cette formule

$$d\left(B_t f(t)\right) = f(t)dB_t + B_t f'(t)dt.$$

1.3 Intégrale stochastique d'Itô

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir $\int_0^t \theta_s dB_s$ pour des processus stochastique θ.

Définition 1.3.1 *On dit que* $\{\theta_t,\ t \geq 0\}$ *est un bon processus s'il est* $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$ *−adapté, càglàd et si*

$$E\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right) < \infty,$$

pour tout $t > 0$.

1.3.1 Cas des prossus étagés

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une de réels $t_j, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$−mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in \left]t_j, t_{j+1}\right]$, soit

$$\theta_s(w) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(w) 1_{]t_j,t_{j+1}]}(s),$$

on définit alors

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)),$$

on obtient

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(t_{j+1} \wedge t) - B(t_j \wedge t)).$$

Ce qui établie la continuité de l'application $t \to \int_0^t \theta_s dB_s$.

Si T_j, $0 \leq T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_n$ est une suite croissante de temmps de temps d'arrêt, et si $\theta_s =$

$\sum_{j=0}^{n-1} \theta_j 1_{]T_j,T_{j+1}]}(s)$, ou θ_j est une suite de variable aléatoire telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{T_j}-$mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$, on définit alors

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(T_{j+1} \wedge t) - B(T_j \wedge t))$$

1.3.2 Cas général

On définit les processus càglàd de carré intégrable (appartenent à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$) comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés continue à gauche limités à droite $(\mathcal{F}_t)$ $-$adaptés tels que

$$\|\theta\|^2 =^{def} E\left[\int_0^\infty \theta_t^2 dt\right] < \infty.$$

Les processus étagés appartiennent à Γ. On dit que θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ si

$$\|\theta - \theta_n\|^2 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

L'application $\theta \rightarrow \|\theta\|$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet.

On peut définir $\int_0^t \theta_s dB_s$ pour tous les processus θ et Γ :

on approche θ par des processus étagés, soit $\theta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n$ où $\theta_n = \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{\theta}_j^n 1_{]t_j,t_{j+1}]}$, avec $\widetilde{\theta}_j^n \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$.

On sait que

$$\int_0^\infty \theta_n(s) dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{\theta}_j^n (B(t_{j+1}) - B(t_j)),$$

on définit

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \theta_n(s) dB_s,$$

pour $t > 0$ on a

$$\int_0^t \theta_s dB_s =^{def} \int_0^\infty \theta_s 1_{[0,t]}(s) dB_s,$$

Si θ est étagé

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i (B_{t_{i+1\wedge t}} - B_{t_{i\wedge t}}).$$

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $1_{]0,\tau]}(t)$ est adapté et on définit

$$\int_0^{t\wedge\tau} \theta_s dB_s = \int_0^t \theta_s 1_{]0,\tau]}(s) dB_s.$$

Proposition 1.3.1 *On note Λ l'ensemble $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ des processus θ adaptés càglàd vérifiant*

$$E\left[\int_0^t \theta_s(w) ds\right] < +\infty, \ \forall t > 0.$$

a) *On a*

$$E\left[\int_0^\infty \theta_s dB_s\right] = 0,$$

et

$$var\left(\int_0^\infty \theta_s dB_s\right) = E\left(\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right).$$

b) *Linéarité*

Soit a et b des constantes et $(\theta^i; i = 1, 2)$ deux processus de Λ.

On a

$$\int_0^t (a\theta_s^1 + b\theta_s^2) dB_s = a\int_0^t \theta_s^1 dB_s + b\int_0^t \theta_s^2 dB_s.$$

1.3.3 Propriétés de martingale

Proposition 1.3.2 *Soit $M_t = \int_0^t \theta_s dB_s$, où $\theta \in \Lambda$.*

a) *Le processus M est une martingale, à trajectoire continues.*

b) *Soit $N_t = \left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$. Le processus $(N_t, \ t \geq 0)$ est une martingale.*

Corollaire 1.3.1 *L'espérance de M_t est nulle et sa variance est égale à $\int_0^t E\{\theta_s\}^2 ds$.*

Soit $\phi \in \Lambda$, $E\left(\int_0^t \theta_s dB_s \int_0^t \phi_s dB_s\right) = E\left(\int_0^t \theta_s \phi_s ds\right)$.

Si $M_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s$ *et* $M_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$ *le processus*

$$M_t(\theta)M_t(\varphi) - \int_0^t \theta_s \varphi_s ds,$$

est une martingale.

1.3.4 Processus d'Itô

Un processus X est un processus d'Itô si

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_{s,}$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s|\, ds$ existe (au sens Lebesgue) p.s. pour tout t, et σ un processus appartenant à Λ.

On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

L'écriture

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t,$$

est unique (sous réserve que les processus b et σ vérifient les conditions d'intégrabilité).

Ceci signifi que si

$$\begin{aligned} dX_t &= b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ &= \widetilde{b}_t dt + \widetilde{\sigma}_t dB_t, \end{aligned}$$

alors $b = \widetilde{b}$ et $\sigma = \widetilde{\sigma}$.

En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement.

On peut déflnir un processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que :

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty \quad P.p.s,$$

mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie $x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie.

Si un processus A à variation finie est une martingale, il est constant.

En effet, si $A_0 = 0$, $A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s$ et par suite $E(A_t^2) = 0$.

Intégrale par rapport à un processus d'Itô

Soit X un processus d'Itô de décomposition $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$.

On note :

$$\int_0^t \theta_s dX_s = \int_0^t \theta_s b_s ds + \int_0^t \theta_s \sigma_s dB_s.$$

1.3.5 Formule d'Itô

Le formule d'Itô (ou la formule de changement de variable) vise à donner une formule de changement de variable pour le processus $f(X_t)$ qui sera un processus d'Itô et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière.

Théorème 1.3.1 *Soient (B_t) un mouvement Brownien et une fontion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s) ds.$$

Première formule d'Itô

Théorème 1.3.2 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ de classe C^2 à dérivées bornées et $(X)_t$ une martingale contionue.*

Alors

$$f\left(X_t\right)=f\left(x\right)+\int_0^t f'\left(X_s\right)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f'\left(X_s\right)\sigma_s^2 ds, \tag{1.1}$$

cette formule s'écrit sous forme

$$\begin{aligned} df\left(X_t\right) &= f'\left(X_t\right)dX_t+\frac{1}{2}f''\left(X_t\right)\sigma_t^2 dt \\ &= \left(f'\left(X_t\right)b_t+\frac{1}{2}f''\left(X_t\right)\sigma_t^2\right)dt+f'\left(X_t\right)\sigma_t dB_t \\ &= f'\left(X_t\right)b_t dt+\frac{1}{2}f''\left(X_t\right)d\left\langle X_t\right\rangle+f'\left(X_t\right)\sigma_t dB_t. \end{aligned}$$

On utilise la notation

$$df\left(X_t\right)=f'\left(X_t\right)dX_t+\frac{1}{2}f''\left(X_t\right)dX_t dX_t,$$

on introduit les régles de calcul suivantes :

$$(dt)^2=dt.dB_t=dB_t.dt=0 \ \ et \ \ (dB_t)^2=dt.$$

Deuxième formule d'Itô

Théorème 1.3.3 ***(Fonction dépendant du temps)***

Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, de dérivé bornées, on a

$$f\left(t,X_t\right)=f\left(0,x_0\right)+\int_0^t f_s'\left(s,X_s\right)ds+\int_0^t f_x'\left(s,X_s\right)dx_s+\frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''\left(s,X_s\right)\sigma_x^2 ds.$$

On pent écrire formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df\left(t,X_t\right) &= f_t'\left(t,X_t\right)dt+\frac{1}{2}f_{xx}''\left(t,X_t\right)\sigma_x^2 dt+f_x'\left(t,X_t\right)dX_t \\ &= f_t'\left(t,X_t\right)dt+f_x'\left(t,X_t\right)dX_t+\frac{1}{2}f_{xx}''\left(t,X_t\right)d\left\langle X\right\rangle_t \\ &= \left(f_t'\left(t,X_t\right)+f_x'\left(t,X_t\right)b_t+\frac{1}{2}f_{xx}''\left(t,X_t\right)\sigma_t^2\right)dt+f_x'\left(t,X_t\right)\sigma_t dB_t. \end{aligned}$$

Troisième formule d'Itô

Théorème 1.3.4 *Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô issus de x_1 (resp.de x_2) de coefficient de dérive b^1 (resp.de b^2), de coefficient de diffusion σ^1 (resp.de σ^2) et portés respectivement par deux brownien B^1 et B^2 corrélés avec coefficient ρ. On suppose que b^i, σ^i sont $\mathcal{F}_t^{B^i}-$adaptée. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées.*

On a

$$\begin{aligned} f\left(X_t^1, X_t^2\right) &= f\left(x_1, x_2\right) + \int_0^t f_1'\left(X_s^1, X_s^2\right) dX_s^1 + \int_0^t f_2'\left(X_s^1, X_s^2\right) dX_s^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \left[f_{11}''\left(X_s^1, X_s^2\right)(\sigma_s^1)^2 + 2\rho f_{12}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\sigma_s^1\sigma_s^2 + f_{11}''\left(X_s^1, X_s^2\right)(\sigma_s^1)^2\right] ds, \end{aligned}$$

où f_1' désigne la dérivée par rapport à x_i et $f_{i,j}$ la dérivée seconde par rapport à x_j puis x_i, $i, j = 1, 2$.

Formule d'intégration par parties

Proposition 1.3.3 *Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô,*

$$dX_1 = b_1 dt + \sigma_1 dB_t,$$

$$dX_2 = b_2 dt + \sigma_2 dB_t,$$

Alors le produit X_1X_2 est un processus d'Itô et :

$$X_1X_2 = x_1x_2 + \int_0^t X_1 dX_2 + \int_0^t X_2 dX_1 + \int_0^t \sigma_1\sigma_2 ds,$$

$$d\left(X_1, X_2\right) = X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + d\left\langle X_1, X_2\right\rangle_t.$$

L'intégration de la régle du produit d'Itô donne la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^t X_2 dX_1 = \left[X_1X_2\right]_0^t - \int_0^t X_1 dX_2 - \int_0^t \sigma_1\sigma_2 ds.$$

La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2 noté $\langle X_1, X_2 \rangle$ est définit comme le processus à variation fini :

$$\langle X_1, X_2 \rangle_t = \int_0^t \sigma_1 \sigma_2 ds.$$

Chapitre 2

Intégrale itérée d'Itô

Dans ce chapitre nous allons étudier Intégrale itérée d'Itô et Les polynômes d'Hermite ainsi que la relation entre eux, ce chapitre est important pour le chapitre suivant

2.1 Intégrale itérée d'Itô

Définition 2.1.1 *Soit f une fontion déterministe définie sur :*

$$S_n = \{(t_1, t_2, ..., t_n) \in [0, T]^n : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n \leq T\}, (n > 1),$$

telle que :

$$\| f \|^2_{L^2(S_n)} := \int_{S_n} f^2(t_1, t_2, ..., t_n) dt_1 dt_2 ... dt_n < \infty.$$

L'intégrale d'Itô n-fois itérée est donné par :

$$J_n(f) = \int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} f(t_1, t_2, ..., t_n) dB(t_1) dB(t_2) ... dB(t_n), \tag{2.1}$$

Proposition 2.1.1 *Les relations suivante sont vraies :*

$$E[J_m(g)J_n(f)] = \begin{cases} 0, \; si \; n \neq m \; (m, n = 1, 2, ...), \\ \langle g, f \rangle_{L^2(S_n)}, \; si \; n = m. \end{cases} \tag{2.2}$$

où

$$\langle g, f \rangle_{L^2(S_n)} = \int_0^T \int_0^{s_n} ... \int_0^{s_2} g(s_1, s_2, ..., s_n) f(s_1, s_2, ..., s_n) ds_1 ds_2 ... ds_n, \tag{2.3}$$

est le produit scalaire dans $L^2(S_n)$.

En particulier, nous avons

$$\| \; J_n(f) \; \|_{L^2(P)} = \| \; f \; \|_{L^2(S_n)}$$

Preuve. On applique l'isométrie, si $g \in L^2(S_m)$ et $f \in L^2(S_n)$.

(i) Si $m < n$,

$$\begin{aligned} E[J_m(g)J_n(f)] &= E[(\int_0^T \int_0^{s_m} ... \int_0^{s_2} g(s_1, s_2, ..., s_m) dB(s_1) ... dB(s_m)) \\ &(\int_0^T \int_0^{s_m} ... \int_0^{t_2} f(t_1, ..., t_{n-m}, s_1, ..., s_m) dB(t_1) ... dB(t_{n-m}) dB(s_1) ... dB(s_m))] \\ &= \int_0^T E[(\int_0^{sm} ... \int_0^{s_2} g(s_1, s_2, ..., s_{m-1}, s_m) dB(s_1) dB(s_2) ... dB(s_{m-1})) \\ &(\int_0^{sm} ... \int_0^{t_2} f(t_1, ..., s_{m-1}, s_m) dB(t_1) ... dB(s_{m-1}))] ds_m \\ &= ... \\ &= \int_0^T \int_0^{sm} ... \int_0^{s_2} g(s_1, s_2, ..., s_m) \\ &E\left[\int_0^{s_1} ... \int_0^{t_2} f(t_1, ..., t_{n-m}, s_1, ..., s_m) dB(t_1) ... dB(t_{n-m})\right] ds_1 ... ds_m \\ &= 0, \end{aligned}$$

parce que la valeur attendue d'une intégrale d'Itô est nulle

Au contraire, si f et g appartiennent à $L^2(S_n)$.

(ii) Si $m = n$,

$$\begin{aligned}
E[J_n(g)J_n(f)] &= E[(\int_0^T \int_0^{s_n} ... \int_0^{s_2} g(s_1, s_2, ..., s_n)dB(s_1)...dB(s_{n-1})) \\
&\quad (\int_0^T \int_0^{s_n} ... \int_0^{t_2} f(s_1, ..., s_n)dB(s_1)dB(s_2)...dB(s_{n-1}))] \\
&= \int_0^T E[(\int_0^{s_n} ... \int_0^{s_2} g(s_1, ..., s_n)dB(s_1)dB(s_2)...dB(s_{n-1})) \\
&\quad (\int_0^{s_n} ... \int_0^{s_2} f(s_1, ..., s_n)dB(s_1)dB(s_2)...dB(s_{n-1}))]ds_n \\
&= ... = \int_0^T \int_0^{s_n} ... \int_0^{s_2} g(s_1, s_2, ..., s_n)f(s_1, s_2, ..., s_n)ds_1 ds_2 ...ds_n \\
&= \langle g, f\rangle_{L^2(S_n)}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.1 *Notez que de (2.2), est toujours vrais pour $n = 0$ ou $m = 0$ si nous définissons $J_0 = f$ quand f est constanhe, et $\langle g, f\rangle_{L^2(S_0)} = gf$ quand g, f sont constantes.*

Remarque 2.1.2 *Directement à partir des propriétés de l'intégrale l'Itô nous avons*

a) $J_n(f) \in L^2(P)$, *par l'isométrie d'Itô on a :*

$$\|J_n(f)\|^2_{L^2(P)} = \|f\|^2_{L^2(S_n)}.$$

b) *Il est facile de voir que :*

$$f \in L^2(S_n) \Longrightarrow J_n(f) \in L^2(P),$$

et aussi l'intégrale d'Itô $n - fois$ itéré est un opérateur linéoire, i.e :

$$J_n(af + bg) = aJ_n(f) + bJ_n(g), \text{ pour } f, g \in L^2(S_n) \text{ et } a, b \in \mathbb{R}.$$

Soit $f \in \widetilde{L}^2([0, T]^n)$, i.e. f est une fonction symétrique carrée intégrable.

Définition 2.1.2 *On appelle aussi l'intégrale d'Itô $n-fois$ itéré la variable aléatoire :*

$$\begin{aligned} I_n(f) &:= \int_{[0,T]^n} f(t_1,...,t_n)dB(t_1)...dB(t_n) \qquad (2.4)\\ &= n! \int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} f(t_1,...,t_n)dB(t_1)dB(t_2)...dB(t_n) \\ &= n! J_n(f). \end{aligned}$$

I_0 désigne l''application identité de $\mathbb{R}$, ensuite que :

$$\|I_n(f)\|_{L^2(\Omega)} = \|n! I_n(f)\|_{L^2(\Omega)} = n! \|f\|^2_{L^2(S_n)}. \qquad (2.5)$$

A propos des fonctions symétrique :

- *La fonction $f : [0,T]^n \to \mathbb{R}$ est symétrique si $f(t_{\sigma_1},...,t_{\sigma_n}) = f(t_1,...,t_n)$ pour toutes les permutations σ de $(1,...,n)$.*
- *Si f est une fonction réelle à valeurs dans $[0,T]^n$, la symétrisation $\widetilde{f}$ de f est*

$$\widetilde{f}(t_1,...,t_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma_1},...,t_{\sigma_n}), \qquad (2.6)$$

  où la somme est prise sur toutes permutations σ de $(1,...n)$. Notre que $\widetilde{f} = f$ si et seulement si f est symétrique .
- *Si $f \in ([0,T]^n)$, alors :*

$$\|f\|^2_{([0,T]^n)} = n! \|f\|^2_{L^2(S_n).} \qquad (2.7)$$

Exemple 2.1.1 *La symétrisations de la fonction :*

$$f(t_1,t_2) = t_1^2 + t_2 \sin t_1, \qquad (t_1,t_2) \in [0,T]^2,$$

est

$$\widetilde{f}(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\left[t_1^2 + t_2^2 + t_2 \sin t_1 + t_1 \sin t_2\right], \qquad (t_1,t_2) \in [0,T]^2,$$

Théorème 2.1.1 *Soit $f \in L^2([0,T]^n)$, $n \geq 1$. Alors,*

$$\begin{aligned} I_n(f) &= n! \int_0^T \dots \int_0^{t_{n-2}} \left(\int_0^{t_{n-1}} \widetilde{f}(t_1, \dots, t_n) dB(t_n) \right) dB(t_{n-1}) \dots dB(t_1) \\ &= n! J_n(\widetilde{f}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Preuve. Nous observons qu'il suffit de montrer le théorème dans le cas où f est une fonction indicatrice sur un rectangle disjoint avec l'ensemble D, c'est-à-dire,

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = 1_{\left[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}\right) \times \dots \times \left[t_n^{(1)}, t_n^{(2)}\right)}(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

où $t_n^{(1)} < t_n^{(2)} \leq t_{n-1}^{(1)} < t_{n-1}^{(2)} \leq \dots \leq t_2^{(1)} < t_2^{(2)} \leq t_1^{(1)} < t_1^{(2)}$. Alors,

$$I_n(f) = \prod_{i=1}^{n} \left(B(t_i^{(2)}) - B(t_i^{(1)}) \right).$$

D'autre part, on remarque que $\widetilde{f} = \frac{1}{n!} f$ sur l'ensemble $t_n < t_{n-1} < \dots < t_1$.

Donc,

$$\int_0^{t_{n-1}} \widetilde{f}((t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_n) = \frac{1}{n!} 1_{\left[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}\right) \times \dots \times \left[t_{n-1}^{(1)}, t_{n-1}^{(2)}\right)}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \left(B(t_n^{(2)}) - B(t_n^{(1)}) \right),$$

qui est une variable aiéatoire $\mathcal{F}_{t_{n-1}^{(1)}}$*−mesurable* et peut être considéré comme un processus stochastique "constant" en intégrant sur l'intervalle $\left[t_{n-1}^{(1)}, t_{n-1}^{(2)}\right]$ par rapport à $dB(t_{n-1})$, itérer cette procédure, on obtient que

$$\begin{aligned} \int_0^T \dots \int_0^{t_{n-2}} \left(\int_0^{t_{n-1}} \widetilde{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_n) \right) dB(t_{n-1}) \dots dB(t_1) &= \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \left(B(t_i^{(2)}) - B(t_i^{(1)}) \right) \\ &= \frac{1}{n!} I_n(f), \end{aligned}$$

et on a

$$J_n(\widetilde{f}) = \int_0^T ... \int_0^{t_{n-2}} \left(\int_0^{t_{n-1}} \widetilde{f}(t_1, t_2, ..., t_n) dB(t_n) \right) dB(t_{n-1}) ... dB(t_1),$$

Alors,

$$J_n(\widetilde{f}) = \frac{1}{n!} I_n(f).$$

d'où

$$I_n(f) = n! J_n(\widetilde{f}).$$

■

Proposition 2.1.2 *Noter que de* (2.2) *et le* théorème (2.1.1) *nous avons :*

$$\begin{aligned} \|I_n(f)\|^2_{L^2(P)} &= E\left[I_n^2(f)\right] \\ &= E\left[(n!)^2 J_n^2(f)\right] \\ &= (n!)^2 \|f\|^2_{L^2(S_n)} \\ &= n! \|f\|^2_{L^2([0,T]^n)}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

pour tout $f \in \widetilde{L}^2([0,T]^n)$.

De plus, si $g \in \widetilde{L}^2([0,T]^m)$ *et* $f \in \widetilde{L}^2([0,T]^n)$, *nous avons :*

$$E[I_m(g) I_n(f)] = \begin{cases} 0, \; si \; n \neq m \; (m, n = 1, 2, ...), \\ \langle g, f \rangle_{L^2([0,T]^n)}, \; si \; n = m. \end{cases} \tag{2.10}$$

avec

$$\langle g, f \rangle_{L^2([0,T]^n)} = \langle g, f \rangle_{L^2(S_n)},$$

2.2 Les polynômes d'Hermite

Définition 2.2.1 *On définit les polynôme d'Hermite de degré* n *et de paramétre* $\alpha > 0$ *par :*

$$\begin{cases} H_0(x,\alpha) = 1 \\ H_n(x,\alpha) = (-\alpha)^n e^{\frac{x^2}{2\alpha}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}\right), n \geq 1, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on peut utiliser la notation $H_n(x) = H_n(x,1)$.

On remarque que :

$$H_1(x,1) = x$$

$$H_2(x,1) = (x^2 - 1)$$

$$H_3(x,1) = x^3 - 3x.$$

En outre, on a les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x} H_n(x,\alpha) = H_{n-1}(x,\alpha),\ n \geq 1, \tag{2.11}$$

$$(n+1)H_{n+1}(x,\alpha) = xH_n(x,\alpha) - \alpha H_{n-1}(x,\alpha),\ n \geq 1, \tag{2.12}$$

$$H_n(-x,\alpha) = (-1)^n H_n(x,\alpha),\ n \geq 1. \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} H_n(-x,\alpha) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x,\alpha),\ n \geq 1. \tag{2.14}$$

Pour prouver ces propriétés, il suffit de noter que les polynômes d'Hermite sont les cofficients du développement en puissances de t de la fonction,

$$\exp(-t^2 + 2xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x), \tag{2.15}$$

pour $n = 1, 2, ..., n$ ils sont engendrés par la fonction génératrice, on pose :

$$\begin{aligned} S(x,t) &= \exp\left[-t^2 + 2xt\right] \\ &= \exp\left[-x^2 - (t-x)^2\right], \end{aligned}$$

observons que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial t^n} S(x,t) &= \exp(x^2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp\left[-(t-x)^2\right] \\ &= (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dt^n} \exp\left[-(t-x)^2\right], \end{aligned}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} S^n(x,0) &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} S(x,0) \\ &= (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dt^n} \exp(-x^2) \\ &= H_n(x), \end{aligned}$$

le développement de Maclaurin de $S(x,t)$ autour de

$$S(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} S(x,0),$$

d'où

$$\exp(-t + 2xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x).$$

Proposition 2.2.1 *Soit X et Y deux variables aléatoires centré de variance 1 et distribution conjointe gaussienne.*

Alors, pour toute n, $m \geq 0$,

$$E\left[H_n(X)H_m(Y)\right] = \begin{cases} 0, \ \ si\ n \neq m, \\ \frac{1}{n!}\left(E\left[XY\right]\right)^n, \ \ si\ n = m, \end{cases} \tag{2.16}$$

Théorème 2.2.1 *Pour tous* $f \in L^2\left([0,T]^n\right)$ *et* $n \geq 1$,

$$I_n(f^{\otimes n}) = n! H_n(W(f), \|f\|^2_{L^2([0,T])}), \tag{2.17}$$

où $W(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)dB(s)$ *(intégrale de Wiener), et* $f^{\otimes n}$ *est une fonction à* n *variables (symétrique) telle que :*

$$f^{\otimes n}(t_1, t_2, ..., t_n) = f(t_1)f(t_2)...f(t_n).$$

Preuve. Nous prouvons ce résultat par induction sur n, le cas $n = 1$ est immédiat, on suppose que le résultat est valable pour $1, ..., n$

En utilisant le *théorème* (2.1.1) nous obtenous que

$$I_{n+1}(f^{\otimes(n+1)}) = (n+1)! \int_0^T f(t_1)X_{t_1}dB(t_1),$$

où :

$$X_{t_1} = \int_0^{t_1} ... \left(\int_0^{t_n} f(t_2)...f(t_{n+1})dB(t_{n-1})\right) ...dB(t_2).$$

On fait appel à nouveau au *théorème* (2.1.1) et l'hypothèse d'induction, nous avons donc

$$\begin{aligned} X_{t_1} &= \frac{1}{n!}\int_{[0,T]^n}\int_0^{t_n} f(t_2)...f(t_{n+1})dB(t_2)...dB(t_{n+1}) \\ &= H_n\left(\int_0^{t_1} f(s)dB(s), \int_0^{t_1} f^2(s)ds\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons l'égalité

$$I_{n+1}(f^{\otimes(n+1)}) = (n+1)! \int_0^T f(t_1)H_n\left(\int_0^{t_1} f(s)dB(s), \int_0^{t_1} f^2(s)ds\right) dB(t_1), \tag{2.18}$$

Déautre part, si on applique la formule d'Itô à la fonction $H_{n+1}(x,\alpha)$, il cède que

$$dH_{n+1}\left(\int_0^T f(s)dB(s),\int_0^T f^2(s)ds\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}H_{n+1}\right)f(t)dB(t)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_{n+1}\right)f^2(t)dt$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}H_{n+1}\right)f^2(t)dt.$$

En utilisant **les propriétés** (2.11) et (2.14), on obtient que

$$dH_{n+1}\left(\int_0^T f(s)dB(s),\int_0^T f^2(s)ds\right)=f(t)H_n\left(\int_0^T f(s)dB(s),\int_0^T f^2(s)ds\right)dB(t).$$

Itérer sur $[0,T]^n$, on obtient que

$$H_{n+1}(\mathcal{W}(f),\|f\|_{L^2(T)})=\int_0^T f(t)H_n\left(\int_0^t f(s)dB(s),\int_0^t f^2(s)ds\right)dB(t). \tag{2.19}$$

De **l'égalités** (2.18) et (2.19) on conclue le resultat pour $(n+1)$. ■

Proposition 2.2.2 *Si $\xi_1,\xi_2,...$sont des fonctions orthonormées dans $L^2\left([0,T]^n\right)$.*

nous avons :

$$I_n\left(\xi_1^{\otimes\beta_1}\widetilde{\otimes}...\widetilde{\otimes}\xi_2^{\otimes\beta_m}\right)=\prod_{k=0}^{m}H_{\beta k}\left(\int_0^T \xi_k(t)dB(t)\right), \tag{2.20}$$

avec $\beta_1+...+\beta_m=n$.

Ici $\otimes$ dénotés le produit tensoriel et $\beta_k\in\{1,2,...\}$ pour tout k.

En dénéral, le oroduit tensoriel $(f\otimes g)$ de deux fonctions f,g est défini par

$$(f\otimes g)(x_1,x_2)=f(x_1)g(x_2),$$

et le produit tensoriel symétrisée $\left(f\widetilde{\otimes}g\right)$ est la symétrisassions de $(f\otimes g)$

2.3 Intégrales Itérée d'Itô et les polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite $h_n(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $n=0,1,2,...$, sont définis par :

$$h_n(x) = (-1)^n \, e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{1}{2}x^2} \right), \; n = 0, 1, 2, ... \tag{2.21}$$

Rappelons que la famille des polynômes d'Hermite constituent une base orthogonale pour $L^2(\mathbb{R}, \mu(dx))$ si $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}x^2} dx$,

Noter que :

$$n! \int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} g(t_1)...g(t_n) dB(t_1) dB(t_2)...dB(t_n) = \|g\|^n \, h_n \left(\frac{\theta}{\|g\|} \right), \tag{2.22}$$

où $\|g\| = \|g\|_{L^2([0,T])}$ et $\theta = \int_0^T g(t) dB(t)$.

Exemple 2.3.1 *Soit $g = 1$ et $n = 3$, alors nous obtenons :*

$$\begin{aligned} 6 \int_0^T \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} 1 dB(t_1) dB(t_2) dB(t_3) &= T^{\frac{3}{2}} h_3 \left(\frac{B(T)}{T^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= B^3(T) - 3T B(T). \end{aligned}$$

En fait, les premiers polynômes d'Hermite sont :

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 1, \\ h_1(x) &= x, \\ h_2(x) &= x^2 - 1, \\ h_3(x) &= x^3 - 3x, \\ h_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\ h_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x, ... \end{aligned}$$

Pour $n = 1, 2, ...,$ *ils sont engendés par la fonction génératrice*

$$\begin{aligned}
\exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) &= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\exp\left(\frac{-\left(x-t\right)^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{d^n \exp\left(\frac{-(x-t)^2}{2}\right)}{dt^n}\right)_{t=0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}h_n(x).
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Calcule de Malliavin

On a choisie d'introduire les opérateurs de la dérivée de Malliavin et l'intégrale de Skorohod par l'expression du chaos. D'autre approches équivalente consiste à utiliser la dérivé directionnelle sur l'espace de Winer, voir par exemple De Prato (2007), Malliavin (1997), Nualart (2006), Sanz-Solé (2005).

Soit $B(t) = B(w,t)$, $w \in \Omega$, $t \in [0,T]$, $(T > 0)$, un mouvement Brownien sur l'espace de probabilité complet (Ω, F, P) tel que : $B(0) = 0 \ P - p.s.$

Pour tout t, soit F_t le $\sigma-$*algèbre* engendrée par $B(s)$, $0 < s < t$, augmentée par tous les événements de mesure nul. La filtration continue qui en résulte est

$$F = \{F_t, t > 0\}.$$

3.1 Expression du chaos de Winer-Itô

Théorème 3.1.1 *Soit ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$ mesurable dans $L^2(P)$. Alors il existe une suite unique $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \widetilde{L}^2([0,T]^n)$ tel que :*

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \tag{3.1}$$

où la convergence est dans $L^2(P)$. En autre, étant donnée que :

$$\|I_n(f_n)\|^2_{L^2(P)} = n!\|f_n\|^2_{L^2([0,T]^n)},$$

nous avons l'isométrie

$$\|\xi\|^2_{L^2(P)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!\|f_n\|^2_{L^2([0,T]^n)}. \tag{3.2}$$

Exemple 3.1.1 *L'expression du chaos de $\xi = \exp\left\{B(T) - \frac{1}{2}T\right\}$ est donnée par :*

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}}}{n!} h_n\left(\frac{B(t)}{\sqrt{t}}\right)$$

3.2 Intégrale de Skorohod

Soit $u\,(w,t)$, $w \in \Omega$, $t \in [0,T]$, un processus stochastique tel que : pour tous $t \in [0,T]$, $u(t)$ variable aléatoire $\mathcal{F}_T - mesurable$ et

$$E\left[u^2(t)\right] < \infty.$$

Ensuite, pour chaque $t \in [0,T]$, nous pouvons appliqué l'expression du chaos de Wiener-Itô à la variable aléatoire $u(t) := u\,(w,t)$, $w \in \Omega$:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_{n,t}), \qquad f_{n,t} \in \widetilde{L}^2([0,T]^n). \tag{3.3}$$

Les fonctions $f_{n,t} = f_{n,t}\,(t_1,...,t_n)$, $(t_1,...,t_n) \in [0,T]^n$, $n = 1,2,...$, dépendent de $t \in [0,T]$ comme paramètre. On peut définir :

$$f_n\,(t_1,...,t_n,t_{n+1}) = \; f_n\,(t_1,...,t_n,t) := \; f_{n,t}\,(t_1,...,t_n)\,, \tag{3.4}$$

comme une fonction de $n+1$ variables. Sa syétrisassion $\widetilde{f}_n$ est donnée par :

$$\widetilde{f_n}\left(t_1, ..., t_n, t_{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left[\widetilde{f_n}\left(t_1, ..., t_n, t_{n+1}\right) + f_n\left(t_2, ..., t_{n+1}, t_1\right) + ... + f_n\left(t_1, ..., t_{n-1}, t_n\right)\right], \tag{3.5}$$

Exemple 3.2.1 *Considérons*

$$f_{2,t}(t_1, t_2) = f_2(t_1, t_2, t) = \frac{1}{2}\left[\chi_{\{t_1<t<t_2\}} + \chi_{\{t_2<t<t_1\}}\right].$$

Alors la symétrisation $\widetilde{f_2}$ *de* f_2 *est donnée par :*

$$\begin{aligned}\widetilde{f_2}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}[&\frac{1}{2}\left(\chi_{\{t_1<t_3<t_2\}} + \chi_{\{t_2<t_3<t_1\}}\right) + \frac{1}{2}(\chi_{\{t_1<t_2<t_3\}} + \chi_{\{t_3<t_2<t_1\}})\\ &+ \frac{1}{2}\left(\chi_{\{t_3<t_1<t_2\}} + \chi_{\{t_2<t_1<t_3\}}\right)].\end{aligned}$$

qui donne

$$\widetilde{f_2}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6}$$

Définition 3.2.1 *Soit* $u(t)$, $t \in [0, T]$, *un processus stochastique tel que :*

pour tous $t \in [0, T]$, $u(t)$ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T-$*mesurable et* $E\left[u^2(t)\right] < \infty$. *Son expression du chaos de Wiener-Itô est :*

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_{n,t}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(.,t)), \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\left(f_n(.,t) \in \widetilde{L}^2([0,T]^n)\right)$.

Ensuite, nous définissons l'intégrale de Skorohod de u par :

$$\begin{aligned} \delta(u) &:= \int_0^T u(t)\delta B(t) \\ &:= \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}\left(\widetilde{f_n}\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

lorsque elle converge dans $L^2(P)$ *(ici* $\widetilde{f}_n$ *est la symétrique de* $f_n(.,t)$*) en autre :*

$$\|\delta(u)\|^2_{L^2(P)} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)! \left\|\widetilde{f}_n\right\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} < \infty. \tag{3.8}$$

Exemple 3.2.2 *Vérifions que :*

$$\int_0^T B(T)\delta B(t) = B(T)^2 - T,$$

L'expression du chaos de Wiener -Itô de l'intégrale est donnée par :

$$u(t) = B(T) = \int_0^T 1dB(t) = I_1(1),\ t \in [0,T],$$

i.e pour tous t*,* $f_{0,t} = 0$*,* $f_{1,t} = 1$*, et* $f_{n,t} = 0$ *pour tous* $n \geq 2$*.*

Où :

$$\begin{aligned}\delta(u) &= I_2(\widetilde{f}_1) = I_2(1)\\ &= 2\int_0^T \int_0^{t_2} dB(t_1)dB(t_2)\\ &= B(T)^2 - T.\end{aligned}$$

On notera que, même si l'intégrale ne dépend pas de t*, nous avons :*

$$\int_0^T B(T)\delta B(t) \neq B(T)\int_0^T \delta B(t).$$

3.3 La Dérivée de Malliavin

Il y'a plusieurs façons d'introduire la dérivée de Malliavin. La construction initiale a été donnée sur l'espace de Wiener $\Omega = C_0([0,T])$ constitué de tous les fonctions continues $w : [0,T] \to \mathbb{R}$ avec $w(0) = 0$. Dans ce chapitre, nous utilisons principalement une approche basée sur l'expression du chaos. Nous donnons une présentation dans cette section.

Définition 3.3.1 *Soit $F \in L^2(P)$ est $\mathcal{F}_T -$ mesurable avec l'expression du chaos*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \tag{3.9}$$

où $f_n \in \widetilde{L}^2\left([0,T]^n\right)$, $n = 1, 2, ...$

(i) *On dit que $F \in D_{1,2}$,si :*

$$\|F\|^2_{D_{1,2}} := \sum_{n=1}^{\infty} nn! \, \|f_n\|^2_{L^2([0,T]^n)} < \infty, \tag{3.10}$$

(ii) *Pour toute $F \in D_{1,2}$, nous définissons la dérivée de Malliavin D_tF de F au moment t, l'expression :*

$$D_tF = \sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}(f_n\left(.,t\right)), \qquad t \in \left[0, T\right], \tag{3.11}$$

où $I_{n-1}(f_n\left(.,t\right))$ est le $(n-1)$ intégrale itérée de $f_n\left(t_1, ..., t_{n-1}, t\right)$ par rapport aux $n-1$ premiére variable $t_1, ..., t_{n-1}$ et $t_n = t$ comme paramétre

Remarque 3.3.1 *Noter que si (3.10) est vrai, alors :*

$$\begin{aligned}
\|D.F\|^2_{L^2(P\times\lambda)} &= E\left[\int_0^T (D_tF)^2 dt\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T n^2(n-1)! \, \|f_n(.,t)\|^2_{L^2([0,T]^n)} \, dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nn! \, \|f_n\|^2_{L^2([0,T]^n)} \\
&= \|F\|^2_{D_{1,2}} < \infty,
\end{aligned}$$

ainsi la dérivée $D.F = D_tF$, $t \in [0,T]$ est bien définie en tant qu'un élément de $L^2\left(P \times \lambda\right)$.

Théorème 3.3.1 ***(Fermutere de la Dérivée de Malliavin)*** *Supposons que $F \in L^2(P)$ et $F_k \in D_{1,2}$, $k = 1, 2, ...$, tel que :*

(1) $F_k \to F,\ k \to \infty,$ *dans* $L^2(P)$.

(2) $\{D_t F_k\}_{k=1}^{\infty}$ *converge dans* $L^2(P \times \lambda)$.

Alors $F \in D_{1,2}$ *et* $D_t F_k \to D_t F$ *quand* $k \to \infty,$ *dans* $L^2(P \times \lambda)$.

Preuve. Soit $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ et $F_k = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n^{(k)})$, $k = 1, 2, ...$Alors par (1) :

$$f_n^{(k)} \to f_n, \quad k \to \infty, \text{ dans } L^2(\lambda^n),$$

pour tous n. Par (2) nous avons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} nn! \left\| f_n^{(k)} - f_n^{(j)} \right\|_{L^2(\lambda^n)}^2 = \| D_t F_k - D_t F_j \|_{L^2(P \times \lambda)}^2 \to 0, \quad j,\ k \to \infty,$$

Ainsi par le lemme Fatou,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} nn! \left\| f_n^{(k)} - f_n \right\|_{L^2(\lambda^n)}^2 \leq \lim_{k\to\infty} \underline{\lim}_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} nn! \left\| f_n^{(k)} - f_n^{(j)} \right\|_{L^2(\lambda^n)}^2 = 0.$$

Cela implique que $F \in D_{1,2}$ et

$$D_t F_k \to D_t F, \quad k \to \infty, \text{ dans } L^2(P \times \lambda).$$

■

3.4 Règles de Calcul fondamentale

Nous présentons ici une collection de résultats qui constituent les règles de calcul de dérivé de Malliavin.

Soit $F = \int_0^T f(s) dB(s)$, où $f \in L^2([0, T])$. Alors :

– $D_t F = f(t)$.

– $D_t (F)^n = n F^{n-1} D_t F = n F^{n-1} f(t)$.

Prenons le cas où $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, et $f_n = f^{\otimes n}$ tel que :

$f \in L^2([0,T])$, à savoir

$$f_n(t_1, ..., t_n) = f(t_1)...f(t_n) = f^{\otimes n}(t),$$

Ensuite, nous avons d'aprés

$$I_n(f_n) = \|f\|^n h_n\left(\frac{\theta}{\|f\|}\right), \tag{3.12}$$

où $\|f\| = \|f\|_{L^2([0,T])}$, $\theta = \int_0^T f(t)dB(t)$ et h_n est le polynôme d'Hermité d'ordre n. Alors par (3.11) nous avons :

$$\begin{aligned} D_t I_n(f_n) &= nI_{n-1}(f_n(.,t)) \\ &= nI_{n-1}(f^{\otimes(n-1)})f(t) \\ &= n\|f\|^{(n-1)} h_{n-1}\left(\frac{\theta}{\|f\|}\right) f(t). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Une propriété de base des polynôme d'Hermité est que :

$$h_n^{'}(x) = nh_{n-1}(x). \tag{3.14}$$

On combinant avec (3.13) et (3.14) nous obtenons :

$$D_t h_n\left(\frac{\theta}{\|f\|}\right) = h_n^{'}\left(\frac{\theta}{\|f\|}\right)\frac{f(t)}{\|f\|}. \tag{3.15}$$

En particulier, si $n = 1$, nous obtenons :

$$D_t\left(\int_0^T f(s)dB(s)\right) = f(t). \tag{3.16}$$

De même, par (3.16) pour $n = 2, 3, ...$, nous avons :

$$D_t\left(\int_0^T f(s)dB(s)\right)^n = n\left(\int_0^T f(s)dB(s)\right)^{n-1} f(t). \tag{3.17}$$

Soit $D^0_{1,2}$ soit l'ensemble de tous les $F \in L^2(P)$ dont l'expansion du chaos n'a que fini de nombreux termes. Ensuite, nous avons le résultat suivant

Théorème 3.4.1 ***(Règle de produit pour le dérivé de Malliavin)*** *Supposer $F_1, F_2 \in D^0_{1,2}$. Alors $F_1, F_2 \in D_{1,2}$ ey aussi $F_1F_2 \in D_{1,2}$ avec*

$$D_t(F_1F_2) = F_1D_tF_2 + F_2D_tF_1. \tag{3.18}$$

Théorème 3.4.2 ***(Règles de calcule)*** *Soit $F \in D_{1,2}$ et $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction continue différentiable avec la dérivée bornée alors $\varphi(F) \in D_{1,2}$ et*

$$D_t\varphi(F) = \varphi'(F)D_tF. \tag{3.19}$$

Ici $\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x)$,

(Cette régle de calcule peut être étendue au cas Lipschitz).

Dérivée de Malliavin et espérance conditionnelle :

Nous présentons maintenant quelques résultats préliminaires sur l'espérance conditionnelle.

Définition 3.4.1 *Soit G un ensemble de Borel sur $[0,T]$. Nous définissions $\mathcal{F}_G$ comme σ-a lg èbre complété engendrée par toutes variables aléatoires de la forme :*

$$F = \int_0^T \chi_A(t)dB(t), \tag{3.20}$$

pour tous les ensembles borélienne $A \subseteq G$.

Ainsi, si $F = [0,t]$, pour toute $t \in [0,T]$ fixe, nous avons cela $\mathcal{F}_{[0,t]} = \mathcal{F}_t$.

Notez que si G_1, G_2 sont des ensembles de Borel dans $[0,T]$, alors

$$\mathcal{F}_{G_1} \cap \mathcal{F}_{G_2} = \mathcal{F}_{G_1 \cap G_2}.$$

Lemme 3.4.1 *Pour tout* $g \in L^2([0,T])$, *nous avons :*

$$E\left[\int_0^T g(t)dB(t) \mid \mathcal{F}_G\right] = \int_0^T \chi_G(t)g(t)dB(t). \tag{3.21}$$

Preuve. Par définition de l'espérance conditionnelle, il suffit de vérifier que la variable alétoire

$$\int_0^T \chi_G(t)g(t)dB(t), \text{ est } \mathcal{F}_G - mesurable. \tag{3.22}$$

et que :

$$E\left[F\int_0^T g(t)dB(t)\right] = E\left[F\int_0^T \chi_G(t)g(t)dB(t)\right]. \tag{3.23}$$

Pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_G - mesurable$ bornées. Pour prouver (3.22) on peut supposé que g est continue, parce que les fonctions continues sont denses dans $L^2([0,T])$. Si g est continue alors :

$$\int_0^T \chi_G(t)g(t)dB(t) = \lim_{\triangle_{t_i}\to 0}\sum_{i=0}^n g(t_i)\int_{t_i}^{t_{i+1}} \chi_G(t)dB(t),$$

où la limite est dans $L^2(P)$ pour $\triangle_{t_i}$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$. Puisque chaque terme de la somme est $\mathcal{F}_G - mesurable$, la somme est également $F_G - mesurable$ alors prenant une suite qui converge $P - p.s$. Nous concluons que la limite représente une variable atéatoire $\mathcal{F}_G - mesurable$. Pour prouver (3.23) nous pouvons suppose que :

$$F = \int_0^T \chi_A(t)dB(t),$$

pour tout $A \subset G$.

Alors par l'isométrie d'Itô nous avons :

$$E\left[F\int_0^T g(t)dB(t)\right] = E\left[\int_0^T \chi_A(t)g(t)dt\right]. \tag{3.24}$$

et aussi :

$$\begin{aligned}E\left[F\int_0^T \chi_G(t)g(t)dB(t)\right] &= E\left[\int_0^T \chi_G(t)\chi_A(t)g(t)dt\right] \\ &= E\left[\int_0^T \chi_A(t)g(t)dt\right],\end{aligned} \tag{3.25}$$

alors la preuve peut être complétée par un argument de densité. ■

Lemme 3.4.2 *Soit* $G \subseteq [0,T]$ *un ensemble Boréliienn et* $\upsilon = \upsilon(t)$, $t \in [0,T]$ *est un processus stochastique telle que :*

(i) *Pour tous* t, $\upsilon(t)$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_G$,

(ii) $E\left(\int_0^T \upsilon^2(t)dt\right) < \infty.$

Alors

$$\int_G \upsilon(t)dB(t) \text{ est } \mathcal{F}_G - \text{mesurable.}$$

Lemme 3.4.3 *Soit* $u = u(t)$, $t \in [0,T]$, *un processus stochastique* $\mathcal{F}$ *− adapté dans* $L^2(P \times \lambda)$.

Alors :

$$E\left[\int_0^T u(t)dB(t) \mid \mathcal{F}_G\right] = \int_G E(u(t) \mid \mathcal{F}_G)dB(t). \tag{3.26}$$

Preuve. garantit que $\int_G E(u(t) \mid \mathcal{F}_G)dB(t)$ est $\mathcal{F}_G-$mesurable. Il suffit ensuite de vérifier que :

$$E\left[F\int_0^T u(t)dB(t)\right] = E\left[F\int_G E(u(t) \mid \mathcal{F}_G)dB(t)\right],$$

ou tout F de la forme $F = \int_A dB(t)$, où $A \subseteq G$ est un ensemble borel. Dans ce cas on obtient par l'isométrie Itô que :

$$\begin{aligned}E\left[F\int_0^T u(t)dB(t)\right] &= E\left[\int_0^T \chi_A(t)u(t)dt\right] \\ &= \int_A E\left[u(t)\right]dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E\left[F\int_G E[u(t)\mid\mathcal{F}_G]dB(t)\right] &= E\left[\int_0^T \chi_A(t)\chi_G(t)E[u(t)\mid\mathcal{F}_G]dt\right]\\
&= \int_0^T \chi_A(t)E\left[E[u(t)\mid\mathcal{F}_G]\right]dt\\
&= \int_A E[u(t)]dt.
\end{aligned}$$

Un argument de densité complète la preuve. ■

Proposition 3.4.1 *Soit* $f_n \in \widetilde{L}^2\left([0,T]^n\right)$, $n = 1, 2, ...$*Alors :*

$$E\left(I_n(f_n)\mid\mathcal{F}_G\right) = I_n\left[f_n\chi_G^{\otimes n}\right], \tag{3.27}$$

où

$$(f_n\chi_G^{\otimes n})(t_1, t_2, ..., t_n) = f_n(t_1, t_2, ..., t_n)\chi_G(t_1)...\chi_G(t_n).$$

Preuve. On procède par récurrence sur n Pour $n = 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
E\left[I_1(f_1)\mid\mathcal{F}_G\right] &= E\left[\int_0^T f_1(t_1)\,dB(t_1)\mid\mathcal{F}_G\right]\\
&= \int_0^T f_1(t_1)\,\chi_G(t_1)dB(t_1)\\
&= I_1\left[f_1\chi_G^{\otimes 1}\right]
\end{aligned}$$

par Lemma (3.4.3) Supposons que (3.27) soit valable pour $n = k$. Puis, encore une fois par Lemme

(3.4.3), nous avons :

$$E\left[I_{k+1}(f_{k+1}) \mid \mathcal{F}_G\right] = (k+1)!E\left[\int_0^T \int_0^{t_{k+1}} ... \int_0^{t_2} f_{k+1}(t_1,t_2,...,t_{k+1})dB(t_1)...dB(t_k)dB(t_{k+1}) \mid \mathcal{F}_G\right]$$

$$= (k+1)! \int_0^T E\left[\int_0^{t_{k+1}} ... \int_0^{t_2} f_{k+1}(t_1,t_2,...,t_{k+1})dB(t_1)...dB(t_k) \mid \mathcal{F}_G\right]$$

$$\chi_G(t_{k+1})dB(t_{k+1})$$

$$= .... = (k+1)! \int_0^T \int_0^{t_{k+1}} ... \int_0^{t_2} f_{k+1}(t_1,t_2,...,t_{k+1})\chi_G(t_1)...\chi_G(t_{k+1})$$

$$dB(t_1)...dB(t_{k+1})$$

$$= I_{k+1}\left[f_{k+1}\chi_G^{\otimes(k+1)}\right],$$

et la preuve est complète ■

Proposition 3.4.2 *Si $F \in D_{1,2}$, alors $E\left[F \mid \mathcal{F}_G\right] \in D_{1,2}$ et*

$$D_t E\left[F \mid \mathcal{F}_G\right] = E\left[D_t F \mid \mathcal{F}_G\right]\chi_G(t). \tag{3.28}$$

Preuve. Supposons d'abord que $F = I_n(f_n)$ pour certaines $f_n \in \widetilde{L}^2\left([0,T]^n\right)$. Par la proposition (3.4.1) nous avons :

$$\begin{aligned} D_t E\left[F \mid \mathcal{F}_G\right] &= D_t E\left[I_n(f_n) \mid \mathcal{F}_G\right] \\ &= D_t I_n(f_n \chi_G^{\otimes n}) \\ &= nI_{n-1}\left[f_n(.,t)\chi_G^{\otimes(n-1)}(.)\chi_G(t)\right] \\ &= nI_{n-1}\left[f_n(.,t)\chi_G^{\otimes(n-1)}(.)\right]\chi_G(t) \\ &= E\left[D_t F \mid \mathcal{F}_G\right]\chi_G(t). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Ensuite, soit $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ appartient $D_{1,2}$. Soit $F_k = \sum_{n=0}^{k} I_n(f_n)$. Alors :

$$F_k \to F \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et } D_t F_k \to D_t F \quad \text{dans} \quad L^2(P \times \lambda) \quad \text{comme} \quad k \to \infty.$$

Par (3.29) nous avons :

$$D_t E\left[F_k \mid \mathcal{F}_G\right] = E\left[D_t F_k \mid \mathcal{F}_G\right] \chi_G(t),$$

pour tous k, et en prenant la limite avec la convergence dans $L^2(P \times \lambda)$. De ce fait, comme $k \to \infty$ on obtient le résultat . ■

Corollaire 3.4.1 *Soit $u = u(s)$, $s \in [0,T]$; est un processus stochastique $\mathcal{F}-$adapté et supposons que $u(s) \in D_{1,2}$ pour tous s. Alors :*

(i) *$D_t u(s)$, $s \in [0,T]$, est $\mathcal{F}-$adapté pour tous t.*

(ii) *$D_t u(s) = 0$, pour $t > s$.*

Preuve. D'aprés la proposition (3.4.2) nous avons que :

$$\begin{aligned} D_t u(s) &= D_t E(u(s) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= E\left(D_t u(s) \mid \mathcal{F}_s\right) \chi_{[0,s]}(t) \\ &= E\left(D_t u(s) \mid \mathcal{F}_s\right) \chi_{[t,T]}(s), \end{aligned}$$

à partir de laquelle (i) et (ii) s'ensuit directement. ■

3.5 Dérivée de Malliavin et l'intégrale de Skorohod

Intégrale de Skorohod comme l'opérateur adjoint de la dérivée de Malliavin

Le résultat suivant démontre que la dérivée de Malliavin est l'opérateur adjoint de l'intégrale de Skorohod.

Théorème 3.5.1 ***(Formule de dualité)*** *Soit $F \in D_{1,2}$ est $\mathcal{F}_T-$mesurable et soit u un processus stochastique Skorohod intégrale. Alors :*

$$E\left[F \int_0^T u(t) \delta B(t)\right] = E\left[\int_0^T u(t) D_t F dt\right]. \tag{3.30}$$

Preuve. Soient $F = \sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ et pour tout t, $u(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} I_k(g_k(.,t))$ les expressions du chaos de F et $u(t)$, respectivement alors :

$$
\begin{aligned}
E\left[F\int_0^T u(t)\delta B(t)\right] &= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)\int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} I_k(g_k(.,t))\delta B(t)\right] \\
&= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)\sum_{k=0}^{\infty} I_{k+1}(\widetilde{g}_k)\right] \\
&= E\left[\sum_{k=0}^{\infty} I_{k+1}(f_{k+1})I_{k+1}(\widetilde{g}_k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)!\int_{[0,T]^{k+1}} f_{k+1}(x)\widetilde{g}_k(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)!\langle f_{k+1},\widetilde{g}_k\rangle_{L^2\left([0,T]^{k+1}\right)},
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

où $\widetilde{g}_k$ est la symétrisassions de $g_k(x_1,x_2,...,x_n,t)$ la fonction de $n+1$ variables. D'autre part, nous avons :

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_0^T u(t)D_tF dt\right] &= E\left[\int_0^T\left(\sum_{k=0}^{\infty} I_k(g_k(.,t))\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}(f_n\,(.,t))\right)dt\right] \\
&= \int_0^T\sum_{k=0}^{\infty} E\left[(k+1)(I_k(g_k(.,t))I_k(f_{k+1}\,(.,t))\right]dt \\
&= \int_0^T\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)k!(f_{k+1}(.,t),g_k(.,t))_{L^2\left([0,T]^k\right)}dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)k!\langle f_{k+1},g_k\rangle_{L^2\left([0,T]^{k+1}\right)},
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

Maintement :

$$\begin{aligned}(f_{k+1}, \widetilde{g}_k)_{L^2\left([0,T]^{k+1}\right)} &= \int_0^T (f_{k+1}(.,t), \widetilde{g}_k(.,t))_{L^2\left([0,T]^k\right)} dt \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\int_0^T (f_{k+1}(.,t_j), \widetilde{g}_k(.,t_j))_{L^2\left([0,T]^k\right)} dt_j \\ &= \int_0^T (f_{k+1}(.,t), g_k(.,t))_{L^2\left([0,T]^k\right)} dt \\ &= (f_{k+1}, g_k)_{L^2\left([0,T]^{k+1}\right)}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Par conséquent, en combinons (3.31) avec (3.32) et (3.33), le résultat s'ensuit. ■

Formule d'intégration par parties et la fermeture de l'intégrale de Skorohod

Théorème 3.5.2 ***(Intégration par parties)*** *Soit $u(t), t \in [0,T]$ un processus stochastique Skorohod l'intégrale et $F \in D_{1,2,}$ telle que le produit $Fu(t)$, $t \in [0,T]$, est Skorohod l'intégrale alors :*

$$F\int_0^T u(t)\delta B(t) = \int_0^T Fu(t)\delta B(t) + \int_0^T u(t)D_tF dt. \tag{3.34}$$

Théorème 3.5.3 ***(Fermeture de l'intégral de Skorohod)*** *Supposons que $u_n(t)$, $t \in [0,T]$, $n =$ $1, 2, \ldots,$ est une suite de processus stochastiques Skorohod l'intégrable et que la suite correspondante à l''intégrales de Skorohod*

$$\delta(u_n) := \int_0^T u_n(t)\delta B(t), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.35}$$

converge dans $L^2(P)$. De plus, supposons que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad dans \quad L^2(P \times \lambda). \tag{3.36}$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \delta(u_n) = 0 \quad dans \quad L^2(P). \tag{3.37}$$

Un théorème de calcule fondamental

Le résultat suivant donne une connections utile entre la différentiation et l'intégration de Skorohod.

Théorème 3.5.4 ***(Théorème de calcule fondamental)*** *Soit* $u = u(s),\ s \in [0,T]$ *un processus stochastique telle que :*

$$E\left(\int_0^T u^2(s)ds\right) < \infty, \tag{3.38}$$

et supposons que, pour tous $s \in [0,T]$, $u(s) \in D_{1,2}$ *et que, pour tout* $t \in [0,T]$, $D_t u$ *est Skorohode d'intégrale. Supposons également que :*

$$E\left(\int_0^T (\delta(D_t u))^2 dt\right) < \infty, \tag{3.39}$$

Alors :

$\int_0^T u(s)\delta B(s)$ *est bien définie et appartient à* $D_{1,2}$ *et*

$$D_t\left(\int_0^T u(s)\delta B(s)\right) = \int_0^T D_t u(s)\delta B(s) + u(t). \tag{3.40}$$

Corollaire 3.5.1 *Soit* u *est comme dans le théorème* (3.5.4) *et assumer en autre que* $u(s)$, $s \in [0,T]$, *est* $\mathcal{F}-$*adapté alors :*

$$D_t\left(\int_0^T u(s)dB(s)\right) = \int_0^T D_t u(s)dB(s) + u(t). \tag{3.41}$$

3.6 Formule de Clark-Ocone

La formule de Clark-Ocone est un théorème de représentation des variables aléatoires de carrés intégrales en termes d'intégrales stochastiques d'Itô dont l'intégrale est caractérisée de maniére explicite en termes de dérivé de Malliavin.

Théorème 3.6.1 ***(Formule de Ckark-Ocone)*** *Soit* $F \in D_{1,2}$ *est* $\mathcal{F}_T-$*mesurable. Alors :*

$$F = E(F) + \int_0^T E(D_t F \mid \mathcal{F}_t)\, dB(t). \tag{3.42}$$

Remarque 3.6.1 *La formule ne peut être appliquée qu"à des alétoires dans $D_{1,2}$. L"extention au-delà de ce domaine à l"ensemble $L^2(P)$ est possibles dans le cadre de bruit blanc. Autres représentations de l"intégrales d"Itô existent où l"intégrale est donnée en termes d"une dérivé non-anticipative. Cet opérateur est défini sur l"ensemble $L^2(P)$.*

Voir par exemple Di Nunno (2002, 2007). *Quelques régles de calcul sont données pour cet opérateur, mais il reste encore beaucoup à découvrir.*

Preuve. Soit $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ avec $f_n \in \widetilde{L}^2\left([0,T]^n\right)$, $n = 1, 2, ...$, donc :

$$
\begin{aligned}
\int_0^T E\left(D_t F \mid \mathcal{F}_t\right) dB(t) &= \int_0^T E\left(\sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n\left(.,t\right)) \mid \mathcal{F}_t\right) dB(t) \\
&= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} n E(I_{n-1}(f_n\left(.,t\right)) \mid \mathcal{F}_t) dB(t) \\
&= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}\left[(f_n\left(.,t\right))\chi_{[0,t]}^{\otimes(n-1)}(.)\right] dB(t) \\
&= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)! J_{n-1}\left[(f_n\left(.,t\right))\chi_{[0,t]}^{\otimes(n-1)}(.)\right] dB(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n! J_n(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n) \\
&= F - I_0(f_0) = F - E(F).
\end{aligned}
$$

■

Corollaire 3.6.1 ***(Formule de dualité)*** *Soit $F \in D_{1,2}$, $\mathcal{F}_T$ mesurable et soit u être un processus adapté à F avec*

$$E\left[\int_0^T u^2(t)dt\right] < \infty,$$

Alors

$$E\left[F \int_0^T u(t)dB(t)\right] = E\left[\int_0^T u(t) D_t F dt\right]. \tag{3.43}$$

Preuve. Par le théorème de Clark-Ocone et l'isométrie Itô, nous avons

$$\begin{aligned} E\left[F\int_0^T u(t)dB(t)\right] &= E\left[\left(E[F]+\int_0^T E[D_tF \mid \mathcal{F}_t]\,dB(t)\right)\int_0^T u(t)dB(t)\right] \\ &= E\left[\int_0^T u(t)E[D_tF \mid \mathcal{F}_t]\,dt\right] \\ &= E\left[\int_0^T u(t)D_tF dt\right] \end{aligned}$$

■

3.7 Formule généralisée de Clark-Ocone

Suppose que $\widetilde{B}(t) = B(t) + \int_0^T \theta_s ds$, où $\theta = \{\theta_t,\ t \in [0,T]\}$ est un processeur mesurable telle que :

$$\int_0^T \theta_t^2 dt < \infty, \quad p.s$$

Supposons que $E[Z_t] = 1$, où le processus Z_t est donnée par :

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right). \tag{3.44}$$

Alors par le théorème de Girsanov, le processus $\widetilde{B} = \left\{\widetilde{B}(t),\ t \in [0,T]\right\}$ est un mouvement Brownien sous la probabilité Q sur $\mathcal{F}_T$ donnée par $\frac{dQ}{dP} = Z_t$.

La formule de Clark-Ocone peut être généralisée afin de représenter une variable alétoire $\mathcal{F}_T-$mesurable F comme intégrale stochastique par rapport au processus $\widetilde{B}$. Notez que, en générale, nous avons $\mathcal{F}_T^{\widetilde{B}} \subset \mathcal{F}_T$ (où $\left\{\mathcal{F}_T^{\widetilde{B}},\ 0 \leq t \leq T\right\}$ désigne la famille de tribus engendré générés et généralement $\mathcal{F}_T^{\widetilde{B}} \neq \mathcal{F}_T$. Ainsi, un variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable F peut ne pas être $\mathcal{F}_T^{\widetilde{B}}-$mesurable et nous ne pouvons pas obtenir une représentation de F comme une intégrale par rapport à $\widetilde{B}$ simplement en appliquant la formule de Clark-Ocone au mouvement Brownien $\widetilde{B}$ sur l'espace de probabilité $\left(\Omega, \mathcal{F}_T^{\widetilde{B}}, Q\right)$.

Théorème 3.7.1 ***(Formule de Clark-Ocone sous un changement de mesure)*** *Soit F une* *variable aléatoire $\mathcal{F}_T$−mesurable telle que :*

$$F \in D_{1,2}, \text{ et soit } \theta \in L^{1,2}.$$

Supposons que :

1) $E\left(Z_T^2 F^2\right) + E\left(Z_T^2 \int_0^T (D_t F)^2 dt\right) < \infty.$

2) $E\left(Z_T^2 F^2 \int_0^T \left(\theta_t + \int_0^T D_t \theta_s dB(s) + \int_0^T \theta_s D_t \theta_s ds\right)^2 dt\right) < \infty.$

Alors $F = E_Q(F) + \int_0^T E_Q\left(D_t F - F \int_0^T D_t \theta_s d\widetilde{B}(s) \mid \mathcal{F}_t\right) d\widetilde{B}(s).$

Bibliographie

[1] Di Nunno, G., Øksendal, B. K., & Proske, F. (2009). Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance (Vol. 2). Berlin : Springer.

[2] Hadef D et Gadi S et Ourari H. Polynômes orthogonaux. Juin 2013. Université Mohamed Khider, Biskra.

[3] Jeanblanc, M. (2002). Cours de calcul stochastique. DESS IM EVRY. Option finance.

[4] Nualart D. (2006). The Malliavin calculus and related topics. 2nd ed. Springer-Verlag,. Berlin.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	:	espace de probabilité.
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	:	Filtration.
$L^2(\mathbb{R}^+)$	:	l'ensemble des fonctions carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
L^2_{Loc}	:	une classe plus grand de fonctions carré intégrable.
Γ	:	l'ensemble des processus θ adaptés gauche limites à droite $\mathcal{F}_t-$adaptés.
Λ	:	l'ensemble $L^2_{Loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ des processus θ adaptés càglàd.
D	:	l'ensemble de la diagonale de $[0, T]^n$
$\widetilde{f}$	:	La fonction symétrique de f.
$\widetilde{L}^2\left([0, T]^n\right)$	:	L'ensemble des fonctions carré intégrable symétrique.

Résume

Dans ce mémoire nous avons donné une introduction de la dérivé de **Malliavin** ainsi que ces principales règles de calcul, nous avons utilisez une approche basée sur l'expression du chaos, cette approche a l'avantage d'être plus intuitif.Et pour terminer on a donné la formule de **Clark-Ocone** qui donne une représentation d'une variable aléatoire en termes d'une intégrale stochastique où l'intégrant est explicitement caractériser par une dérivée de Malliavin.

Abstract

In this thesis we gave an introduction to the derivative of **Malliavin** as well as these main calculation rules, we used an approach based on the expression of chaos, this approach has the advantage of being more intuitive. And finally we have given the **Clark-Ocone** formula which gives a representation of a random variable in terms of a stochastic integral where the integrant is explicitly characterized by a **Malliavin** derivative.

ملخص

في هذه الأطروحة قدمنا مقدمة لمشتق **ماليافان** بالإضافة إلى قواعد الحساب الرئيسية ، استخدمنا نهجًا يعتمد على عبارة الفوضى، ويتميز هذا النهج بكونه أكثر سهولة. وأخيرًا ، قدمنا صيغة **كلارك- اكون** التي تعطي تمثيلًا لمتغير عشوائي بدلالة تكامل عشوائي حيث يتم تمييز العدد الصحيح صراحةً بمشتق **ماليافان**.