République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

NAILI NADJOUA

Titre :

Principe du maximum cas convexe

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**IABED Boubakeur**	UMKB	Président
Dr.	**BOUGHERARA Saliha**	UMKB	Encadreur
Dr.	**MANSOURI Badereddine**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

Avant tout propos, je tiens à rendre gràce à ALLAH qui ma guidé sur la bonne voie.

Je dédie ce modeste travail

A mes très chèrs parents

pour leurs sacrifices et pour leurs soutients au long de mes études

A mes sœurs et mes frères

A toute ma gênerous famille et toutes mes amis

A toutes les personnes qui m'ont soutenu à accomplir ce travail, a tous je vous dis merci.

REMERCIEMENTS

J'exprime d'abord mes profonds remerciements à mon "DIEU" qui m'a donné le courage et la volontè d'achènes ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur **Dr. Bougherara Saliha,** pour ces conseils, sa grande disponibilité et sa générosité avec la quelle elle m'a fait partager ces travaux, ses idées et ses intuitions.

Je remercie également les membres du jury : **Dr. LABED Boubakeur** et **Dr. MANSOURI Badereddine** pour accepté d'évaluer et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation.

A toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

NADJOUA

Table des matières

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal stochastique on un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et à la finance. Il existe deux approches de résolution du problème de contrôle optimal, bien connues, qui sont :

◁ Principe de la programmation dynamique.

◁ Principe du maximum de Pontryagin sous le nom ** **Conditions nécessaires d'optimalité****. Cette méthode, qui fera l'objet de ce mémoire.

Un problème de contrôle optimal stochastique défini comme suit :

- On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, x_t, \alpha_t)dt + \sigma(t, x_t, \alpha_t)dB_t, \\ x_0 = x, \end{cases}$$

  où $B = (B_t, t \in [0, T])$ désigne un mouvement Brownien défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t), t \in [0, T]$ satisfaisant les conditions habituelles.

- Soit $\alpha = (\alpha_t, 0 \leq t \leq T)$ un processus progressivement mesurable à valeurs $\mathbb{R}^n$ et les éléments de U sont appelés processus de contrôle. Le processus α est dit contrôle ou encore commande et l'ensemble de tous les contrôles admissibles est noté par U_{ad}.

- On note que la solution $X = (X_t, s \leq t \leq T)$ de l'équation différentielle contrôlée définie ci dessus, est dite réponse au contrôle α et le couple (α, x) est dit admissible.

- L'objet du controle optimal stochastique est de minimiser ou de maximiser un cout sur un ensemble U de tous les controles admissibles. Ce coût est donné par :

$$J(\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t, x_t, \alpha_t)dt + g(x_T)\right],$$

notons que h et g sont des fonctions réelles telles que : $h : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U$ et $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Ce mémoire est organisé comme suit.

◀ Dans le premier chapitre, nous donnons une introduction générale sur le processus stochastique et quelques propriétés : mouvement Brownien martingale et formule d'Itô , l'existence et l'unicité de la solution pour L'EDS...etc.

◀ Dans le dernière chapitre on va étudier le problème du contrôle stochastique. On décrit brièvement les méthodes de résolution d'un problème de contrôle stochastique, nous établirons les conditions nécessaires d'optimalité pour L'équation différentielle stochastique, sous la forme de principe du maximum stochastique dans le cas où l'ensemble des contrôles U est convexe.

Chapitre 1

Calcul Stochastique

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Le processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps d'une manière aléatoire. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique, en biologie (évolution génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux de l'internet, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économique et financier.

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T. En général $T = \mathbb{R}^+$ et on considère que le processus est indexé par temps t.*

1. *Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.*
2. *Si $T = \mathbb{N}$, le processus est une suite de variables aléatoires.*
3. *Si $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.*
4. *Si $T \subset \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire.*

Remarque 1.1.1 *i. Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

ii. Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

Définition 1.1.2 (Filtration) *Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \textit{pour tous} \quad 0 \leq s \leq t \ \textit{dans}\ T.$$

1. *Le quadruplet $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}\right)$ est appelé espace de probabilité filtré.*
2. *On dit que la filtration est naturelle (ou canonique) de processus X si*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s, 0 \leq s \leq t\right), \quad t \leq T,$$

c'est la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

3. *On dit qu'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est continue à droite si*

$$\mathcal{F}_{t+} := \underset{s \leq 0}{\cap} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.3 (Processus adapté) *Un processus $(X_t)_{t \in [0,T]}$ est dit adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.4 (Processus a trajectoire continue) *Un processus (X_t) est a trajectoire continue ou simplement processus continue si*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega; t \mapsto X_s(\omega) \ \textit{est continue}\}\right) = 1.$$

Définition 1.1.5 (Processus progressivement mesurable) *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit progressivement mesurable par rapport à* $\mathcal{F}$ *si pour tout* $t \geq 0$ *l'application :* $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ *est mesurable sur* $[0, t] \times \Omega$ *muni de la tribu produit* $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Définition 1.1.6 (Processus càdlàg et càglàd) **1.** *Un processus* X *est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche.*

2. *Un processus* X *est dit càglàd (continu à gauche, pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limites à droite.*

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable et mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Si* X *est un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors* X *est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

1.2 Mouvement Brownien (MB) et Martingale

1.2.1 Mouvement Brownien (MB)

le mouvement brownien a été découvert en 1827 par le botaniste Robert Brown (1773-1858). C'est en observant sous un microscope du pollen dispersé dans de l'eau qu'il remarqua que les grains microscopiques le constituant étaient soumis à un mouvement continuel et irrégulier. Il crut, à l'époque, qu'il avait découvert « la molécule primitive » responsable de la vie. Il s'aperçut plus tard que l'on pouvait observer ce même phénomène avec toutes sortes de particules de taille suffisamment petite.

Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t)_{t\geq 0}$ en référence à **Wiener** ou $(B_t)_{t\geq 0}$ en référence à **Brown.**

Définition 1.2.1 (Mouvement Brownien) *On appelle X_t-mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifier :*

1. *Pour tout $t \geq 0 : X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
2. *Si $s \leq t : X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.*
3. *Si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à cette de $X_{t-s} - X_0 = X_{t-s}$.*

Définition 1.2.2 (Mouvement Brownien standard) *Soit X un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien standard si :*

$$X_0 = 0 \quad \mathbb{P}\text{-}p.s, \quad \mathbb{E}[X_t] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}[X_t^2] = t.$$

Dans ce cas la loi de X_t est une loi normale.

Proposition 1.2.1 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard :*

a) *Soit c réel positive $(c > 0)$,on a $W_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$, donc (W_t) est un mouvement Brownien standard.*
b) *Pour tout $t \geq 0$, $W_t = -B_t$, alors (W_t) est un MB.*
c) *Pour tout $s > 0, \{B_{t+s} - B_s\}_{t\geq 0}$est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.*

Preuve.

$\lhd$ *Premièrement : $W_0 = cB_{\frac{0}{c^2}} = 0$ (car B_t mouvement Brownien).*

$\lhd$ *Deuxièmement : $\forall \omega \in \Omega \; t \mapsto W_t(\omega) = cB_{\frac{t}{c^2}}(\omega)$ est continue (car des trajectoires continue).*

$\lhd$ *Troisièmement : $\forall \; s, t > 0 \;\; s < t$*

$$W_t - W_s = cB_{\frac{t}{c^2}} - cB_{\frac{s}{c^2}} = c\left(B_{\frac{t}{c^2}} - B_{\frac{s}{c^2}}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] &= \mathbb{E}\left[c\left(B_{\frac{t}{c^2}} - B_{\frac{s}{c^2}}\right)\right] = c\mathbb{E}\left[\left(B_{\frac{t}{c^2}} - B_{\frac{s}{c^2}}\right)\right] \\ &= c\left(\mathbb{E}\left[B_{\frac{t}{c^2}}\right] - \mathbb{E}\left[B_{\frac{s}{c^2}}\right]\right) = 0.\end{aligned}$$

car B_t *mouvement Brownien* $\mathbb{E}\left[B_{\frac{t}{c^2}}\right] = 0$ *et* $\mathbb{E}\left[B_{\frac{t}{c^2}}\right] = 0$. *Alors et*

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar\left[W_t - W_s\right] &= \mathbb{V}ar\left[c\left(B_{\frac{t}{c^2}} - B_{\frac{s}{c^2}}\right)\right] = c^2\mathbb{V}ar\left[\left(B_{\frac{t}{c^2}} - B_{\frac{s}{c^2}}\right)\right] \\ &= c^2\left(\mathbb{V}ar\left[B_{\frac{t}{c^2}}\right] - \mathbb{V}ar\left[B_{\frac{s}{c^2}}\right]\right) \\ &= c^2\left(\frac{t}{c^2} - \frac{s}{c^2}\right) = t - s,\end{aligned}$$

car B_t *mouvement Brownien* $\mathbb{V}ar\left[B_{\frac{t}{c^2}}\right] = \frac{t}{c^2} - \frac{s}{c^2}$. *Donc* $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t)$.

$\lhd$ *Quatrièmement* $\forall 0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

$$\begin{aligned}cov\left(W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_4} - W_{t_3}\right) &= cov\left(W_{t_2} - W_{t_4}\right) - cov\left(W_{t_2} - W_{t_3}\right) \\ &\quad - cov\left(W_{t_1}, W_{t_4}\right) - cov\left(W_{t_1} - W_{t_3}\right) \\ &= cov\left(cB_{\frac{t_2}{c^2}}, cB_{\frac{t_4}{c^2}}\right) - cov\left(cB_{\frac{t_2}{c^2}}, cB_{\frac{t_3}{c^2}}\right) \\ &\quad - cov\left(cB_{\frac{t_1}{c^2}}, cB_{\frac{t_4}{c^2}}\right) - cov\left(cB_{\frac{t_1}{c^2}}, cB_{\frac{t_3}{c^2}}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

car $cB_{\frac{t_2}{c^2}} \amalg cB_{\frac{t_4}{c^2}}$ *et* $cB_{\frac{t_2}{c^2}} \amalg cB_{\frac{t_3}{c^2}}$ *et* $cB_{\frac{t_1}{c^2}} \amalg cB_{\frac{t_4}{c^2}}$ *et* $cB_{\frac{t_1}{c^2}} \amalg cB_{\frac{t_3}{c^2}}$.

■

Théoréme 1.2.1 *Un processus B est un mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussien continue centré de fonction de covariance :*

$$cov\left(B_t, B_S\right) = \mathbb{E}\left(B_t B_s\right) = s \wedge t = \min\left(t, s\right).$$

Proposition 1.2.2 *Soit B un mouvement Brownien alors presque sûrement on a :*

a) $t \longmapsto B_t(\omega)$ *n'est pas différentiable en aucun point t.*

b) $t \longmapsto B_t(\omega)$ *n'est pas à variation finie en aucun point t.*

Définition 1.2.3 (Temps d'arrêt) *Un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire τ a valeur dans $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$telle que :*

$$\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0.$$

1.2.2 Martingale

Pour les probabilistes, les martingales sont avant tout des processus intégrables et adaptés vérifiant une propriété précise d'espérance conditionnelle. Elles sont appliquées à divers problèmes stochastiques ou analytique et représentent, avec les processus de Markov, l'une des catégories de processus dépendant du passé les plus importantes. La notion semble provenir assez directement de l'idée de stratégie pour un jeu de hasard. Bien que l'on ait eu très tôt l'intuition qu'une stratégie toujours gagnante pour un jeu défavorable n'existait pas (B. Bru fait remonter les premiers éléments de ce résultat à Xénophon (notes non publiées)), il faut attendre le début du vingtième siècle pour obtenir une formulation des notions et du problème (en partie suite au débat sur les axiomes des probabilités proposées par **R. von Mises**).

Les pionniers du concept de martingale sont alors **S. Bernstein, P. Lévy, J. Ville, E. Borel** et **J. Doob** (cependant on peut trouver a posteriori des premiers exemples de martingales dans des travaux plus anciens dont par exemple ceux de Pascal sur le problème des partis comme l'explique **Y. Derriennic (2003**).

Définition 1.2.4 (Martingale) *Un processus* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est dit martingale si :*

1. *Pour tout* $t \geq 0$, M_t *est* $\mathcal{F}_t$*-adapté ;*
2. *Pour tout* $t \geq 0$, M_t *est intégrable, i.e* $\mathbb{E}\left(|M_t|\right) < \infty$ *;*
3. *Pour tout* $s < t$, $\mathbb{E}\left(M_t \mid \mathcal{F}_s\right) = M_s$, $\mathbb{P}$*-p.s ;*

On définit de manière similaire sur-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}\left(M_t \mid \mathcal{F}_s\right) \leq M_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Et sous-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}\left(M_t \mid \mathcal{F}_s\right) \geq M_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Proposition 1.2.3 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien, alors :*

a) $B_t^2 - t$ *est une martingale.*

b) *Pour tout* $\sigma \in \mathbb{R}, X_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ *est une martingale.*

Preuve.

a) $B_t^2 - t$ *est une martingale.*

$\lhd$ *Premièrement,* $B_t^2 - t$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable car c'est une fonction continue de* B_t *qui est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

$\lhd$ *Deuxièmement,* $\mathbb{E}\left[\mid B_t^2 - t \mid\right] \leq \mathbb{E}\left[\mid B_t^2 \mid\right] + t = t + t = 2t < \infty.$

$\lhd$ *Troisièmement,* $\forall s \in [0, t]$ *:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(B_t^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s + B_s)^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left((B_t - B_s)^2 + 2B_s\left(B_t - B_s\right) + B_s^2 - t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + 2B_s\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] + B_t^2 - t.
\end{aligned}$$

On a :

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = t - s, \quad et \quad = \mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)\right] = 0.$$

On trouve : $\mathbb{E}\left[(B_t^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] = t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s$, *alors :* $\{B_t^2 - t : t \geq 0\}$ *est une martingale.*

b) *Pour tout* $\sigma \in \mathbb{R}, X_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$ *est une martingale.*

$\triangleleft$ *Premièrement,* $\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable car* exp *une fonction continue et* B_t *est* $\mathcal{F}_t$*-adapté* ($\mathcal{F}_t$*-mesurable*).

$\triangleleft$ *Deuxièmement,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t\right] &= \mathbb{E}\left[\left| \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right) \right|\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\sigma x - \frac{\sigma^2}{2} t\right) \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\sigma x - \frac{\sigma^2}{2} t - \frac{x^2}{2t}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{1}{2t}\left(2\sigma x t - \sigma^2 t^2 - x^2\right)\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2 + x^2 - 2\sigma x t}{2t}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - \sigma t)^2}{2t}\right) dx = 1 < \infty.
\end{aligned}$$

$\triangleleft$ *Troisièmement,* $\forall s \in [0, t]$ *:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[X_s\left(\frac{X_t}{X_s}\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \quad (X_s \text{ est un processus positive}) \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_t}{X_s}\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \quad (X_s \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}) \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\left(\frac{\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)}{\exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}s\right)}\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\left(\exp\left(\sigma\left(B_t - B_s\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(t-s\right)\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s\mathbb{E}\left[\left(\exp\left(\sigma\left(B_t - B_s\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(t-s\right)\right)\right)\right],
\end{aligned}$$

car $B_t - B_s$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_s$*. Donc :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= X_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(\sigma x - \frac{\sigma^2}{2}\left(t-s\right)\right)\exp\left(\frac{-x^2}{2\left(t-s\right)}\right)dx \\
&= X_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(\sigma x - \frac{\sigma^2}{2}\left(t-s\right) - \frac{x^2}{2\left(t-s\right)}\right)dx \\
&= X_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(\frac{2\left(t-s\right)\sigma x - \sigma^2\left(t-s\right)^2 - x^2}{2\left(t-s\right)}\right)dx \\
&= X_s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(-\frac{x^2 + \sigma^2\left(t-s\right)^2 - 2\left(t-s\right)\sigma x}{2\left(t-s\right)}\right)dx \\
&= X_s \ ,
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}}\exp\left(-\frac{x^2 + \sigma^2\left(t-s\right)^2 - 2\left(t-s\right)\sigma x}{2\left(t-s\right)}\right)dx = 1$*. Alors :*

$$X_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$$

est une martingale.

■

Remarque 1.2.1 *Le mouvement Brownien standard* $(B_t, t \geq 0)$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s,\ s \leq t)$.

Théoréme 1.2.2 (Théorème de représentation des martingales) *Soient* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$, *et* M_t *une martingale* $\mathcal{F}_t$*-adapté. Alors, il existe un processus adapté* H_s *tel que :*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Définition 1.2.5 (Martingale local) *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$*un processus* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-adapté à trajectoire continue à droite. On dit que* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale local s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt* $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$, $\mathbb{P}$*-p.s. et pour tout* n, $M^{\tau_n} 1_{\tau_n > 0}$ *est une martingale.*

1.3 Calcul d'Itô

1.3.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), $B : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $X : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à B_t, alors l'intégrale d'Itô $\int_0^t \phi_s dB_s$ est définie par la limite en moyenne quadratique de

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et B_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. L'objectif c'est définir l'intégrale $\int_0^t \phi_S dB_S$ pour des processus ϕ :

◀ Cas étagé

On dit qu'un processus ϕ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable de carré intégrable $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in \left]t_i, t_{i+1}\right]$. Soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

On sais que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s^2 ds\right].$$

Alors

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right).$$

◀ Cas général

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ est $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite). Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\phi_s^n - \phi_s^2\right) ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\phi) = \int_0^{\infty} \phi_s dB_s$ de carré intégrable.

On va montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \phi_s dB_s\right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^{\infty} \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (B_t) est un processus gaussien alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = 0$ cas $\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ sont à accroissement indépendantes.

Pour montrer que :

$$\mathbb{V}ar\left[I_t(\phi)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left(I_t(\phi)^2\right) - \mathbb{E}\left(I_t(\phi)\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(I_t(\phi)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 dB_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(\phi_i)^2\,\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(\phi_i)^2\left(t_{i+1} - t_i\right) \\
&= \int_0^\infty \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

1.3.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a plusieurs propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1) Linéairité :

$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dB_s = a\int_0^t \phi_s^1 dB_s + b\int_0^t \phi_s^2 dB_s.$$

2) Additivité : Pour $0 \leq s < u < t \leq \mathbb{T}$

$$\int_s^t \phi_v dB_v = \int_s^u \phi_v dB_v + \int_u^t \phi_v dB_v.$$

3) Propriétés de martingale : Pour tout processue ϕ les processus :

$$t \mapsto I_t(\phi) \quad \text{et} \quad t \mapsto I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingales continues on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(I_t\left(\phi\right)-I_s\left(\phi\right)\right)^2 \mid \mathcal{F}_s^B\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du \mid \mathcal{F}_s^B\right].$$

4) Si $\left(X_t\right)_{t\in[0,\mathbb{T}]}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}\left(\int_0^T \mid X_s \mid^2 ds\right)<+\infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \mid X_s \mid^2 dB_s\right|^2\right]\leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid X_s \mid^2 ds\right].$$

5) Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right]=\mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.3.3 Processus d'Itô

Définition 1.3.1 (Processus d'Itô) *Un processus d'Itô est un processus de la forme :*

$$X_t=X_0+\int_0^t \varphi_s ds+\int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifient les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^t \left|\varphi_s\right| ds<+\infty \quad et \quad \int_0^t \parallel \theta_s \parallel^2 ds<+\infty,$$

où le coefficient φ et le drifter ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion. On note de manière infinitésimale :

$$dX_t=\varphi_s ds+\theta_s dB_s.$$

1.3.4 Formule d'Itô

Théoréme 1.3.1 (Première formule d'Itô) *Supposons f de classe $\mathbb{C}^2$. Alors :*

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\left\langle X, X\right\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

Théoréme 1.3.2 (Deuxième formule d'Itô) *Soient X un processus d'Itô et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à t et de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à X, on a :*

$$\begin{aligned} f(t, X) &= f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)d\left\langle X, X\right\rangle_s \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$df\left(t, X\right) = \left[f_t'\left(t, X_t\right) + \frac{1}{2}f_{xx}''\left(t, X_t\right)\theta_t^2\right]dt + f_x'(t, X_t)dX_t.$$

Exemple 1.3.1

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \\ X_0 = X. \end{cases}$$

On pose : $Y_t = \exp\left(-\mu t\right)X_t$, $\forall t \geq 0$ *et* $f(t, X_t) = \exp\left(-\mu t\right)X_t$, *on a donc* $f_x'(t, X_t) = \exp\left(-\mu t\right), f_{xx}''\left(t, X_t\right) = 0$ *et* $f_t'\left(t, X_t\right) = -\mu X_t \exp\left(-\mu t\right).$ *Alors :*

$$dY_t = \mu X_t \exp\left(-\mu t\right)dt + \exp\left(-\mu t\right)dX_t = \sigma Y_t dB_t,$$

ou encore :

$$Y_t = X + \int_0^t \sigma Y_s dB_s.$$

Application mountenant la formule d'Itô à $g(Y_t) = \ln(Y_t)$, *on a donc :*

$$g'_{Y_t}(Y_t) = \frac{1}{Y_t}, \quad g''_{Y_tY_t}(Y_t) = -\frac{1}{Y_t^2}, \quad g'_t(Y_t) = 0$$
$$et \qquad d\langle Y, Y\rangle_s = \sigma^2 Y_t^2 dt.$$

La formule d'Itô s'applique :

$$\begin{aligned} dg(Y_t) &= g(Y_0) + g'_t(Y_t)\,dt + g'_{Y_t}(Y_t)\,dY_t + \frac{1}{2} g''_{Y_tY_t}(Y_t)\,d\langle Y, Y\rangle_s \\ &= 0 + 0dt + \frac{1}{Y_t} dY_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Y_t^2}\right)\sigma^2 Y_t^2 dt \\ &= \sigma dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt. \end{aligned}$$

Eintégrant, on obtient

$$X_t = X \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{t}{2}\sigma^2\right).$$

Remarque 1.3.1 *La formule d'Itô s'énonce également dans le cas multidimentionnel (ie* $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $B(t)$ *sont des matrices)*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\varphi_s ds$$
$$+\frac{1}{2} tr\left[\theta(s)^T f(s, X(s))\theta(s)\right] + \int_0^t f_x(s, X_s)\theta_s dB_s.$$

Proposition 1.3.1 (Formule d'intégration par parties) *Soient* X_t *et* Y_t *deux processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s \quad et \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s$$

Alors :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.4 Equations différentielles stochastiques (EDS)

Définition 1.4.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = X, \end{cases} \tag{1.1}$$

où sous forme intégral

$$X_t = X + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad \forall t \geq 0,$$

où $\{B; t \geq 0\}$ *est un mouvement Brownien d-dimensionnel. Le coefficient* $b\,(t, X_t)$ *est appelé dérive et le coefficient* $\sigma(t, X_t)$ *de* dB_t *est appelé terme de diffusion.*

Définition 1.4.2 *Une solution forte à l'équation (1.1) est un processus* $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ *continu qui est* $\mathcal{F}_t$*-adapté tel que :*

1. *Pour tout* $t \geq 0$, *les intégrales* $\int_0^t b(s, X_s)ds$ *et* $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ *sont bien définies :*

$$\int_0^t \mid b(s, X_s) \mid ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \mid \sigma(s, X_s) \mid^2 ds < +\infty, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

2. $(X_t)\,, t \geq 0$ *vérifie* (1.1) .

$$X_t = X + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

1.4.1 Existence et unicité

Le théorème suivant donne des conditions sur b et σ sous les quelles on peut avoir un résultat l'existence et d'unicité de la solution de l'équation (1.1) .

Théoréme 1.4.1 (existence et Unicité) *Si b et σ sont des fonctions continues telles qu'il existe $K < +\infty$, X, Y dans $\mathbb{R}^n$:*

- *Conditions de Lipschitz :*

$$| \; b(t,X) - b(t,Y) \; | + | \; \sigma(t,X) - \sigma(t,Y) \; | \leq K|X-Y|.$$

- *Conditions de croissance linéaire :*

$$|b(t,X) \; | - | \; \sigma(t,X) \; | \leq K(1+|X|).$$

- $\mathbb{E}\left(X^2\right) < +\infty.$

Alors pour tout $t \geq 0$ l'équation (1.1) admet solution unique dans l'intervalle $[0,T]$.

D'autre part la solution $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ vérifie

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right) < +\infty.$$

Preuve. On définit l'espace S_c^2 par :

$$S_c^2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{les processus progressivement mesurables tel que } \mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right) < +\infty \text{ continue,} \\ \text{muni de } \parallel X \parallel = \mathbb{E}\left(\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty\right) \end{array} \right\},$$

pour $X \in S_c^2$ poson, pour tout $t \in [0,T]$

$$\Psi(X_t) = X + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s.$$

le processus Ψ est bien définie et est continu si $X \in S_c^2$.

Soient X et Y deux éléments de S_c^2 on utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$\mid \Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\mid^2=\left|\int_0^t b(s,X_s)ds-b(s,Y_s)ds+\int_0^t \sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)dB_s\right|^2$$

$$\leq 2\left|\int_0^t b(s,X_s)ds-b(s,Y_s)ds\right|^2+2\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)dB_s\right|^2$$

$$\leq 2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t b(s,X_s)ds-b(s,Y_s)ds\right|^2+2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)dB_s\right|^2.$$

Ce que implique que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right]$$

$$\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t b(s,X_s)ds-b(s,Y_s)ds\right|^2+\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)dB_s\right|^2\right].$$

En utilise les propriétés (4 et 5) de l'intégrale stochastique alors on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right]$$

$$\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t b(s,X_s)ds-b(s,Y_s)ds\right|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)dB_s\right|^2\right]$$

$$\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\mid\int_0^u b(s,X_s)ds-b(s,Y_s)ds\mid\right)^2\right]+2\mathbb{E}\left[4\left(\mid\int_0^u \sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)ds\mid\right)^2\right].$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right]$$

$$\leq 2T\mathbb{E}\left[\left(\mid\int_0^u b(s,X_s)ds-b(s,Y_s)ds\mid\right)^2\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u\mid\sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)\mid ds\right].$$

Comme les fonction b et σ sont Lipschitz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]\\ &\leq 2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^u\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]+8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^u\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]\\ &\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^u\mid\left(X_s-Y_s\right)\mid^2 ds\right].\end{aligned}$$

On pose $C=2K^2\left(T+4\right)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^u\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]\\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\int_0^u\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right].\end{aligned}$$

Alors on obtient l'inégalité suivante

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)\right|^2\right]\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\int_0^u\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]. \tag{1.2}$$

Maintenant on va montrer que la fonction $\Psi\left(X\right)\in S_c^2$. Notant $\Psi\left(0\right)$ le processus nul

$$\Psi\left(0\right)=X+\int_0^t b\left(s,0\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s,0\right)dB_s.$$

On a d'une part

$$\mid \Psi(0) \mid^2 \leq \left| X + \int_0^t b(s,0)\, ds + \int_0^t \sigma(s,0)\, dB_s \right|^2,$$

et comme

$$(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right). \tag{1.3}$$

On a, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\mid \Psi(0) \mid^2 \leq 3 \mid X \mid^2 + 3\left| \int_0^t b(s,0)\, ds \right|^2 + 3\left| \int_0^t \sigma(s,0)\, dB_s \right|^2$$

$$\leq 3\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X \mid^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t b(s,0)\, ds \right|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t \sigma(s,0)\, dB_s \right|^2 \right].$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \Psi(0) \mid^2 \right]$$

$$\leq 3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X \mid^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t b(s,0)\, ds \right|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t \sigma(s,0)\, dB_s \right|^2 \right],$$

on utilise l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de b et σ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\Psi(0)|^2 \right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[\mid X \mid^2\right] + T^2K^2 + 4K^2T\right),$$

et d'une autre part, l'inégalité (1.2) donne ce qui suit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(0\right)|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq s} \mid X_s - 0\mid^2 ds\right]\\ &\leq C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s} \mid X_s \mid^2 ds\right]\\ &\leq C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s} \mid X_s \mid^2\right] ds.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi\left(X_t\right)|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi\left(0\right)|^2\right] + C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s} \mid X_s\mid^2\right] ds.$$

Alors $\Psi\left(X\right) \in S_c^2$, dés que le processus $X \in S_c^2$.

On définit alors par récurrence une suit de processus de S_c^2 en posant

$$X^0 = 0, \quad \text{et} \quad X^{n+1} = \Psi\left(X^n\right), \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

On voudrait montrer que la suite X^n converge vers une limite qui représente la solution de l'EDS (1.1).Pour cela, nous allons majorer $\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1} - X_t^n|^2$ et montrer que la série de terme générale $X_t^{n+1} - X_t^n$ est uniformément convergence sur $[0, T]$. Alors on a :

$$|X_t^{n+1} - X_t^n|^2 = |\Psi\left(X_t^n\right) - \Psi\left(X_t^{n-1}\right)|^2.$$

Et utilisant la condition de Lipchitz, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi\left(X_t^n\right)-\Psi\left(X_t^{n-1}\right)|^2\right] \\ &\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{0\leq t\leq s_1}|X_t^n-X_t^{n-1}|^2 ds_1\right] \\ &\leq C\int_0^T \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s_1}|X_t^n-X_t^{n-1}|^2\right]ds_1.\end{aligned}$$

Et par récurrence, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right] \leq C^n\int_0^T\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}...\int_0^{s_n-1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s_n}|X_t^1|^2\right]ds_n...ds_2ds_1.$$

Donc on trouve que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right] \leq \frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid X_t^1\mid^2\right].$$

Ce qui signifie que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right] \leq L\frac{C^nT^n}{n!},$$

avec L est le majorant de $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid X_t^1\mid^2\right]$ Il résulte de cette dernière intégalité que

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\right)^2 \leq \left(L\frac{C^nT^n}{n!}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et comme

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\right)^2 = \left\|\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^2}.$$

Alors :

$$\left\|\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^2} \leq \sqrt{L}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}.$$

En sommant sur n, il vient

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^1}\leq\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^2}\leq\sqrt{L}\sum_{n\geq 0}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}<\infty.$$

Alors le série $\sum_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|$ converge $\mathbb{P}$-$p.s$, et donc, $\mathbb{P}$-$p.s$, X^n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus continue. De plus $X\in S_c^2$. On vérifier que X est solution de l'EDS (1.1) en passant à la limite dans la définition

$$X^{n+1}=\Psi\left(X^n\right).$$

En effet

$$\begin{aligned} X &= \lim_{n\to\infty}\left(X^{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\Psi\left(X^n\right)\\ &=\Psi\left(\lim_{n\to\infty}\left(X^n\right)\right)\\ &=\Psi\left(X\right).\end{aligned}$$

Si X_t et Y_t deux solution de l'EDS avec les conditions initiales respectivement dans $X_0 = X$ et $Y_0=Y$. On pose $f\left(t\right)=b\left(t,X_t\right)-\sigma\left(t,Y_t\right)$ et $g\left(t\right)=b'\left(t,X_t\right)-\sigma'\left(t,Y_t\right)$. Alors

$$\mathbb{E}\left[|X_t-Y_t|^2\right]=\mathbb{E}\left[X-Y+\int_0^t f\left(s\right)ds-\int_0^t g\left(s\right)dB_s\right]^2.$$

En utilisant l'inégalité (1.3) on trouve

$$\mathbb{E}\left[|X_t-Y_t|^2\right]\leq 3\mathbb{E}|X_t-Y_t|^2+3\mathbb{E}\left[\int_0^t f\left(s\right)ds\right]^2+3\mathbb{E}\left[\int_0^t g\left(s\right)dB_s\right]^2,$$

et d'après Cauchy Schwartz et le propriété (5) de l'intégrale stochastique

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t ds\right]\mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)^2\, ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t g(s)^2\, dB_s\right] \\ &= 3\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] + 3t\mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)^2\, ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t g(s)^2\, dB_s\right],\end{aligned}$$

et comme b et σ est lipchitziennes, alors

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] + 3(1+t)\, C^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s - Y_s| ds\right],$$

lemme de Gronwall donne

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] \exp\left\{3(1+t)\, C^2 t\right\},$$

alors : $X_t = Y_t$ $\mathbb{P}$-$p.s$, ce qui montre l'unicité. ■

Exemple 1.4.1 (Equation d'Ornstein Uhlenbeck) *On cherche à résoudre l'EDS suivante :*

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 = X, \end{cases}$$

où μ et σ sont deux réels. Le théorème d'existence et d'unicité assure qu'il existe une unique solution. On multiplie les deux côtés de cette équation par $e^{-\mu t}$, on obtient :

$$e^{-\mu t} dX_t = \mu X_t e^{-\mu t} dt + \sigma e^{-\mu t} dB_t,$$

ou encore

$$e^{-\mu t} dX_t - \mu X_t e^{-\mu t} dt = \sigma e^{-\mu t} dB_t.$$

D'un autre côte, la formule d'intégration par parties donne :

$$d\left(X_t e^{-\mu t}\right) = e^{-\mu t} dX_t - \mu X_t e^{-\mu t} dt.$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve :

$$d\left(X_t e^{-\mu t}\right) = \sigma e^{-\mu t} dB_t,$$

d'où, la solution

$$X_t = X e^{\mu t} + \sigma e^{\mu t} \int_0^t e^{-\mu s} dB_s.$$

Chapitre 2

Principe du maximum cas convexe

Si on a $\hat{\alpha}$ un contrôle optimal, le principe du maximum stochastique a pour objectif de trouver l'ensemble des conditions nécessaires qui satisfaites par ce contrôle.

2.1 Formulation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant aux condition habituelles, $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien de dimensionnel 1. On suppose que : $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, \alpha_t)dt + \sigma(t, x_t, \alpha_t)dB_t, \\ x_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R},$$

qui vérifient : **(H1)**

◄ Les fonctions b, σ sont continuments différentiables en (x, α),

◀ les dérivées de b, σ sont continues en (x, α) et bornées.

Soit T un réel strictement positif, et U un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$. Nous définissons un ensemble des contrôles admissibles, comme suit :

$$U_{ad} = \left\{ \alpha : [0,T] \times \Omega \to U \text{ telle que } \alpha \text{ est mesurable et } \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in[0,T]}\text{-adapté} \right\}.$$

Le problème du contrôle consiste à minimiser sur l'ensemble des contrôles admissibles U_{ad}, le coût suivent :

$$J\left(\alpha\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t, x_t, \alpha_t)dt + g\left(x_T\right)\right], \tag{2.2}$$

où h et g deux fonction comme suit :

$$h : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

qui vérifient : **(H2)**

◀ h est continûment différentiable en (x, α) et les dérivées de h sont bornées.

◀ g est continûment différentiable, les dérivées de h sont bornées.

◀ les dérivées de h sont bornées par $M\left(1+ \mid x \mid + \mid y \mid\right)$ et g est bornée par $M\left(1+ \mid x \mid\right)$ tel que $M > 0$.

Alors un contrôle $\hat{\alpha}$ est appelé contrôle optimal s'il atteint le minimum c-à-d :

$$J(\hat{\alpha}) = \inf_{\alpha\in U_{ad}} J\left(\alpha\right). \tag{2.3}$$

Remarque 2.1.1 *Puisque les coefficients de l'équation d'état sont dérivables en et à dérivées continues et bornées donc lipschitziennes, alors l'équation* (2.1) *admet une solution* *forte unique données par :*

$$x_t \quad = x + \int_0^t b(t, x_t, \alpha_t) dt + \int_0^t \sigma(t, x_t, \alpha_t) dB_t.$$

De plus cette solution est continue et vérifie pour tout $m > 0$ *:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |x_t|^m\right] < \infty.$$

2.2 Condition nécessaire d'optimalité (C.N.O)

Dans cette partie, nous expliquerons quelques définitions et quelques notes sur les définitions usuelles Au moyen de méthodes de variation convexes et de techniques de dualité, nous dériverons la condition nécessaire d'optimalité à notre problème (2.1) et (2.3).

Nous définissons un problème de contrôle optimal stochastique où les décrites ci-dessus par L'EDS piloté par un mouvement brownien multidimensionnel.

On introduit l'équation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} dy_t = \left[b_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) y_t + b_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) v_t\right] dt + \left[\sigma_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) y_t + \sigma_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) v_t\right] dB_t, \\ y_0 = 0, \end{cases}$$

avec y est la solution unique de l'équation et $v \in U_{ad}$.

Pour tout $\alpha \in U_{ad}$ et le chemin correspondante ou cas x, nous donnons les équations adjointes et la fonction de Hamiltonian pour notre problème.

Les équations adjointes sont définies :

$$\begin{cases} dp_t = -\left[h_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) + p_t b_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) + q_t \sigma_x\left(t, x_t, \alpha_t\right)\right] dt + q_t dB_t, \\ p_T = g_x\left(x_T\right), \end{cases}$$

où $(p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Nous définissons la fonction du Hamoltonian, comme suit :

$$H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

est défini par :

$$H\left(t, x_t, \alpha_t, p_t, q_t\right) = h\left(t, x_t, \alpha_t\right) + p_t b\left(t, x_t, \alpha_t\right) + q_t \sigma\left(t, x_t, \alpha_t\right).$$

En utilisant la définition du Hamiltonian, nous obtenons l'équation adjoint suivante :

$$\begin{cases} dp_t = -H_x\left(t, x_t, \alpha_t, p_t, q_t\right) dt + q_t dB_t, \\ p_T = g_x\left(x_T\right). \end{cases}$$

Quelques résultats utiles

Soit α un composante arbitraire de U_{ad}, alors pour est suffisamment petit $\theta > 0$ et pour chaque $t \in [0,T]$. Prenons un contrôle perturbe de la manière suivante :

$$\alpha_t^\theta = \alpha_t + \theta v_t.$$

Par définition α_t^θ est un processus mesurable et $\mathcal{F}_t$-adapté, donc $\alpha_t^\theta \in U_{ad}$. On note par x_t^θ la solution de et par $J\left(\alpha_t^\theta\right)$ la fonction coût associée au α_t^θ. le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Sous des hypothèses **(H1)**, nous avons :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|x_t^\theta - x_t\right|^2\right] \leq C\theta^2.$$

Et on obtient :

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|x_t^\theta - x_t\right|^2\right] = 0.$$

Preuve. Par hypothése on a :

$$x_t = x + \int_0^t b(s, x_s, \alpha_s)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s, \alpha_s)dB_s,$$
et
$$x_t^\theta = x + \int_0^t b(s, x_s^\theta, \alpha_s^\theta)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s^\theta, \alpha_s^\theta)dB_s,$$

où x la solution de l'équation (2.1) correspondante au contrôle α. Nous appliquons la formule d'Itô à $\left|x_t^\theta - x_t\right|^2$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \left|x_t^\theta - x_t\right|^2 &= 2\int_0^t (x_s^\theta - x_s)(b(s, x_s^\theta, \alpha_s^\theta) - b(s, x_s, \alpha_s))ds \\ &+2\int_0^t ((x_s^\theta - x_s)\left(\sigma(s, x_s^\theta, \alpha_s^\theta) - \sigma(s, x_s, \alpha_s)\right) dB_s \\ &+\int_0^t \left|\sigma(s, x_s^\theta, \alpha_s^\theta) - \sigma(s, x_s, \alpha_s)\right|^2 ds. \end{aligned}$$

Par passage aux ésperances, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t\right|^2 &= \mathbb{E}\left[2\int_0^t ((x_s^\theta - x_s), b(s, x_s^\theta, u_s^\theta) - b(s, x_s, u_s))ds \right. \\ &\left. + \int_0^t \left|\sigma(s, x_s^\theta, u_s^\theta) - \sigma(s, x_s, u_s)\right|^2 ds\right]. \end{aligned}$$

où :

$$\mathbb{E}\int_0^t (x_s^\theta - x_s)\left(\sigma(s, x_s^\theta, \alpha_s^\theta) - \sigma(s, x_s, \alpha_s)\right) dB_s = 0.$$

Nous utilisons l'inégalité : $2ab \leq a^2 + b^2$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t\right|^2 &\leq \mathbb{E}\int_0^t \left|(x_s^\theta - x_s)\right|^2 ds + \mathbb{E}\int_0^t \left|b(s, x_s^\theta, \alpha_s^\theta) - b(s, x_s, \alpha_s)\right|^2 ds \\ &+\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma(s, x_s^\theta, \alpha_s^\theta) - \sigma(s, x_s, \alpha_s)\right|^2 ds. \end{aligned}$$

Puisque b et σ sont lipschitziennes en x et en α, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t\right|^2 &\leq C\mathbb{E}\int_0^t \left|x_s^\theta - x_s\right|^2 ds + C\mathbb{E}\int_0^t \left|\alpha_s^\theta - \alpha_s\right|^2 ds \\ &\leq C\mathbb{E}\int_0^t \left|x_s^\theta - x_s\right|^2 ds + C\theta^2.\end{aligned}$$

Nous utilisons lemme de Gronwall : nous trouvons :

$$\mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t\right|^2 \leq C\theta^2 \exp\left(CT\right),$$

et pour $\theta \to 0$, donc :

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^\theta - x_t\right|^2\right] \leq \lim_{\theta\to 0} C\theta^2 \exp\left(6T\right) = 0.$$

Finalement, on obtient le résultat demandé. ■

Lemme 2.2.2 *Sous des hypothèses **(H1)**, nous avons :*

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left|\Gamma_t^\theta\right|^2 = 0$$

Preuve. Pour simplifier les chosons, nous mettons :

$$\Gamma_t^\theta = \frac{x_t^\theta - x_t}{\theta} - y_t.$$

En dérivé on obtient :

$$d\Gamma_t^\theta = \frac{1}{\theta}\left[dx_t^\theta - dx_t\right] - dy_t.$$

En remplaçant dx_t^θ, dx_t et dy_t par leurs valeurs on obtient :

$$\begin{aligned} d\Gamma_t^\theta &= \frac{1}{\theta}\left[x + b(t, x_t^\theta, \alpha_t^\theta)dt + \sigma(t, x_t^\theta, \alpha_t^\theta)dB_t\right] \\ &-\frac{1}{\theta}\left[x + b(t, x_t, \alpha_t)dt + \sigma(t, x_t, \alpha_t)dB_t\right] \\ &- \left[b_x(t, x_t, \alpha_t)y_t + b_\alpha(t, x_t, \alpha_t)v_t\right] dt \\ &- \left[\sigma_x(t, x_t, \alpha_t)y_t + \sigma_\alpha(t, x_t, \alpha_t)v_t\right] dB_t. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} d\Gamma_t^\theta &= \frac{1}{\theta}\left[b(t, x_t^\theta, \alpha_t^\theta) - b(t, x_t, \alpha_t)\right] dt + \frac{1}{\theta}\left[\sigma(t, x_t^\theta, \alpha_t^\theta) - \sigma(t, x_t, \alpha_t)\right] dB_t \\ &- \left[b_x(t, x_t, \alpha_t)y_t + b_\alpha(t, x_t, \alpha_t)v_t\right] dt - \left[\sigma_x(t, x_t, \alpha_t)y_t + \sigma_\alpha(t, x_t, \alpha_t)v_t\right] dB_t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Par le développement de Taylor avec réste intégrale aux points (x, α) et l'ordre 0 des fonctions $b(t, x_t^\theta, \alpha_t^\theta)$ et $\sigma(t, x_t^\theta, \alpha_t^\theta)$, on a :

$$\begin{aligned} b(t, x_t^\theta, \alpha_t^\theta) - b(t, x_t, \alpha_t) &= \int_0^t b_x[t, x_t + \lambda\left(x_t^\theta - x_t\right), \alpha_t + \lambda\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right)]\left(x_t^\theta - x_t\right) d\lambda \\ &+\int_0^t b_\alpha[t, x_t + \lambda\left(x_t^\theta - x_t\right), \alpha_t + \lambda\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right)]\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right) d\lambda, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sigma(t, x_t^\theta, \alpha_t^\theta) - \sigma(t, x_t, \alpha_t) &= \int_0^t \sigma_x[t, x_t + \lambda\left(x_t^\theta - x_t\right), \alpha_t + \lambda\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right)]\left(x_t^\theta - x_t\right) d\lambda \\ &+\int_0^t \sigma_\alpha[t, x_t + \lambda\left(x_t^\theta - x_t\right), \alpha_t + \lambda\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right)]\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right) d\lambda. \end{aligned}$$

En remplaçant ces deux dans (2.5), on obtient :

$$d\Gamma_t^\theta = \frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 b_x[t, x_t + \lambda\left(x_t^\theta - x_t\right), \alpha_t + \lambda\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right)]\left(x_t^\theta - x_t\right) d\lambda\right] dt$$

$$+\frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 b_\alpha[t, x_t + \lambda(x_t^\theta - x_t), \alpha_t + \lambda\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right)]\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right) d\lambda\right] dt$$

$$+\frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 \sigma_x[(t, x_t + \lambda\left(x_t^\theta - x_t\right), \alpha_t + \lambda\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right)]\left(x_t^\theta - x_t\right) d\lambda\right] dB_t$$

$$+\frac{1}{\theta}\left[\int_0^1 \sigma_\alpha[t, x_t + \lambda(x_t^\theta - x_t), \alpha_t + \lambda\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right)]\left(\alpha_t^\theta - \alpha_t\right) d\lambda\right] dB_t$$

$$-\left[b_x(t, x_t, \alpha_t)y_t + b_\alpha(t, x_t, \alpha_t)v_t\right] dt - \left[\sigma_x(t, x_t, \alpha_t)y_t + \sigma_\alpha(t, x_t, \alpha_t)v_t\right] dB_t.$$

En remplaçant :

$$x_t^\theta - x_t = \theta\left(\Gamma_t^\theta + y_t\right),$$

et

$$\alpha_t^\theta - \alpha_t = \theta v_t.$$

et en passant l'espérance au carrée on a :

$$\mathbb{E} \mid \Gamma_t^\theta \mid^2 \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 b_x(s, x_s + \lambda\left(x_s^\theta - x_s\right), \alpha_s + \lambda\theta v_s)\Gamma_t^\theta d\lambda\right|^2 ds$$

$$+C\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \sigma_x(s, x_s + \lambda\left(x_s^\theta - x_s\right), \alpha_s + \lambda\theta v_s)\Gamma_t^\theta d\lambda\right|^2 ds + l^\theta,$$

où l^θ est donne par :

$$\begin{aligned} l^\theta &= C\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left\{b_x[s, x_s+\lambda\left(x_s^\theta - x_s\right), \alpha_s+\lambda\theta v_s] - b_x(s, x_s, \alpha_s)\right\} y_s d\lambda\right|^2 ds \\ &+C\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left\{b_\alpha[s, x_s+\lambda\left(x_s^\theta - x_s\right), \alpha_s+\lambda\theta v_s] - b_\alpha(s, x_s, \alpha_s)\right\} v_s d\lambda\right|^2 ds \\ &+C\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left\{\sigma_x[s, x_s+\lambda\left(x_s^\theta - x_s\right), \alpha_s+\lambda\theta v_s] - \sigma_x(s, x_s, \alpha_s)\right\} y_s d\lambda\right|^2 ds \\ &+C\int_0^t \mathbb{E}\left|\int_0^1 \left\{\sigma_\alpha[s, x_t+\lambda\left(x_s^\theta - x_s\right), \alpha_s+\lambda\theta v_s] - \sigma_\alpha(s, x_s, \alpha_s)\right\} v_s d\lambda\right|^2 ds. \end{aligned}$$

Puisque b_x et σ_x sont continues et en passant à la limite quand θ tends vers 0 on obtient :

$$\lim_{\theta\to 0} l^\theta = 0.$$

Comme b_x et σ_x sont bornées, alors (2.5) devient :

$$\mathbb{E} \mid \Gamma_t^\theta \mid^2 \leq 2MC\int_0^t \mathbb{E} \mid \Gamma_t^\theta \mid^2 dt + l^\theta.$$

En appliquant l'inégalité de Granwall, on obtient :

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbb{E}\left|\frac{x_t^\theta - x_t}{\theta} - y_t\right|^2 = 0.$$

■

Si α est un contrôle optimal, alors :

$$\theta^{-1}\left[J\left(\alpha_t^\theta\right) - J\left(\alpha_t\right)\right] \geq 0.$$

D'après inégalité ci-dessus, on peut mentionner lemme ce qui suit :

Lemme 2.2.3 *Sous l'hypothèse **(H1)**, on a :*

$$\lim_{\theta\to 0}\theta^{-1}\left[J\left(\alpha_t^{\theta}\right)-J\left(\alpha_t\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(h_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)y_t+h_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t\right)v_t\right)dt+g_x\left(x_T\right)y_T\right].$$

Preuve. Comme g, h est de classe C^1, alors pour presque tout θ il existe $\theta\left(\omega\right)\in[0,1]$ tel que :

$$\lim_{\theta\to 0}\theta^{-1}\left[J\left(\alpha_t^{\theta}\right)-J\left(\alpha_t\right)\right]=\lim_{\theta\to 0}\theta^{-1}\mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(\left(t,x_t^{\theta},\alpha_t^{\theta}\right)-h\left(t,x_t,\alpha_t\right)\right)dt+g\left(x_T^{\theta}\right)-g\left(x_T\right)\right].$$

En remplaçant $x_t^{\theta}-x_t=\theta\left(\Gamma_t^{\theta}+y_t\right)$ et $\alpha_t^{\theta}-\alpha_t=\theta v_t$, on a :

$$\lim_{\theta\to 0}\theta^{-1}\left[J\left(\alpha_t^{\theta}\right)-J\left(\alpha_t\right)\right]$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\theta^{-1}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1\left[h_x\left(t,x_t+\lambda\theta\left(\Gamma_t^{\theta}+y_t\right),\alpha_t+\lambda\theta v_t\right)\theta\left(\Gamma_t^{\theta}+y_t\right)\right]d\lambda\right)dt\right]\right.$$

$$+\theta^{-1}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1\left[h_\alpha\left(t,x_t+\lambda\theta\left(\Gamma_t^{\theta}+y_t\right),\alpha_t+\lambda\theta v_t\right)\lambda v_t\right]d\lambda\right)dt\right]$$

$$\left.+\theta^{-1}\mathbb{E}\left[\int_0^1\left[g_x\left(x_T+\lambda\theta\left(\Gamma_T^{\theta}+y_T\right)\right)\theta\left(\Gamma_T^{\theta}+y_T\right)\right]d\lambda\right]\right).$$

Finalement

$$\lim_{\theta\to 0}\theta^{-1}\left[J\left(\alpha_t^{\theta}\right)-J\left(\alpha_t\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^T h_x\left(\left(t,x_t,\alpha_t\right)y_t+h_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t\right)v_t\right)dt+g_x\left(x_T\right)y_T\right].$$

■

Lemme 2.2.4 *Sous des hypothèses **(H1)-(H2)**, nous avons :*

$$\left[\int_0^T h_x\left(\left(t,x_t,\alpha_t\right)y_t+h_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t\right)v_t\right)dt+g_x\left(x_T\right)y_T\right]\geq 0. \tag{2.6}$$

Preuve. Comme α_t est optimal alors :

$$\theta^{-1}\left[J\left(\alpha_t^{\theta}\right)-J\left(\alpha_t\right)\right]\geq 0.$$

D'après cette inégalité et lemme (2.2.3), on obtient :

$$\left[\int_0^T h_x\left(\left(t,x_t,\alpha_t\right)y_t+h_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t\right)v_t\right)dt+g_x\left(x_T\right)y_T\right]\geq 0.$$

■

Théoréme 2.2.1 *Sous des hypothèses **(H1)-(H2)** Soit α un contrôle optimal en minimisant la fonction J sur U avec processus d'état correspondant x_t, ensuite il existe un processus adapté (p_t,q_t) qui est la solution unique de l'EDSR, telle que :*

$$\int_0^T H_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t,p_t,q_t\right)\left(v_t-\alpha_t\right)\geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-}p.s \quad \forall v_t\in U$$

Preuve. Nous appliquons la Formule d'intégration par parties sur $p_t y_t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
d\left(p_t y_t\right) &= p_t dy_t + y_t dp_t + d\left\langle p,y\right\rangle_t \\
&= p_t\left[\left(b_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)y_t+b_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t\right)v_t\right)dt+\left(\sigma_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)y_t+\sigma_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t\right)v_t\right)dB_t\right] \\
&+y_t\left[-\left(h_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)+b_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)p_t+\sigma_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)q_t\right)dt+q_t dB_t\right] \\
&+q_t\left[\sigma_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)y_t+\sigma_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t\right)v_t\right]dt \\
&= b_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)p_t y_t dt+b_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t\right)p_t v_t dt+\sigma_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)p_t y_t dB_t+\sigma_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t\right)p_t v_t dB_t \\
&-h_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)y_t-b_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)p_t y_t dt-\sigma_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)q_t y_t dt+q_t y_t dB_t \\
&+\sigma_x\left(t,x_t,\alpha_t\right)q_t y_t dt+\sigma_\alpha\left(t,x_t,\alpha_t\right)q_t v_t dt,
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} d\left(p_t y_t\right) &= -h_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) y_t + b_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t v_t dt + \sigma_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) q_t v_t dt + q_t y_t dB_t \\ &+ \sigma_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t y_t dB_t + \sigma_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t v_t dB_t. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} p_t y_t &= p_0 y_0 - \int_0^T h_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) y_t dt + \int_0^T b_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t v_t dt + \int_0^T \sigma_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) q_t v_t dt \\ &+ \int_0^T q_t y_t dB_t + \int_0^T \sigma_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t y_t dB_t + \int_0^T \sigma_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t v_t dB_t. \end{aligned}$$

En passant aux l'espérance

$$\mathbb{E}\left[p_t y_t\right] = \mathbb{E}\left[-\int_0^T h_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) y_t dt + \int_0^T b_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t v_t dt + \int_0^T \sigma_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) q_t v_t dt\right],$$

car

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T q_t y_t dB_t\right] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \sigma_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t y_t dB_t\right] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \sigma_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t v_t dB_t\right] = 0.$$

Avec la condition $p_T = g\left(x_T\right)$, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[g\left(x_T\right) y_T\right] = \mathbb{E}\left[-\int_0^T h_x\left(t, x_t, \alpha_t\right) y_t dt + \int_0^T b_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t v_t dt + \int_0^T \sigma_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) q_t v_t dt\right],$$

d'aprés l'inégalité (2.6), on trouve

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T h_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) y_t dt + \int_0^T b_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) p_t v_t dt + \int_0^T \sigma_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t\right) q_t v_t dt\right] \geq 0,$$

alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_\alpha\left(t, x_t, \alpha_t, p_t, q_t\right)\left(v_t - \alpha_t\right) dt\right] \geq 0.$$

■

Conclusion

Dans ce travail nous avons traité un problème de contrôle stochastique pour un système représenter par équations différentielles stochastiques en abrégé EDS dans le cas où le domaine du contrôles admissibles est convexe.

Nous avons dérivé des conditions nécessaires d'optimalité sous forme du principe du maximum de Pontryagin. La preuve de ces résultantes est basée sur la perturbation convexe : $\alpha_t^\theta = \alpha_t + \theta v_t$.

Bibliographie

[1] Jean-François Le Gall (2013) : Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique, Springer.

[2] J. Yong, X. Y. Zhou, Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB equations, vol 43, Springer, New York 1999.

[3] M.Chala, 2013 : Contribution a l'etude des contrôles optimales stochastiques, Thèse de Doctorat, Université de Biskra.

[4] M. Jeanblanc, (Septembre 2006) : Cours de calcul stochastique, Master 2IF EVRY

[5] Monique Jeanblanc & Thomas Simon (Septembre 2005) : Elements de calcul stochastique, IRBID.

[6] .Ph.Briand,(Mars 2001) : Eéquation différentielles stochastiques rétrogrades.

[7] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la . . . nance (Vol. 61). Berlin : Springer.

Annexe A : Rappel

Lemme de Ganwall Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une application borélien borné tell que pour $a,\, b \geq 0$:

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$g(t) \leq a\exp(bt) \quad \forall t \in [0,T].$$

Inégalite de Doob Soit M une martingale réelle continue à doite(ou sous-martingale positive) de carré intégrale. Alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} \mid M_s \mid^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\mid M_t \mid^2\right] \quad \forall t \geq 0.$$

Inégalité de Hölder Soient p et q deux nombres conjugués $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ avec p,$q \in]1,\infty[$, $X \in \mathcal{L}^p$ et $Y \in \mathcal{L}^q$.

Alors $XY \in \mathcal{L}^1$ et

$$\| XY \| \leq \| X \|_p \| Y \|_q,$$

pour $p=q=2$ on obtient l'inégalité ce Cauchy-Shwarz

$$\mathbb{E}\left[\mid XY \mid\right] \leq \mathbb{E}\left[\mid X \mid^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\mid Y \mid^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Formule de Taylor avec réste intégral Soit f une fonctions définie sur un ouvert U de R^n à velours dans R^p et soit a un point de U. Si f est classe C^{k+1} sur U et si le segment $[a, a+h]$ est contenu dans U, on a :

$$f\left(a+h\right)=f\left(a\right)+Df\left(a\right)\left(h\right)+...+\tfrac{1}{k!}D^{k}f\left(a\right)\left(h\right)^{k}+\int_{0}^{1}\frac{\left(1-t\right)^{k}}{k!}D^{k+1}f\left(a\right)\left(h\right)^{k+1}dt.$$

Avec

$$D^{k}f\left(a\right)\left(h\right)^{k}=\sum_{i_{1}...,i_{k}}^{n}\frac{\delta^{k}f}{\delta x_{i_{1}}...\delta x_{i_{k}}}\left(a\right)h_{i_{1}}...h_{i_{k}}.$$

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	:	Espace de probabilité filtré.
$\mathbb{C}^2$	:	Ensemble des fonctions deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est continue.
$\mathbb{C}^1$	:	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la première dérivée est continue.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
$EDSR$	:	Equation différentielle stochastique rétograd.
$\mathbb{P}$-$p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité P.
$\mathcal{N}(0, t)$	:	Loi normale centre de varianece t.
α	:	Contrôle admissible.
α^θ	:	Contrôle perturbe

Résumé

Dans cette note, nous étudions les problèmes de contrôle stochastiques des systèmes régis par des équations différentielles stochastiques.

Nous obtenons les conditions nécessaires d'optimalité avec le domaine de contrôle doit être convexe.

Abstract

In this note, we study the stochastic control problems of systems governed by stochastic differential equations.

We obtain necessary optimality conditions with the control domain must be convex.

الملخص

ندرس في هذه المذكرة مشاكل التحكم العشوائي للأنظمة التي تحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية.

ونحصل على الشروط اللازمة المثالية مع مجال التحكم يجب أن يكون محدبًا.