République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**GHADDAB Houssam**

Titre :

# Systèmes dynamiques continus

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | HOUAS Amrane | UMKB | Président |
| Dr. | SOLTANI Siham | UMKB | Encadreur |
| Dr. | TABERHA Warda | UMKB | Examinateur |

Septembre 2020

## Dédicace

♣Avant tous propos, je tiens rendre grâce à "**Allah**" qui ma guidé sur la bonne voie♣

♡Je dédie ce modeste travail♡

♣à mes trés chers parents ma mère **ghaddab tefaha** mon père **ghaddab ameur**

qui m'ont bien élevés, aidés soutenus et encouragés durant toutes ces années d'étude,

qu'**Allah** les protège♣

♡Toute la famille **ghaddab**♡

♡Toute mes amies♡

♣A tous les enseignants du département de Mathématiques♣

♣Tous mes collègues de ma promotion de Master 2 Mathématiques 2020♣

♡**Houssam Ghaddab**♡

## REMERCIEMENTS

♣Je remercie tout d'abord **ALLAH** qui m'aide et me donne la santé, la patience et le courage durant ces langues années d'étude et la force pour finir ce travail♣

♡Je tiens remercier sincèrement mon encadreur "**Dr.SOLTANI Siham**", pour mavoir donné l'opportunité de travailler sur ce projet, pour son grand soutien scientique et moral, pour les suggestions et les encouragements qu'il ma apportés durant mon projet. Mon sincére remerciement aux membres de jury "**Dr.HOUAS Amrane**"et "**Dr.TABERHA Warda**" qui ont accepté de juger mon travail♡.

♣Je remercie vivement tous les enseignants de notre département qui ont toujours donné le meilleur deux-mêmes an de nous assurer une formation de qualité, je n'oublie pas le chef département Dr."**Hafayed Mokhtar**" pour son aide

# Table des matières

# Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités, et qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique. La nature de cette étude diffère suivant le système dynamique étudié,nature qui d'épend des outils utilisé (analytiques, géométriques ou probabilistes).

Ainsi historiquement, les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique une poque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques.Les questions majeures qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire.

Les systèmes dynamiques ont été développés au $XIXe$ siècle par le mathématicien physicien franais Henri Poincaré. Ainsi qu'au le mathématicien russe Aleksandr Lyapunov a effectuaient des recherches sur la stabilité du mouvement. Le but de la théorie des systèmes dynamiques avait initialement pour objet l'étude du comportement qualitatif des trajectoires d'un champ de vecteurs.

Notre mémoire est composée de deux chapitres :

Dans **le premier chapitre**, on introduit les définitions des systémes dynamiques et ses propriétés, puis on présente la classification et l'espace de phase et cycle limite.

**Le deuxième chapitre**, on étude la stabilité des systèmes autonome et non autonome.

# Chapitre 1

# Notions générales sur les systèmes dynamiques

L'objectif essentiel de ce chapitre est d'étudier quelques notions générales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques .Nous commençons par donner les notions générales de système dynamique, flot, espace de phase, point fixe. Nous introduisons aussi le théorème d'existence et d'unicité. Ensuite, nous examinons la définition des solutions périodiques et leur stabilité. Enfin nous terminons par donner la définition des cycles limites et leur stabilité .

## 1.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un modèle permettant l'évolution au cours de temps d'un ensemble des objets en intéraction il est défini par un triplet $(D, I, F)$ constitué de l'espace d'états $D$, du domaine temporel $I$, et d'une application de transition d'état $F : I \times D \to D$ qui permet de défnir partir d'un vecteur de condition initiale l'état du système tout instant.

**Définition 1.1.1** *Un système dynamique sur* $\mathbb{R}^n$ *est une application :* $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *définie sur tout* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$*, telle que :*

– $F(.,X) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est continue,*

– $F(t,.) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *est continue,*

– $F(0,X) = X,$

– $F(t+s,X) = F(t,F(s,X))$ *pour tout* $t,s \in \mathbb{R}^+, X \in \mathbb{R}^n,$

**Exemple 1.1.1** *Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+, X_0 \in \mathbb{R}^n$$

*où* $A$ *est une matrice constante. La solution de ce système est :* $X(t) = \exp(tA)X_0$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$ *engendre un système dynamique du fait que l'application :* $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *qui à tout* $t \in \mathbb{R}^+, X \in \mathbb{R}^n$ *associé :* $F(t,X) = \exp(tA)X$ *vérifiée les quatre propriétés du système dynamique.*

### 1.1.1 Formulation des systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

– Dans le cas où le temps est discret, le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative)

$$X_{k+1} = f(X_k, k), \quad X_k \in \mathbb{R}^n$$

**Exemple 1.1.2** *Soit* $f : D \to D, D \subseteq \mathbb{R}^n$ *; une application continue,* $f^k$ *désigne la* $k^{iéme}$ *itérée de* $f$*, c'est-à-dire*

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), ...f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

*Dans la pratique* $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0),...$ *représentent les valeurs d'une certaine quantité au temps* $0, 1, 2, ....$ *Ainsi la valeur de la quantité aux temps* $k+1$ *est en fonction* *de sa valeur au temps $k$. L'application $f$ est couramment appelée "système dynamique discret".*

– Dans le cas où la composante temps est continue, le systéme dynamique est présenté par un système d'équation différentielle de la forme :

$$X' = F(X,t) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1' = f_1(x_1,...,x_n,t) \\ x_2' = f_2(x_1,...,x_n,t) \\ \qquad \vdots \\ x_n' = f_n(x_1,...,x_n,t) \end{cases} \qquad X \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in I \subset \mathbb{R}^+$$

Si la fonction $F$ est linéaire, le système dynamique est dit linéaire, et si le temps est exprimé explicitement dans la fonction $F$, le système est dit "non autonome".

**Remarque 1.1.1** *Dans ce mémoire nous intéréssons aux systèmes dynamiques autonomes et temps continue du type :*

$$X' = F(X(t)), \quad X \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in I \subset \mathbb{R} \tag{1.1}$$

### 1.1.2 Espace de phase

L'ensemble des variables d'état d'un système permet de construire un espace mathématique appelé " espace des phases ". L'espace des phases est un espace souvent multi-dimensionnel. Chaque axe de coordonnées de cet espace correspond une variable d'état du système dynamique étudié et chaque variable d'état caractérise le système un instant donné. Pour chaque instant donné, le système est donc caractérisé par un point de cet espace. A l'instant suivant, il sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite.

**Définition 1.1.2** *On appelle solution du système* 1.1 *toute application dérivable* $X : I \rightarrow$

*$D$, définie sur un intervalle non vide $I \subseteq \mathbb{R}$ et telle que, pour tout $t \in I$ :*

$$X(t) \in D \subset \mathbb{R}^n \text{ et } X'(t) = F(X(t)).$$

- *L'ouvert $D$ est appelé l'espace de phase.*
- *Une fonction $\tilde{X}$ est appelée prolongement de la solution $X$ si elle est définie sur un intervalle $\tilde{I}$ contenant strictement $I$.*
- *La solution $X$ est dite maximale (on dit aussi non prolongeable ) si elle n'admet pas de prolongement, c'est–dire l'intervalle $I$ est l'intervalle maximal d'existence de la solution $X$.*

**Définition 1.1.3** *Soit $I_X$ l''intervalle maximal d'existence de la solution $X$.*

- *La trajectoire (ou l'orbite) de $X$ est définie par : $\gamma(X) = \{X(t), t \in I_X\}$ .*
- *La semi-orbite positive est définie par : $\gamma^+(X) = \{X(t), t \geq 0\}$.*
- *La semi-orbite négative est définie par : $\gamma^-(X) = \{X(t), t \leq 0\}$.*

**Définition 1.1.4** *On appelle point singulier (ou point d'équilibre ou point critique) du système* 1.1*, le point $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ tel que :*

$$F(\bar{X}) = 0$$

**Définition 1.1.5** *Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase.*

**Définition 1.1.6** *Soit $\phi(t, X_0)$ la solution du système* 1.1 *telle que $\phi(0, X_0) = X_0$. L'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définies par $\phi_t(X_0) = \phi(t, X_0)$, est appelé le flot du système* 1.1.

### 1.1.3 Existence et unicité des solutions

**Définition 1.1.7** *Le problème de trouver une solution du système* 1.1 *satisfaisant la condition initiale $X(t_0) = X_0$ est appelé problème de Cauchy.*

La condition que $F$ soit continue ne suffit pas que la solution est unique. On verra dans le théorème Cauchy-Lypschitz que si $F$ est localement lipschitzienne alors le problème admet une solution unique.

**Définition 1.1.8** *On dit que $F$ est Lipschitzienne sur $D$, s'il existe une constante positive $L$ telle que :*

$$\| F(X) - F(Y) \| \leq L \| X - Y \|, \quad \forall X, Y \in D$$

*La constante $L$ est appelé une constante de Lipschitz pour $F$.*

**Définition 1.1.9** *On dit que $F$ est localement Lipschitzienne sur $D$, si tout point de $D$ possède un voisinage ouvert inclus dans $D$ sur lequel $F$ est Lipschitzienne.*

**Théorème 1.1.1** *(**Cauchy_ Lipschitz**) Soit le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} X' = F(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad X \in D, t_0 \in \mathbb{R}^+$$

*Si $F$ est continue et localement Lipschitzienne sur $D$ dans $\mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy admet une solution maximale unique sur $D$.*

**Remarque 1.1.2** *Le théorème d'existence et d'unicité est encore assuré sous l'hypothèse que $F \in C^1(D)$.*

## 1.2 Points périodiques et p-cycles

*Soit* $(D, I, F)$ *un système dynamique.*

**Définition 1.2.1** *Un point* $\bar{X} \in D$ *est un point fixe de* $F$ *si est seulement si* $F(\bar{X}) = \bar{X}$.

**Exemple 1.2.1** *Soit* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $F(X) = X^3$ *alors* $0, 1, -1$ *sont des points fixes de* $F$.

**Définition 1.2.2** *S'il existe* $n \geq 2$, *tel que* $F^n(X) = X$, *on dit que* $X$ *est un point périodique. La période d'un point périodique* $X$ *est le plus petit entier* $n \geq 2$ *tel que :* $F^n(X) = X$.

**Définition 1.2.3** *Un ensemble* $\{X_0, X_1, X_2, ..., X_{p-1}\}$ *forme un cycle d'ordre* $p$ *(ou une orbite périodique d'ordre* $p$*, ou encore un p-cycle),si :*

$$\begin{cases} X_{i+1} = F(X_i) \\ F(X_{p-1}) = X_0 \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

### 1.2.1 Solutions périodiques

Les points singuliers ne sont pas les seuls éléments déterminant le comportement qualitatif des solutions d'un système dynamique, mais il existe d'autre types tels que les solutions périodiques. Le premier problème que nous recontrons est l'existence des solutions périodiques dans $\mathbb{R}^n$, et dans cette section nous proposons quelques résultats d'absence des orbites périodiques.

**Définition 1.2.4** *Une solution* $X(t)$ *du système* 1.1 *est une solution périodique de période*

*$T$ si est seulement si chacune de ses $n$ composantes $x_i(t)$ est périodique de période $T$*

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, X(t+T) = X(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t+T) = x_1(t) \\ x_2(t+T) = x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t+T) = x_n(t) \end{cases}$$

- *Si $X(t)$ a une période $T$, la solution a aussi une période $kT$, et supposons que $T$ est la plus petite période.*
- *Les points d'équilibres sont considrés comme des solutions périodiques d' une période arbitraire $T \in \mathbb{R}^+$.*

**Exemple 1.2.2** *Loscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle :*

$$x'' + w^2 x = 0$$

*Cette équation équivant au système*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -w^2 x \end{cases}$$

*Ce système s'intègre facilement puisque*

$$\frac{dy}{dx} = -w^2 \frac{x}{y}$$

*Ce qui donne pour ensemble de solutions*

$$y^2 - w^2 x^2 = C$$

*Autrement dit, ce système possède une famille continue un paramètre de solutions pério-*

*diques représentées dans le plan de phase par des ellipses.*

**Théorème 1.2.1** *Soit $X(t)$ une solution du système* 1.1*, supposons qu'il existe deux instants $t_1$ et $t_2$ $(t_1 < t_2)$ tels que $X(t_1) = X(t_2)$ (c.à.d que l'orbite de $X(t)$ se recoupe). Alors, $X(t)$ est une solution périodique définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

### 1.2.2 Stabilité des solutions périodiques

Supposons que le système 1.1 admet une solution priéodique $\Phi(t)$, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et telle que $\Phi(t + kT) = \Phi(t)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous considérons une autre définition de la stabilité d'une solution périodique, appelée "*stabilité au sens de Poincaré*" qui est plus signicative et fait intervenir la distance d'un point $X$ à la courbe périodique $\Phi(t)$

$$d = \inf_{\tau \in [0,T[} \|X - \Phi(\tau)\|$$

**Définition 1.2.5** *Soit $X(t)$ une solution du système* 1.1 *définie par $X(t_0) = X_0$*

– $\Phi(t)$ *est dite orbitalement stable ou stable au sens de Poincaré si :*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0 : \|X(t_0) - \Phi(t_0)\| \preceq \delta \Rightarrow d(t) = \inf_{\tau \in [0,T[} \|X(t) - \Phi(\tau)\| \preceq \varepsilon, pour\ t \in [t_0, \infty[$$

– $\Phi(t)$ *est dite asymptotiquement stable au sens de Poincaré si elle est stable et si de plus*

$$\lim_{t \to \infty} d(t) = 0$$

– $\Phi(t)$ *est instable si elle n'est pas orbitalement stable*

**Exemple 1.2.3** *Soit le système*

$$\begin{cases} x'(t) = -Y\sqrt{(x^2+y^2)} \\ y'(t) = X\sqrt{(x^2+y^2)} \end{cases}$$

*qui admet l'unique point critique* 0*. En résolvant ce système en coordonnées polaires*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad r \succeq 0$$

*on a*

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow rr' = xx' + yy'$$

*et*

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) \Rightarrow \theta' = \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2}$$

*on obtient*

$$\begin{cases} r'(t) = 0 \Rightarrow r(t) = r_0 \\ \theta'(t) = r(t) \Rightarrow \theta(t) = r_0 t + \theta_0, \theta_0 = \theta(0) \end{cases} \tag{1.2}$$

*L'origine* 0 *est fermé de cercles centrés. Soit* $\Phi(t)$ *une solution priodique définie par* 1.2*. Pour étudier la stabilité de cette solution, nous considérons un voisinage de* $\Phi(0)$ *défini par* $\|X - \Phi(0)\| \preceq \delta$*, un point* $X(0)$ *appartenant ce voisinage et la solution* $X(t)$ *correspondante qui est un cercle de centre* 0*, de rayon* $r_0 + \alpha$ *,*$|\alpha| \preceq \delta$*. Donc*

$$\forall\varepsilon \succ 0, \exists\delta \succ 0 \text{ tel que } \|X(0) - \Phi(0)\| \preceq 0 \Rightarrow d(t) \preceq \varepsilon \ , \ t \succeq 0$$

*ce qui prouve que la solution* $\Phi(t)$ *sont stable au sens de Poincaré.*

## 1.3 Portrait de phase et cycles limites

Un autre comportement possible pour une trajectoire est de tendre vers un mouvement périodique, dans le cas d'un système planaire, cela signie que les trajectoires tendent vers ce que l'on appelle un cycle limite.

**Définition 1.3.1** *On appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.*

**Remarque 1.3.1** *Les cycles limites sont aussi des séparatrices : ils séparent des régions où les trajectoires ont des comportements différents.*

**Théorème 1.3.1** $\Gamma$ *étant la trajectoire d'un cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de* $\Gamma$ *sont telle que : soit elles s'enroulent toutes en spirales autour de* $\Gamma$ *pour* $t \to \infty$ *ou bien* $t \to -\infty$.

**Exemple 1.3.1** *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} x' = x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

*en coordonnées polaires* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, *le système précident devient :*

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

*Ce système a deux états d'équilibres* $r = 0$ *et* $r = 1$. *La solution générale distincte de zéro est donnée par :*

$$r^2(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-2t}} \text{ et } \theta = t - t_0$$

*Ainsi, en utilisant l'espace des phases* $(x, y)$, *toutes les trajectoires exepté l'équilibre* $r = 0$,*tendent vers le cycle* $r = 1$ *(senroulent en spirales autoure du cercle).*

**Remarque 1.3.2** *Les cycles limites sont des phénomènes non linèaires. Il ne peuvent apparaitres dans des systèmes linèaires, ce qui implique que les centres ne sont pas des cycles limites.*

## 1.4 Classification des cycles limites

- *Si toutes les trajectoirs intérieures et extérieures s'enroulent autour de* $\Gamma$ *, pour* $t \to \infty$ *, le cycle limite est stable*
- *Si toutes les trajectoirs intérieures et extérieures s'enroulent, toutes en spirale autour de* $\Gamma$ *pour* $t \to -\infty$, *le cycle limite est instable*
- *S'il existe dans sont voisinage des trajectoires convergentes et d'autres divergentes,le cycle limite est semi-stable.*

### 1.4.1 Existence et unicité des cycles limites

On considère le systme autonome *:*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \tag{1.3}$$

dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$.

Le théorème de Poincaré-Bendixson permet d'écrire tous les ensembles $w$ limites compacts d'un système dynamique planaire.

**Exemple 1.4.1** Poincaré-Bendixson

*Considérons l'équation 1.3 dans* $\mathbb{R}^2$ *et où* $f, g \subset C^1(D)$*. Supposons que* $\gamma^+$ *est une orbite bornée et positive et que* $w(\gamma^+)$ *ne contient que des points ordinaires. Alors* $w(\gamma^+)$ *est une orbite périodique. De plus si* $w(\gamma^+) \neq \gamma^+$ *alors l'orbite périodique est appel cycle limite . Un résultat analogue est valable pour une orbite bornée et négative.*

**Corollaire 1.4.1** *Soit* $D$ *un ensemble fermé borné ne contenant aucun point singulier et supposons que* $D$ *est positivement invariant . Alors il existe un cycle limite contenu dans* $D$*.*

**Exemple 1.4.2** *En considère un rectangle avec des coins* $(-1, 2); (1, -2); (-1, -2)$ *et* $(1, 2)$*, prouvons que le système suivant a au moins un cycle limite :*

$$\begin{cases} x' = y - 8x^3 \\ y' = 2y - 4x - 2y^3 \end{cases}$$

*Les points singuliers sont trouvés par résolvant les équations* $x' = y' = 0$*. Soit* $y = 8x^3$*. Alors* $y' = 0$ *si* $x(14x^2 + 256x^8) = 0$*.*

- *sur* $y = 2, |x| \preceq 1, \quad y' = -4x - 12 < 0.$
- *sur* $y = -2, |x| \preceq 1, \quad y' = -4x + 12 > 0.$
- *sur* $x = 1, |y| \preceq 2, \quad x' = y - 8 < 0.$
- *sur* $x = -1, |y| \preceq 2, \; x = y + 8 > 0.$
- *sur* $y = 2, |x| \preceq 1, \quad y' = -4x - 12 < 0.$

*Le rectangle est positivement invariant et il n'y a pas d'autres points singuliers que l'origine qui est instable. Par conséquent, il existe un cycle limite stable l'intèrieur du rectangle par le corollaire du théorème de Poincaré-Bendixson.*

### 1.4.2 Stabilité des cycles limites

Considérons $\gamma(t)$ est un cycle limite de période $T$ pour le système 1.3

**Définition 1.4.1** *Si la quantité* $\int\limits_0^T (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})(\gamma(t))dt$ *est diffrente de zéro, on dit que le cycle limite est hyperbolique.*

**Théorème 1.4.1** *Soit une orbite périodique du système* (1.3) *de période* $T$*. On dit que :*

– $\gamma$ *est un cycle limite hyperbolique stable si :*

$$s = \int\limits_0^T (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})(\gamma(t))dt \prec 0$$

– $\gamma$ *est un cycle limite hyperbolique instable si :*

$$s = \int\limits_0^T (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})(\gamma(t))dt \succ 0$$

**Exemple 1.4.3** *Soit le système :*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = g(x, y) = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

*on a :* $\gamma(t) = (cos(t), sin(t))$,*est un cycle limite de période* $2\pi$ *.Alors :*

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})(\cos(t), \sin(t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - 3x^2 - y^2) + (1 - x^2 - 3y^2)(cos(t), sin(t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta) - 3\sin^2(\theta))dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2 - 4\cos^2(\theta) - 4\sin^2(\theta))dt \\
&= \int_0^{2\pi} -2dt = -4\pi < 0
\end{aligned}$$

*Donc* $\gamma(t) = (cos(t), sin(t))$ *est un cycle limite hyperbolique stable.*

# Chapitre 2

# Stabilité des systèmes dynamiques continus

.

Dans ce chapitre, on s'intéresse plus particulièrement l'étude des systèmes dynamiques continus. Nous débuterons par le point d'équilibre, ainsi que l'étude qualitative des systèmes autonomes (linèaires et non linèaires) et systèmes non autonomes .

## 2.1 Point d'équilibre d'un système

S'il est possible que la trajectoire d'un système correspond, partir d'un certain moment, uniquement un point, un tel point est appelé point d'équilibre. Nous allons voir que les problèmes de stabilité sont naturelement formulés par rapport aux points d'équilibre. Considérons le système dynamique continu :

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t), t) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.1}$$

où $F$ fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ est telle que 2.1 admet au moint une solution.

**Définition 2.1.1** *Le vecteur* $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ *est dit point d'équilibre du système* 2.1 *si* $F(\bar{X}, t)$ $= 0$ *pour tout* $t \succeq 0$

## 2.2 Stabilité des systèmes autonomes

Lors de l'analyse d'un système, l'étude de la stabilité revét une importance primordiale, et bien que cette notion soit assez usuelle, elle peut avoir plusieurs interprétations selon l'application envisagée, ce qui conduit des définitions appropriées mais en général liées au systéme considéré.

Le système continu autonome dans cette section sont régis par l'équation :

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.2}$$

Soit $\bar{X}$ un point d'équilibre du système 2.2.

**Définition 2.2.1** *On a :*

– $\bar{X}$ *est dit stable, si pour tout* $\varepsilon \succ 0$ *,il existe* $\eta \succ 0$ *tel que,*

$$\|X_0 - \bar{X}\| \preceq \eta \Rightarrow \|X(t) - \bar{X}\| \preceq \varepsilon \quad \text{pour } t \succ 0$$

*Dans le cas contraire il est dit instable.*

– $\bar{X}$ *est dit asymptotiquement stable (a.s) s'il est stable et si* :

$$\lim_{t \to \infty} \|X(t) - \bar{X}\| = 0$$

– $\bar{X}$ *est dit marginalement stable (m.s) s'il est stable mais non (a.s).*

– $\bar{X}$ *est dit exponentiellement stable (e.s) s'il existe deux constantes positives* $\alpha$ *et* $\beta$ *telles que :*

$$\|X(t) - \bar{X}\| \preceq \alpha e^{-\beta t} \|X_0 - \bar{X}\|$$

L*es définitions formulées ci-dessus caractérisent le comportement local du système, c'est–dire l'évolution de l'état lorsquil est perturbé de son point d'équilibre. Le concept de la stabilité globale est donné par la définition suivante.*

– *Le point $\bar{X}$ est dit globalement asymptotiquement stable (g.a.s) s'il est (a.s) et pour tout $X_0$,*

$$\lim_{t \to \infty} \|X(t) - \bar{X}\| = 0$$

– *Le point $\bar{X}$ est dit globalement exponentiellement stable (g.e.s) s'il existe deux constantes positives $\alpha$ et $\beta$ telles que, pour tout $X_0$, on a : $\|X(t) - \bar{X}\| \preceq \alpha \exp(-\beta t) \|X_0 - \bar{X}\|$.*

**Remarque 2.2.1** *Pour les systèmes linèaires autonomes, la stabilité asymptotique est toujours globale et exponentielle.*

### 2.2.1 Stabilité des systèmes linèaires

On s'intéresse l'étude de la stabilité de systèmes linèaires continus régis par l'équation *:*

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.3}$$

où $A$ est une matrice carrée de dimension $n \times n$.

**Définition 2.2.2** *Le système continu* 2.3 *est dit stable si l'origine est stable et il est dit asymptotiquement stable si l'origine est asymptotiquement stable. Dans ce cas, la matrice du système $A$ est dite stable ou asymptotiquement stable.*

La stabilité des systèmes linèaires continus est caractérisée par le résultat suivant.

**Proposition 2.2.1** *Le système* 2.3 *est stable si et seulement si :*

1. $\Re(\lambda) \preceq 0$ *pour toute valeur propre* $\lambda$ *de* $A$.
2. *S'il existe une valeur propre* $\lambda$ *de multiplicité* $k$ *telle que* $\Re(\lambda) = 0$ *alors* $dim E_\lambda = k$, *où* $E$ *est le sous espace propre associé à* $\lambda$.

**Exemple 2.2.1** *Considérons le système :*

$$\begin{cases} X_1'(t) = X_1(t) - X_2(t) \\ X_2'(t) = 2X_1(t) - 2X_2(t) \end{cases}$$

*Les valeurs propres de* $A$, $\lambda_1 = 0$ *et* $\lambda_2 = -1$, *sont simples, d'où le système est stable.*

### 2.2.2 Fonction de Lyapunov

On étudie la stabilité dun système l'aide d'une fonction convenablement choisie, appelée fonction de Lyapunov. Cette méthode, dite directe, est utile pour les systèmes non linèaires et elle a l'avantage d'être applicable dans des situations non standards. Plus précisément, l'idée de base de cette méthode est de chercher une fonction définie positive, dépendant de l'état du système, et qui est décroissante le long des trajectoires du système, quand le système évolue. L'exemple classique dans un système mécanique libre avec frottement est celui de l'énergie qui décroit moins que le système ne soit au repos et ce fait peut être utilisé pour tablir la stabilité du système.

### 2.2.3 Cas des systèmes non linèaires continus

Considérons nouveau le système :

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.4}$$

et soit $\bar{X}$ un point d'équilibre de ce système, alors on a la définition suivante.

**Définition 2.2.3** *Une fonction $V$ définie sur une région $\Omega$ qui contient $\bar{X}$ est une fonction de Lyapunov pour le système 2.4 et le point d'équilibre $\bar{X}$ si $V$ satisfait :*

1. *$V$ est continue et ses dérivées partielles sont continues.*
2. *$V$ admet un minimum unique au point $\bar{X}$ sur $\Omega$.*
3. *La fonction $V'(x) = \nabla V(x)F(x)$ satisfait $V(x) \preceq 0$ sur $\Omega$.*

– *Si $X(t)$ est la trajectoire de 2.4, alors $V(X(t))$ représente la valeur de $V$ le long de la trajectoire. Afin que $V$ soit décroissante le long de la trajectoire, on doit avoir $V(X(t)) \preceq 0$.*

$$V'(X(t)) = \frac{\partial V}{\partial X_1}X_1'(t) + \frac{\partial V}{\partial X_2}X_2'(t) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial X_n}X_n'(t)$$

*utilisant 2.4, on obtient*

$$V'(X(t)) = \frac{\partial V}{\partial X_1}F_1(X(t)) + \frac{\partial V}{\partial X_2}F_2(X(t)) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial X_n}F_n(X(t)) = \nabla V(x(t))F(x(t))$$

– *avec $F = (F_1, \cdots, F_n)$, $X = (X_1, \cdots, X_n)^T$ et $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

## 2.3 Stabilité des systèmes non autonomes

Considérons le système dynamique non autonome continu suivant *:*

$$X'(t) = F(X(t), t) \tag{2.5}$$

Soit $\bar{X}$ un point d'équilibre du système 2.5

**Définition 2.3.1** *Un point d'équilibre $\bar{X}$ du système* 2.5 *est dit stable à $t_0$ si pour tout $R > 0$ il existe $r = r(R, t_0) > 0$ tel que :*

$$\|X(t_0) - \bar{X}\| \prec r \Rightarrow \|X(t) - \bar{X}\| \prec R, \quad \textit{pour tout } t \succeq t_0$$

*Dans le cas contraire le point d'équilibre $\bar{X}$ est dit instable.*

**Définition 2.3.2** *Un point d'équilibre $\bar{X}$ est dit uniformément stable (u.s) si pour tout $R > 0$ il existe $r = r(R) > 0$ indépendant de $t_0$ tel que, pour tout $t_0$*

$$\|X(t_0) - \bar{X}\| \prec r \Rightarrow \|X(t) - \bar{X}\| \prec R, \quad \textit{pour tout } t \succeq t_0$$

- *Le point d'équilibre $\bar{X}$ est asymptotiquement stable (a.s) pour le système* 2.5 *à $t_0$ s'il est stable et s'il existe $r(t_0) > 0$ tel que $\|X(t_0) - \bar{X}\| \prec r(t_0)$.*
- *Le point d'équilibre $\bar{X}$ est globalement asymptotiquement stable (g.a.s) si, pour tout $t_0$ et $X(t_0)$, alors $\lim_{t\to\infty} X(t) = \bar{X}$ .*
- *Le point d'équilibre $\bar{X}$ est exponentiellement stable (e.s), sil existe $\alpha$ et $\beta$ positifs tels que pour $X(t_0)$ proche de $\bar{X}$ on a*

$$\|X(t) - \bar{X}\| \preceq \alpha \|X(t_0) - \bar{X}\| e^{(-\beta(t-t_0))}, \textit{pour tout } t \succeq t_0$$

- *Le point d'équilibre $\bar{X}$ est globalement exponentiellement stable (g.e.s), sil existe $\alpha$ et $\beta$*

*positifs tels que pour tout* $t_0$ *et* $X(t_0)$

$$\|X(t)-\bar{X}\| \preceq \alpha\|X(t_0)-\bar{X}\|e^{(-\beta(t-t_0))}, \textit{pour tout } t \succeq t_0$$

**Définition 2.3.3** *Le point d'équilibre* $\bar{X}$ *est localement uniformément asymptotiquement stable (u.a.s) si :*

1. *Il est uniformément stable.*
2. *Il existe* $R_0 > 0$ *tel que pour tout* $R_1 et R_2$ *avec* $0 < R_2 < R_1 \preceq R_0$*, il existe* $T(R_1, R_2) > 0$ *tel que pour tout* $t_0 \succeq 0$*, on a :*

$$X(t_0)-\bar{X}\| \prec R_1 \Rightarrow \|X(t)-\bar{X}\| \prec R_2, \textit{ pourtout } t \succeq t_0 + T$$

**Remarque 2.3.1** *La stabilité asymptotique uniforme implique la stabilité asymptotique mais la réciproque n'est pas vraie.*

### 2.3.1 Fonction de Lyapunov

**Définition 2.3.4** *Une fonction continue* $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est dite de classe* $K$ *si elle satisfait :*

1. $\alpha(0) = 0$.
2. $\alpha(X) \succ 0$ *pour tout* $X \succ 0$.
3. $\alpha$ *est croissante.*

*Une* $K-$ *fonction appartient la classe* $K_\infty$ *si de plus* $\lim_{X\to\infty}\alpha(X) = \infty$.

**Théorème 2.3.1** *Supposons qu'il existe une fonction scalaire* $V(X,t)$ *dans un voisinage de* $\bar{X}$ *, continue, de dérivées partielles premières continues et une fonction* $\alpha$ *de classe* $K$ *telles que :*

1. *Pour tout* $X \neq \bar{X}$*,* $W(X,t) = V(X,t) - V(\bar{X},t) \succeq \alpha(\|X-\bar{X}\|) \succ 0$.

2. $W(X,t) \preceq 0$ *le long de la trajectoire.*

*Alors le point d'équilibre est stable.*

- *Si de plus, il existe* $\beta$ *dans* $K$ *telle que* $W(X,t) \preceq \beta(\|X-\bar{X}\|)$ *alors* $\bar{X}$ *est (u.s).*
- *Si la condition de (2) est remplacée par* $W(X,t) \preceq -\gamma(\|X-\bar{X}\|)$ *où* $\gamma$ *est dans* $K$*, alors* $\bar{X}$ *est (u.a.s).*

### 2.3.2 Cas des systèmes linèaires

Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linèaire autonome soit (a.s) est que toutes les valeures propres de la matrice (d'écrivant la dynamique) du système aient leur partie réelle strictement négative. Cepedant ce résultat n'est pas vrai pour les systèmes linèaires non autonomes d'équation *:*

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{2.6}$$

**Exemple 2.3.1** *En effet, considérons le système :*

$$\begin{cases} X_1'(t) = -X_1(t) + e^{2t}X_2(t) \\ X_2'(t) = -X_2(t) \end{cases}$$

$(-1)$ *est une valeur propre double de la matrice du système, pour tout* $t \succeq 0$*. La solution de ce système est :*

$$\begin{cases} X_1(t) = e^{-t}X_1(0) + \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})X_2(0) \\ X_2(t) = e^{-t}X_2(0) \end{cases}$$

*On a*

$$\lim_{t\to\infty} X_1(t) = \infty \quad \textit{pour } X_2(t) \neq 0$$

*d'où le système est instable.*

Cependant, il existe des théorèmes qui assurent la stabilité asymptotique des systèmes linèaires non autonomes. Le premier résultat est le suivant.

**Théorème 2.3.2** *Supposons qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* $t \succeq 0$ *et pour toute valeur propre* $\lambda$ *de* $A(t) + A(t)^T$ *on a* $\lambda \preceq -\alpha$ *, alors le système* 2.6 *est asymptotiquement stable.*

**Preuve.** *Soit la fonction* $V(X) = X^T X$ *Le long de la trajectoire on a :*

$$V' \preceq X^T X' + X' X^T = X^T A(t) X + X^T A(t)^T X = X^T \left[A(t) + A(t)^T\right] X$$

*Par consqéuent* $V' \preceq -\alpha X^T X = -\alpha V$ *. Donc pour tout* $t \succeq 0$,

$$0 \preceq X^T(t) X(t) = V(X(t)) \preceq V(X(0)) \exp(-\alpha t)$$

*et par conséquent* $X(t)$ *tend vers* 0 *exponentiellement. Notons que cette condition est suffisante mais non nécessaire.* ■

**Exemple 2.3.2** *Soit le système linèaire d'équation*

$$\begin{cases} X_1'(t) = X_1(t) + e^{\frac{t}{2}} X_2(t) \\ X_2'(t) = X_2(t) \end{cases}$$

*on a*

$$A(t) + A(t)^T = \begin{bmatrix} -2 & e^{\frac{t}{2}} \\ e^{\frac{t}{2}} & -2 \end{bmatrix}$$

*Les valeurs propres de* $A(t) + A(t)^T$ *sont* $(-2 - e^{\frac{t}{2}})$ *et* $(-2 + e^{\frac{t}{2}})$ *La condition du théorème ci-dessus nest donc pas vérifie. Cependant la solution du système est donnée par :*

$$\begin{cases} X_1(t) = e^{-t} X_1(0) + 2(e^{\frac{t}{2}} - e^{-t}) X_2(0) \\ X_2(t) = e^{-t} X_2(0) \end{cases}$$

*On a*

$$\lim_{t\to\infty} X_1(t) = \lim_{t\to\infty} X_2(t) = 0$$

*Donc le système est (a.s).*

**Théorème 2.3.3** *Supposons que pour* $t \succeq 0$*, les valeurs propres* $\lambda$ *de* $A(t)$*, sont parties réelles négatives et vérifiant : il exist* $\alpha > 0, \Re(\lambda) \preceq -\alpha$ *pour toute valeur propre* $\lambda$ *de* $A(t)$*.*

*Si de plus la matrice* $A(t)$ *est bornée et vérifie :*

$$\int_0^\infty A^T(t)A(t)dt \prec \infty$$

*Alors, le système est globalement exponentiellement stable (g.e.s). Citons un autre résultat valable lorsque le système linèaire est de la forme :*

$$X'(t) = [A_1 + A_2(t)]\, X(t) \tag{2.7}$$

**Théorème 2.3.4** *Supposons que* $A_1$ *soit constante, de Hurwitz et que* $A_2$ *vérifie :*

$$\lim_{t\to\infty} A_2(t) = 0 \text{ } et \int_0^\infty \|A_2(t)\|\, dt \prec \infty$$

*Alors, le système* 2.7 *est (g.e.s).*

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté une étude sur les systèmes dynamiques continus, pour atteindre l'objectif de cette étude on a divisé notre travail en deux chapitres :

Dans le premier chapitre on a présenté les différentes déffinitions et classes d'un système dynamique, ensuite on a étudié les cycles limites.

Le deuxième chapitre est basé sur la stabilité des systèmes autonomes et non autonomes.

# Bibliographie


[1] Abdelli Nassim (2011)" Une étude de la dynamique du modèle de Ricker",Mémoire MASTER en Mathématiques Universit´e A. MIRA de Béjaïa

[2] Halimi Amel (08/06/2015)"Analyse Interne Des Systèmes Dynamiques ",Mémoire MASTER en Mathématiques Université - Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi

[3] Lamnabhi-Lagarrigue, Franoise. (1994). Analyse des systèmes non linèaires. Hermés,Paris

[4] M.S Moulay et A. Berboucha. (2005). Sur les solutions périodiques d'un système différentiel Bulltin de la Sociét Royale des Sciences de Liège. Vol. 74 (45). pp 239248

[5] Tayeb Hamaizia (25/04/2013)"Systèmes Dynamiques et Chaos ",Docteur en Sciences en mathématique Université de Constantine -1.

[6] Verhulst, F. (1989). Nonlinear Differential Equations And Dynamical Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.