

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**Baia Zohra**

Titre :

**Quelque étude sur le problème de Cauchy**

Membres du Comité d'Examen :

|     |                      |      |           |
|-----|----------------------|------|-----------|
| Dr. | <b>Kaci Fatima</b>   | UMKB | président |
| Dr. | <b>Tabrha Ouarda</b> | UMKB | Encadreur |
| Dr. | <b>Hamdi Soumia</b>  | UMKB | Examineur |

septembre 2020

## DÉDICACE

Je dédie mon diplôme universitaire à mes chers père et mère, qui ont été leurs efforts les plus profonds pour réussir dans ma carrière scientifique.

♠ Hamza Baia et Guerni Tounes ♠



A mes soeurs : Awatef, Nawal

A mes frères : Mohamed lamine, Saleh, Khaled Chahine

## REMERCIEMENTS

Ce mémoire n'aurait pas été achevé sans la présence de nombreuses personnes qui m'ont soutenu  
et encouragé

En premier je remercie ma mère et mon père pour leur soutien tout au long de ces années dans  
ma carrière universitaire et pour leurs encouragements .

Et un grand merci à mon encadreur **Tabrha ouarda** pour son soutien constant et sa patience  
avec moi et sa présence toujours à côté de moi et sans elle, ce travail n'aurait pas été fait de cette  
façon.

Je remercie **Kaci Fatima, Hamdi Soumia** qui m'ont accepté de présider les jurys de soutenance

Enfin je remercie Mes sœurs et frères, mes amis .

# Table des matières

|  |            |
|--|------------|
| <b>Dédicace</b>  | <b>i</b>   |
| <b>Remerciements</b>                                     | <b>ii</b>  |
| <b>Table des matières</b>                                | <b>iii</b> |
| <b>Liste des figures</b>                                 | <b>v</b>   |
| <b>Liste des tableaux</b>                                | <b>vi</b>  |
| <b>Introduction</b>                                      | <b>1</b>   |
| <b>1 Résolution des EDO et Quelques définitions</b>      | <b>3</b>   |
| <b>1.1 Résolution des EDO :</b> . . . . .                | 3          |
| <b>1.1.1 Rappel solution d'EDO simple :</b> . . . . .    | 4          |
| <b>1.2 Type de solution :</b> . . . . .                  | 5          |
| <b>1.2.1 Solution Maximales :</b> . . . . .              | 6          |
| <b>1.2.2 Solution Globales :</b> . . . . .               | 7          |
| <b>1.2.3 Régularité des solutions :</b> . . . . .        | 8          |
| <b>1.3 Problème de Cauchy :</b> . . . . .                | 9          |
| <b>1.3.1 Équivalence du problème de Cauchy</b> . . . . . | 10         |
| <b>1.3.2 Courbe intégrale</b> . . . . .                  | 10         |
| <b>2 Théorème sur l'existence et l'unicité</b>           | <b>12</b>  |
| <b>2.1 Théorème de Cauchy-lipshitz</b> . . . . .         | 12         |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.1.1    | Théorème (Cauchy-Lipschitz, forme faible) :              | 12        |
| 2.1.2    | Théorème (Cauchy-Lipschitz, forme forte) :               | 13        |
| 2.2      | Lemme de Gronwall :                                      | 14        |
| 2.2.1    | lemme de Gronwall linéaire :                             | 14        |
| 2.2.2    | Lemme de Gronwall forme intégral :                       | 16        |
| 2.3      | unicité globale :  | 17        |
| 2.4      | Conditions suffisante d'existence de solution globales : | 19        |
| <b>3</b> | <b>Méthode Numérique et Application</b>                  | <b>22</b> |
| 3.1      | Méthode Numérique  | 22        |
| 3.1.1    | Méthodes numériques à un pas :                           | 22        |
| 3.1.2    | Quelques exemples de méthodes à un pas :                 | 24        |
| 3.1.3    | Méthodes de Taylor d'ordre p :                           | 27        |
| 3.1.4    | Méthode de Runge-kutta :                                 | 27        |
| 3.2      | Application :  | 30        |
| 3.2.1    | Méthode de Taylor :                                      | 31        |
| 3.2.2    | Méthodes d'Euler   | 32        |
|          | <b>Conclusion</b>  | <b>36</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                     | <b>37</b> |
|          | <b>Annexe B : Abréviations et Notations</b>              | <b>38</b> |

# Table des figures

|  |    |
|--|----|
| 1.1 Schéma exprime que $y_{(1)}$ est globale et $y_{(2)}$ maximale | 7  |
| 1.2 Courbe intégrale de (E)  | 11 |
| 2.1 Shéma exprime trois solutions de $y' = 2\sqrt{ y }$            | 14 |
| 2.2 Shéma exprime les solutions maximale                           | 18 |
| 3.1 Exemple 3.4  | 34 |

# Liste des tableaux

|   |    |
|---|----|
| <a href="#">1.1 Solution d'EDO simple</a> . . . . . | 5  |
| <a href="#">3.1 tableau de butcher 1</a> . . . . .  | 28 |
| <a href="#">3.2 Tableau de butcher 2</a> . . . . .  | 29 |
| <a href="#">3.3 Tableau de butcher 3</a> . . . . .  | 30 |

# Introduction

En mathématiques, une équation différentielle ordinaire (parfois simplement appelée équation différentielle et abrégée en EDO) est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.

Beaucoup de résultats existent dans ce domaine : il est possible de trouver des solutions explicites à ces équations, mais elles ne sont pas nombreuses. La résolution explicite de la plupart des EDO reste encore un problème ouvert. Les mathématiciens se sont alors tournés vers une étude plus théorique qui permettait de trouver des résultats sur les solutions (existence, unicité par exemple) sans les connaître explicitement. Certaines solutions porteront plus d'attention que d'autres, comme les solutions stationnaires (autrement dit indépendantes du temps, si le temps est la variable impliquée dans l'EDO). L'EDO a des applications dans une très grande variété de domaines physiques, chimiques et biologiques. Et il existe des modèles basés sur des EDO comme mécanique, dynamique des populations, Météorologique...

Lorsque nous prenons une équation différentielle ordinaire et une condition initiale, nous parlons du problème de Cauchy. En analyse, un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle. Pour une condition initiale adaptée à la forme de l'équation différentielle, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 1, de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

la condition initiale adaptée sera la donnée d'une valeur initiale pour la fonction inconnue  $y$ , et prendra la forme d'une équation  $y(t_0) = y_0$ . Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz exigent une certaine régularité de la fonction  $f$ .

Ce mémoire est divisée en trois chapitre, et on a aussi un résumé et une introduction ,le premier chapitre est de Résolution des EDO et quelque définitions ce chapitre est divisé a trois section :Résolution des EDO et Type de solution, problème de Cauchy. Le deuxième chapitre nous considérons Le Théorème sur l'existence et l'unicité ce chapitre divisé a quatre section :Théorème de Cauchy-Lipschitz, lemme de Gronwall,unicité globale,conditions suffisante d'existence de solution globales. Et le chapitre trois est de Méthode numérique et Application divisé a deux section : méthode numérique (Méthode d'Euler, Méthode de Taylor d'ordre  $p$ , Méthode de Runge-kutta) et application.

# Chapitre 1

## Résolution des EDO et Quelques définitions

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelque définition sur l'EDO et le principe de résolution de l'équation différentielle simple, et étudier quelque type de solution (solution maximale, solution globale et sa régularité). Finalement on donne la définition de problème de Cauchy et quelques propositions pour utilisées de se travail.

### 1.1 Résolution des EDO :

Les équations différentielles ordinaires (EDO) apparaissent très souvent dans la modélisation de la physique et des sciences de l'ingénieur.

**Définition 1.1** Une équation différentielle ordinaire d'ordre  $n$ , notée EDO, est une relation entre la variable réelle  $t$ . Une fonction inconnue  $t \rightarrow y(t)$  et ses dérivées :  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  au point  $t$ . Définie par  $n$

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Où  $F$  n'est pas indépendant de sa dernière variable  $y^n$ . On prendra  $t$  dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . La fonction  $y$  qui vérifie

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

S'appelle la solution de l'EDO.

**Définition 1.2** On appelle forme canonique d'une EDO une expression du type :

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

**Remarque 1.1** Toute équation différentielle canonique peut être écrite comme un système d'équation différentielle du premier ordre en introduisant  $(n - 1)$  fonctions définie comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \dots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{array} \right.$$

L'équation canonique se met sous la forme du système d'EDO d'ordre 1 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots \\ y'_n = f(t, y, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right.$$

### 1.1.1 Rappel solution d'EDO simple :

Nous rappelons ici le principe de résolution des équations différentielles simple. Dans ce qui suit, la variable indépendante  $t$  sera notée et la variable dépendante  $y(t)$ .

TAB. 1.1 – Solution d'EDO simple

|  |   |
|--|---|
| ordre 1  |   |
| $y' = ay + b$  | $y(t) = ce^{at} - \frac{b}{a}$  |
| $y' = a(t)y + b(t)$                                      | $y(t) = e^{A(t)}(B(t) + c)$ avec : $\begin{cases} A(t) = \int a(t)dt \\ B(t) = \int \exp(-A(t))b(t)dt \end{cases}$  |
| ordre 2  |   |
| équation de Bernoulli<br>$y' + a(t)y + b(t)y^\alpha = 0$ | effectuer de changement de fonction $y(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$<br>l'équation devient : $z' = (\alpha - 1)(a(t)z + b(t)$   |
| équation de Ricatti<br>$y' + a(t)y + b(t)y^2 + c(t) = 0$ | effectuer le changement de fonction $z(t) = y(t) - y_p$<br>où $y_p$ est une solution particulière de l'équation<br>on se ramène à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$                                   |
| $y'' + ay' + by = c$                                     | $r_1$ et $r_2$ racine de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$<br>$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{c}{b}$ si $r = s + ip$ alors $y(t) = e^{st}(D_1 \cos(pt) + D_2 \sin(pt)) + \frac{c}{b}$ |
| équation d'Euler<br>$t^2 y'' + aty' + by = c$            | changement de variable $t = e^u$ et de fonction<br>$y(t) = z(u)$ l'équation devient $z'' + (a - 1)z' + bz = c(e^u)$   |

## 1.2 Type de solution :

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application continue. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = f(t, y), (t, y) \in U, t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

**Définition 1.3** Une solution de [1.1](#) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est une fonction dérivable  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que

(i)  $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U.$

(ii)  $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$ .

### 1.2.1 Solution Maximales :

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression solution maximale est alors entendue implicitement au sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

**Définition 1.4** Soient  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m, \tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$  des solutions de [1.1](#). on dit que  $\tilde{y}$  est un prolongement de  $y$  si  $\tilde{I} \supset I$  et  $\tilde{y}|_I = y$ .

**Définition 1.5** On dit qu'une solution  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est maximale si  $y$  n'admet pas de prolongement  $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $\tilde{I} \not\supseteq I$

**Théorème 1.1** Toute solution  $y$  se prolonge en une solution maximale  $\tilde{y}$  (pas nécessairement unique).

**Proof.** Supposons que  $y$  soit définie sur un intervalle  $I = ]a, b[$  (cette notation désigne un intervalle ayant pour bornes  $a$  et  $b$ , incluses ou non dans  $I$ ). Il suffira de montrer que  $y$  se prolonge en une solution  $\tilde{y} : ]a, \tilde{b}[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $\tilde{b} \geq b$ ) maximale à droite, c'est-à-dire qu'on ne pourra plus prolonger  $\tilde{y}$  au delà de  $\tilde{b}$ . Le même raisonnement s'appliquera à gauche. Pour cela, on construit par récurrence des prolongements successifs  $y_{(1)}, y_{(2)} \dots$  de  $y$  avec  $y_{(k)} : ]a, b_k[ \rightarrow \mathbb{R}^m$ . On pose  $y_{(1)} = y, b_1 = b$ . Supposons  $y_{(k-1)}$  déjà construite pour un indice  $k \geq 1$ . On pose alors

$$c_k = \sup\{c; y_{(k-1)} \text{ se prolonge sur } ]a, c[\}$$

On a  $c_k \geq b_{k-1}$ . Par définition de la borne supérieure, il existe  $b_k$  tel que  $b_{k-1} \leq b_k \leq c_k$  et un prolongement  $y_{(k)} : ]a, b_k[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  de  $y_{(k-1)}$  avec  $b_k$  arbitrairement voisin de  $c_k$ ; en particulier, on peut choisir

$$c_k - b_k < \frac{1}{k} \text{ si } c_k < +\infty$$

$$b_k > k \text{ si } c_k = +\infty$$

La suite  $(c_k)$  est décroissante, car l'ensemble des prolongements de  $y_{(k-1)}$  contient l'ensemble des prolongements de  $y_{(k)}$ ; au niveau des bornes supérieures on a donc  $c_k \geq c_{k+1}$ . Si  $c_k < +\infty$  à partir d'un certain rang, les suites

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq \dots \leq c_k \leq c_{k-1} \leq \dots \leq c_1$$

Sont adjacentes, tandis que si  $c_k = +\infty$  quel que soit  $k$  on a  $b_k > k$ . Dans les deux cas, on voit que

$$\tilde{b} = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k$$

Soit  $\tilde{y} : ]a, \tilde{b}[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  le prolongement commun des solutions  $y_{(k)}$ , éventuellement prolongé au point  $\tilde{b}$  si cela est possible. Soit  $z : ]a, c[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  un prolongement de  $\tilde{y}$ . Alors  $z$  prolonge  $y_{(k-1)}$  et par définition de  $c_k$  il s'ensuit  $c \leq c_k$ . A la limite il vient  $c \leq \tilde{c}$ , ce qui montre que la solution  $\tilde{y}$  est maximale à droite. ■

### 1.2.2 Solution Globales :

On suppose ici que l'ouvert  $U$  est de la forme  $U = J \times \Omega$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$

**Définition 1.6** Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle  $J$  tout entier

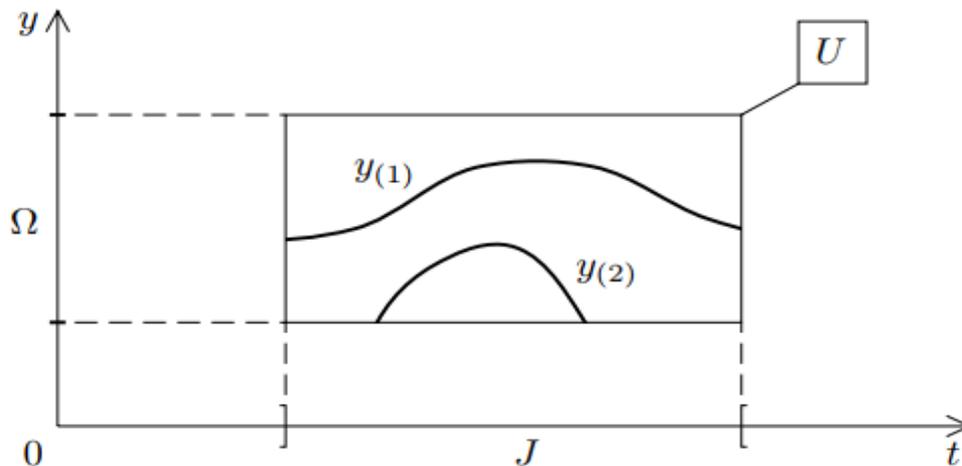


FIG. 1.1 – Schéma exprime que  $y_{(1)}$  est globale et  $y_{(2)}$  maximale

**Remarque 1.2** *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*

Sur le schéma ci-dessus par exemple,  $y_{(1)}$  est globale tandis que  $y_{(2)}$  est maximale mais non globale.

Donnons un exemple explicite de cette situation.

**Exemple 1.1**

$$(E) \quad y' = y^2 \text{ sur } U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Cherchons les solutions  $t \rightarrow y(t)$  de [1.2](#).

- On a d'une part la solution  $y(t) = 0$ .
- Si  $y$  ne s'annule pas, [1.2](#) s'écrit  $\frac{y'}{y^2} = 1$  alors d'où par intégration

$$\frac{-1}{y(t)} = t + c \Rightarrow y(t) = \frac{-1}{t + c}$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur  $]-\infty, -c[$  et sur  $]-c, +\infty[$ ; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple  $y(t) = 0$  est la seule solution globale de [1.2](#).

### 1.2.3 Régularité des solutions :

Rappelons qu'une fonction de plusieurs variables est dite de classe  $C^k$  si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre  $k$ .

**Théorème 1.2** *Si  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est de classe  $C^k$ , toute solution de (E)  $y' = f(t, y)$  est de classe  $C^{k+1}$ .*

**Proof.** On raisonne par récurrence sur  $k$ .

- $k = 0$  :  $f$  continue.

Par hypothèse  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est dérivable, donc continue.

Par conséquent  $y'(t) = f(t, y(t))$  est continue, donc  $y$  est de classe  $C^1$ .

- Si le résultat est vrai à l'ordre  $(k - 1)$ , alors  $y$  est au moins de classe  $C^k$ . Comme  $f$  est de classe  $C^k$ , il s'ensuit que  $y'$  est de classe  $C^k$  comme composée de fonctions de classe  $C^k$ , donc  $y$  est de classe  $C^{k+1}$ . ■

### Calcul des dérivées successives d'une solution $y$ :

On suppose pour simplifier  $m = 1$ . En dérivant la relation  $y'(x) = f(x, y(x))$  il vient

$$\begin{aligned} y''(x) &= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x) \\ y'' &= f'_x(x, y) + f'_y(x, y)f(x, y) = f^{[1]}(x, y) \end{aligned}$$

avec  $f^{[1]} = f'_x + f'_y f$ . Notons de manière générale l'expression de la dérivée  $k$ -ième  $y^{(k)}$  en fonction de  $x, y$  sous la forme

$$y^{(k)} = f^{[k-1]}(x, y)$$

d'après ce qui précède  $f^{[0]} = f$ ,  $f^{[1]} = f'_x + f'_y f$ . En dérivant une nouvelle fois, on trouve

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= (f^{[k-1]})'_x(x, y) + (f^{[k-1]})'_y(x, y)y' \\ &= (f^{[k-1]})'_x(x, y) + (f^{[k-1]})'_y(x, y)f(x, y) \end{aligned}$$

On obtient donc les relations de récurrence

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= f^{[k]}(x, y) \\ f^{[k]} &= (f^{[k-1]})'_x + (f^{[k-1]})'_y f, \text{ avec } f^{[0]} = f \end{aligned}$$

En particulier, le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales est contenu dans la courbe  $f^{[1]}(x, y) = 0$ .

## 1.3 Problème de Cauchy :

soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle,  $t_0$  un point de  $I$ ,  $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction donnée continue par rapport aux deux variables et  $y'$  la dérivée de  $y$  par rapport à  $t$

**Définition 1.7** On appelle problème de Cauchy le problème qui trouver une fonction réelle  $y \in$

$c^1(I)$  telle que

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

avec  $y_0$  une valeur donnée appelé donnée initiale .

**Remarque 1.3** Si  $\varphi$  ne dépend pas explicitement de  $t$ , l'EDO est dite autonome.

**Définition 1.8** Résoudre un problème de Cauchy , c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , qui satisfont l'équation et qui vérifiant la conditions initiale.

### 1.3.1 Équivalence du problème de Cauchy

le lemme très simple ci-dessous montre que la résolution de [1.3](#) est équivalente à la résolution d'une équation intégrale.

**Lemme 1.1** une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une solution du problème de Cauchy de données initiales  $(t_0, y_0)$  si et seulement si

(i)  $y$  est continue et  $(\forall t \in I), (t, y(t)) \in U$

(ii)  $\forall (t \in I), y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$

**Remarque 1.4** —Si  $y$  vérifiée (i) et (ii) alors  $y$  est différentiable et on a  $y(t_0) = y_0, y'(t) = f(t, y(t))$ .

—inversement , si les deux relations sont satisfaites, (ii) s'en déduit par intégrations.

### 1.3.2 Courbe intégrale

si on note  $t = x$ , l'équation (E) se récrit soit

$$(E) \quad y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.4)$$

Résoudre le problème de Cauchy revient à trouver une "courbe intégrale" de [1.4](#) passant par un point  $(x_0, y_0) \in U$

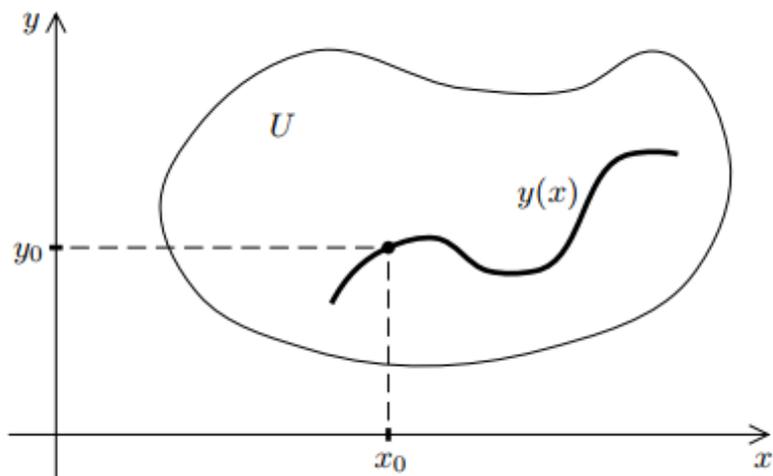


FIG. 1.2 – Courbe intégrale de (E)

# Chapitre 2

## Théorème sur l'existence et l'unicité

Dans ce chapitre nous présentons le théorème de Cauchy Lipschitz (forme faible et forte), et lemme de Gronwall à deux formes (linéaire, intégrale). On étudie aussi l'unicité globale et la condition suffisante d'existence de solution globale

### 2.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

#### 2.1.1 Théorème (Cauchy-Lipschitz, forme faible) :

Si la fonction  $f : I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  est de classe  $C^1$  alors pour toute donnée de Cauchy  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$ , il existe un intervalle  $J \subset I$  contenant  $t_0$  tel qu'il existe dans  $J$  une unique solution du problème de Cauchy associé.

En particulier, pour toute telle donnée, il existe une unique solution maximale associée et toute autre solution vérifiant la condition de Cauchy est une restriction de cette solution maximale. En réalité, ce théorème est encore vrai sous des hypothèses plus faibles.

**Définition 2.1** Une fonction continue  $f : I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  est dite localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état (ou à la seconde variable). Si pour tout  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$ , il existe  $C_{t_0, y_0} > 0$  et un voisinage  $U$  de  $(t_0, y_0)$  dans  $I \times \mathbb{R}^m$  tel que :

$$\forall t \in I \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ tels que } (t, y_1) \in U \text{ et } (t, y_2) \in U$$

on a :

$$\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq C_{t_0, y_0} \|y_1 - y_2\|$$

**Notation 1** Si  $f$  est continue et localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état alors elle est Lipschitzienne par rapport à la variable d'état sur tout compact. Plus précisément cela signifie que pour tout compact  $K \subset I \times \mathbb{R}^m$  il existe une constants  $C_K > 0$  telle que :

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ tels que } (t, y_1) \in K, (t, y_2) \in K, \text{ on a : } \|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq C_k \|y_1 - y_2\|$$

**Remarque 2.1** Ceci peut se démontrer, par exemple, par l'absurde. Grâce au théorème des accroissements finis, on vérifie que toute fonction de classe  $C^1$  est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. C'est pourquoi le théorème suivant est bien plus fort que le précédent.

### 2.1.2 Théorème (Cauchy-Lipschitz, forme forte) :

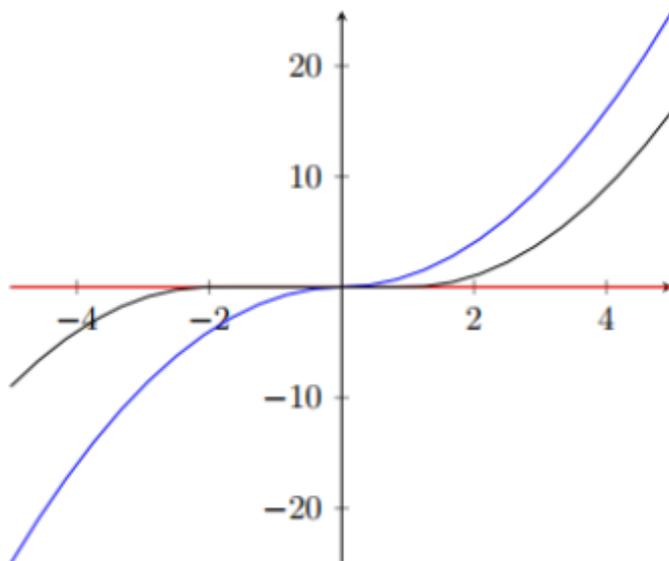
Le théorème de Cauchy-Lipschitz est encore vrai si  $f$  est continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Ce(s) théorème(s) admet plusieurs démonstrations qu'il est peut être bon de connaître, ce sera l'objet du paragraphe suivant.

**Notation 2** — La propriété d'existence de solutions maximales persiste sous la seule hypothèse de continuité de  $f$  (Théorème de Cauchy-Arzela).

— L'exemple canonique d'équation pour laquelle le problème de Cauchy n'a pas de solution unique est l'équation suivante

$$y' = 2\sqrt{|y|}$$

qui possède une infinité de solutions vérifiant  $y(0) = 0$  dont la fonction identiquement nulle et la fonction  $y(t) = |t|t$  ( qui est bien de classe  $C^1$  !). Nous dessinons trois telles solutions dans la figure ci-dessous :


 FIG. 2.1 – Shéma exprime trois solutions de  $y' = 2\sqrt{|y|}$ 

## 2.2 Lemme de Gronwall :

Le lemme de Gronwall se décline en plusieurs variantes. C'est un outil incontournable dans l'étude qualitative des équations différentielles. Il sert notamment à estimer des solutions ou bien à comparer entre elles deux solutions, ou encore deux solutions approchées.

### 2.2.1 lemme de Gronwall linéaire :

Nous énonçons et démontrons ici ce lemme :

Soient  $k$  et  $b$  deux constantes, avec  $k \neq 0$ . La méthode de variation de la constante permet de montrer que toute solution maximale de l'équation différentielle linéaire scalaire  $u' = ku + b$  vérifie, pour tous  $t$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$

$$u(t) = u(t_0)e^{k(t-t_0)} + b \frac{e^{k(t-t_0)} - 1}{k}$$

Si l'on garde ce résultat en tête, l'énoncé suivant semble bien naturel.

#### **Lemme 2.1** (de Gronwall)

Soient  $k$  et  $b$  deux constantes, avec  $k > 0$ . Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

de classe  $C^1$  telle que, pour tout  $t \in I$ , on ait

$$\|y'(t)\| \leq k \|y(t)\| + b$$

Alors, pour tous  $t$  et  $t_0$  dans  $I$ , on a l'estimation

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| e^{k|t-t_0|} + b \frac{e^{k(t-t_0)} - 1}{k}$$

**Remarque 2.2** Attention à ne pas oublier les valeurs absolues  $|t - t_0|$  dans cet énoncé. Supposons pour simplifier que  $b = 0$ . Sous l'hypothèse faite (à savoir une majoration de la norme de  $y'$ ), il est illusoire de vouloir montrer que  $\|y(t)\|$  décroît : une majoration en

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| e^{k(t-t_0)}$$

(sans la valeur absolue) est donc absolument hors de question lorsque  $t < t_0$  !

**Proof.** Quitte à effectuer une translation, on pourra supposer que  $t_0 = 0$ . L'estimation de  $\|y(t)\|$  dans le passé, c'est-à-dire pour  $t < 0$  se déduira de celle dans le futur en renversant le sens du temps. Poser en effet  $z(t) = y(-t)$ , qui vérifie encore

$$\|z'(t)\| \leq k \|z(t)\| + b$$

Soit donc  $t \in I$ , avec  $t \geq 0$ . On souhaite majorer  $\|y(t)\|$ . La première chose à faire est d'exprimer que

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(s) ds$$

On en déduit, d'abord par l'inégalité triangulaire puis en utilisant l'hypothèse, que :

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\| + \int_0^t \|y'(s)\| ds \leq \|y(0)\| + k \int_0^t \|y(s)\| ds + bt \tag{2.1}$$

A ce stade, on a obtenu une majoration de  $\|y(t)\|$  qui fait intervenir tous les  $\|y(s)\|$  pour  $s \in [0, t]$ .

On observe alors que, si l'on pose  $v(t) := \int_0^t \|y(s)\| ds$ , on a  $v'(t) = \|y(t)\|$ . Ainsi l'inégalité 2.1 se réécrit :

$$\|y(t)\| \leq kv(t) + \|y(0)\| + bt \quad (2.2)$$

soit encore :

$$v'(t) - kv(t) \leq \|y(0)\| + bt \quad (2.3)$$

On est sauvés! On procède en effet maintenant comme dans la méthode de variation de la constante en multipliant l'inégalité 2.3 par  $e^{-kt}$ , pour obtenir :

$$(v(t)e^{-kt})' \leq (\|y(0)\| + bt)e^{-kt}$$

On intègre cette inégalité entre 0 et  $t$ . Puisque  $v(0) = 0$ , il vient :

$$v(t)e^{-kt} \leq \|y(0)\| \frac{1 - e^{-kt}}{k} + b \frac{1 - (1 + kt)e^{-kt}}{k^2}$$

Le résultat suit en utilisant cette majoration dans 2.2 (puisque  $k > 0$ , multiplier une inégalité par  $k$  conserve bien le sens de cette inégalité). ■

### 2.2.2 Lemme de growall forme intégral :

Soit  $[a, b[ \subset \mathbb{R}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  et  $z, \varphi$  deux fonctions continues sur  $[a, b[$  à valeurs réelles. On suppose que :

—  $\varphi$  est positive.

— L'inégalité suivante est vérifiée :

$$z(t) \leq C + \int_a^t \varphi(s)z(s)ds, \forall a \leq t < b$$

Alors, on a l'estimation :

$$z(t) \leq C \exp \int_a^t \varphi(s)dt, \forall a \leq t < b$$

On pose :

$$h(t) = C + \int_a^t \varphi(s)z(s)ds$$

Comme  $\varphi$  et  $z$  sont continues,  $h$  est de classe  $C^1$  et on a :

$$h'(t) = \varphi(t)z(t) \leq \varphi(t)h(t)$$

car  $\varphi$  est positive. On en déduit que la fonction  $e - \int_a^t \varphi h(t)$  est décroissante, ce qui fournit l'inégalité attendue.

## 2.3 unicité globale :

Le théorème d'unicité locale entraîne facilement un résultat d'unicité globale, au moyen d'un (raisonnement de connexité) .

**Théorème 2.1** *soit  $y_{(1)}, y_{(2)} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  deux solutions de (E), avec  $f$  localement lipschitzienne en  $y$ . Si  $y_{(1)}$  et  $y_{(2)}$  coïncident en un point de  $I$ , alors  $y_{(1)} = y_{(2)}$  sur  $I$ .*

**Proof.** Supposons  $y_{(1)}(t_0) = y_{(2)}(t_0)$  en un point  $t_0 \in I$ . Montrons par exemple que  $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$  pour  $t \geq t_0$ . S'il n'en est pas ainsi, considérons le premier instant  $\tilde{t}_0$  où  $y_{(1)}$  et  $y_{(2)}$  bifurquent :

$$\tilde{t}_0 = \inf\{t \in I; t \geq t_0 \text{ et } y_{(1)}(t) \neq y_{(2)}(t)\}$$

On a par définition  $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$  pour  $t \in [t_0, \tilde{t}_0[$  et par continuité il s'ensuit que  $y_{(1)}(\tilde{t}_0) = y_{(2)}(\tilde{t}_0)$ . Soit  $\tilde{y}_0$  ce point et soit  $\tilde{C} = [\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}] \times \bar{B}(\tilde{y}_0, r_0)$  un cylindre de sécurité de centre  $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ . Le théorème d'unicité locale implique que  $y_{(1)} = y_{(2)}$  sur  $[\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}]$ , ce qui contredit la définition de  $\tilde{t}_0$ . L'unicité est démontrée. ■

**Corollaire 2.1** *Si  $f$  est localement lipschitzienne en  $y$  sur  $U$ , pour tout point  $(t_0, y_0) \in U$  il passe une solution maximale  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  et une seule.*

Interpolation géométrique :

Le théorème d'unicité signifie géométriquement que des courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper.

**Exemple 2.1**  $y = 3|y|^{2/3}$  sur  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Déterminons l'ensemble des solutions maximales. On a ici  $f(t, y) = 3|y|^{2/3}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \text{signe}(y) \times 2|y|^{-1/3}$  pour  $y \neq 0$ . La dérivée  $y \neq 0$  la dérivée  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est continue sur les demi-plans  $y > 0$  et  $y < 0$ , mais discontinue en  $y = 0$ . La fonction  $f$  est localement lipschitzienne en  $y$  sur  $\{y > 0\}$  et  $\{y < 0\}$ , mais il est facile de voir qu'elle ne l'est pas au voisinage de tout point  $(t_0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$  (on a vu d'ailleurs qu'il n'y a pas d'unicité locale en ces points). Sur  $\{y > 0\}$  (resp. sur  $\{y < 0\}$ ) l'équation équivaut à

$$\frac{1}{3}y'y^{-\frac{2}{3}} = 1 \text{ (resp. } \frac{-1}{3}y'(-y)^{-\frac{2}{3}} = 1)$$

d'où  $y^{\frac{1}{3}} = t + C_1$  (resp.  $(-y)^{-\frac{1}{3}} = -(t + C_2)$ ) soit  $y(t) = (t + C_i)^3$ . Si  $y$  est une solution maximale dans  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , alors  $y' \geq 0$ , donc  $y$  est croissante. Notons

$$a = \inf \{t, y(t) = 0\}, \quad b = \sup \{t, y(t) = 0\}$$

Si  $a \neq -\infty$ , on a  $y(a) = 0$  et  $y(t) < 0$  pour  $t < a$ , donc  $y(t) = (t - a)^3$ . De même  $y(t) = (t - b)^3$  pour  $t > b$  si  $b = +\infty$ .

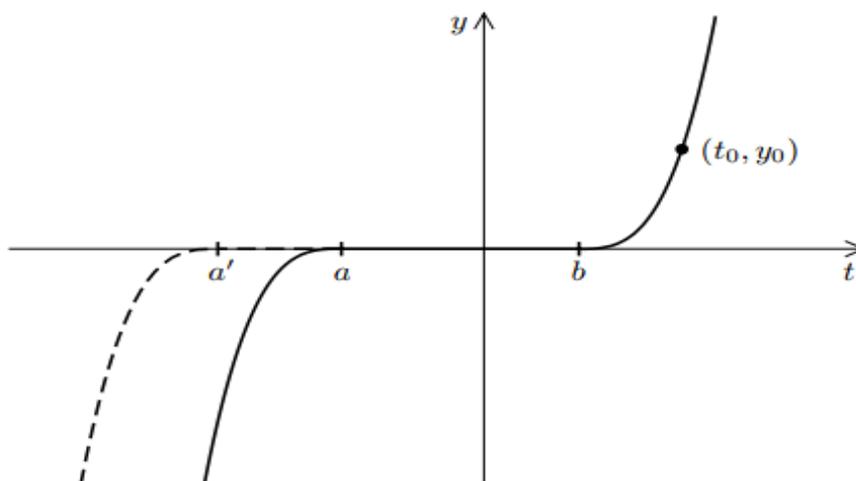


FIG. 2.2 – Schéma exprime les solutions maximale

On voit que pour tout point  $(t_0, y_0)$  il passe une infinité de solutions maximales : si  $y_0 > 0$ ,  $b = t_0 - y_0^{1/3}$  est imposé, mais le choix de  $a \in [-\infty, b]$  est arbitraire. Noter que ce phénomène se produit bien qu'on ait unicité locale au point  $(t_0, y_0)$ .

## 2.4 Conditions suffisante d'existence de solution globales :

Nous donnons ici des conditions suffisantes d'existence pour les solutions globales, reposant sur des hypothèses de croissance de  $f(t, y)$  lorsque  $y$  tend vers  $+\infty$ . On peut cependant obtenir des conditions suffisantes nettement plus faibles.

**Théorème 2.2** *Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application continue sur un ouvert produit  $U = J \times \mathbb{R}^m$ , où  $J \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert. On fait l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :*

(1) *Il existe une fonction continue  $k : J \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tout  $t \in J$  fixé, l'application  $y \rightarrow f(t, y)$  soit lipschitzienne de rapport  $k(t)$  sur  $\mathbb{R}^m$ .*

(2) *Il existe des fonctions  $c, k : J \rightarrow \mathbb{R}_+$  continues telles que l'application  $y \rightarrow f(t, y)$  satisfasse une croissance linéaire à l'infini du type*

$$\|f(t, y)\| \leq c(t) + k(t) \|y\|$$

*Alors toute solution maximale de l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$  est globale (c'est-à-dire définie sur  $J$  tout entier).*

**Proof.** Il est évident que l'hypothèse (1) entraîne l'hypothèse (2) (avec  $c(t) = \|f(t, 0)\|$ ), il suffirait donc de donner la preuve pour (2). Cependant, il y a une démonstration sensiblement plus simple sous l'hypothèse (1).

Démonstration sous l'hypothèse (1). Soit  $(t_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}^m$ , et  $[t_0 - T, t_0 + T]$  un intervalle compact quelconque contenu dans  $J$ . Reprenons la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Comme  $U = J \times \mathbb{R}^m$ , on peut choisir un cylindre de sécurité de rayon  $r_0 = +\infty$ . L'application  $\varphi$  définie opère donc sur l'espace complet

$$F = C([t_0 - T, t_0 + T], \mathbb{R}^m)$$

Soit

$$K = \max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} k(t)$$

L'application  $f$  est par hypothèse  $K$ -lipschitzienne en  $y$  sur  $[t_0 - T, t_0 + T] \times \mathbb{R}^m$ . l'application  $\varphi^p$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{1}{p!} k^p (\max(T, T'))^p$  sur  $F$ , donc contractante pour  $p$  assez grand. Ceci implique que la solution (unique) du problème de Cauchy est définie sur tout intervalle  $[t_0 - T, t_0 + T] \subset J$ . ■

Démonstration sous l'hypothèse (2). L'idée est d'utiliser le critère de maximalité des solutions

Supposons qu'on ait une solution  $y : [t_0, b[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $t_0, b \in J$  (autrement dit, telle que  $b$  ne soit pas la borne supérieure de  $J$ ). Posons  $C = \sup_{t \in [t_0, b]} c(t)$  et  $K = \sup_{t \in [t_0, b]} k(t)$ . Nous obtenons

$$\|y'(t)\| = \|f(t, y(t))\| \leq C + K \|y(t)\|$$

On utilise alors un raisonnement de type lemme de Gronwall pour majorer la norme  $\|y(t)\|$ . Nous

avons  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(u) du$ , donc

$$\|y(t)\| \leq v(t) = \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|y'(u)\| du$$

avec

$$v'(t) = \|y'(t)\| \leq C + K \|y(t)\| \leq C + K v(t)$$

Ceci donne la majoration

$$\frac{d}{dt} (v(t) e^{-K(t-t_0)}) = (v'(t) - K v(t)) e^{-K(t-t_0)} \leq C e^{-K(t-t_0)}$$

Par intégration sur  $[t_0, t]$ , on obtient

$$v(t) e^{-K(t-t_0)} - v(t_0) \leq \frac{C}{K} (1 - e^{-K(t-t_0)})$$

et comme  $v(t_0) = \|y(t_0)\|$ , il vient

$$\sup_{t \in [t_0, b[} \|y(t)\| \leq \sup_{t \in [t_0, b[} v(t) \leq R = \frac{c}{k} e^{K(b-t_0)} - 1 + \|y(t_0)\| e^{K(b-t_0)}$$

Par conséquent  $(t, y(t))$  décrit une partie compacte  $K = [t_0, b] \times \bar{B}(0, R)$  dans  $U = J \times \mathbb{R}^m$ , et  $y$  ne peut être une solution maximale. Toute solution maximale est donc globale.

# Chapitre 3

## Méthode Numérique et Application

L'objectif de ce chapitre est de décrire un certain nombre de méthodes permettant de résoudre numériquement le problème de Cauchy de condition initiale on parle a la méthode a un pas (méthode d'Euler, méthode de Taylor d'ordre p, méthode de Runge-kutta). Et application .

### 3.1 Méthode Numérique

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

#### 3.1.1 Méthodes numériques à un pas :

Pour des équations différentielles d'un intérêt pratique, on trouve rarement la solution  $y(t)$  exprimée avec une formule exacte. On a vu qu'une solution de problèmes de Cauchy est obtenue en intégrant de  $t_0$  à  $t$  :

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Le problème avec cette solution est que l'inconnue  $y$  se trouve sous l'intégrale. On reprend les notations précédentes concernant un cylindre de sécurité, et on ne s'occupe pour simplifier que des solutions à droite c'est à dire sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$ . Le problème avec cette solution est que

l'inconnue  $y$  se trouve sous l'intégrale. On reprend les notations précédentes concernant un cylindre de sécurité, et on ne s'occupe pour simplifier que des solutions à droite c'est à dire sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$ . On supposera que  $f$  satisfait aux conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Ceci assure que le problème de Cauchy admet une unique solution. On notera  $t \rightarrow y(t)$  la solution unique du problème sur  $[t_0, t_0 + T]$  dont le graphe est contenu dans un cylindre de sécurité  $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0)$ .

Nous avons choisi ici d'exposer le cas des équations unidimensionnelles dans le seul but de simplifier les notations, le cas des systèmes dans  $\mathbb{R}^n$  est tout à fait identique, à condition de considérer  $y$  et  $f$  comme des fonctions vectorielles. Etant donné une subdivision  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$  de  $[t_0, t_0 + T]$ , on cherche à déterminer des valeurs approchées  $y_n$  des valeurs  $y(t_n)$ , prises par la solution exacte  $y$ . On notera les pas successifs

$$h_n = t_{n+1} - t_n, 0 \leq n \leq N - 1$$

et

$$h_{max} = \max_n(h_n)$$

le maximum du pas.

**Définition 3.1** Une méthode (ou schéma) à un pas explicite est une équation de récurrence de la forme :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n), 0 \leq n \leq N - 1 \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

Le domaine de définition de  $\Phi$  contient au moins  $U \times [0, \delta]$ ,  $\delta > 0$

**Définition 3.2** Un schéma à un pas est dit implicite s'il est de la forme

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, y_{n+1}, h_n), 0 \leq n \leq N - 1 \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

C'est-à-dire si  $\Phi$  dépend non linéairement de  $y_{n+1}$

Pour ce type de méthodes il s'agira le plus souvent de s'assurer que l'équation :

$$y = y_n + h\Phi(t_n, y_n, y, h)$$

a une unique solution du moins pour tout  $h$  assez petit. Dans les cas les plus courants cela résultera du théorème des fonctions implicites.

### 3.1.2 Quelques exemples de méthodes à un pas :

#### Méthodes d'Euler :

Une façon d'obtenir une multitude de schémas, est d'intégrer l'EDO ( $E$ ) sur  $[t_n, t_{n+1}]$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

et ensuite d'approcher l'intégrale.

Par exemple

– Intégration par la méthode des rectangles à gauche :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx h_n f(t_n, y(t_n))$$

Ce qui donne le schéma d'Euler explicite

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \tag{3.2}$$

– Intégration par la méthode des rectangles à droite

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx h_n f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

Ce qui donne le schéma d'Euler implicite

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (3.3)$$

– Intégration par la méthode du point milieu

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\right) \quad (3.4)$$

Ici, on connaît uniquement la valeur de  $y_n$ , et pour donner une approximation de la solution au point  $t_n + \frac{h_n}{2}$ , on utilise le schéma d'Euler explicite

$$y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) \approx y(t_n) + \frac{h_n}{2} f(t_n, y(t_n))$$

ce qui donne le schéma d'Euler modifié :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left( f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n)\right) \right)$$

### Exemple 3.1

$$y' = f(t)$$

Supposons que  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  soit une fonction continue. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\forall t \in [0, T], \begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sa solution est évidemment  $t \rightarrow \int_0^t f(t) dt$  La méthode d'Euler avec  $y_0 = 0$  donne :

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n)$$

si bien que :

$$y_n = \sum_{k=0}^n f(kh)$$

Pour  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $h = \frac{T}{N}$ , on voit que :

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kt}{N}\right)$$

vu comme approximation de  $\int_0^T f(t)dt$ .

Ainsi, dans ce cas, la méthode d'Euler n'est autre que la méthode des rectangles.

**Exemple 3.2** on considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dans l'intervalle temps  $[0, T]$  : La solution exacte est clairement donnée par

$$y(t) = e^{-t}$$

On suppose que les pas de temps sont constants, c'est-à-dire  $h_n = h = \frac{T}{n}$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$  :

Le schéma d'Euler explicite s'écrit dans ce cas :

$$y_{n+1} = y_n - hy_n = (1 - h)y_n$$

et donc

$$y_{n+1} = (1 - h)y_n$$

d'où

$$y_N = (1 - h)^{\frac{T}{h}} \longrightarrow e^{-T} \text{ quand } h \longrightarrow 0$$

### 3.1.3 Méthodes de Taylor d'ordre $p$ :

Supposons maintenant que  $f$  soit de classe  $C^p$ , on a vu alors que la solution exacte  $y$  de (E) est de classe  $C^{p+1}$  et on a défini des fonctions  $f^{[k]}$  construites par récurrence à partir de  $f$  et de ses dérivées partielles telles que

$$y^{(k)}(t) = f^{[k-1]}(t, y(t))$$

pour  $k = 1, \dots, p + 1$  la formule de Taylor d'ordre  $p$  donne :

$$y(t_n + h_n) = y(t_n) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} h_n^k f^{[k-1]}(t_n, y(t_n)) + O(h_n^p)$$

ou avec la formule de Taylor avec reste de Lagrange :

$$y(t_n + h_n) = y(t_n) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} h_n^k f^{[k-1]}(t_n, y(t_n)) + \frac{1}{(p+1)!} h_n^{p+1} f^{[p]}(t_n + \theta h_n, y(t_n + \theta h_n)), \theta \in ]0, 1[$$

On est donc amené à considérer l'algorithme suivant, appelé méthode de Taylor d'ordre  $p$  :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} h_n^k f^{[k-1]}(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases} \quad (3.5)$$

D'après la définition 3.1, cet algorithme correspond au choix  $\Phi(t, y, h) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} h^{k-1} f^{[k-1]}(t, y(t))$ . On peut remarquer facilement que la méthode d'Euler n'est autre que la méthode de Taylor (T1). La méthode de Taylor n'est en général pas utilisée en pratique car le calcul des valeurs  $f^{[k]}$  est trop coûteux.

### 3.1.4 Méthode de Runge-kutta :

**Principe méthode de Runge-Kutta :**

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

L'idée fondamentale des méthodes de Runge-Kutta est d'intégrer l'équation

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

sur  $[t_n, t_{n+1}]$  et de calculer :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

en utilisant une formule d'intégration numérique à  $q$  points intermédiaires :

$t_{n,i+1} = t_n + h_i$  pour calculer l'intégrale.

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

La fonction  $\Phi$  associée à une méthode de Runge-Kutta à  $q$  évaluations de  $f$  peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, y, h) = \sum_{i=1}^q c_i k_i(t, y, h)$$

avec :

$$k_i(t, y, h) = f(t, ha_i, y + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} k_j(t, y, h)), 1 \leq i \leq q$$

Sous la forme d'un tableau dit tableau de Butcher :

TAB. 3.1 – tableau de butcher 1

|     |       |
|-----|-------|
| $a$ | $B$   |
|     | $c_t$ |

avec  $B = (b_{i,j})_{i,j \in [1,q]} \in M_{q,q}(\mathbb{R})$ ,  $a = (a_i)_{i \in [1,q]} \in \mathbb{R}^q$  et  $c = (c_i)_{i \in [1,q]} \in \mathbb{R}^q$ .

\_ Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si :

$$a_i = \sum_{j=1}^q b_{ij}$$

\_ Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si :

$$\sum_{i=1}^q c_i = 1$$

\_ Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si :

$$\sum_{i=1}^q c_i a_i = \frac{1}{2}$$

\_ Une méthode de Runge-Kutta est explicite si :

$$\forall (i, j) \in [1, q], j \leq i b_{ij} = 0$$

\_ Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables si  $f$  est contractante en  $y$

### Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2 :

\_ tableau de Butcher :

TAB. 3.2 – Tableau de butcher 2

|                     |                     |          |
|---------------------|---------------------|----------|
| 0                   | 0                   | 0        |
| $\frac{1}{2\alpha}$ | $\frac{1}{2\alpha}$ | 0        |
|                     | $1 - \alpha$        | $\alpha$ |

$$\Phi(t, y, h) = (1 - \alpha)f(t, y) + \alpha f\left(t + \frac{h}{2\alpha}, y + \frac{h}{2\alpha}f(t, y)\right)$$

Avec  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on obtient la méthode de Heun :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) + \frac{h}{2}f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + hf(t_n, y_n)\right)$$

Avec  $\alpha = 1$  on obtient la méthode d'Euler modifiée ou méthode du point milieu :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n, \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right)$$

### Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 4 :

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par le tableau de Butcher suivant :

TAB. 3.3 – Tableau de butcher 3

|               |               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0             | 0             | 0             | 0             | 0             |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0             | 0             | 0             |
| $\frac{1}{2}$ | 0             | $\frac{1}{2}$ | 0             | 0             |
| 1             | 0             | 0             | 1             | 0             |
|               | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
 k_n^1 &= f(t_n, y_n) \\
 k_n^2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_n^1\right) \\
 k_n^3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_n^2\right) \\
 k_n^4 &= f\left(t_n + h, y_n + hk_n^3\right) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_n^1 + 2k_n^2 + 2k_n^3 + k_n^4)
 \end{aligned}$$

## 3.2 Application :

Considérons le problème de Cauchy :

trouver une fonction  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un intervalle I telle que

$$\begin{cases}
 y'(t) = \varphi(t, y(t)), \forall t \in I = ]t_0, T [ \\
 y(t_0) = y_0
 \end{cases}$$

avec  $y_0$  une valeur donnée et supposons que l'on ait montré l'existence et l'unicité d'une solution  $y$  pour  $t \in I$ . Pour  $h > 0$  soit  $t_n \equiv t_0 + nh$  avec  $n = 0, 1, 2, \dots, N_h$  une suite de nœuds de  $I$  induisant une discrétisation de I en sous-intervalles  $I_n = [t_n; t_{n+1}]$ . La longueur  $h$  est appelé le pas de discrétisation. Le nombre  $N_h$  est le plus grand entier tel que  $t_{N_h} \leq T$ .

Pour chaque nœud  $t_n$ , on cherche la valeur inconnue un qui approche la valeur exacte  $y(t_n)$ .

L'ensemble des valeurs  $\{u_0 = y_0, u_1, \dots, u_{N_h}\}$  représente la solution numérique.

### 3.2.1 Méthode de Taylor :

La méthode de Taylor est basé sur la relation

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2!}y''(x)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x)h^3 + \dots + \frac{1}{m!}y^{(m)}(x)h^m + E(x, h)$$

où E est l'erreur de troncature due aux termes omis et qui s'écrit comme

$$E(x, h) = \frac{1}{(m+1)!}y^{(m+1)}(\xi)h^{m+1} \text{ pour } x < \xi < x+h$$

Cette relation prédit  $y(x+h)$  à partir de  $y(x)$ , ainsi elle permet d'écrire une formule d'intégration numérique. En effet,  $y'(x) = \varphi(x, y(x))$  et l'on peut calculer  $y''(x)$  en itérant le processus  $(y'(x))' = (\varphi(x, y(x)))' = \partial_x \varphi(x, y(x)) + \partial_y \varphi(x, y(x))\varphi(x, y(x))$  etc. Le dernier terme  $\frac{1}{m!}y^{(m)}(x)h^m$  indique l'ordre de la méthode et on peut approcher l'erreur de troncature par

$$E(x, h) \simeq \frac{h^m}{(m+1)!}(y^{(m)}(x+h) - y^{(m)}(x))$$

**Exemple 3.3** *Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) + 4y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On veut estimer  $y(0.1)$  par la méthode de Taylor d'ordre 4 avec un seul pas d'intégration. Le développement de Taylor en 0 jusqu'à l'ordre 4 est

$$y(h) \simeq y(0) + y'(0)h + \frac{1}{2!}y''(0)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(0)h^4$$

En dérivant l'EDO on trouve

$$\begin{array}{ll}
 & y(0) = 1 \\
 y'(x) = -4y(x) + x^2 & y'(0) = -4 \\
 y''(x) = -4y'(x) + 2x & y''(0) = 16 \\
 y'''(x) = -4y''(x) + 2 & y'''(0) = -62 \\
 y^{(4)}(x) = -4y'''(x) & y^{(4)}(0) = 248
 \end{array}$$

Donc, pour  $x = 0$  et  $h = 0.1$ , on obtient

$$y(0.1) \simeq 1 + \frac{-4}{10} + \frac{16}{200} + \frac{-62}{6000} + \frac{248}{240000} = 0.6707$$

et comme

$$y^{iv}(x+h) = -4y'''(x) = -4(-4y''(x)+2) = -4(-4y'(x)+2x)+2 = (-4(-4(-4y(x)+x^2)+2x+2))$$

alors  $y^{(4)}(0.1) \simeq (-4(-4(-4 \times 0.6707 + (0.1)^2 + 0.2) + 2) + 2) = 166.259$  et on obtient l'estimation de l'erreur

$$E \simeq \frac{248}{960000}(y^{(4)}(0.1) - y^{(4)}(0)) = \frac{248}{960000}(166.259 - 248) = -0.000068$$

### 3.2.2 Méthodes d'Euler

Une méthode classique, la méthode d'Euler explicite (ou progressive, de l'anglais forward), consiste à construire une solution numérique ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = y(t_0) = y_0 \\ u_{n+1} = u_n + h\varphi(t_n, u_n), n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \end{array} \right.$$

Cette méthode est obtenue en considérant l'équation différentielle en chaque nœud  $t_n$  et en remplaçant la dérivée exacte  $y'(t_n)$  par le taux d'accroissement

$$y'(t_n) \simeq \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

De même, en utilisant le taux d'accroissement

$$y'(t_{n+1}) \simeq \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

pour approcher  $y'(t_{n+1})$ , on obtient la méthode d'Euler implicite (ou rétrograde, de l'anglais backward)

$$\begin{cases} u_0 = y(t_0) = y_0 \\ u_{n+1} - h\varphi(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n, n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \end{cases}$$

Ces deux méthodes sont dites à un pas : pour calculer la solution numérique  $u_{n+1}$  au nœud  $t_{n+1}$ , on a seulement besoin des informations disponibles au nœud précédent  $t_n$ . Plus précisément, pour la méthode d'Euler progressive,  $u_{n+1}$  ne dépend que de la valeur un calculée précédemment, tandis que pour la méthode d'Euler rétrograde,  $u_{n+1}$  dépend aussi “de lui-même” à travers la valeur de  $\varphi(t_{n+1}, u_{n+1})$ . C'est pour cette raison que la méthode d'Euler progressive est dite explicite tandis que la méthode d'Euler rétrograde est dite implicite. Les méthodes implicites sont plus coûteuses que les méthodes explicites car, si la fonction  $\varphi$  est non linéaire, un problème non linéaire doit être résolu à chaque temps  $t_{n+1}$  pour calculer  $u_{n+1}$ . Néanmoins, nous verrons que les méthodes implicites jouissent de meilleures propriétés de stabilité que les méthodes explicites.

### Python :

La méthode d'Euler explicite est implémentée dans le code suivant : <sup>1</sup>

\* les nœuds d'intégration  $[t_0, t_1, \dots, t_{N_h}]$  sont contenus dans le vecteur  $tt$ ,

\* les valeurs  $[u_0, u_1, \dots, u_{N_h}]$  sont contenus dans le vecteur  $uu$ ,

\*  $phi$  est une fonction python qui contient la fonction mathématique  $\varphi(t, y(t))$  dépendant des variables  $t$  et  $y$

```
1  #!/usr/bin/python
2  -*- coding: Utf-8 -*-
3
4  import math
5  from matplotlib.pyplot import *
6
7  def euler_progressif(phi,tt):
8  →uu = [y0]
9  →for i in range(len(tt)-1):
10 →→uu.append(uu[i]+h*phi(tt[i],uu[i]))
11 →return uu
```

**Exemple 3.4** *En utilisant le code ci-dessus on résout le problème de Cauchy trouver la fonction  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur l'intervalle  $I = [0, 3]$  telle que*

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), \forall t \in I = [0, 3] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On compare la solution approchée obtenue avec la méthode d'Euler progressive avec la solution exacte qui est la fonction  $y(t) = e^t$ . Pour bien visualiser les erreurs, on considère seulement 5 sous-intervalles.

```

12 # INITIALISATION
13 Nh = 5
14 t0 = 0.
15 y0 = 1.
16 tfinal = 3.
17

```

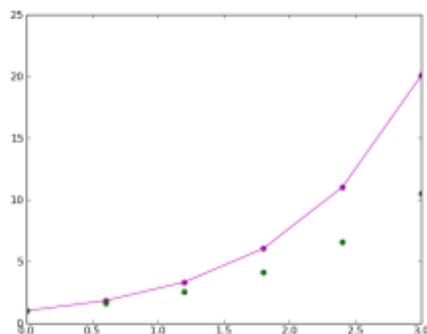


FIG. 3.1 – Exemple 3.4

```

18 def phi(t,y):
19     →return y
20
21 def sol_exacte(t):
22     →return math.exp(t)
23
24 # CALCUL
25 h = (tfinal-t0)/Nh
26 tt = [ t0+i*h for i in range(Nh+1) ]
27 yy = [ sol_exacte(t) for t in tt ]
28 uu = euler_progressif(phi,tt)

```

```
29 axis([t0, tfinal, min(uu), max(uu)])
30 plot(tt,yy,'m-o',tt,uu,'go')
31 show()
```

Dans la figure 3.1 on a tracé la solution exacte (en magenta et avec un trait continu) et la solution approchée (en vert pointillé) obtenue avec le code

**Remarque 3.1** *code 1* : Comme pour tous les algorithmes de ce polycopié, nous ne ferons que ré-implémenter des fonctions déjà existantes en Python.

# Conclusion

Dans ce sujet, nous avons traité de l'étude du problème de Cauchy, dans lequel le champ de Cauchy est profond et large, où nous avons étudié une théorie de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation de Cauchy. Nous avons également traité de quelques méthodes numériques pour résoudre le problème de Cauchy (méthode d'Euler, méthode de Taylor, méthode Runge-Kutta ) Il reste maintenant à généraliser et étudier ce problème dans un domaine plus large, comme la résolution du problème de Cauchy à m-degrés

# Bibliographie

- [1] BOYER, F.(2012). Agrégation Externe de Mathématiques Equations différentielles ordinaires.
- [2] Benzoni,s.(2007). Equation différentielles ordinaires
- [3] Demailly, J-P.(2006). Analyse numérique et équations différentielles. EDP sciences.
- [4] FrançoisCuvelier. (13janvier2015).E.D.O :méthodes numériques (cours 3).Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications Institut Galilée Université ParisXI I I
- [5] Hulin,D.(2019-20). Equations différentielles ordinaires( Etudes qualitatives Cours).Université Paris-Sud.
- [6] Yasmina,D.Analyse Numérique des EDO, Université de Jijel, Département de Mathématiques, B.P. 98, Ouled Aissa, 18000 Jijel, Algérie
- [7] (2006–2007). Méthode d'Euler pour les équations différentielles, Université Claude Bernard–Lyon I

# Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

|                               |  |
|-------------------------------|--|
| EDO                           | équation différentielle ordinaire      |
| $C^k$                         | la dérivée d'ordre $k$                 |
| $y'$                          | la dérivée de $y$ d'ordre 1            |
| $U$                           | un ouvert                              |
| $\mathbb{R}$                  | l'ensemble des valeurs réelles         |
| $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ | ouvert                                 |
| $\ \cdot\ $                   | la norme                               |
| $\tilde{y}$                   | le prolongement de $y$                 |
| exp                           | la fonction exponentielle              |
| $\partial x$                  | la dérivée partielle par rapport à $x$ |
| $\partial y$                  | la dérivée partielle par rapport à $y$ |

## ملخص

نقدم في هذه المذكرة بعض الدراسات حول مشكلة كوشي حيث قدمنا لمحة حول المعادلات التفاضلية العادية و درسنا نظرية حول وجود ووحداية الحل لمعادلة كوشي. كما تطرقنا لبعض الطرق العددية لحل مشكلة كوشي (طريقة أولر طريقة تايلور, طريقة رونج كوتا) وبعض التطبيقات .

## Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons quelques études sur le problème de Cauchy où nous avons présenté un aperçu des équations différentielles ordinaires. Où nous avons étudié une théorie sur l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Cauchy, et également traité de quelques méthodes numériques pour résoudre le problème de Cauchy (méthode d'Euler, méthode de Taylor, méthode de Runge-Kutta) et quelque application .

## Abstract

In this Memory we present some studies on the Cauchy problem where we presented an overview of ordinary differential equations. Where we studied a theory about the existence and uniqueness of the solution to Cauchy's equation. We also dealt with some numerical methods for solving Cauchy problem (Euler's method, Taylor method, Runge-Kota method) and applications.