

+

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**Lakhdari Khouloud**

Titre :

# Analyse et contrôle de systèmes dynamiques chaotiques

Membres du Comité d'Examen :

Dr. <b>Berbiche Mohamed</b>	UMKB	Président
Dr. <b>Bouziane Nadjette</b>	UMKB	Encadreur
Dr. <b>Hassouna Houda</b>	UMKB	Examineur

Septembre 2020

## DÉDICACE

Je dédie ce humble travail :

A ma chère mère et mon cher père

A mes frères Youcef et Yaakoub .

A ma seule soeur Intissar .

A toute ma famille .

A tous mes amis .

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je voudrais remercier Dieu, mon Seigneur et mon aide pour atteindre ce que je suis aujourd'hui.

Après lui, je tiens à exprimer mes remerciements et ma gratitude à la merveilleuse Madame **Bouziane Nadjette** pour tous les conseils qu'elle m'a donné et pour tous ses efforts faits pour moi, sur ce merveilleux sujet, et parce que ça m'a donné un coup de pouce, je me suis renforcé

J'exprime également mes remerciements aux membres du jury, Monsieur **Berbiche Mohamed**, et Madame **Hassouna Houda**.

je remercie aussi Monsieur **Hefaid Mokhtar** chef de département de mathématiques à l'université de Biskra pour toute l'aide que lui et tout le personnel de notre collège nous ont accordé.

Enfin, je n'oublie pas de remercier mes parents, dont les remerciements ne sont pas complets sans les mentionner, du soutien et de l'intérêt qu'ils ont manifestés et ma famille, et mes amis.

# Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	v
sommaire	vi
abstract	vii
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction générale sur les systèmes dynamiques chaotiques</b>	<b>3</b>
1.1 Notions de systèmes dynamiques . . . . .	3
1.1.1 Systèmes dynamiques discrets . . . . .	5
1.1.2 Systèmes dynamiques continus . . . . .	6
1.1.3 Stabilité des équilibres . . . . .	10
1.2 Systèmes chaotiques . . . . .	15
1.2.1 Propriétés des systèmes chaotiques . . . . .	15
1.2.2 Chaos dans le sens de Li-Yorke . . . . .	16
1.2.3 Chaos dans le sens de Devaney . . . . .	18
1.2.4 Quelques définitions se rapportant au chaos . . . . .	19

<b>2</b>	<b>Contrôle de systèmes chaotiques</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Systèmes de contrôle généraux . . . . .	24
2.3	Modèles de système Contrôle . . . . .	25
2.3.1	Problème de stabilisation . . . . .	26
2.3.2	Problèmes d'Anti-contrôle . . . . .	27
2.4	Méthodes de contrôle du Chaos . . . . .	28
2.4.1	Méthode du contrôle OGY . . . . .	28
2.4.2	Contrôle en boucle ouverte . . . . .	36
2.4.3	Contrôle en boucle fermée . . . . .	37
2.4.4	Méthode de contrôle feedback retardé (DCF) . . . . .	39
2.4.5	Contrôlabilité . . . . .	40
2.4.6	Contrôle linéaire et non linéaire . . . . .	40
	<b>conclusion</b>	<b>42</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>

# Table des figures

1.1	Principe de la section de Poincaré . . . . .	6
1.2	Diagramme de bifurcation du système de Rössler . . . . .	22
1.3	Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour $b=0.3$ . . . . .	22
2.1	Exposant de Lyapunov du système de Hénon en fonction du paramètre $a$ .	32
2.2	Diagramme de bifurcation en fonction du paramètre $a$ . . . . .	33
2.3	Contrôle du système de Hénon par la méthode OGY . . . . .	35
2.4	Contrôle de l'attracteur de Hénon . . . . .	36

# SOMMAIRE

Dans ce travail, nous avons traité le problème du contrôle des systèmes dynamiques chaotiques.

Dans la première partie, nous avons présenté les concepts de base d'un système dynamique : Sa définition, ses propriétés, ses types, ses composants et les théories importantes qu'il contient.

Ensuite, nous sommes passés au phénomène du chaos ou ce que on appelle un système chaotique, nous avons donc traité ses caractéristiques et de quelques concepts pour de bases.

Quant à la deuxième partie est consacrée à l'étude du contrôle du chaos, nous avons donc commencé par expliquer le système de contrôle en général, puis nous sommes passés à l'étude et à l'explication d'un ensemble de problèmes comme le problème de stabilité, puis les méthodes de contrôle du chaos représentées par la méthode «Ott-Grebogi-Yorke» (OGY) et la méthode «contrôle feedback retarde» (DCF). Et nous avons montrer comment les utiliser.

**Mots-clés** : Système dynamique, contrôle des systèmes dynamiques chaotiques, phénomène du chaos, système de contrôle.

# ABSTRACT

In this work, we have dealt with the problem of controlling chaotic dynamical systems.

In the first part, we presented the basic concepts of a dynamic system : Its definition, its properties, its types, its components and the important theories it contains.

Then we moved on to the phenomenon of chaos or what we call a chaotic system, so we dealt with its characteristics and some basic concepts.

As for the second part is devoted to the study of chaos control, we started by explaining the control system in general, then we went on to study and explain a set of problems such as stability problem, then the chaos control methods represented by the “Ott-Grebogi-Yorke” (OGY) method and the “delayed control feedback” (DCF) method. And we have to show how to use them.

**Keywords** : Dynamic system, control of chaotic dynamic systems, chaos phenomenon, control system.

# Introduction

Les systèmes dynamiques sont les concepts mathématiques qui permettent d'étudier des phénomènes qui se développent au fil du temps, Cette évolution peut être exprimée par un ensemble limité d'équations qui peuvent être des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles ou des applications, ces phénomènes proviennent de la physique, de la chimie, de la mécanique, de la biologie ou de l'environnement, ce système se compose d'un espace de phases, l'espace des états possibles du phénomène convenablement paramétré, muni d'une loi d'évolution qui décrit la variation temporelle de l'état du système.

Vers 1900, le soi-disant chaos de ce système a été découvert par le mathématicien Henri Poincaré, mais l'acte de naissance de l'étude du chaos, daté de 1963 et réédité sans aucun doute, le météorologue Edward Lorenz, le terme chaos définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais qui est très sensible aux conditions initiales, et imprédictible à long terme. et il a été appelé le système dynamique chaotique. De son temps à nos jours, le chaos reste un domaine de recherche important, notamment en matière de contrôle et d'anti-contrôle.

Cet étrange phénomène est d'une grande importance dans de nombreux systèmes économiques, la biologie, la biochimie, la chimie des lasers, les communications et même la médecine, après que les scientifiques aient pensé que son importance se limitait aux mathématiques.

Le système chaotique ne peut pas être prédit, mais il est parfaitement décrit par des équations simple et déterministe. On dit que le système est déterministe lorsqu'il est prévisible.

Le chaos a été largement appliqué à de nombreuses disciplines scientifiques en mathématiques, programmation, microbiologie, biologie, informatique, économie, ingénierie, finance, philosophie, physique, politique, dynamique des populations, psychologie et robotique.

Il est à noter que lors de l'étude de ce système, nous constatons que les savants étaient divisés en deux parties, la première section a travaillé pour préserver le chaos dans ce système, contrairement à la deuxième partie qui a travaillé pour s'en débarrasser et l'effacer.

Le travail réalisé dans cette thèse est présenté en deux chapitres :

**le premier chapitre :** Nous y avons mentionné un ensemble de concepts de base et d'encodages sur le système dynamique et ses types, puis nous sommes passés au système chaotique, nous avons donc traité de sa définition et ses propriétés de ses caractéristiques, et nous avons expliqué le chaos dans le sens de Li-Yorke et dans le sens de Devaney.

**le deuxième chapitre :** Ici, nous avons défini le système de contrôle, ses types, les méthodes de contrôle du Chaos, le problème anti-contrôle et la contrôlabilité.

Ce memoire est clôturé par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Introduction générale sur les systèmes dynamiques chaotiques

### 1.1 Notions de systèmes dynamiques

**Définition 1.1.1** *Un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme " système " fait référence à un ensemble de variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. il définit par un système d'équations différentielles du première ordre de la forme :*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, \mu, t),$$

avec  $f$  un champ de vecteurs.  $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $\mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$  est le vecteur des paramètres et  $t$  la variable temporelle.

Un système dynamique est une structure qui à la fois :

- **Causale**, où son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent.
- **Déterministe**, c'est-à-dire qu'à partir d'une condition initiale donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible.
- L'ensemble des variables d'état d'un système permet de construire un espace mathématique

appelé "l'espace des phases".

**L'espace des phases** : est un espace mathématique souvent multidimensionnel. Chaque axe de coordonnées de cet espace correspond une variable d'état du système dynamique étudié et chaque variable d'état caractérise le système à un instant donné. Pour chaque instant donné, le système est donc caractérisé par un point de cet espace. A l'instant suivant, il sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite. Si l'espace des phases est représenté en trois dimensions, cette suite de points peut montrer graphiquement l'évolution du système dans le temps. L'ensemble des trajectoires possibles constitue le portrait de phases. Celui-ci peut aider à percevoir l'attracteur du système.

**Définition 1.1.2** *Un système dynamique est dit **invariant** dans le temps ou tout **simplement invariant** si son équation d'état ne dépend pas implicitement du temps 't', son équation d'état est alors d'écrite par :*

$$\dot{x} = f(x(t), \mu(t)),$$

*sinon, le système est dit "**variant dans le temps**".*

**Définition 1.1.3** *Un système dynamique est dit **libre** si son équation d'état est indépendante de la commande  $\mu(t)$ . cette équation est alors :*

$$\dot{x} = f(x(t), t),$$

*sinon, le système est dit "**forcé**".*

**Système dynamique autonome** : Un système dynamique est dit **autonome** s'il est invariant dans le temps et libre, son équation d'état ne dépend que de l'état  $x(t)$ , elle est donnée par :

$$\dot{x} = f(x(t)),$$

sinon, le système est dit "**non autonome**".

**Remarque 1.1.1** *Par un changement de variable approprié, on peut toujours transformer un système dynamique non autonome de dimension  $n$  en un système dynamique autonome équivalent de dimension  $n + 1$ .*

*L'évolution **déterministe** du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :*

- Une évolution continue.
- Une évolution discrète.

### 1.1.1 Systèmes dynamiques discrets

Une modélisation discrète du temps peut être imposée soit par la nature même du processus soit par le besoin de "discrétiser" un modèle à temps continu pour le traiter numériquement. L'évolution du système est observée en choisissant certains moments du temps que nous allons supposer équidistants. Dans tous les cas le choix de l'unité de temps représente une partie importante de modélisation du système. Dans le modèle le temps sera donc noté par une variable  $k$  qui prend les valeurs entières  $k \in \mathbb{Z}$ .

Dans ce cas où le temps est discret le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative) :

$$x(k + 1) = f(x(k), k); \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

#### Section de Poincaré :

L'application de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction d'une unité de l'ordre du système. Soit un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension  $n$  et la trajectoire de sa solution en  $x_0$ . Définissant dans cet espace une surface de dimension  $n - 1$ . L'application de Poincaré est le

système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface.

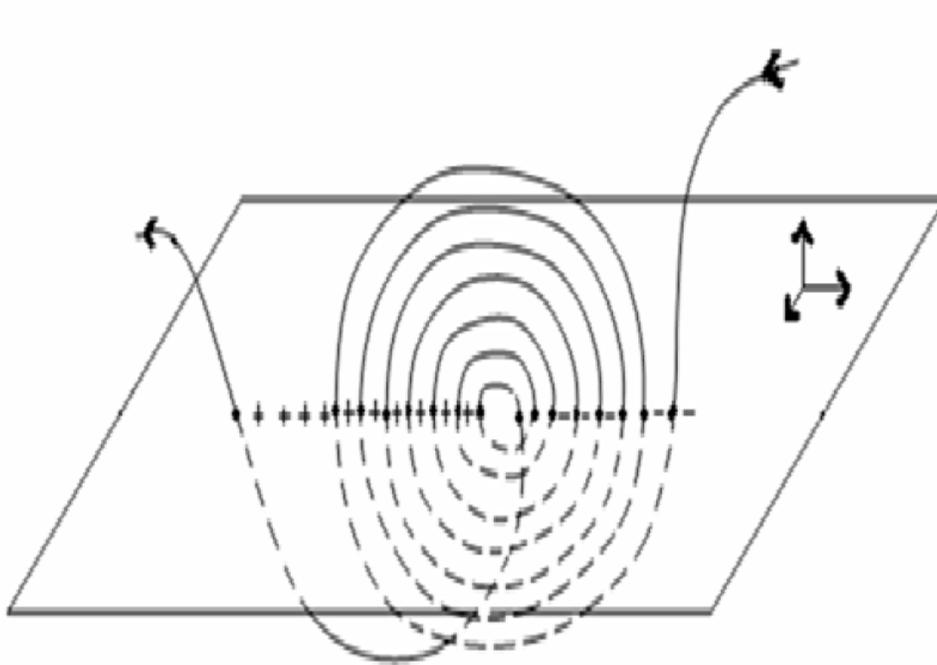


FIG. 1.1 – Principe de la section de Poincaré

L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface est appelé **section de Poincaré**.

### 1.1.2 Systèmes dynamiques continus

Dans le cas général un système dynamique en temps continu peut être représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t).$$

**Flot, trajectoire et orbite :**

**Flot** : Soit le système dynamique autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

On appelle flot du système différentiel (1.1), la famille à un paramètre d'applications  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  de  $U$  dans lui-même définies par :

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0) = x(t, x_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

où  $x(t, x_0)$  est l'unique solution du problème de Cauchy.

Le théorème suivant affirme que les solutions d'un système différentiel dépendent de manière différentiable des conditions initiales et que le flot est un groupe à un paramètre de difféomorphismes.

**Théorème 1.1.1** *L'application  $\phi_t$  est différentiable sur  $U$ . Le flot  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  vérifie les propriétés suivantes :*

- 1)  $\phi_0 = Id$  , (*Id est l'identité de  $U$* ).
- 2)  $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$ , *pour tous  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  ; (Loi de composition).*

Du théorème précédent, on déduit que pour chaque  $t \in \mathbb{R}$  ,  $\phi_t$  est un difféomorphisme de  $U$  et que :

$$(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$$

**Trajectoire** : Soit  $x_0 \in U$  une condition initiale et  $x(t, x_0)$  la solution de (1.1). L'ensemble des points  $\{\forall t \in \mathbb{R}, x(t, x_0)\}$  est la trajectoire dans l'espace d'état passant au point  $x_0$  à l'instant initial.

Deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial :

$$\forall t, \phi(t, x_1) = \phi(t, x_2) \implies x_1 = x_2$$

**Orbite** : Etant donné un système (1.1) et le flot associé  $\phi_t$  sur  $U$ , l'orbite d'un point  $x_0 \in U$  est l'ensemble :

$$O(t_0) = \{x \in U : \exists t \in \mathbb{R}; x = \phi_t(x_0)\}$$

**Remarque 1.1.2** *La notion d'orbite en temps discret est équivalente à celle de trajectoire en temps continu.*

**Attracteurs :**

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle "**attracteur**". Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques.

**Définition 1.1.4** *Soit  $(U, \{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}})$  un système dynamique,  $A$  un ensemble compact de l'espace des phases. On dit que  $A$  est un **attracteur**. s'il est vérifie les conditions suivantes :*

- $A$  est invariant sous l'action du flot (i.e  $\phi_t(A) \subset A$  pour tout  $t$ ).
- $A$  est stable au sens de Lyapunov (si pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0; t) = \phi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$  ; avec  $\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$ ).
- Il existe une orbite dense dans  $A$ .

**Ensembles attracteurs :** Un ensemble attracteur est un ensemble invariant dont toutes les trajectoires qui y sont initialisées convergent vers lui.

**Remarque 1.1.3** *Un attracteur est un ensemble attracteur vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. **La récurrence** : Toute trajectoire ayant son origine dans l'attracteur revient de manière répétitive aussi proche que l'on veut de l'état initial. Il suffit pour cela d'attendre suffisamment longtemps.
2. **L'irréductibilité** : L'union de deux attracteurs disjoints ne constitue pas un attracteur.

**Types d'attracteurs** : Il existe deux types distincts d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

**Attracteurs réguliers** : ils caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et il existe trois types :

1. L'attracteur "**point fixe**" est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.
2. L'attracteur "**cycle limite**" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.
3. L'attracteur "**tore**" représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".

**Attracteurs étranges** : cet attracteur est associé à un comportement quasi-aléatoire dit chaotique, caractérisé par un spectre de puissance continue et une fonction d'auto-corrélation s'annulant très rapidement.

- 1) La propriété de récurrence exclut la présence de phénomènes transitoires ou d'éventuelles solutions instables dans un attracteur.
- 2) Un attracteur ne peut pas être divisé en deux attracteurs élémentaires du fait de l'irréductibilité mais il est possible d'isoler plusieurs attracteurs dans un ensemble attracteur.

**Bassin d'attraction** : Lorsque  $A$  est un attracteur, l'ensemble :

$$B(A) = \bigcup_{t < 0} \phi_t(V),$$

est appelé bassin d'attraction de  $A$ . Le bassin d'attraction est l'ensemble des points de l'espace des phases qui sont sous l'effet de l'attracteur. C'est-à-dire, que toutes les trajectoires qui commencent de ces points tendent vers l'attracteur après un temps fini. Le bassin d'attraction d'un attracteur peut être de forme très complexe, même si l'attracteur est simple.

### 1.1.3 Stabilité des équilibres

#### Equilibres et stabilité

Les points d'équilibre (ou états stationnaires, ou points fixes, ou points singuliers) d'un système jouent un rôle important dans la description des propriétés du système.

Considérons l'équation différentielle autonome suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1.2}$$

et  $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposé de classe  $C^1$ .

**Définition 1.1.5** On dit qu'un point  $x_e \in I$  est un **point d'équilibre** de (1.2) si :

$$f(x_e) = 0.$$

Autrement dit,  $\phi_t(x_e) = x_e$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , où  $\phi_t$  est le flot du champ de vecteurs de  $f$  (l'intervalle maximal associé à  $x_0$  étant  $I_{x_0} = \mathbb{R}$ ). L'orbite de  $x_0$  est donc réduite à un point :  $O_{x_e} = \{x_e\}$ .

**Définition 1.1.6** Nous dirons qu'un équilibre  $x_e$  est **stable** si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x - x_e\| < \delta \text{ et } t > 0 \implies \|\phi_t(x) - x_e\| < \epsilon.$$

Ainsi, toute solution proche de  $x_0$  en reste proche.

**Remarque 1.1.4** *Toute solution dont la condition initiale est dans une boule  $B(x_e; \delta)$  reste dans la boule  $B(x_e; \epsilon)$ , et donc dans un compact de  $\Omega$ , pour  $t > 0$  (on suppose  $\epsilon$  suffisamment petit pour que  $B(x_e; \epsilon) \subset \Omega$ ).*

**Définition 1.1.7** *Nous dirons qu'un équilibre  $x_e$  est **asymptotiquement stable** s'il est stable et s'il existe un voisinage  $V$  de  $x_e$  tel que, pour tout  $x \in V$  :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_e.$$

**Remarque 1.1.5** *Dans ce cas toute solution proche de l'équilibre en reste proche et en plus converge vers lui. Notons que le fait que toute solution issue d'un voisinage  $V$  converge vers  $x_e$  n'implique pas la stabilité de cet équilibre; il existe des systèmes possèdent un équilibre non stable  $x_e$  mais dont toutes les trajectoires convergent vers  $x_e$ .*

**Définition 1.1.8** *Un point d'équilibre  $x_e$  est **exponentiellement stable** s'il existe des constantes positives  $a, b, \delta$ ; tel que :*

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < a \exp(-bt) \|x(t_0) - x_e\| \text{ pour tout } t > 0.$$

Cette stabilité signifie que le vecteur d'état, pour une condition initiale  $x(t_0)$  converge vers un point d'équilibre  $x_e$  plus rapidement qu'une fonction exponentielle.

$b$  est appelé **le taux de convergence**. Par ailleurs, la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique qui implique elle-même la stabilité d'un point d'équilibre.

### Stabilité au sens de Lyapunov :

-La solution  $x(t)$  est **stable au sens de Lyapunov** si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que toute solution  $y(t)$  vérifiant  $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$  implique que  $\forall t \geq t_0, \|y(t) - x(t)\| < \epsilon$ .

-La solution  $x(t)$  est **asymptotiquement stable au sens de Lyapunov** si de plus on a :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$ .

La différence entre la stabilité asymptotique et la stabilité au sens de Lyapunov réside dans le fait qu'une petite perturbation sur l'état initial d'un système autour d'un point fixe stable peut engendrer des petites oscillations entretenues, alors que ces dernières s'amortissent au cours du temps.

**Le cas linéaire** : Considérons le cas particulier d'une équation différentielle autonome linéaire :

$$x'(t) = Ax(t); x \in \mathbb{R}^n.$$

L'origine est toujours un équilibre de cet équation (mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de  $\ker A$  est un équilibre).

1• L'origine est un équilibre **asymptotiquement stable** de  $x'(t) = Ax(t)$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative.

2• Si  $A$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un équilibre stable de  $x'(t) = Ax(t)$ .

1. Ces deux propriétés sont importantes car, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, elles se généralisent au cas non linéaire.
2. Notons que l'origine peut être un équilibre **stable** mais non **asymptotiquement stable**. C'est une situation que l'on rencontre quand  $A$  a des valeurs propres de partie réelle nulle, par exemple quand  $A$  est antisymétrique.

**Le cas affine** : Considérons maintenant un champ des vecteurs affines :

$$f(x) = Ax + b$$

sur  $\mathbb{R}^n$ , où  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice et  $b \in \mathbb{R}^n$  un vecteur. Un équilibre de l'équation  $x'(t) = Ax(t) + b$  est un point  $x_e$  qui vérifie  $Ax_e + b = 0$  (noter qu'un tel point n'existe que si  $b \in \text{Im}A$ ).

En remplaçant  $b$  par  $-Ax_e$ , on réécrit l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(x(t) - x_e) = A(x(t) - x_e).$$

Ainsi la stabilité et la stabilité asymptotique d'un équilibre de l'équation affine  $x'(t) = Ax(t) + b$  sont équivalentes respectivement à celles de l'origine pour l'équation linéaire  $y'(t) = Ay(t)$  où  $y = x - x_e$ .

### Stabilité par la linéarisation

L'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème très difficile ; en effet, en raison de leurs comportements assez compliqués, les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne sont plus applicables. Cependant, Lyapunov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que, dans la majorité des cas, les points d'équilibres des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux mêmes types de points d'équilibre des systèmes linéaires. Donc l'étude d'un système linéaire est aisée puisqu'elle se résout dans un critère purement algébrique. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système :

$$\dot{x} = f(x), x(t_0) = x_0.$$

En ce point (point d'équilibre) (Développement de Taylor) :

$$\frac{dx}{dt} = Df(x_e)x + O(|x|^2).$$

Puis, pour répondre aux questions de stabilité, il convient de considérer le système linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = Df(x_e)x,$$

associé à :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} .$$

Notons que  $Df(x_e)$  est la matrice Jacobienne de  $f$  au point  $x_e$  :

$$Df(x_e) = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_e} .$$

La détermination de la stabilité du point d'équilibre s'effectue donc en deux étapes :

- La première consiste à déterminer de la stabilité de  $x = 0$ , équilibre de système  $\frac{dx}{dt} = Df(x_e)x$ , partant du fait que l'on sait déjà déterminer la stabilité linéaire à partir des valeurs propres de  $Df(x_e)$  .
- La deuxième étape, réside dans la manière de déterminer la stabilité de  $x_e$  à partir de celle de  $x = 0$ . Autrement dit, sous quelles conditions les systèmes  $\dot{x} = f(x)$  et  $\frac{dx}{dt} = Df(x_e)x$  sont-ils équivalents ?

**Théorèmes de linéarisation classique :**

- Si toutes les valeurs propres de  $Df(x_e)$  sont à partie réelle strictement négative, le système non linéaire  $\dot{x} = f(x)$  est asymptotiquement stable.
- Si au moins une valeur propre est à partie réelle strictement supérieure à 0, le système non linéaire  $\dot{x} = f(x)$  est instable.
- Si le système linéarisé est stable sans être asymptotiquement stable ; c'est le cas critique, on ne peut rien conclure, les termes non linéaires influent sur les propriétés de la stabilité. Dans ce cas, on fait appel à d'autres procédés pour l'étude de la stabilité non linéaire.

**Remarque 1.1.6** *La linéarisation classique ne permet d'étudier que la stabilité locale "stabilité du point d'équilibre", et ne donne aucun renseignement sur le domaine d'attraction. Une autre approche connue sous le nom de théorème de Lyapunov [1899] (méthode indirecte de Lyapunov) cette méthode utilise la linéarisation. Alors elle consiste à linéariser*

le système dynamique défini sous les mêmes conditions au voisinage d'un point d'équilibre.

**Théorème 1.1.2** (*Méthode indirecte de Lyapunov*). *Considérons le système d'équation différentielles  $\dot{x} = f(x)$ , soit  $x_e = 0$  un point d'équilibre de  $f$ . Où  $f$  est continue et différentiable dans un voisinage  $U \subset \mathbb{R}^n$  contenant l'origine. La linéarisation du système  $\dot{x} = f(x)$  autour du point d'équilibre donne le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

avec la matrice jacobienne  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e}$ , alors si la partie réelle des valeurs propres du système linéaire est strictement négative  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable ( $\lambda$  valeurs propres de  $A$ ) et si  $A$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive,  $\text{Re}(\lambda) > 0$  alors le point d'équilibre est instable.

## 1.2 Systèmes chaotiques

Le chaos tel que le scientifique le comprend ne signifie pas l'absence d'ordre ; il se rattache plutôt à une notion d'imprévisibilité, d'impossibilité de prévoir une évolution.

**Définition 1.2.1** *On appelle un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres et qui est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Il n'est pas déterminé ou modélisé par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique.*

### 1.2.1 Propriétés des systèmes chaotiques

Les mouvements chaotiques sont plus compliqués que stationnaire périodique ou quasi-périodique, et ils ont des formes très complexes appelés attracteurs étranges.

**La non-linéarité :** Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique. La notion de système dynamique est relative à tous les systèmes dont l'évolution dépend du temps. En général, pour prévoir des phénomènes réels générés par ces systèmes, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause.

**Le déterminisme :** Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes.

**Sensibilité aux conditions initiales :** Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles.

**L'imprévisible :** En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

**L'irrégularité :** Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques "ordre dans le désordre" plus simplement.

Deux principes mathématiques importants expliquent le comportement chaotique, celui de Li-Yorke et celui de Devaney.

### 1.2.2 Chaos dans le sens de Li-Yorke

Li et Yorke ont introduit la première définition mathématique du chaos. Ils ont établi un critère très simple "La présence de trois périodes impliquent le chaos". Ce critère joue un

rôle très important dans l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques.

Soit une fonction discrète de dimension  $N = 1$ , décrite par la formule suivante :

$$x(i + 1) = f(x(i)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots$$

**Théorème de Li-Yorke :** Soit  $I$  un intervalle dans  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue.

Supposons qu'il y a un point  $a \in I$  tel que :

$$b = f(a), \quad c = f^2(a) \text{ et } d = f^3(a),$$

avec  $d \leq a < b < c$ . Alors :

- pour chaque  $i = 1, 2, \dots$ , il y a un point périodique de période  $n$ .
- l'ensemble  $S \in I$  ne contient pas de points périodiques qui satisfassent les conditions suivantes :

1. pour chaque  $p_s, q_s \in S$  avec  $p_s \neq q_s$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p_s) - f^n(q_s)| > 0; \text{ et } \liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p_s) - f^n(q_s)| = 0.$$

2. pour chaque  $p_s \in S$  et point périodique  $q_{per} \in S$ , avec  $p_s \neq q_{per}$  :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p_s) - f^n(q_{per})| > 0.$$

Le théorème peut être généralisé par supposition que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et que  $f(I) \subset I$ . De plus, la fonction  $f$  doit satisfaire :

$$f(I) \cap I \neq \emptyset,$$

afin qu'il contienne les points  $a, b, c$  et  $d$ .

### 1.2.3 Chaos dans le sens de Devaney

Soit  $S$  un ensemble dans un espace topologique  $\mathbb{R}$  et soit  $f$  fonction définie par :

$$f : S \rightarrow S$$

à savoir que :

$$f^m = f(f^{m-1}), m = 1, 2, \dots \text{et } f^0 = Id$$

Soit  $\bar{x} \in S$ , ce dernier est appelé point périodique d'une période  $m$  s'il satisfait :

$$\bar{x} = f^m(\bar{x}), \text{ mais } \bar{x} \neq f^k(\bar{x}) \text{ pour } 1 \leq k \leq m.$$

si  $m = 1$ , alors le point  $\bar{x}$  est appelé un point fixe.

**Théorème de Devaney :** Une fonction  $f : S \rightarrow S$  est chaotique si :

- la fonction  $f$  est sensible aux conditions initiales, dans le sens que pour tout  $x \in S$  et au voisinage de  $x$  dans  $S$ , il existe un  $\beta > 0$  tel que :

$$|f^m(x) - f^m(y)| > \beta,$$

pour un point  $y \in S$  et pour  $m \geq 0$ .

- la fonction  $f$  est topologiquement transitive, dans le sens que pour toute paire de sous ensembles ouverts  $U, V \subset S$ , il existe un nombre entier  $m > 0$  tel que :

$$f^m(U) \cap V = \phi,$$

- les points périodiques de la fonction  $f$  sont denses dans  $S$ .

## 1.2.4 Quelques définitions se rapportant au chaos

### Attracteur étrange

Il est contenu dans un espace fini. Sa dimension est fractale et non entière ; sa trajectoire est complexe ; presque toutes les trajectoires sur l'attracteur ont la propriété de ne jamais passer deux fois par le même point. En d'autres termes, chaque trajectoire est apériodique ; deux trajectoires proches à un instant "t" voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle. Ce phénomène traduit la sensibilité aux conditions initiales ; toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction, c'est-à-dire à la région de l'espace des phases dans laquelle tout phénomène dynamique sera "attiré" vers l'attracteur, produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur.

### Exposants de Lyapunov

L'évolution d'un flot chaotique est difficile à appréhender, parce que la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide, C'est pourquoi on essaye d'estimer ou même de mesurer la vitesse de divergence ou convergence, Cette vitesse s'appelle l'exposant Lyapunov. L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique.

La formule générale de calcul des exposants est la suivante :

$$E_p = \lim \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta x(x_0, t)}{\Delta x_0} \right| ; \text{ quand } |\Delta x_0| \rightarrow 0$$

Si  $E_p < 0$ , l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Les points fixes et les points périodiques super stables ont un exposant de Lyapunov qui tend vers  $-\infty$ .

Si  $E_p = 0$ , l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

Si  $E_p > 0$ , l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités :

ces points sont dit instables. Pour un système discret, on a un ensemble des points sans aucun rapport de liaison. Pour un système continu, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées.

### **Espace des phases**

Notre première approche du chaos nous a fait réaliser la difficulté de trouver des solutions exactes ou même approchées à des équations non linéaires et ceci nous amène à la recherche d'une représentation qui nous permettrait d'accéder plus simplement à des solutions qualitatives. C'est ce que présente l'espace des phases.

### **Bifurcation**

La théorie de bifurcation est l'étude mathématique des changements qualitatifs ou topologiques de la structure d'un système dynamique. Une bifurcation survient lorsqu'une variation quantitative d'un paramètre du système engendre un changement qualitatif des propriétés d'un système telles que la stabilité, le nombre de points d'équilibre ou la nature des régimes permanents. Les valeurs des paramètres au moment du changement sont appelées valeurs de bifurcation.

**Définition 1.2.2** *Une bifurcation est un changement dans les points d'équilibres, des orbites périodiques ou dans les propriétés de stabilité d'un système non linéaire, quand un paramètre du système varie, ce paramètre est appelé **paramètre de bifurcation** et les valeurs auxquelles les changements qualitatif du comportement du système se produisent sont appelées **points de bifurcation**.*

**Diagramme de bifurcation :** Un **diagramme de bifurcation** est la représentation des points d'équilibre en fonction du paramètre de bifurcation.

Le diagramme de bifurcations unidimensionnel est un tracé repérant la nature des différentes solutions du système et leur stabilité lorsqu'un paramètre varie. Il est composé

d'intervalles sur lesquelles les solutions asymptotiques (ou les ensembles limites qui leur correspondent) évoluent continûment avec le paramètre et les intervalles sont séparés par les points de bifurcation.

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime asymptotique est atteint.

Dans le cas d'un système autonome, ces valeurs particulières peuvent être obtenues en travaillant avec une section de Poincaré.

**Exemple 1.2.1** *Soit le système de Rossler suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}$$

Avec,  $a, b$  et  $c$  sont des constantes (paramètres de bifurcation). Ce système semblable à celui de Lorenz, a été proposé par le biochimiste Allemand Otto Rössler en 1976, il découle des équations de Navier Stokes, ainsi il est lié à l'étude de l'écoulement des fluides.

**Exemple 1.2.2** *diagramme de bifurcation du système de Hénon :*

$$\begin{cases} x_{k+1} = a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases}$$

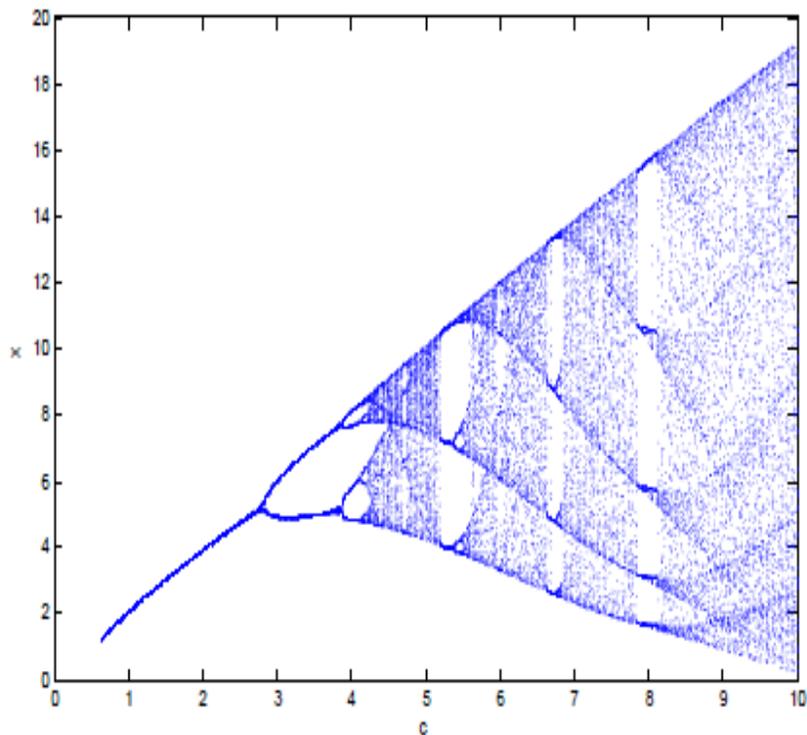


FIG. 1.2 – Diagramme de bifurcation du système de Rossler

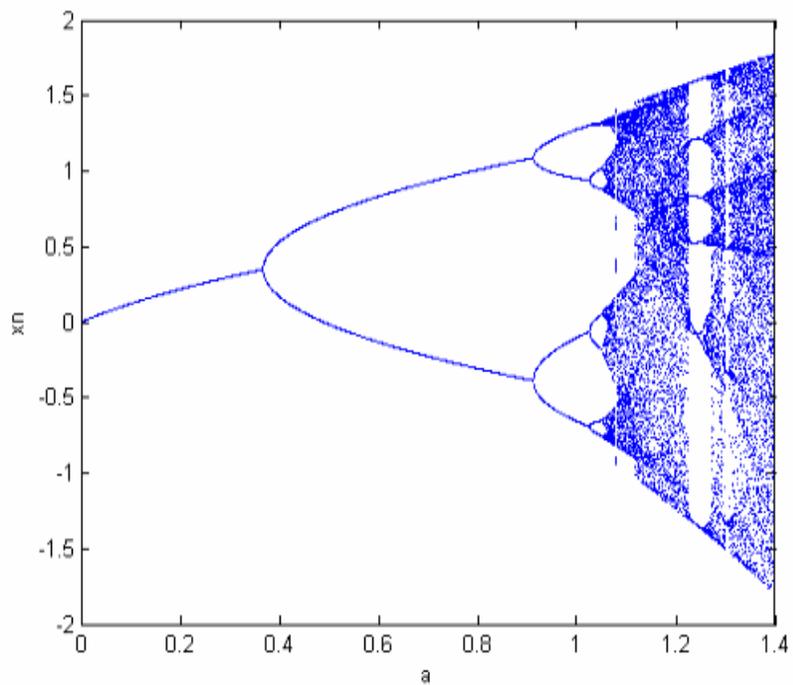


FIG. 1.3 – Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour  $b=0.3$

# Chapitre 2

## Contrôle de systèmes chaotiques

### 2.1 Introduction

Avec l'avènement du concept du chaos dans la littérature scientifique, le comportement chaotique était vu comme un phénomène qui intéresser seulement les mathématiciens, plus tard on découvrit que le dynamique chaos est présente dans n'importe quel champs scientifique ou technique, ou en cite les systèmes mécaniques, communication, laser, chimie biologie, économie et médecine . . . etc., est qui peut être de nature utile ou dangereuse.

Avec ce fait, la question du contrôle est devenu un problème centrale, et donc plusieurs travaux concernant cet aspects, ont commencé à voir le jour des le début des années 1990, avec notamment la méthode de OGY (méthode de linéarisation de la carte de Poincaré) ; ainsi selon la classe de contrôle du chaos choisit, plusieurs techniques ont été adaptés et développés selon le besoin.

Ce comportement irrégulier et imprévisible a été habituellement considéré comme un ennui à éviter. De plus, le négliger ne résout pas les problèmes. Afin de supprimer le chaos, une méthode dite "de contrôle du chaos" est nécessaire. Ainsi, **Ott, Grebogi et Yorke** ont développé l'algorithme **OGY** qui supprime toujours le chaos, par des petites perturbations des paramètres accessibles du système. Le système caractérisé par un mouvement chaotique

est ainsi amené à un comportement dynamique désiré, par exemple une orbite périodique. Depuis, d'autres méthodes ont été développées pour contrôler le chaos.

## 2.2 Systèmes de contrôle généraux

Considérons le système contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

où  $f$  est une fonction de  $I \times V \times U$ ,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ .

Pour rester dans le cadre générale, il suffit de supposer que pour chaque contrôle  $u(t)$  considéré, la fonction :

$$F : (t, x) \rightarrow f(t, x(t), u(t)),$$

vérifie les hypothèses du théorème (2.1). Bien entendu en fonction la fonction de contrôle considéré, ces hypothèses peuvent être plus ou moins difficiles à vérifier. On peut donner des hypothèses certes moins générales, mais qui suffisent dans la grande majorité des cas.

Ces hypothèses sont :

-L'ensemble des contrôles considérés est inclus dans  $\mathcal{L}_{loc}^\infty(I, \mathbb{R}^m)$ .

-La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I \times V \times U$ .

Il est facile de montrer qu'alors les hypothèses du théorème (2.1) sont vérifiées et donc que pour chaque contrôle fixé, il existe une unique solution maximale  $(J, x(\cdot))$  du problème de

Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p sur } J \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

## 2.3 Modèles de système Contrôle

Les modèles mathématiques les plus connus rencontrés dans la littérature pour le contrôle de chaos sont représentés par des systèmes des équations différentielles ordinaires (équations d'état) :

$$\dot{x} = F(x; u) \tag{2.2}$$

Où  $x \equiv x(t)$  est un vecteur de dimension  $n$  d'une variable d'état,  $u$  est un vecteur de dimension  $m$  de variables de contrôle des entrées (input). On suppose que  $F(x; u)$  est continument différentiable, qui garantit l'existence locale et l'unicité des solutions de (2.2). La sortie du système est notée  $y(t)$ . Elle peut être définie comme une fonction de l'état courant du système :

$$y(t) = h(x(t))$$

Si les variables de sortie ne sont pas données explicitement, on peut supposer que toutes les variables d'état sont disponible pour  $y(t) \equiv x(t)$ . Dans la présence de perturbations externes, le modèle non stationnaire est défini par :

$$\dot{x} = F(x; u; t)$$

Par conséquent, il est clair que le comportement dynamique d'un système non linéaire peut être changé en changeant certaines valeurs de ces paramètres. De ce fait, le contrôle du chaos implique l'extraction de mouvements périodiques désirés en dehors des zones chaotiques, par l'application de petites perturbations judicieusement choisies.

Dans beaucoup de cas, un modèle de contrôle affine simple (2.3) peut être utilisé :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{2.3}$$

De nombreux systèmes du monde réel peuvent être décrits par des modèles à temps dis-

crets :

$$x_{k+1} = F_d(x_k; u_k)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  ;  $u_k \in \mathbb{R}^m$  ;  $y_k \in \mathbb{R}^m$  ; le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie à la k-ième itération respectivement.

Maintenant, nous procédons à formuler les problèmes de contrôle de chaotiques.

### 2.3.1 Problème de stabilisation

Les problèmes de stabilisation de la solution périodique instable (orbite) surviennent dans la suppression de bruit ou élimination des harmoniques dans les systèmes de communication, appareils électroniques, et ainsi de suite, ces problèmes sont distingués pour le fait que le système contrôlé est fortement oscillatoire, ces vibrations peuvent être régulières ou quasi régulières ou même chaotique. Les problèmes de suppression des oscillations chaotiques ou les réduire aux oscillations régulières ou les supprimer complètement, peut être formalisé comme suit :

Soit  $x^*(t)$  la solution périodique de période  $T$  du système (2.1), avec une condition initiale  $x^*(0) = x_0^*$  , pour tous  $t \geq 0$ , si la solution  $x^*(t)$  est instable, nous avons besoin de la stabiliser, c'est-à-dire de ramener la solutions  $x(t)$  du système (2.1) vers  $x^*(t)$ , la stabilisation est prise par exemple dans le sens :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x^*(t)) = 0. \quad (2.4)$$

Ou conduire la sortie du système  $y(t)$  vers la fonction donnée  $y^*(t)$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*(t)) = 0. \quad (2.5)$$

Pour toute solution  $x(t)$  de système (2.1) avec les conditions initiales  $x(0) = x_0 \in \Omega$  telle que  $\Omega$  est un ensemble des conditions initiales donné, et  $y(t)$  la fonction de sortie

(output) désirée. Le problème est de trouver la fonction de contrôle dans chacune des formes :

1. Une commande en boucle ouverte (non feedback contrôle) :

$$u(t) = U(t, x_0).$$

2. Une commande en boucle fermé (feedback contrôle) :

$$u(t) = U(x(t)).$$

3. Une commande de sortie en boucle fermé :

$$u(t) = U(y(t)).$$

Qui satisfaisant l'équation (2.2) ou l'équation (2.3).

Un cas particulier du problème ci-dessus est la stabilisation de l'équilibre instable  $x_e^*$  du système (2.1) , c'est-à-dire la stabilisation de  $x_e^*$ , vérifiant  $f(x_e^*, 0) = 0$ ; pour  $u = 0$ .

### 2.3.2 Problèmes d'Anti-contrôle

Une deuxième catégorie d'objectifs de contrôle correspond aux problèmes de l'excitation ou la génération d'oscillations chaotiques (appelés aussi la Chaotification ou Anti-contrôle). Ils surviennent où le mouvement chaotique est le comportement désiré du système. Parfois, ces problèmes peuvent être réduits à la forme (2.3), mais ici la trajectoire désirée  $x^*(t)$  n'est plus périodique, tandis que l'état initial est l'équilibre. La trajectoire désirée ne peut être spécifiée que partiellement. Sinon, l'objectif est de rencontrer à un certain critère formel de chaos, par exemple la positivité du plus grand exposant de Lyapunov.

## 2.4 Méthodes de contrôle du Chaos

Plusieurs méthodes et algorithmes ont été proposés et développés pour réaliser le contrôle du chaos dans divers systèmes dynamiques non linéaires. Parmi les nombreux articles, livres, et publications disponibles sur ce thème, nous présentons dans ce qui suit les plus fiables et les plus connues.

### 2.4.1 Méthode du contrôle OGY

La méthode "**Ott-Grebogi-Yorke**" connue sous le nom d'**OGY** est une méthode de contrôle à retour d'état, qui utilise le chaos dans un système dynamique pour stabiliser une orbite périodique instable. La méthode se base sur l'idée suivante :

- Déterminer quelques orbites périodiques instables, les examiner, puis choisir une qui représente les performances du système.
- Ajuster les paramètres de perturbation, en un temps relativement court, dans le but de stabiliser l'orbite périodique instable.

On considère le système suivant :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Où  $u$  représente le paramètre du contrôle.

La section de Poincaré du système est représentée par :

$$x_{n+1} = f_M(x_n, u), \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Chaque point périodique dans la section représente un UPO (unstable periodic orbit) du flot.

Soit  $x_e$  un point fixe dans la section de Poincaré :

$$x_e = F(x_e, u_0).$$

Où  $u_0$  représente la valeur nominale du paramètre.

La stratégie de contrôle va donc consister à trouver une loi de contrôle de stabilisation par retour d'état, définie au voisinage de l'orbite choisie.

Le système étudié présente un phénomène chaotique, le passage au voisinage du point fixe est donc garanti et une fois le système est dans le voisinage de  $x_e$ , la procédure du contrôle est déclenchée pour amener le système vers l'orbite désirée. Dans ce cas on a :

$$\delta x_n = x_n - x_e, \text{ et } \delta u_n = u_n - u_0.$$

On linéarise le système autour du point  $x_e$  :

$$\delta x_{n+1} = A\delta x_n + B\delta u_n. \tag{2.6}$$

Avec

$$A = D_x f(x) \text{ et } B = \partial f / \partial u.$$

La matrice  $A$  représente deux direction propres, une direction stable  $e_s$  (valeur propre  $< 1$ ) et une direction instable  $e_u$  (valeur propre  $> 1$ ). Donc, les corrections sont appliquées sur la direction instable. Si on utilise les notations suivantes :

$\lambda_s$  : valeur propre où  $|\lambda_s| < 1$ .  $\lambda_u$  : valeur propre où  $|\lambda_u| > 1$ .

$e_s$  : vecteur propre correspond à la valeur propre  $\lambda_s$ .  $e_u$  : vecteur propre correspond à la valeur propre  $\lambda_u$ .

Alors la matrice  $A$  peut s'écrire sous la forme :

$$A = \lambda_s e_s f_s + \lambda_u e_u f_u,$$

où  $f_s, f_u$  représentent les vecteurs covariance. Avec :

$$\begin{cases} f_s e_s + f_u e_u = 1 \\ f_u e_s + f_s e_u = 0 \end{cases}$$

Alors, l'équation (2.1) devient :

$$\delta x_{n+1} = (\lambda_s e_s f_s + \lambda_u e_u f_u) \delta x_n + B \delta u_n, \quad (2.7)$$

et en multipliant (2.2) par  $f_u$ , on obtient :

$$f_u \delta x_{n+1} = f_u [(\lambda_s e_s f_s + \lambda_u e_u f_u) \delta x_n + B \delta u_n].$$

La stratégie de la méthode **OGY** consiste à ajuster le paramètre du contrôle  $u$ , afin de stabiliser le système sur le point  $x_e$ . Il faut donc que  $\delta x_{n+1} = 0$ , c'est-à-dire :

$$f_u [(\lambda_s e_s f_s + \lambda_u e_u f_u) \delta x_n + B \delta u_n] = 0,$$

sachant que :

$$\begin{cases} f_s e_s + f_u e_u = 1 \\ f_u e_s + f_s e_u = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$f_u \lambda_u \delta x_n + f_u B \delta u_n = 0,$$

c'est-à-dire que l'ajustement sur le paramètre du contrôle va être égale à :

$$\delta u_n = -\frac{f_u \lambda_u}{f_u B} \delta x_n.$$

Si on pose  $k = -\frac{f_u \lambda_u}{f_u B}$ , Alors, on obtient :

$$\delta u_n = k \delta x_n$$

Le but du contrôle est de satisfaire la condition  $|u_n - u_0| \prec \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  étant un paramètre pré-défini qui détermine le voisinage de  $x_f$ . On peut écrire aussi  $|k\delta x_n| \prec \varepsilon$ . Donc, l'incrément du contrôle est donné par :

$$\delta u_n = \begin{cases} -k(x_n - x_f) & \text{si } |k(x_n - x_f)| \prec \varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} .$$

### Application de la méthode OGY sur le système de Hénon

Le système de Hénon est décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases} ,$$

avec  $a$  et  $b$  représente les paramètres du contrôle.

#### 1. Calcul des points fixes :

Pour déterminer les points fixes on pose  $x_{n+1} = x_n$  et  $y_{n+1} = y_n$ , donc on obtient :

$$\begin{cases} x = a - x^2 + by \\ y = x \end{cases} ,$$

alors :

$$\begin{cases} x_{e_1} = y_{e_1} = -\frac{(1-b)}{2} + \sqrt{\frac{(1-b)^2}{4} + a} \\ x_{e_2} = y_{e_2} = -\frac{(1-b)}{2} - \sqrt{\frac{(1-b)^2}{4} + a} \end{cases} , \quad (2.8)$$

si on pose  $c = \frac{1-b}{2}$ , donc :

$$x_{e_1} = y_{e_1} = -c + \sqrt{c^2 + a}, \quad x_{e_2} = y_{e_2} = -c - \sqrt{c^2 + a}$$

#### 2. Stabilité et comportement dynamique :

Dans l'étude de la stabilité du système de Hénon, on remarque que les valeurs propres

sont en fonction des points fixes qui sont aussi en fonction des paramètres  $a$  et  $b$ . Donc, pour déterminer les différentes zones de stabilité, il suffit de calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre  $a$  ou  $b$ . On fixe  $b = 0.3$ , et on laisse  $a$  varier entre 0 et 1.4.

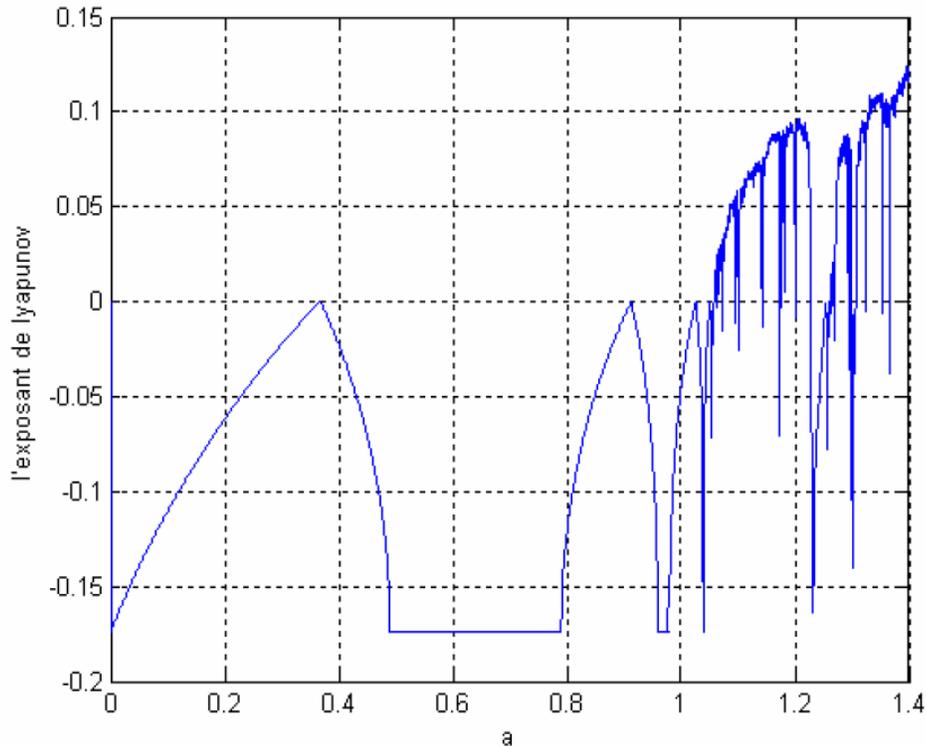


FIG. 2.1 – Exposant de Lyapunov du système de Hénon en fonction du paramètre  $a$

A partir de la figure (2.1) on obtient deux zones : une zone stable lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $[0, 1.052]$  et une zone chaotique lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $]1.052, 1.4]$ .

Pour bien voir la dynamique du système, on trace le diagramme de bifurcation des populations  $x_n$  ou  $y_n$  en fonction du paramètre  $a$ . On observe que pour  $a \in [0, 0.362] \Rightarrow 1$  cycle stable, pour  $a \in ]0.362, 0.91] \Rightarrow 2$  cycles stables, pour  $a \in [0.91, 1.024]$ ; on a 4 cycles stables, et pour  $a \in ]1.024, 1.052]$ , on trouve 8 cycles stables et pour  $a \in ]1.052, 1.4]$ , le phénomène est chaotique.

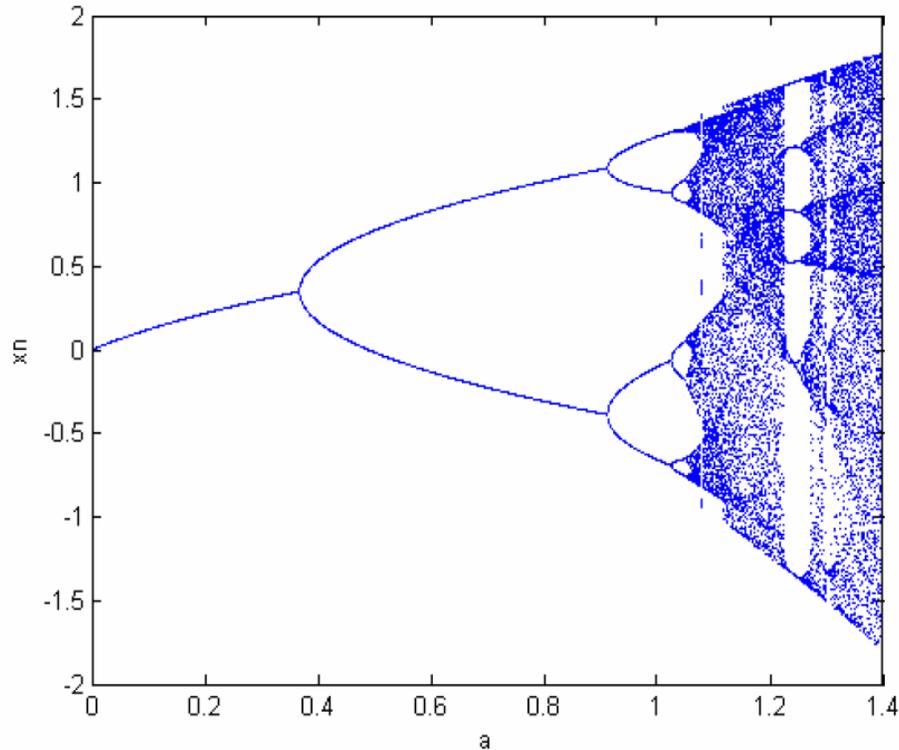


FIG. 2.2 – Diagramme de bifurcation en fonction du paramètre  $a$

### 3. Application de l'algorithme du contrôle :

Avant d'appliquer l'algorithme du contrôle au système, on fixe  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$  pour assurer la présence du phénomène chaotique. Le contrôle par la méthode OGY consiste à effectuer les opérations suivantes :

- Identification de l'orbite périodique à stabiliser : Remplaçant  $a$  et  $b$  dans l'équation (2.6), on obtient :

$$x_{e_1} = y_{e_1} = 0.8839, \quad x_{e_2} = y_{e_2} = -1.5839$$

Dans notre cas on choisit le point  $x_{e_1}$ , On va calculer les matrices  $A$  et  $B$  où  $A = Df(x)|_{x_{e_1}}$  et  $B = \partial f / \partial u$  :

$$A = \begin{pmatrix} -2x_{e_1} & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} -1.7678 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calcul des valeurs propres  $\lambda_u$  et  $\lambda_s$  : pour trouver  $\lambda_u$  et  $\lambda_s$ , on va résoudre l'équation  $\det |A - \lambda I| = 0$ , alors :

$$\lambda_{s,u} = -x_{e_1} \pm \sqrt{x_{e_1}^2 + b},$$

donc  $\lambda_u = -1.9237$ ;  $\lambda_s = 0.1559$

- Calcul des vecteurs propres  $\{e_u, e_s\}$  et les vecteurs covariances  $\{f_u, f_s\}$  : les vecteurs propres

sont calculés de l'équation suivante;  $[\lambda I - A]e = 0$ , et l'est choisi de la forme  $e = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$

avec  $e_s = \begin{pmatrix} \lambda_s \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $e_u = \begin{pmatrix} \lambda_u \\ 1 \end{pmatrix}$ , Alors :

$$e_s = \begin{pmatrix} 0.1559 \\ 1 \end{pmatrix}; e_u = \begin{pmatrix} -1.7678 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que  $f_s e_s = f_u e_u = 1$  et  $f_s e_u = f_u e_s = 0$ . Ce qui donne :

$$f_s = \left[ \frac{1}{\lambda_s - \lambda_u} \frac{\lambda_u}{\lambda_u - \lambda_s} \right] \text{ et } f_u = \left[ \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \right]$$

$$f_s = [0.4808 \ 0.9250] \text{ et } f_u = [-0.4787 \ 0.0746]$$

- Calcul du k :

Le paramètre k est représenté par :

$$k = \frac{\lambda_u f_u}{f_u B} = \frac{\lambda_u \left[ \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \right]}{\left[ \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = [\lambda_u - \lambda_u \lambda_s]$$

$$k = [-1.9237 \ 0.3011]$$

On choisit  $\delta = 0.01$  et comme l'exemple précédent, on va appliquer l'algorithme suivant :

- **étape 1** : on pose  $a_0 = 1.4$ ,  $b = 0.3$ ,  $(x_0, y, ) = (0.1, 0.1)$  et  $\varepsilon = 0.01$ .

- **étape 2** : boucle de test :

-Si  $|k\delta x_n| < \varepsilon$  alors  $\delta a_n = -k\delta x_n$

-Puis calculer le nouveau  $a$  et  $x_{n+1}$  jusqu'à ce que  $x_n$  soit égale à  $x_{f1}$ .

-Sinon, refaire l'étape 2.

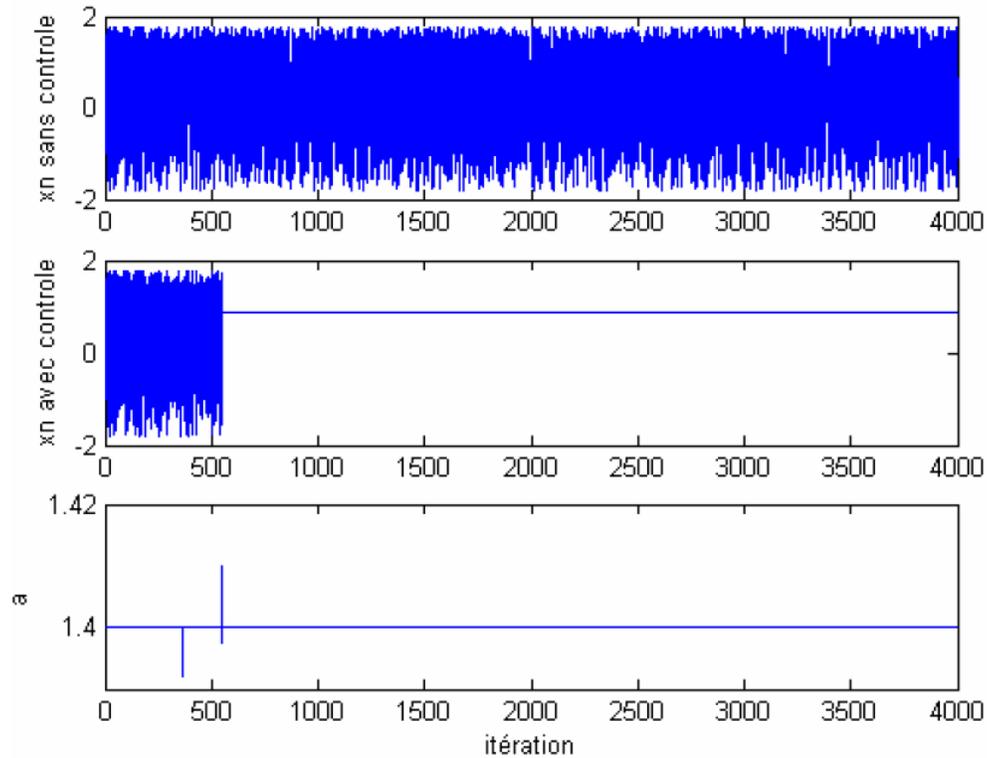


FIG. 2.3 – contrôle du système de Hénon par la méthode OGY

On remarque qu'au environ de 554 itérations, le système se stabilise à la valeur  $x_n = 0.8839$  après deux déclenchements du contrôle. Pour activer le contrôle plus tôt et pour éviter le double déclenchement du contrôle, on change la condition du test dans

l'algorithme du contrôle par :

$$(x_n - x_{e1})^2 - (y_n - y_{e1})^2 < \varepsilon$$

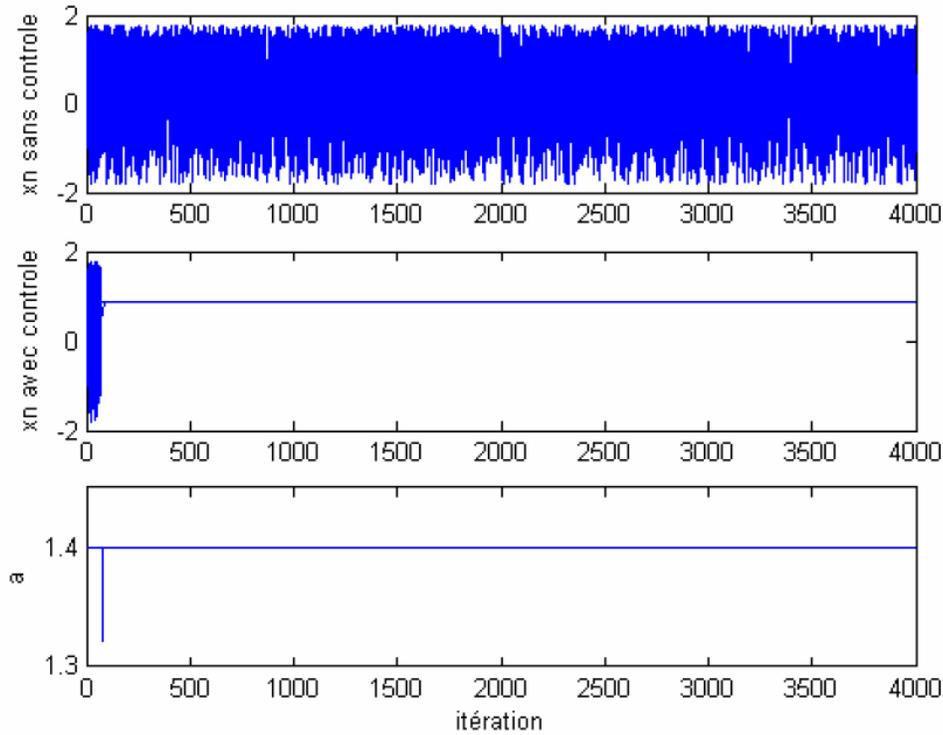


FIG. 2.4 – Contrôle de l'attracteur de Hénon

Dans cette figure on observe que le déclenchement du contrôle se produit une seule fois. Le système se stabilise à la valeur  $x_n = 0.8839$  après 79 itérations seulement, cela signifie l'efficacité de cette deuxième condition au voisinage du point fixe  $x_{e_1}$ .

### 2.4.2 Contrôle en boule ouverte

La première catégorie inclue les méthodes dans lesquelles le contrôle du chaos est réalisé en convertissant le comportement chaotique en n'importe quel comportement périodique désiré. Dans ce type d'algorithmes, le but est de faire en sorte que le flot  $x(t)$  suit une dynamique  $g(t)$  choisie au préalable. Ceci implique l'addition à l'équation du mouvement :

$$\dot{x} = f(x),$$

d'un terme  $u(t)$  de tel sorte que :

$$|x(t) - g(t)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Dans ce cas, les auteurs choisissent :

$$u(t) = \frac{dg}{dt} - f(g(t)).$$

Le problème est que la valeur de la perturbation  $u$  est généralement grande.

D'autres auteurs proposent des méthodes de perturbations périodiques ou stochastiques, appliquées aux variables ou aux paramètres du système pour éliminer ou supprimer le comportement chaotique. Historiquement, la première méthode pour transformer une trajectoire chaotique en périodique a été basée sur l'application d'un contrôle "sans rétroaction", par exemple, un harmonique  $u(t) = A \sin(\omega t)$ .

L'excitation peut refléter l'influence de certaines actions physiques (Force ou variation ("modulation") de certains paramètres du système contrôlé). Dans ce cas, la valeur  $u(t)$  ne dépend que du temps et ne dépend pas des mesures actuelles des variables système. Cette stratégie est simple à réaliser, mais l'état final de la solution est imprédictible.

D'autres méthodes parviennent à supprimer le chaos par l'utilisation du couplage mutuel d'un système chaotique avec un système périodique ayant des oscillations du même type.

### 2.4.3 Contrôle en boucle fermée

La deuxième catégorie qui est la plus intéressante inclue les méthodes qui sélectionnent la perturbation basée sur la structure du modèle.

Cette méthode consiste à perturber les variables d'état de système pour atteindre l'orbite cible, elle a l'avantage de garantir la stabilité robuste, la forte capacité de rejet de bruit.

Une approche générale pour le contrôle d'un système dynamique non linéaire, n'est pas

nécessairement chaotique, par feedback peut être formulée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, u, t) \end{cases} \quad (2.9)$$

Où  $x(t)$  est le vecteur d'état de système,  $y(t)$  le vecteur de sortie et  $u(t)$  le vecteur d'entrée de contrôle.

Etant donné un signal de référence  $r(t)$  ; qui peut être soit une constante (consigne) soit une fonction (trajectoire cible), le problème est de concevoir un contrôleur dans la forme de feedback d'état :

$$u(t) = g(x; t),$$

ou, parfois, dans la forme de feedback de sortie :

$$u(t) = g(y; t).$$

Où  $g$  est une fonction vectorielle non linéaire (inclus le cas linéaire), telle que le système contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, g(x, t)) \\ y = h(x, g(x, t)) \end{cases},$$

peut se conduire par le contrôle feedback  $g(x; t)$  pour traquer la cible :

$$\lim_{t \rightarrow t_f} \|y(t) - r(t)\| = 0.$$

Puisque la deuxième équation du système (2.7) peut être facilement traitée en général, elle est ignorée dans cette discussion en laissant simplement  $h(.) = I$ , l'application identité, de sorte que  $y = x$ .

Dans la théorie de contrôle classique, la cible pour le problème de poursuite est habituellement une valeur constante dans l'espace d'état qui n'est généralement pas un état du système. Le temps  $t_f$  est habituellement fini pour être pratique en applications réel.

Dans le contrôle du chaos, cependant, la cible peut non seulement être un état constant, mais souvent une orbite périodique instable ( $y$  compris une équilibre) du système donné, de plus, le temps est généralement  $t_f = \infty$  pour être significatif et pratique, puisque presque tous les comportements dynamiques non linéaires, sont des propriétés asymptotiques.

#### 2.4.4 Méthode de contrôle feedback retarde (DCF)

**Le principe :**

Soit un système dynamique continu de dimension  $n$ , ( $n = 3$ ) :

$$\dot{x} = f(x(t))$$

Où :  $x$  : Vecteur d'état ( $x \in \mathbb{R}^n$ ).

$f$  : Fonction continue ( $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ).

Le principe de la méthode (**DCF**) est d'appliquer sur le système continu une loi de commande  $U(t)$ , telle que :

$$\dot{x} = f(x(t)) + U(t),$$

avec :

$$U(t) = k(x(t) - x(t - \tau)),$$

$K$  : Le gain de retour.

$\tau$  : Temps de retard.

Le système contrôlé devient donc :

$$\dot{x} = f(x(t)) + k(x(t) - x(t - \tau)).$$

De cette équation on peut conclure que le contrôle (ou la chaotification) des systèmes continus se repose sur le bon choix des deux paramètres  $K$  et  $\tau$ . Pour illustrer le principe

de cette méthode pour le contrôle et la chaotification des systèmes continus.

### 2.4.5 Contrôlabilité

Le problème de caractériser la contrôlabilité locale et globale des systèmes non linéaires est difficile et fait partie des problèmes critiques du domaine de la théorie des systèmes non linéaires. Un concept fondamental sur la contrôlabilité d'un système non-linéaire provient d'un théorème qui énonce que si la linéarisation d'un système non linéaire autour d'un point d'équilibre est contrôlable alors le système non linéaire est lui même localement contrôlable.

**Définition 2.4.1** *Le système non-linéaire (2.6) est dit contrôlable, si pour tous points  $x_0, x_1$  dans  $M$ , il existe un temps fini  $T \leq t_0 \leq 0$  et une commande admissible  $u : [t_0; T] \rightarrow U$ , telle que l'unique solution de (2.6) au temps  $t = T$  avec la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  et pour une commande  $u(x, t)$  donnée,  $x(t)$  satisfait  $x(T) = x_1$ .*

### 2.4.6 Contrôle linéaire et non linéaire

Les méthodes de contrôle linéaire peuvent parfois être appliquées aux systèmes non linéaires pour un domaine bien limité et le but désiré peut être atteint quelquefois même au moyen d'une loi proportionnelle simple de contrôle et d'une boucle de retour. par exemple pour les systèmes de la forme :

$$\dot{x} = f(x) + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

On trouve la méthode de contrôle combinée qui est appelé aussi le contrôle par la boucle ouverte plus fermée (OPCL) , pour  $m = n$  et  $\det B \neq 0$ , la loi du contrôle proposée a été sous la forme :

$$u(t) = B^{-1}(\dot{x}^*(t) - f(x^*(t)) - K(x(t) - x^*(t)));$$

Où  $K$  est une matrice carrée de gain. Cependant, les problèmes de poursuite sur un large domaine de fonctionnement nécessitent l'inclusion des non linéarités dans la conception du contrôle. La théorie de contrôle non linéaire a développé une diversité de méthodes pour résoudre des problèmes plus compliqués sous des conditions de contrôle, une de ces méthodes est la linéarisation par boucle de retour.

# Conclusion

Les travaux exposés dans ce mémoire portent sur l'analyse et le contrôle de dynamiques chaotiques.

Nous avons présenté dans la première partie, les principales définitions mathématiques relatives aux systèmes dynamiques chaotiques.

Il peut être conçu sous deux formes : système dynamique non linéaire discrets et système dynamique non linéaire continus.

Nous avons abordé dans la deuxième partie, les problèmes de contrôle de chaos, la formulation mathématique des problèmes célèbres de contrôles des processus chaotiques. Nous avons aussi proposé dans cette partie les méthodes de contrôle des processus chaotiques : la méthode OGY et la méthode DCF.

Pour le contrôle des systèmes discrets la méthode de contrôle est la méthode OGY, l'avantage principal de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas la connaissance d'un modèle du système chaotique dont on désire contrôler le comportement, seuls quelques renseignements sur la section de Poincaré de l'attracteur sont utilisés en pratique. L'efficacité de la méthode a été mise en évidence par application sur un exemple tel que le systèmes de Hénon.

Pour le contrôle des systèmes continus. la méthode de contrôle est la méthode DCF, L'avantage de cette méthode est qu'il ne nécessite pas l'information exacte de l'UPO (unstable periodic orbit) et ne change pas la forme de l'orbite périodique instable souhaitée. Tout ce dont il a besoin est un temps de retard constant qui est la période de la cible UPO.

. Ces méthodes visent à améliorer la suppression du chaos et conduire les trajectoires du système à converger vers l'orbite périodique désirée ou la stabiliser sur son point fixe.

# Bibliographie

- [1] Boukabou, Abdelkrim and Mansouri, Nora. "Controlling chaos in higher-order dynamical systems. International Journal of Bifurcation and Chaos", (2004)
- [2] Boukabou, Abdelkrim. Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : contribution à l'élaboration de nouvelles approches. Diss. Thèse de doctorat, université Mentouri Constantine,( 2006).
- [3] Braiman, Y., Goldhirsch, I. "Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations, "Physical Review Letters, (1991).
- [4] Devaney, R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. (Addison-Wesley,New York , (1987).
- [5] Fradkov, Alexander L., and Alexander Yu Pogromsky. "Introduction to control of oscillations and chaos".. World Scientific, (1998).
- [6] Freeman, Walter J and Chang, H-J and Burke, BC and Rose, PA and Badler, J. "Taming chaos : stabilization of aperiodic attractors by noise [olfactory system model]," IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, vol. 44, no. 10, pp .(989–996, 1997).
- [7] Fronzoni, Leone and Giocondo, Michele and Pettini, Marco. "Experimental evidence of suppression of chaos by resonant parametric perturbations," Physical Review A, vol. 43, no. 12, pp .6483–6487, (1991).
- [8] Funke, Michael and Herrmann, Michael and Der, Ralf. "Controlling low-dimensional chaos : Determination and stabilization of unstable periodic orbits by Kohonen neural

- nets," International journal of adaptive control and signal processing, vol. 11, no. 6, pp .489–499, (1997).
- [9] Guessas, Mme Laarem. "Backstepping Backstepping adaptatif pour le contrôle la poursuite et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques."Thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas – Sétif (2018).
- [10] Hong, Yiguang et QinA, Hua-Shu."Introduction to chaos control and anti-control", Advanced topics in nonlinear control systems, (2001).
- [11] Leung, TP and Qin, Hua-Shu. "Advanced Topics in Nonlinear Control Systems", World Scientific, (2001).
- [12] Li, T.Y. & Jorke, J.A. "Period three implies chaos," American Mathematical Monthly, 82, pp. 481—485,.(1975).
- [13] Lima, R., Pettini, M. "Suppression of chaos by resonant parametric perturbations, "Physical Review A, (1990).
- [14] Loskutov, A Yu. "Problems of Nonlinear Dynamics. II," Suppression of Chaos and Control of Dynamic Systems, Vestn. MGU, no. 2, pp .3–21, (2001).
- [15] Magnitskii, Nikolai Aleksandrovich and Sidorov, Sergei Vasil'evich. "Control of chaos in nonlinear dynamical systems," Differential'nye Uravneniya, vol. 34, no. 11, pp .1501–1509, (1998).
- [16] Ouahabi, Rabiaa. "Systèmes dynamiques et chaos : Différentes méthodes de contrôle et de synchronisation". Université Mentouri de Constantine, (2018).
- [17] Patidar, V. Pareek, N.K, Sud, K.K. "Suppression of chaos using mutual coupling", Physics Letters A,( 2002).