République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

AZZOUNE Chourouk

Titre :

Résolution d'une EDP d'ordre 2 linéaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**KABOUL Hanane**	UMKB	Président
Dr.	**GUIDAD Derradji**	UMKB	Encadreur
Dr.	**SOLTANI Siham**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

Je dédie ce humble travail à **mes parents**.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce travail n'aurait pas pu se faire sans l'appui de plusieurs personnes que je tiens à remercier.

En premier lieu, je remercie **mes parents** car grâce à eux que j'ai pu continuer mes études à un niveau si avancé.

Je remercie mon encadreur **GUIDAD Derradji** qui m'a guidé dans ma projet et m'aidé à trouver des solutions pour avancer. Ainsi que les professeurs : **KABOUL Hanane** et **SOLTANI Siham** qui m'ont acceptés de présider les jurys de soutenance.

je suis particuliérement reconnaissant envers Pr **ATTAF Abd Alleh** le doyen de ma facultré, sans oublier de remercier tous mes ensiengnants de primaire à université.

En fin, je remercie toutes les personnes, amis, ...qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Généralité **3**

1.1 Equation aux dérivées partielles 3

1.2 EDP du $2^{\text{ème}}$ ordre linéaire 7

1.2.1 Les types des EDP linéaire du $2^{\text{ème}}$ordre 7

1.2.2 Problème bien posé 8

1.2.3 Conditions aux frontières 8

1.3 Des examples fondamentales 9

2 La forme canonique **11**

2.1 La variance du type d'équation 11

2.2 La forme canonique 13

2.2.1 Type hyperbolique : le déterminant $\Delta(x, y) \succ 0$ 14

2.2.2 Type parabolique : $\Delta(x, y) = 0$ en tout point de Ω. 16

2.2.3 Type elliptique 17

2.3 La solution générale 18

2.4 Problème de Cauchy 18

2.4.1 La solution générale (solution d'Alembert) 19

2.4.2 Problème aux limites 21

3 Examples **25**

Bibliographie **36**

Annexe B : Abréviations et Notations **37**

Introduction

Beaucoup des phénomènes et des problèmes du monde aujourd'hui basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP dans la suite.

En effet, les éqautions aux dérivées partielles traduisent par sa langage mathématique des lois des phénoménes en mécanique, la dynamique des fluides, l'élasticité et la météorologie,..., ect. En plus, grâce à la dèveloppement du technologique l'EDP a utilisée pour traiter des images. Comme consèquence, le physique et le mathématique a une grande relation. Le parole de Poincaré affirme cette relation : " toutes les lois sont tirées de l'expérience, mais, pour les énoncer, il faut une langue spéciale ; le langage ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague, pour exprimer des rapports si délicats, si riches et si précis. Voilà donc une première raison pour laquelle le physicien ne peut se passer des mathématiques ; elles lui fournissent la seule langue qu'il puisse parler". (Poincaré, 1910). On va citer des travaux des grands noms sur les EDP :

Euler écrit en 1765 un mémoire de mathématiques pures consacré à une EDP spécifique. **Lagrange** donne une sorte d'inventaire des EDP rencontrées dans des problèmes physiques et livre des méthodes innovantes d'intégration. Il est moins systématique et « maths pures » dans son étude des EDP. **D'Alembert** va être le seul à, simultanément :

- considérer les EDP hors de tout problème physique.

- entreprendre l'étude de classes très larges d'EDP.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres, **le premier chapitre** contient des définitions de base sur les EDP et en particulier, les EDP d'odre deux, linéaire. Dans **le deuxieme chapitre**, nous allons détallaier comment trouver la forme canonique de chaque trois types d'une EDP et ensuite, on a traiter le problème de Chauchy. **Le dernier chapitre** est une ensemble des différentes examples qui l'on va chercher leurs formes canoniques, leurs solutions par des méthodes différentes.

Chapitre 1

Généralité

Le but de ce chapitre de donner des définitions et notions générale sur l'EDP. En dèbut, on cite quelques propriétés d'une EDP (linéarité, l'ordre, homogène,...). En suite, on définit l'opérateur L. Aussi, on parle de les conditions aux frontières qui affirme que la solution est unique.

En plus, on prècise notre étude sur EDP d'ordre deux linéaire et on a étudier les catègories d'une EDP (parabolique, elliptique, hyperbolique).

1.1 Equation aux dérivées partielles

Définition 1.1.1 *soit $\Phi = \Phi(x, y, ...)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes en nombre fini sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.*

une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction Φ est une relation qui lie :

1. les variables indépedantes (x,y,z,...).
2. la fonction recherchèe Φ.
3. un nombre fini de dérivées partielles de Φ.

$\Longrightarrow$

$$F(x, y, z, ..., \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, ...) = 0 \tag{1}$$

Définition 1.1.2 *on appelle **ordre** d'une EDP le plus elevè des dérivées partielles intervenant dans l'EDP.*

Exemple 1.1.1 $\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Longrightarrow$ *EDP d'ordre 1.*

Exemple 1.1.2 $4\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Longrightarrow$ *EDP d'ordre 2.*

Définition 1.1.3 *on dit que l'EDP est **linéaire** si Φ et ses dérivées partielles apparaisent séparèment et à la puissance 1 dans l'EDP.*

Exemple 1.1.3 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \cos \Phi + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Longrightarrow$ *EDP d'ordre 2 non linéaire.*

Exemple 1.1.4 $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Longrightarrow$ *EDP d'ordre 2 linéaire.*

Définition 1.1.4 *une **solution** de l'équation (1) est une fonction $\Phi = \Phi(x, y, z, ...)$ des variables indépendantes $(x, y, z, ...)$ dont les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent aux point de Ω convenable de $\mathbb{R}^n$ telle qu'après avoir substituè cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation (1) celle ci est satisfaite.*

Proposition 1.1.1 *un **opérateur** L dèsignera une transformation qui associe à toute bonne fonction $\Phi = \Phi(x, y, z, ...)$ de plusieurs variables $(x, y, z, ...)$ sur un domaine Ω. Une fonction $L\Phi = L\Phi(x, y, z, ...)$ sur ce même domaine. La qualification bonne sinigfie ici que $L\Phi$ est bien définie. Parfois, il faudra axiger que les dérivées partielles de Φ existent jusqu'à un certain ordre.*

Propriété 1.1.1 *$L\Phi$ soit **bien définie**, il est nècessaire que la dérivées partielles de Φ par rapport à ses variables existent sur le domaine Ω.*

L'équation (1) peut donc s'écrire sous la forme $L\Phi = f(x, y, ...)$ où $f(x, y, ...)$ est une fonction des variables indépendantes, L est un opérateur et Φ est une fonction à déterminer.

Proposition 1.1.2 *Un opérateur L est **linéaire** ssi $L(au + bv) = aLu + bLv$, quels que soient les nombres réels a, b et les bonnes fonctions u, v. Implicitement, nous supposons que la fonction $au + bv$ est bien définie.*

Proposition 1.1.3 *Soit une EDP linéaire homogène $L\Phi = 0$ pour laquelle L est un opérateur linéaire. Si Φ_1, Φ_2 sont deux solutions de cette EDP et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $a\Phi_1 + b\Phi_2$ est aussi une solution. Ceci est le principe de superposition. Ici nous supposons que l'ensemble des "bonnes" fonctions pour lesquelles L est défini forme un espace vectoriel et dans ce cas, le principe de superposition affirme que l'ensemble des solutions d'une EDP linéaire homogène est un sous-espace de l'espace des "bonnes" fonctions.*

Preuve. Il suffit de noter que $L(a\Phi_1 + b\Phi_2) = 0$ à cause de la linéairité de L et car Φ_1 et Φ_2 sont des solutions de $L\Phi = 0$. $\blacksquare$

Proposition 1.1.4 *Soit une EDP linéaire $L\Phi = f(x, y, z, ...)$ pour laquelle L est un opérateur linéaire. Si Φ_1 et Φ_2 sont deux solutions de cette EDP, alors $\Phi_2 - \Phi_1$ est une solution de l'éqution linéaire homogène associèe $L\Phi = 0$. Ce résultat signifie que si nous connaissons toutes les solutions de $L\Phi = 0$ et que nous connaissons une solution particulière Φ_1 de $L\Phi = f(x, y, z, ...)$, alors nous connaissons toutes les solutions de cette dernière équation.*

En effet, elles sont toutes de la forme $\varphi + \Phi_1$ où φ est une solution de $L\Phi = 0$.

Preuve. Nous avons que $L\Phi_1 = f(x, y, z, ...)$ et que $L\Phi_2 = f(x, y, z, ...)$. Consèquemment $L(\Phi_2 - \Phi_1) = L\Phi_2 - L\Phi_1 = f(x, y, z, ...) - f(x, y, z, ...) = 0$. Nous avons donc que $\Phi_2 - \Phi_1$ est une solution de $L\Phi = 0$. $\blacksquare$

Exemple 1.1.5

$$\Phi + y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = x^3$$

est une EDP linéaire non-homogène (pour $\Omega = \mathbb{R}^2$, où $\Phi = \Phi(x, y)$). Dans cet exemple,

$$L\Phi = \Phi + y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

est un opérateur linéaire et $f(x, y) = x^3$. En effet L est linéaire, car si a et b sont deux nombres réels quelconques et Φ_1, Φ_2 deux "bonnes" fonctions (i.e. il faut que Φ_1, Φ_2 soient des fonctions dont les dérivées partielles apparaissant dans la définition de $L\Phi$ existent sur Ω), alors :

$$\begin{aligned}
L(a\Phi_1 + b\Phi_2) &= (a\Phi_1 + b\Phi_2) + y\frac{\partial^2(a\Phi_1 + b\Phi_2)}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2(a\Phi_1 + b\Phi_2)}{\partial y^2} \\
&= a(\Phi_1 + y\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}) + b(\Phi_2 + y\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}) \\
&= aL\Phi_1 + bL\Phi_2
\end{aligned}$$

D'autre part, on considère un example pour montrer le contraire (L est un opérateur non-linéaire) :

$$(\frac{\partial\Phi}{\partial y})\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \exp(2x)$$

Où $\Phi = \Phi(x, y)$. Cependant cette équation n'est pas linéaire. Dans ce cas,

$$L\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial y})\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + y\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

n'est pas un opérateur linéaire et f(x,y)=$\exp(2x)$. Pour vèrifier que $L\Phi$ n'est pas linéaire, il suffit de considèrer par exemple les deux nombres réels a=b =1 et les deux fonctions $\Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y) = y^2$. Avec ces choix, nous obtenons que $L(\Phi_1 + \Phi_2) = 16y$, $L\Phi_1 = L\Phi_2 = 4y$ et clairement $L(\Phi_1 + \Phi_2) \neq L\Phi_1 = L\Phi_2$.

1.2 EDP du $2^{\text{ème}}$ ordre linéaire

$$A\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+D\frac{\partial\Phi}{\partial x}+E\frac{\partial\Phi}{\partial y}+F\Phi=G(x,y) \tag{1.1}$$

où A,B,C,D,E,F sont les coefficients de l'EDP, ils sont des fonctions de x et y.

$\Phi(x,y)=\Phi$ est la solution.

est la forme générale pour une EDP linéaire, non homogène de $2^{\text{ème}}$ ordre.

Remarque 1.2.1 *si $G(x,y)\equiv 0$, on dit que l'EDP est* ***homogène.***

Remarque 1.2.2 *les coefficients de l'EDP peuvent être constantes.*

Exemple 1.2.1 $\frac{\partial\Phi}{\partial x}+6\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=2 \Longrightarrow$*EDP d'ordre 2 linéaire, non homogène à coefficients constantes.*

Exemple 1.2.2 $xy\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \Longrightarrow$*EDP d'ordre 2 linéaire, homogène à coefficients non constantes (dépendantes à x et y).*

1.2.1 Les types des EDP linéaire du $2^{\text{ème}}$ordre

On peut classer l'équation (1.1) en trois types selon le signe de déterminant (Δ) tel que : $\Delta(x,y)=B^2-4AC$.

1. $\Delta\succ 0$: EDP **hyperbolique**.
2. $\Delta\prec 0$: EDP **elliptique**.
3. $\Delta=0$: EDP **parabolique**.

Exemple 1.2.3 $y\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\Phi=0$

A=1 ; B=0 ; C=y.

$\Delta = B^2 - 4AC = -4y$

1. $y = 0 \Longrightarrow$l'EDP est parabolique.
2. $y \prec 0 \Longrightarrow$l'EDP est hyperbolique.
3. $y \succ 0 \Longrightarrow$l'EDP est elliptique.

1.2.2 Problème bien posé

Soit une EDP valide dans Ω, munie de conditions aux frontières. Le problème est **bien posé** si :

1. il existe une solution de l'EDP satisfaisant les conditions frontières (**existence**).
2. la solution doit être unique (**unicité**).
3. la solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (**stabilité**).

Tableau récapitulatif :

Pour une EDP du second ordre linéaire à coefficients constants, on a un problème bien posé dans les cas suivants (conditions suffisantes) :

Type	Frontière	Conditions
Hyperbolique	ouverte	Cauchy
Parabolique	ouverte	Dirichlet ou Neumann
Elliptique	fermèe	Dirichlet ou Neumann

1.2.3 Conditions aux frontières

Soient $\Phi(x, y) = \Phi$ et une EDP valide dans Ω domaine (ouvert connexe).

Trois types de conditions aux frontières existent :

1. On impose la valeur de Φ sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Dirichlet.
2. On impose la valeur $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = (\text{grad}\,\Phi).\vec{n}$. de C'est la condition de Neumann.
3. On impose ces deux conditions sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Cauchy.

Exemple 1.2.4 *Equation de Laplace en deux dimensions :*

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

avec $\Omega = \{x \in \mathbb{R}, y \succ 0\}$. *Conditions aux frontières (Cauchy) :*

$$\begin{aligned} \Phi(x, y = 0) &= f(x), \forall x \in \mathbb{R}; \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, y = 0) &= g(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si f=g $\Longrightarrow \Phi = 0$

Considèrons $\begin{cases} \Phi = 0 \\ f(x) = \frac{1}{m}\cos(mx) \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$

Alors $\Phi(x, y) = \frac{1}{m}\cos(mx)ch(my)$

Lorsque m est grand, la condition $\Phi(x, y = 0) = \frac{1}{m}\cos(mx)$ diffère peu de la condition $\Phi(x, y = 0) = 0$.

La solution, elle, diffère beaucoup à cause du cosinus hyperbolique, le problème n'est pas stable et donc il est "mal posé".

1.3 Des examples fondamentales

1. **Equation des ondes :**

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0$$

$\Omega = \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ c est une constante. Où $\Phi(x,t)$ est le déplacemant du point d'abcisse x à l'instant t.

2. **Equation de la chaleur :**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) = 0$$

Où $\Phi = \Phi(t,x,y,z)$, $k \succ 0$ est une constante.

3. **Equation de Laplace (du potentiel) :**

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$\Omega = \{x \in \mathbb{R},\ y \succ 0\}$

4. **Equation de Black-Scholes :**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \Phi}{\partial S} - r\Phi$$

où r et σ^2 sont des constantes, S et t sont les variables indépendantes et $\Phi = \Phi(S,t)$ est la variable dépendante.

Chapitre 2

La forme canonique

Dans ce chapitre on va chercher la forme canonique de chaque type d'une EDP qu'il est peu simplifier que l'EDP qui est donnée. En suite, on définit un système d'EDP sous condition de Chauchy (Problème de Chauchy).

2.1 La variance du type d'équation

soit dans le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2$ l'équation

$$A\Phi_{xx} + B\Phi_{xy} + C\Phi_{yy}F(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y, ...) = G(x, y) \tag{2.1}$$

qui est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre supèrieure. Admettons que les coefficients A, B, C sont continues dans le domaine Ω, et ils s'annulent pas simultanèment.

Montrons que le type d'équation est invariant par rapport à la transformation des variables indépendantes.

Soit :

$$\xi = \xi(x,y),\ \ \eta = \eta(x,y) \tag{2.2}$$

deux nouvelles variables qui sont des fonctions de x et y ayant aux moins leurs dérivées partielles d'ordre $m \preceq 2$, continues sur le domaine Ω telles que :

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0 \text{ sur } \Omega.$$

Le règle de chaîne nous donne :

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= \Phi_\xi \xi_x + \Phi_\eta \eta_x \\
\Phi_y &= \Phi_\xi \xi_y + \Phi_\eta \eta_y \\
\Phi_{xx} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\Phi_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \Phi_{\eta\eta}\eta_x^2 + \Phi_\xi\xi_{xx} + \Phi_\eta\eta_{xx} \\
\Phi_{xy} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \Phi_{\xi\eta}\left[\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right] + \Phi_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \Phi_\xi\xi_{xy} + \Phi_\eta\eta_{xy} \\
\Phi_{yy} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\Phi_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \Phi_{\eta\eta}\eta_y^2 + \Phi_\xi\xi_{yy} + \Phi_\eta\eta_{yy}
\end{aligned}$$

En remplaçant les dérivées dans (2.1) donc :

$$A_1\Phi_{\xi\xi} + B_1\Phi_{\xi\eta} + C_1\Phi_{\eta\eta} + F_1(\xi,\eta,\Phi,...) = G_1(\xi,\eta) \tag{2.3}$$

Où

$$A_1 = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$
$$B_1 = 2A\xi_x\eta_x + B\left[\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right] + 2C\xi_y\eta_y$$
$$C_1 = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

En calculant le déterminant $\Delta_1(\xi, \eta)$ de (2.3) :

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\xi, \eta) &= B_1^2 - 4A_1C_1 \\
&= B^2\left[(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y)^2 - 4\xi_x\eta_y\eta_x\xi_y\right] - 4AC(\xi_x^2\eta_y^2 + \xi_y^2\eta_x^2 - 2\xi_x\eta_y\eta_x\xi_y) \\
&= B^2(\xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y)^2 - 4AC(\xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y)^2 \\
&= (B^2 - 4AC)J^2 = \Delta(x, y)J^2 \neq 0
\end{aligned}$$

Donc si A, B, C sont continues aux alentours du points (x,y) alors que la transformation (2.2) n'est pas dégénérée donc les signes des déterminants Δ_1 et Δ aux alentours correspondant aux points (x,y) et (ξ, η) sont les même et par conséquent le type d'équation est conservé.

2.2 La forme canonique

On peut choisir les fonctions $\xi(x, y), \eta(x, y)$ de façon à simplifier l'équation aux dérivées partielles. Alors choisissons $\xi(x, y), \eta(x, y)$ pour que dans l'équation (2.3) les coefficients soient nuls pour $\Phi_{\xi\xi}$, $\Phi_{\eta\eta}$:

$$A_1 = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

$$C_1 = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

c'est–à–dire que les fonctions ξ, η soient des solutions de :

$$A\psi_x^2 + B\psi_{xy} + C\psi_y^2 = 0 \tag{2.4}$$

Avec $\psi = \xi$ ou η.

L'équation diffèrentielle ordinaire :

$$Ady^2 + Bdydx + Cdx^2 = 0 \tag{2.5}$$

correspondant à (2.4) est l'équation caractéristique et ses intégrales sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (2.1).

Supposons que A$\neq$ 0 et resolvons (2.5) par rapport à y' :

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{2.6}$$

2.2.1 Type hyperbolique : le déterminant $\Delta(x, y) \succ 0$

1ère forme canonique :

Les parties droites de (2.6) sont diffèrents d'où les intégrales

$$\varphi(x, y) = c_1 \quad ; \Psi(x, y) = c_2 \tag{2.7}$$

de ces équations qui sont indépendants. Posons les nouvelles variables indépendantes suivantes :

$$\varphi(x,y)=\xi \qquad ;\Psi(x,y)=\eta$$

Alors, on peut écrire les caractéristiques (2.7) dans l'équation (2.1) qu'on peut ramener sous la forme :

$$B_1\Phi_{\eta\xi}+F_2(\xi,\eta,\Phi,...)=G_1(\xi,\eta)$$

En suite, on divise l'équation dernière par B_1. On obtient :

$$\Phi_{\eta\xi}+F_3(\xi,\eta,\Phi,...)=G_2(\xi,\eta) \tag{2.8}$$

qui est la $1^{\text{ère}}$ forme canonique de l'équation hyperbolique.

$2^{\text{ème}}$ forme canonique :

Pour l'obtenir, il suffit de prendre les coordonnées (α,β) définies par :

$$\alpha=\xi+\eta$$
$$\beta=\xi-\eta$$

Nous obtenons par le règle de chaîne que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Phi}{\partial\beta})+\frac{\partial}{\partial\beta}(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Phi}{\partial\beta})\\ &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}\end{aligned}$$

En substitant ceci dans l'équation (2.8) alors :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}+F_4(\alpha,\beta,\Phi,...)=G_3(\alpha,\beta)$$

qui est le $2^{\text{ème}}$ forme canonique de l'équation hyperpolique.

2.2.2 Type parabolique : $\Delta(x, y) = 0$ en tout point de Ω.

Nous obtenons qu'une seule équation caractéristique.

$$y' = \frac{B}{2A}$$

Même en procèdant comme pour le cas hyperbolique, nous n'obtiendrons qu'une seule coordonnée caractéristique $\xi(x, y)$. Pour l'obtenir la second coordonnée caractéristique $\eta(x, y)$, il suffit de prendre une fonction $\eta(x, y)$ quelconque ayant au moins des dérivées partielles d'ordre $m \preceq 2$ continue sur le domaine Ω telle que :

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$$

On a $\Delta(x, y) = 0$ et $A_1 = 0$ donc :

$B = 2i\sqrt{AC}$ avec $i = \pm 1$.

$$A_1 = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = A\xi_x^2 + 2i\sqrt{AC}\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{B}\xi_y)^2 = 0$$
$$B_1 = 2A\xi_x\eta_x + B\left[\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right] + 2C\xi_y\eta_y = 2(\sqrt{A}\xi_x + i\sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\eta_x + i\sqrt{C}\eta_y) = 0$$

Quelque soit la fonction $\eta(x, y)$.

Alors, l'équation (2.1) sera transformée sous la forme :

$$C_1\Phi_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, \Phi, ...) = G_1(\xi, \eta)$$

Noter que $C_1 \neq 0$, sinon l'EDP de dèpart serait d'ordre 1. Ensuite, en divisant par C_1 l'équation dernière :

$$\Phi_{\eta\eta} + F_2(\xi, \eta, \Phi, ...) = G_2(\xi, \eta)$$

qui est la forme canonique d'une EDP parabolique.

2.2.3 Type elliptique

Si l'équation est elliptique sur le domaine Ω, on a ses deux équations caractéristiques sont à valeurs complexes et les solutions de ces équations sont conjuguèes entre elles. Nous avons les courbes suivantes :

$$\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) = c_1$$
$$\Psi(x, y) = \bar{\varphi}(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y) = c_2$$

Ψ est la conjuguèe de φ. Si nous posons $\xi(x,y) = \varphi(x,y)$ et $\eta(x,y) = \Psi(x,y)$, ces variables ne prennent pas des valeurs réelles. Les coordonnées caractéristiques dans le cas elliptique seront :

$$\alpha(x,y) = \frac{\xi(x,y) + \eta(x,y)}{2};$$
$$\beta(x,y) = \frac{\xi(x,y) - \eta(x,y)}{2i}.$$

Où $i^2 = -1$, ceci signifie que α est la partie réelle de ξ et β est la partie imaginaire de ξ. Après le changement de coordonées, nous obtenons comme EDP :

$$\Phi_{\alpha\alpha} + \Phi_{\beta\beta} + F(\alpha, \beta, \Phi, ...) = G_1(\alpha, \beta)$$

Cette équation est la forme canonique de l'EDP elliptique.

2.3 La solution générale

la notion de solution générale pour une EDP peut se ramener à une solution dépendant de deux fonctions arbitraires.

2.4 Problème de Cauchy

Soit f une fonction d'une seule variable et (C) la courbe définie par l'équation

$$y = f(x)$$

Posons $F(x,y) = f(x) - y$. Alors, le vecteur $\vec{n} = \nabla F(x_0, f(x_0)) = (f_0(x_0), -1)$ est perpendiculaire à (C) en $(x_0, f(x_0))$.

Définition 2.4.1 *Le problème de Cauchy relatif à une courbe (C) consiste à chercher*

(si elle existe) la solution de l'équation :

$$a(x,y)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = F(x,y,\Phi,\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y}) \tag{2.9}$$

qui vérifie :

$$\Phi(x,y) = g(x,y) \text{ sur } (C)$$

et

$$\frac{d\Phi}{dn}(x,y) = h(x,y)$$

Théorème 2.4.1 ***1***– *Si la courbe (C) n'est pas caractéristique, le problème de Cauchy a une solution et cetrte solution est unique.*

2– Si la courbe (C) est une courbe caractéristique, le problème de Cauchy peut ne pas avoir de solution ou il peut en avoir une infinité.

2.4.1 La solution générale (solution d'Alembert)

On consédérons l'équation des ondes qui est sous forme :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \tag{2.10}$$

Où $c \in \mathbb{R}_+^*$ a la signification physique d'une vitesse et Φ le déplacement d'un point x à l'instant t à partir de la position d'équilibre, dans une direction perpendiculaire à la position d'équilibre de la corde.

cette équation est une équation hyperbolique car :

$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = 4c^2 \succ 0$

Les équations caractéristique :

$$y' = \pm\frac{\sqrt{4c^2}}{2} = c$$

On pose $\varphi(x, t) = x - ct$, $\xi(x, t) = x + ct$;

$J = \begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \end{vmatrix} = c - (-c) = 2c \neq 0;$

alors la forme cononique de l'équation (2.10) est :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial\eta\partial\xi} = 0; \tag{2.11}$$

On va résoudre l'équation (2.11), on l'écrit sous la forme $\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}) = 0$, ce qui montre que la fonction $\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}$ ne dépend pas de η c'est -à-dire qu'elle est constante sur les droites verticales du plan (ξ, η).

Ainsi $\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = f(\xi)$ l'équation différentielle s'est transformèe en une équation de la forme simple (EDO), F'=f d'où $\boxed{\Phi = \int f(\xi)d\xi = F(\xi) + G(\eta)}$ F,G deux fonctions arbitaires.

On remarque que la constante d'intégration dépend pour ainsi dire ; de la droite verticale sur laquelle on intégre (dépend de η).

Si on cherche les solutions dans la classe des fonctions dans laquelle on a fait les calculs, la classe des fonctions dans laquelle on sous la forme $f(\xi) + g(\eta)$. Où la fonction f est régulière (f est dérivable, de dérivée continue) et la fonction g seulement continue. On arrive à des solutions qui en générale, n'ont pas résultat dissymétrique sur la régularité. La symétrie des dérivées partielles remarques conduisent à justifier l'introduction des fonctions généralisées ou distributions, qui permet de considérer des solutions de la forme $f(\xi) + g(\eta)$ avec f et g non régulières.

On suppose que les solutions sont cherchées dans la classe des fontions régulières ce qui revient à dire que f et g doivent être régulières.

Ainsi, $\boxed{\Phi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)}$ est la solution générale de l'équation (2.10).

Cette solution est appelée **la solution d'Alembert**.

2.4.2 Problème aux limites

Le problème de Chauchy met en évidence des similitudes et des différences entre la théorie des équations différentielles (EDO) et la théorie des équations aux dérivées partielles. En théorie des EDO le plan des phases est de dimension finie mais EDP le plan des phases est de dimension infinie.

Le problème de Chauchy pour une corde vibrante se présent sous la forme de l'équation (2.10) à laquelle on ajoute des **conditions initiales** :

$$\begin{aligned} \Phi(x, t = 0) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial \Phi(x, t = 0)}{\partial t} &= \Psi(t) \end{aligned} \tag{2.12}$$

La valeur initiale de la dérivée second n'est pas utile puisqu'elle est donnée par l'équation.

On suppose que $x \in \mathbb{R}$, c'est à dire que la corde est de longueur infinie.

Ce modéle est une bonne approximation de la réalité physique, au moins dans le cas des déformations petites par rapport à la longueur de la corde et pour des intervalles de temps assez petits.

– Le premier problème aux limites pour la corde de longueur finie introduit, en plus de l'équation (2.10) pour $x \in]0 \quad l[$ et des conditions initiales (2.12), des conditions aux limites :

$$\Phi(x = 0, t) = \Phi(x = l, t) = 0$$

qui traduisent le fait que la corde est fixée à ses deux extémités. Les vibrations longitudinales d'une barre fixée à ses deux extrémités, où $\Phi(x, t)$ est le déplacement longitudinal, à partir de la position d'équilibre, du point x à l'instant t.

– On a aussi les vibrations d'une barre avec une ou deux extrémités libres, ce qui se traduit par les conditions :

$$\Phi(x = 0, t) = 0 \text{ et/ou } \Phi(x = l, t) = 0$$

– La combinaison de ces différentes conditions fournit les deuxiéme et troisième problèmes aux limites.

–Le quatriéme problème aux limites se présente sous la forme

$$\Phi(x, t) = \Phi(x + l, t)$$

(problème périodique), ce qui revient à considérer le problème Φ sur un cercle de longueur l.

Problème de Chauchy pour les cordes infinies

Soit le problème de Chauchy :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \qquad \Phi(x, t = 0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial \Phi(x, t = 0)}{\partial t} = \Psi(t) \ .$$

Théorème 2.4.2 ***(Formule d'Alembert) :*** *La solution du problème de Chauchy ci-dessus* *est donnée par la formule :*

$$\Phi(x,t) = \frac{\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(y)dy.$$

Preuve. On sait déjà que la solution générale du problème est de la forme $\Phi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$. Soit le terme f(x-ct). Le graphe de la fonction f(x-ct), pour $t \succ 0$ fixé, est le translaté vers la droite du graphe de la fonction f(x) d'une quantité ct. Ce terme s'appelle l'onde progressive. De la même façon le terme g(x+ct) s'appelle onde réfléchie. Si on fait t=0, d'abord dans la formule de la solution générale, puis dans la formule obtenue après dérivation par rapport à t de cette solution générale, on obtient le système :

$$\begin{cases} \Phi(x,t=0) = \varphi(x) = f(x) + g(x) \\ \frac{\partial \Phi(x,t=0)}{\partial t} = \Psi(t) = -cf'(x) + cg'(x) \end{cases}$$

d'où on intégrant la deuxième égalité, on obtient :

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{c}\int_0^x \Psi(z)dz + k$$

d'où k est une constante quelconque. Alors, on obtient le système :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ f(x) - g(x) = -\frac{1}{c}\int_0^x \Psi(z)dz + k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \Psi(z)dz + \frac{k}{2} \\ g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \Psi(z)dz + \frac{k}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x-ct) = \frac{1}{2}\varphi(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x--ct} \Psi(z)dz + \frac{k}{2} \\ g(x+ct) = \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \Psi(z)dz - \frac{k}{2} \end{cases}$$

En remplaçant cette rèsultat dans la formule de la solution générale, alors :

$$
\begin{aligned}
\Phi(x,t) &= f(x-ct) + g(x+ct) \\
&= \frac{1}{2}\varphi(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct}\Psi(z)dz + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\Psi(z)dz - \frac{k}{2} \\
&= \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0}\Psi(z)dz + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\Psi(z)dz \\
&= \frac{\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\Psi(z)dz
\end{aligned}
$$

■

Chapitre 3

Examples

Il y a infinité des équations aux dérivées partielles, chaque EDP différent de les autres par : les coefficients, l'espace de définition Ω, l'ordre,...ect. Dans ce chapitre, on va résoudre des cas particulières des EDP dans $\mathbb{R}^2$. Et aussi, on dèclare comment chercher la forme canonique de chaque type d'EDP (hyperbolique, parabolique, elliptique).

1- On veut trouver les fonctions $\Phi(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \tag{3.1}$$

Cette équation signifie donc que la dérivée partielle par rapport à la première variable, de la dérivée partielle de Φ par rapport à la première variable est nulle.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \Phi}{\partial x}) = 0$$

Commençons donc par poser $v(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$. On doit avoir, pour tout (x,y)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Pour tout y fixé l'application partielle v(x,y) doit donc être constante. Bien sur cette constante peut dépendre de y. On voit donc que nécessairement

$$v(x,y) = C(y)$$

pour une certaine fonction C. On est ramené au problème suivant : trouver Φ telle que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = C(y)$$

En raisonnant de la même manière, on voit que nécessairement

$$\Phi(x,y) = C(y)x + D(y).$$

Où D est encore une certaine fonction. Il est enfin immédiat de vérifier que n'importe quelle fonction de ce type vérifie l'équation (3.1), pourvu que cette fonction admette des dérivées partielles. Notons dès à présent qu'il y a énormément de solutions pour l'équation (3.1), puisque aucune condition sur les fonctions C et D n'est apparue dans la démonstration.

2- On veut résoudre l'équation :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \Phi = 0 \tag{3.2}$$

Fixons y et posons $v(x) = \Phi(x,y)$, on trouve :

$$v'' + v = 0$$

les solutions sont de la forme :

$$v(x) = Acosx + Bsinx$$

et revenant à Φ, on obtient :

$$\Phi(x, y) = A(y)cosx + B(y)sinx$$

d'où la solution de (3.2), A et B sont deux fonctions quelconques.

3- Prenons un système de type hyperbolique pour le résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \\ \Phi(x, t = 0) = \varphi(x) = \cos(x) \\ \frac{\partial\Phi(x,t=0)}{\partial t} = \Psi(t) = \exp(-t) \end{cases}$$

$\Delta = B^2 - 4AC = 4 \succ 0$, telle que : $A = 1, B = 0, C = -1$.

Les équations cartésiennes sont :

$$y' = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2A} = 1$$

$\Rightarrow$

$$dy = \pm dx \Longrightarrow \int dy = \pm \int dx \Rightarrow \begin{cases} y - x = c_1 \\ y + x = c_2 \end{cases} ; c_1, c_2 \text{ sont constantes.}$$

Posons les nouvelles variables :

$$\xi(x, y) = x + y, \eta(x, y) = x - y$$

Ces variables sont indépendantes car :

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Alors en utilisant le règle de chaîne qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\Phi_{xx} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\Phi_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \Phi_{\eta\eta}\eta_x^2 + \Phi_\xi\xi_{xx} + \Phi_\eta\eta_{xx} \\
&= \Phi_{\xi\xi}(1)^2 + 2\Phi_{\xi\eta}(1)(1) + \Phi_{\eta\eta}(1)^2 + \Phi_\xi * 0 + \Phi_\eta * 0 \\
&= \Phi_{\xi\xi} + 2\Phi_{\xi\eta} + \Phi_{\eta\eta} \\
\Phi_{yy} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\Phi_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \Phi_{\eta\eta}\eta_y^2 + \Phi_\xi\xi_{yy} + \Phi_\eta\eta_{yy} \\
&= \Phi_{\xi\xi}(1)^2 + 2\Phi_{\xi\eta}(1)(-1) + \Phi_{\eta\eta}(-1)^2 + \Phi_\xi * 0 + \Phi_\eta * 0 \\
&= \Phi_{\xi\xi} - 2\Phi_{\xi\eta} + \Phi_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \tfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \tfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \Phi_{\xi\xi} + 2\Phi_{\xi\eta} + \Phi_{\eta\eta} - (\Phi_{\xi\xi} - 2\Phi_{\xi\eta} + \Phi_{\eta\eta}) = -4\Phi_{\xi\eta} = -4\tfrac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\partial\xi} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\partial\xi} = 0$$

cette équation est la première forme canonique ; la solution générale est :

$$\boxed{\Phi(\text{x,y})=\varphi(\text{x-t})+\Psi(\text{x+t})=\cos(\text{x-t})+\exp(-(\text{x+t})) \quad \text{; deux fonction de classe } C^2.}$$

La solution particulière est :

$$\Phi(x,t) = \frac{\varphi(x-t)+\varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\Psi(y)dy = \Phi(x,t)$$
$$= \frac{\cos(x-t)+\cos(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\exp(-y)dy$$
$$\boxed{=\frac{\cos(x-t)+\cos(x+t)}{2} + \frac{\exp(x-t)-\exp(-x-t)}{2}}$$

Pour obtenir le $2^{\text{éme}}$ forme canonique, posons :

$$\alpha = \xi + \eta = 2x$$
$$\beta = \xi - \eta = -2y$$

donc d'après le règle de chaîne :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Phi}{\partial\beta})$$
$$= \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}$$

4- On veut résoudre l'EDP homogène-linéaire suivante :

$$2y^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - yx\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - x^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \Phi = 0$$

On calcul le déterminant $\Delta(x,y)$ pour discuter le type de l'EDP :

$\Delta = B^2 - 4AC = (-yx)^2 - 4(2x^2)(-y^2) = x^2y^2 + 8x^2y^2 = (3xy)^2 \geq 0$

- $\Delta = 0$ ssi x=0 ou y=0, et on dit que dans ce cas l'EDP est elliptique.

- l'équation est **hyperbolique** $\Leftrightarrow$ $\Delta \succ 0$ $\Leftrightarrow$x$\neq$0 et y$\neq$0. En d'autres mots, l'équation est hyperbolique pour tous les points qui ne sont pas sur les axes des x et des y. Les équations caractéristiques sont :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-xy+\sqrt{(3xy)^2}}{2(2y^2)} = \frac{x}{2y}, y' = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-xy-\sqrt{(3xy)^2}}{2(2y^2)} = -\frac{x}{y};$$

Nous pouvons résoudre ces deux équations diffèrentielles ordinaires en utilisant la méthode de séparation de variables :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} \Rightarrow 2ydy = xdx \Rightarrow \int 2ydy = \int xdx \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = y^2 - \frac{x^2}{2}$$

Nous pouvons donc considèrer la coordonnée caractéristique $\boxed{\xi(x,y) = y^2 - \frac{x^2}{2}}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow \int ydy = \int -xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

Nous pouvons donc considèrer la coordonnée caractéristique $\boxed{\eta(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}}$.

On veut vèrifier que les coordonnées caractéristiques sont indépendantes :

$$J = \begin{vmatrix} -x & 2y \\ x & y \end{vmatrix} = -xy - 2xy = -3xy \neq 0 \text{ car x et y s'annulent pas.}$$

Nous pouvons maintenant effectuer le changement de variables. Par la règle de chaînes, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Phi_{xx} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\Phi_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \Phi_{\eta\eta}\eta_x^2 + \Phi_\xi\xi_{xx} + \Phi_\eta\eta_{xx} \\
&= \Phi_{\xi\xi}(-x)^2 + 2\Phi_{\xi\eta}(-x)(x) + \Phi_{\eta\eta}(x)^2 + \Phi_\xi(-1) + \Phi_\eta(1) \\
&= x^2\Phi_{\xi\xi} - 2x^2\Phi_{\xi\eta} + x^2\Phi_{\eta\eta} + \Phi_\eta - \Phi_\xi \\
\Phi_{yy} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\Phi_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \Phi_{\eta\eta}\eta_y^2 + \Phi_\xi\xi_{yy} + \Phi_\eta\eta_{yy} \\
&= \Phi_{\xi\xi}(2y)^2 + 2\Phi_{\xi\eta}(2y)(y) + \Phi_{\eta\eta}(y)^2 + \Phi_\xi(2) + \Phi_\eta(1) \\
&= 4y^2\Phi_{\xi\xi} + 4y^2\Phi_{\xi\eta} + y^2\Phi_{\eta\eta} + 2\Phi_\xi + \Phi_\eta \\
\Phi_{xy} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \Phi_{\xi\eta}\left[\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right] + \Phi_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \Phi_\xi\xi_{xy} + \Phi_\eta\eta_{xy} \\
&= \Phi_{\xi\xi}(-x)(2y) + \Phi_{\xi\eta}\left[(-x)(y) + (2y)(x)\right] + \Phi_{\eta\eta}(x)(y) + \Phi_\xi(0) + \Phi_\eta(0) \\
&= -2xy\Phi_{\xi\xi} + xy\Phi_{\xi\eta} + xy\Phi_{\eta\eta} \\
\Phi_y &= \Phi_\xi\xi_y + \Phi_\eta\eta_y = 2y\Phi_\xi + y\Phi_\eta
\end{aligned}$$

Noter que $y^2 = 2\frac{(\eta+\xi)}{3}$ et $x^2 = \frac{(4\eta-2\xi)}{3}$. En substituant ceci dans l'équation, nous obtenons :

$$-9x^2y^2\Phi_{\xi\eta} - \Phi_\eta(2y^2 - y + x^2) - 2\Phi_\xi(x^2 + y^2 - y) + \Phi = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\Phi_{\xi\eta} + \frac{(2y^2 - y + x^2)}{9x^2y^2}\Phi_\eta + \frac{2(x^2 + y^2 - y)}{9x^2y^2}\Phi_\xi - \frac{1}{9x^2y^2}\Phi = 0$$

Nous allons maintenant décrire l'équation canonique pour le premier quadrant du plan, à savoir les points (x,y) tels que x>0 et y>0. Donc :

$$x = \sqrt{\frac{(4\eta - 2\xi)}{3}} \text{ et } y = \sqrt{2\frac{(\eta + \xi)}{3}}$$

Finalement, on obtient **la première forme canonique** :

$$\frac{2}{3}(2\eta^2+\eta\xi-\xi^2)\Phi_{\xi\eta}-\left(\frac{\xi}{3}-\sqrt{\frac{2(\eta+\xi)}{3}}\right)\Phi_\eta+\left(4\eta-2\sqrt{\frac{2(\eta+\xi)}{3}}\right)\Phi_\xi-\Phi=0$$

Si nous avions utilisé les coordonnées $\alpha=\xi+\eta=\frac{3y^2}{2}$ et $\beta=\xi-\eta=\frac{y^2}{2}+x^2$, alors nous obtiendrions l**a deuxième forme de l'équation canonique**. Dans ce cas, nous aurions :

$$\boxed{\tfrac{1}{6}(3\alpha^2-3\beta^2-4\alpha\beta)\left(\tfrac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}-\tfrac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}\right)+\left(\tfrac{13\alpha-11\beta}{12}-\sqrt{\tfrac{2\alpha}{3}}\right)\tfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\left(\tfrac{-11\alpha+13\beta}{12}\right)\tfrac{\partial\Phi}{\partial\beta}\text{-}\Phi{=}0}$$

5- On a l'équation suivante pour chercher sa forme canonique :

$$x^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-4yx\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+4y^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\Phi=0$$

Cette équation est **parabolique** sur tout le plan de $\mathbb{R}^2$ car :

$\Delta=B^2-4AC=(-4yx)^2-4(x^2)(4y^2)=0\succ 0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$

Dans le cas parabolique, il n'y a qu'une seule équation caractéristique qui est :

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{-4xy}{2x^2}=-\frac{2y}{x}$$

Nous pouvons résoudre cette équation par séparation de variables :

$$\frac{dy}{y}=-2\frac{dx}{x}\Longrightarrow\int\frac{dy}{y}=-2\int\frac{dx}{x}\Longrightarrow\ln(|y|)=-2\ln(|x|)+k\Longrightarrow\ln(|y|)+\ln(|x|)^2\Longrightarrow x^2y=k_1$$

Où k, k_1 sont des constantes.

Une des coordonnées caractéristiques est $\boxed{\xi(x,y) = x^2y}$. Comme autre coordonnée caractéristique, il suffit de choisir une fonction $\eta(x,y)$ telle que $J(\xi,\eta) \neq 0$ (η et ξ sont deux variables indépendantes). Il y a beaucoup de choix, par exemple $\boxed{\eta(x,y) = x}$ pour x$\in \mathbb{R}^*$.

Nous obtenons donc par la règle de chaînes :

$$\begin{aligned}
\Phi_{xx} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\Phi_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \Phi_{\eta\eta}\eta_x^2 + \Phi_\xi\xi_{xx} + \Phi_\eta\eta_{xx} \\
&= \Phi_{\xi\xi}(2yx)^2 + 2\Phi_{\xi\eta}(2xy)(1) + \Phi_{\eta\eta}(1)^2 + \Phi_\xi * (2y) + \Phi_\eta * 0 \\
&= 4y^2x^2\Phi_{\xi\xi} + 4yx\Phi_{\xi\eta} + \Phi_{\eta\eta} + 2y\Phi_\xi \\
\Phi_{yy} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\Phi_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \Phi_{\eta\eta}\eta_y^2 + \Phi_\xi\xi_{yy} + \Phi_\eta\eta_{yy} \\
&= \Phi_{\xi\xi}(x^2)^2 + 2\Phi_{\xi\eta}(x^2) * 0 + \Phi_{\eta\eta} * 0 + \Phi_\xi * 0 + \Phi_\eta * 0 \\
&= x^4\Phi_{\xi\xi} \\
\Phi_{xy} &= \Phi_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \Phi_{\xi\eta}\left[\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right] + \Phi_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \Phi_\xi\xi_{xy} + \Phi_\eta\eta_{xy} \\
&= \Phi_{\xi\xi}(2xy)(x^2) + \Phi_{\xi\eta}\left[2yx * 0 + x^2 * 1\right] + \Phi_{\eta\eta} * 1 * 0 + \Phi_\xi * (2x) + \Phi_\eta * 0 \\
&= 2x^3y\Phi_{\xi\xi} + x^2\Phi_{\xi\eta} + 2x\Phi_\xi \\
\Phi_y &= \Phi_\xi\xi_y + \Phi_\eta\eta_y = \Phi_\xi(x^2) + \Phi_\eta * 0 = x^2\Phi_\xi
\end{aligned}$$

En substituant dans l'EDP, nous obtenons :

$$x^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - x^2(1+6y)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \Phi = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\eta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - (\eta^2 + 6\xi)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \Phi = 0}$$

6- Considèrons l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + y\frac{\partial\Phi}{\partial y} = y^2$$

Nous avons $\Delta = B^2 - 4AC = 2^2 - 4 * 1 * 5 = -16 = (4i)^2 \prec 0$, avec $i^2 = -1$; Cette équation est **elliptique** sur tout le plan $\mathbb{R}^2$.

Les équations caractéristiques sont :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1+2i \Rightarrow dy = (1+2i)dx \Rightarrow \int dy = \int(1+2i)dx \Rightarrow y = (1+2i)x + c_1 \\ \frac{dy}{dx} = 1-2i \Rightarrow dy = (1-2i)dx \Rightarrow \int dy = \int(1-2i)dx \Rightarrow y = (1-2i)x + c_2 \end{cases}$$

Où c_1, c_2 sont des constantes.

Alors, les coordonnées caractéristiques sont :

$$\xi(x,y) = y - (1+2i)x \quad ;\eta(x,y) = y - (1-2i)x$$

Ces deux fonctions $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$ ne sont pas des fonctions réelles. Dans le cas elliptique, nous pouvons pallier à ceci en prenant les parties réelles et imaginaires de $\xi(x,y)$ (ou encore de $\eta(x,y)$). En d'autres mots, nous considèrons les coordonnées $\boxed{\alpha(x,y) = \text{Partie réelle de } \xi(x,y) = y - x}$ et $\boxed{\beta(x,y) = \text{Partie imaginaire de } \xi(x,y) = -2x}$.

Nous obtenons donc par la règle de chaînes :

$$\begin{aligned}
\Phi_{xx} &= \Phi_{\alpha\alpha}\alpha_x^2 + 2\Phi_{\alpha\beta}\alpha_x\beta_x + \Phi_{\beta\beta}\beta_x^2 + \Phi_\alpha\alpha_{xx} + \Phi_\beta\beta_{xx} \\
&= \Phi_{\alpha\alpha}(-1)^2 + 2\Phi_{\alpha\beta}(-1)(-2) + \Phi_{\beta\beta}(-2)^2 + \Phi_\alpha * 0 + \Phi_\beta * 0 \\
&= \Phi_{\alpha\alpha} + 4\Phi_{\alpha\beta} + 4\Phi_{\beta\beta} \\
\Phi_{yy} &= \Phi_{\alpha\alpha}\alpha_y^2 + 2\Phi_{\alpha\beta}\alpha_y\beta_y + \Phi_{\beta\beta}\beta_y^2 + \Phi_\alpha\alpha_{yy} + \Phi_\beta\beta_{yy} \\
&= \Phi_{\alpha\alpha} * 1^2 + 2\Phi_{\alpha\beta} * 1 * 0 + \Phi_{\beta\beta} * 0 + \Phi_\alpha * 0 + \Phi_\beta * 0 \\
&= \Phi_{\alpha\alpha} \\
\Phi_{xy} &= \Phi_{\alpha\alpha}\alpha_x\alpha_y + \Phi_{\alpha\beta}\left[\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x\right] + \Phi_{\beta\beta}\beta_x\beta_y + \Phi_\alpha\alpha_{xy} + \Phi_\beta\beta_{xy} \\
&= \Phi_{\alpha\alpha} * (-1) * 1 + \Phi_{\alpha\beta}\left[(-1) * 0 + 1 * (-2)\right] + \Phi_\alpha * 0 + \Phi_\beta * 0 \\
&= -\Phi_{\alpha\alpha} - 2\Phi_{\alpha\beta} \\
\Phi_y &= \Phi_\alpha * 1 + \Phi_\beta * 0 = \Phi_\alpha
\end{aligned}$$

En substituant ceci dans l'équation, nous obtenons :

$$4\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + 4\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} + y\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = y^2$$

Notons que $y = \frac{2\alpha-\beta}{2}$; Alors :

$$\boxed{16\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + 16\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} + 2(2\alpha-\beta)\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = (2\alpha-\beta)^2}$$

Bibliographie

[1] Abdelkarim KELLECHE. (2019). Equations de la physique mathématique. Département de mathématique et informatique.

[2] Baddari, K., & Abbassov, A. (2009). Equations de la physique mathématique appliquées.

[3] Brezis, H. Ciarlet, P. G.,&Lions, J. L. (1999). Analyse fonctionnelle : théorie et application (vol. 91). Paris : Dunod.

[4] Robert Bédard. Offert par le département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal. Notes pour le cours Equations aux dérivées partielles.

[5] Vladmir Arnold. (1997). Leçons sur les équations aux dérivées partielles.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

EDP	:	Equation aux dérivées partielles.
$\partial\Omega$	:	la frontière de Ω.
$\Phi_{xx} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$	:	La dérivée second de la fonction Φ par rapport à la variable x.
EDO	:	Equation différentielle ordinaire.
ch	:	Cosinus hyperbolique.
sh	:	Sinus hyperbolique.