République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Zineb Achour

Titre :

Sur les théorèmes des points fixes

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Berbiche Mohamed**	UMKB	Président
Dr.	**Guidad Derradji**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Rezki IBrahime**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail de recherche

A mes chers et respectueux parents

Qui m'ont soutenu tout au long de ma vie.

Par leur patience, leur amourset leur encouragement

A mes frères,

A mes soeurs,

A toute ma famille,

A tout mes amis,

A mes collègues du département de Mathématique de l'université

(**MOHAMED KHIDER**) **de BISKRA**

qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Je vous remercie.

REMERCIEMENTS

La louange à Allah

qui nous a facilité l'accomplissement de ce travail de recherche chose ne peut être qu' avec la volonté de Dieu-à lui la toute puissance et la majusté et que la louange initiale et finale à Allah, seigneur des mondes.

Je tiens remercier mon encadreur **Dr.Guidad Derradji.**pour son soutien, son aide, ses conseils, et ses directives du début jusqu'à la fin de ce travail.

Je remercie mes tres chers parents **Asaid(rahmaho Allah),Fatma.**

Je remercie mes fréres **Saleh,Itahr,Omar,Djamel Eddin,Adel et Abd Allah**,ainsi que mes soeurs **Aicha,Hamida,Chafia**

Je tiens aussi à remercier notre chef du département de mathématique **Dr.HAFAYED** et les enseignants qui ont participé à notre formation, et tous les enseignants du département de mathématiques de **l'université Mohamed Kheider**.

Mes remerciements aussi aux membres de jurés qui nous honorent à accepter de juger ce modeste travail.

Berbiche Mohamed et **Rezki IBrahime**

J'exprime aussi mes gratitudes à toutes les personnes qui ont contribués de prés ou de loin à la réalisation de ce travail,surtout le professeur **Saïd Achour(rahmaho Allah)** et le professeur **Djamel Achour**

Mes remerciements aux nembres de jurés

Je vous remercie.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Dans ce mémoire, on étudiera quelques théorèmes du point fixe de Bourbaki-Kneser et quelques-unes de leurs applications. Aprés le théoèmes du point fixe de Banach et Schauder, Etant donné un ensemble M et une application $T : M \to M$; on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et M pour que T admet un point fixe.

Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problémes comme par exemple Chaque équation $F(x) = 0$ où F est une application dans un espace Banach, peut être écrit comme l'équation du point fixe

$$x = x + F(x)$$

le théorème du point fixe de Bourbaki-Kneser sut ensemble ordonnés et ses application. En particulier, cela monter que en derniere analyse. le théoème de Hahn-Banach est une conséquence du le théoème du point fixe de Bourbaki-Kneser .

Aprés cette introduction, le rest de ce mémoire se partage comme suit.

Dans le premier chapitre, on donne toutes les définitions et les outils indispensable pour le reste du mémoire. par exemple la définitions et la Proposition d'un Espase métrique et Espace vectoriels normé, Espace de Banach et Espase Hilbert, on donne les théorèmes des :Brouwer, Schauder, Picard-Lindelof, Krasnoselskii-Schaefer sera énoncé (qui ont été étudiés dans de vieilles mémoire)

Dans le deuxième chapitre, nous appelons le théorème du point fixe de Bourbaki-Kneser des notations et des propriétés fondamentales sur Application équations différentielles dans l'espace Banach. et donné le théorèm de (Krasnoselskii (1955), Reinermann (1971), généralisé de Picard Lindelôf, généralisé du Peauo) et les exemples de cette théorème

Dans le troisième chapitre,on donnée le Conséquences du théorème de point fixe de Bourbaki-Kneser par exemple le théorème d'Amann(1977) et de Tarski (1955), on applée le théorème de (Browder (1965c), Göhde (1965), Kirk (1965)

Chapitre 1

Quelques définitions et propriétés de Base :

1.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. On introduit par un bref rappel sur les éléments de base topologique. En particulier, comme les pac métrique et quelques définitions de conve rgence et continuté. Depuis on va consacrée à la présentation d'espace vectoriels normé Ensuit, on va donne un rappel sur l'espace de Banach et des théorème de base est donné aussi dans cette partie de ce projet. On conclut le chapitre par une petite section sur l'espase Hilbert. Les éléments qu'on va exposer ci-dessous ont été cueilli de plusieurs ouvrages de la topologie et certains livres de spécialisés sur les espaces et la plupart se trouve dans la bibliographie suivante(aussi a jouter bibliographie)

1.2 Espase métrique

1.2.1 Métrique :

Définition 1.2.1 *Rappelons qu'une fonction* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *définis sur un ensemble quelconque X vérifiant les conditions suivantes pour tout* $x,y,z \in X$:

1) d(x,y)=d(y,x) (symétrique)

2) d(x,y)=0$\Leftrightarrow x = y$

3) d(x,z)$\leq$d(x,y)+d(y,z) (inégalite triangulaire)

(X,d) sappelle espace métrique

1.2.2 Boules :

Définition 1.2.2 *pour x∈ E et r>0 on note :*

B(x,r)={y∈ $E/\|x-y\| < r$}, la boule ouvert de centre x et de rayon r

$\overline{B}$(x,r)={y∈ $E/\|x-y\| \leq r$}, la boule fermé de centre x et de rayon r

Définition 1.2.3 *(ouverte) : soit U une partie de E , On dit que U est ouvert si pour tout x∈ U il existe r>0 tel que B(x,r)⊂ U*

Définition 1.2.4 *(fermée) : une partie non vide de F est fermée si et seulement si elle posséde la propriété suivante :*

tout suite de points de F qui converge dans E admet sa limite dans F

1.2.3 Top d'un espace métrique :

Définitions et propriétés

Proposition 1.2.1 *l'ensemble de parties* $\check{T}_d$=$\{\theta \subset X/\forall x \in \theta, \exists B(x, r_x) \subset \theta\}$

est une topologie sur X

Définition 1.2.5 $\check{T}_d$ *est une topologie associée à la métrique d on supposera toujours que l'espace métrique (X,d) est muni de* $\check{T}_d$

1)la boule B(a,r) est un ouvert

2)les boules $B_f(a, r)$est fermé

Base de voisinages : Nous avons les propositions suivantes qui donnent des bases de voisinage

Proposition 1.2.2 *les énsembles*

$$\vartheta_1 = \{B(x, r)/r > 0\}$$

$$\vartheta_2 = \{B_f(x, r)/r > 0\}$$

sont des bases de voisinage de x

Proposition 1.2.3 *les ensembles*

$$\vartheta_1 = \{B(x, 1/n)/n > 0\}$$

$$\vartheta_2 = \{B_f(x, 1/n)/n > 0\}$$

sont des bases de voisinage de x

1.2.4 Convergence des suites :

Nous définirons la convergence des suites dans les espase métriques

Soit (X,d) un espase métriques, On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X converge vers un élément x de X ou que x est une limite de $(x_n)_n$ si $\lim_{x \to \infty} d(x_n, x) = 0$

Proposition 1.2.4 *Si une limite d'une suite d'éléments d'un espace métrique existe alors elle est unique*

Preuve. *Si $x \neq y$ étaient les limites de $(x_n)_n$ alors :*

$$r := d(x,y) > 0 \text{ et d'autre part } d(x,z) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y)$$

Donc :

$$d(x,z) \leq \lim_{x\to\infty}(d(x,x_n) + d(x_n,y)) = \lim_{x\to\infty} d(x,x_n) + \lim_{x\to\infty} d(x_n,y) = 0$$

donne une contradiction ■

Si$(x_n)_n$converge vers x, On écrit x= $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$

En écrivant la définition de la convergense d'une suite numérique (d(x_n,x))$_n$*vers* 0, On obtient la contradiction x= $\lim\limits_{x\to\infty}$ x_n si et seulement si pour tout r>0 il éxiste $n_r \in \mathbb{N}$ tel que d(x_n,x)<r pour tout n>n_r , Auterement dit x= $\lim\limits_{x\to\infty}$ x_n si et seulement si :

$$\forall r > 0,\ \exists n_r \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_r : x_n \in B_r(x)$$

c'est-à-dire : Dans un espace métrique x= $\lim\limits_{x\to\infty}$ x_n si et seulement si pour tout r>0 l'énesemble {n$\in \mathbb{N}$:$x_n \notin B_r(x)$} *est* fini

Donc : un point x d'un espace métrique est isolé si et seulement si x= $\lim\limits_{x\to\infty}$ x_n implique que(x_n)$_n$ est stationnaire

1.2.5 Continuité métrique :

Soit f :X→ Y ou X,Y sont des espace métrique dx dy leurs métrique respectives, on dit que f est continue en x si pour tout w$\in X$, En termes des boules, f continues en x si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B_{\delta(x)}) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

Bien sur, la boule autour de x est définie par rapport à dx et celle autour de $f(x)$ par rapport à dy, Une application f :$X \to Y$ est dite continue si elle est continue en x pour tout x$\in X$

Proposition 1.2.5 *une application f est continue en x si et seulement si x=$\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ entraîne $f(x)$=$\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)$ pour tout suite $(x_n)_n$ dans le domaine def*

1.3 Espaces vectoriels normés :

1.3.1 Norme :

Définition 1.3.1 *On appelle norme sur E, stoute application P de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout x,y $\in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on dit :*

1) p(x)=0 $\Leftrightarrow x = 0$ (condition de séparation)

2) p$(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ (condition d'homogénéité)

3) p(x+y)$\leq p(x) + p(y)$ (inégalité du triangle)

1.3.2 Métrique associée à une norme :

Proposition 1.3.1 *l'application d :(x,y)$\to \|x - y\|$ est une métrique sur E invariante (c'est-à-dire d(x+a,y+a)=d(x,y))on dit que d est la métrique associée à la norme*

1.3.3 Continuité :

Proposition 1.3.2 *l'application $x \to \|x\|$ est uniformément continue sur E*

Preuve. Cela résulte de la continuité uniforme de l'application x$\to d(x, \{0\}) = \|x\|$

Proposition 1.3.3 *toute forme linéaire continue en 0 est lipschitzienne donc continue (par tout)*

Preuve. *En effet si $f \in X^{\star}$et f est continue en 0 alors :* ■

■

il existe $\delta > 0$ tel que $\sup\{|f(x)| : \|x\| < \delta\} < 1$

alors : $\sup\{|f(x)| : \|x\| < 1\} < 1/\delta$ $c'est - à - dire$:

$$\forall x \in X : |f(x)| \leq 1/\delta \, \|x\|$$

par conséquent $|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \leq 1/\delta \, \|x - x_0\|$

pour tout x et x_0

1.3.4 Normes équivalentes :

Deux normes $\|.\|_1 \; et \; \|.\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe deux nombres réels strictement positife a et b telle que $a \, \|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq b \, \|.\|_1$

On montre facilement que si deux normes $\|.\|_1 \; et \; \|.\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes alors les distances associées sont équivalentes

Terminons par le célèbre théorème suivant :

Si E est un espace vectoriel de dimonsion fini sur $\mathbb{R}_+ ou \mathbb{C}$, toutes les normes sur E sont équivalentes

1.3.5 Limite et continuité dans les espaces normés :

Dans toute la suite (E,$\|\|_E) et (F, \|\|_F)$ $sont$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

limite d'une fonction et continuité en un point :

La proposition suivante ne pose pas de difficulté.

Proposition 1.3.4 *Soient A une partie de (E,$\|\|$) $a \in \bar{A}$, f et g des applications de (E,$\|\|) vers (F, \|\|)$, λ un nombre réel on suppose que f tend vers l et g tend vers m quand x tend vers a Alors :*

1) $f+g$ tend vers $l+m$ quand x tend vers a.

2) λf tend vers λl quand x tend vers a.

3) $\|f(x)\|$ tend vers $\lambda \|l\|$ quand x tend vers a.

Traduisons maintenant simplement la définition de la continuité

Proposition 1.3.5 *Soient* $(E,\|\|_E)et(F,\|\|_F)$ *des espaces vectoriels normés et* $f:(E,\|\|_E) \to (F,\|\|_F)$ *une application soit* $x_0 \in E$ *Alors* f *est continue au point* x_0 *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon$$

1.3.6 Boule :

Proposition 1.3.6 *toute boule (ouverte ou fermée)est convexe*

Preuve. *par translation, on peut toujours se ramener à l'origine soit B(0,r) la boule de centre 0 et de rayon r , Si x et y le segment d'origine x et d'extrémité y est (1-t)x+ty=z avec t*$\in [0,1]$

■

vérifions que z$\in B(0,r)$, $Nous$ avons

$\|z\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| < (1-t)r + tr = r$

Ainsi puisque $\|z\| < r$, $alors$ z$\in$B(0,r)

Corollaire 1.3.1 *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \|x_n\| = \|a\|$

1.4 Espace de Banach :

Définition 1.4.1 *On appelle espace de Banache un espace vectoriel normé complet*

Définition 1.4.2 *On suppose que le corps K des scalaires est complet par rapport à la métrique d(r,s)=*$|r-s|$ *(en particulier si K=*$\mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$*)*

Théorème 1.4.1 *(du graphe fermé)Si X, Y sont deux espaces de Banach et $f : X \to Y$ est linéaire et son graphe est fermé, alors f continu*

Théorème 1.4.2 *(Banach stefan) Si X est un espace de Banach Y est normé et $\mathcal{F} \subset L_c(X, Y)$ $vérifiée$*

$\sup\{\|f(x)\| : f \in \mathcal{F}\} < +\infty$ pour tout x$\in X$

$alors : sup\{\|f\| : f \in \mathcal{F}\} < +\infty$

1.5 Espace Hilbert :

Définition 1.5.1 *On appalle produit scalaires sur E, toute application $f : E \times E \to \mathbb{R}ou\mathbb{Q}$ telle que, pour tout x et $y\in E$ on dit :*

1)L'application x$\to f(x, y)$ est linéaire

2)$f(y, x) = \overline{f(x, y)}$

3)$f(x, x) \geq 0$ (positive)

4)$f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Théorème 1.5.1 *(Théorème du point fixe de Banach) Supposons que*

(i) On nous donne une application T : M$\subseteq$ X $\to$ M ;

(ii) M est un ensemble non vide fermé dans un espace métrique complet (X,d) ;

(iii) T est k-contractif, c'est-à-dire :

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{1,1}$$

pour tous x, y $\in$ M et pour un constante k, 0$\leq$ k $<$ 1.

Ensuite, nous pouvons conclure ce qui suit :

(a) Existence et unicité : l'équation

$$x = Tx,\ x \in M \tag{1,2}$$

a exactement une solution, c'est-à-dire T a exactement un point fixe sur M ;

(b) Convergence de l'itération : La suite (x_n) d'approximations successives converge vers la solution x pour un choix arbitraire du point initial x_0 dans M ;

(c) Estimations d'erreur : Pour tout n = 0,1,2, nous avons l'estimation de l'erreur a priori

$$d(x_n, x) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_0, x_1) \tag{1,3}$$

et l'estimation de l'erreur a posteriori

$$d(x_{n+1}, x) \leq k(1-k)^{-1}d(x_n, x_{n+1}) \tag{1,4}$$

(d) Taux de convergence : Pour tous n = 0,1,2,... nous avons

$$d(x_{n+1}, x) \leq kd(x_n, x) \tag{1,5}$$

Nous utilisons la terminologie suivante

Preuve. (I) (x_n) est une suite de Cauchy. Cela découle de

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

utiliser [1, 1] :

$$\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq ...$$
$$... \leq k^n d(x_0, x_1)$$

Application répétée de l'inégalité triangulaire et enfin la formule de somme pour une série géométrique

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq k^n (1-k)^{-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Puisque X est complet, la suite de Cauchy converge, c'est-à-dire, $x_n \to x$ quand $n \to \infty$ ■

L'équation [1, 3] suit en laisant $m \to \infty$.

(II) L'estimation de l'erreur [1, 4] suit en laisant $m \to \infty$ dans

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) &\leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) \\ &\leq (k + k^2 + ... + k^m) d(x_n + x_{n+1}) \\ &\leq k(1-k)^{-1} d(x_n + x_{n+1}) \end{aligned}$$

(III) Le point x est une solution de [1, 2]. Car T est continu par [1, 1]. Depuis $T(M) \subseteq M$ et $x_0 \in M$, on a aussi $x_n \in M$, pour tout n. Puisque M est fermé et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$, on obtient $x \in M$. L'équation

$$x_{n+1} = Tx_n, x_0 \in M, n = 0, 1, 2, ...$$

implique que $Tx = x$ pour $n \to \infty$.

(IV) L'équation [1, 5] découle de

$$d(x_{n+1}, x) = d(Tx_n, Tx) \leq kd(x_n, x).$$

(V) L'unicité de la solution. Supposer Tx=x et Ty=y, alors d(x,y)=d(Tx,Ty)$\leq$ kd(x,y), qui forces d(x,y)=0, c'est-à-dire, x=y

Théorème 1.5.2 *Si X a la propriété du point fixe et X est homéomorphe à Y, alors Y a la*

propriété du point fixe

Théorème 1.5.3 *La boule de l'unité fermée B^n, dans $\mathbb{R}^n$, a la propriété du point fixe*

Pour le reste de cette section, nous supposerons que $\mathbb{R}^n$ est doté de son produit intérieur standard

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

et norme

$$\|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$$

De plus, B^n la boule d'unité fermée dans $\mathbb{R}^n$

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

Théorème 1.5.4 *Tout sous-ensemble non vide, fermé, convexe C de $\mathbb{R}^n$ est un retrait de $\mathbb{R}^n$*

Théorème 1.5.5 *Si X a la propriété du point fixe et A est une rétractation de X, alors A*

a la propriété du point fixe

Théorème 1.5.6 *(de Brouwer) Tout sous-ensemble non vide, borné, fermé, convexe C*

de $\mathbb{R}^n$ a la propriété du point fixe

Preuve. Notez que C est un sous-ensemble d'une boule $B^\star$ Dans $\mathbb{R}^n$. Depuis $\mathbb{R}^n$ et $B^\star$ sont homéomorphes, le théorème 1.4.2 et le théorème1.5.1garantissent que $B^\star$la propriété du point fixe. En outre, le théorème1.5.2 implique que C est une rétractation de $B^\star$ et ■

donc : le théorème1.5.2s'assure que C a la propriété du point fixe

Théorème 1.5.7 *Soit D un sous-ensemble fermé d'un espace linéaire normé E et F :D → E une application compacte et continue. Alors F a un point fixe si et seulement si F a un ε-point fixé .*

Théorème 1.5.8 *Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace linaire normé E et f :E → C une application compacte et continue. Alors pour chaque $\varepsilon>$ 0, il y a un ensemble*

fini A $=\{a_1, ..., a_n\}$,dans $F(E)$ et une application continue de dimension finie F_ε : E→C avec les propriétés suivantes :

(i)

$$\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| \leq \varepsilon, \ pour\ tout\ x \in E$$

(ii)

$$F_\varepsilon(x) \subseteq co(A) \subseteq C$$

Théorème 1.5.9 *(le théorème du point fixe de Schauder) Soit C un sous-ensemble fermé*

convexe d'un espace linéaire normé E. Ensuite, toute applications compacte et continue f : C → C possède au moins un point fixe

Preuve. D'après le théorème1.5.5, avec D=C, il suffit de montrer que f a un ε-fixé ■

point pour tout $\varepsilon>$ 0. Fix $\varepsilon>$ 0. Le théorème1.5.6garantit l'existence d'une application continue de dimension finie

$f_\varepsilon : c \to c$ avec

$$\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| \leq \varepsilon, \ pour\ x \in C \qquad (1,6)$$

et $F_\varepsilon(C) \subseteq$ co(A)$\subseteq C$ pour un ensemble fini A $\subseteq$C. Puisque co(A) est fermé et borné et $\mathrm{F}_\varepsilon(co(A) \subseteq co(A))$, on peut appliquer le théorème1.5.4(théorème du point fixe de Brouwer) pour déduire qu'il existe $x_\varepsilon \in co$(A) avec x_ε=$F_\varepsilon(x_\varepsilon)$. De plus, [1, 6] rendements

$$\|x_\varepsilon - F_\varepsilon(x_\varepsilon)\| = \|F_\varepsilon(x_\varepsilon) - F(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$$

Théorème 1.5.10 *Le théorème de Picard-Lindelof garantit l'existence d'une solution unique à problème de*

la valeur initiale lorsque f est Lipschitzienne continue.

Soit $x : [t_0 - c, t_0 + c] \to y$ un application dans B-espace y, et considérons le problème de la valeur initiale

$$x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = y_0$$

Ici $y_0 \in y$ La norme sur y est notée$\|.\|$. Nous mettons :

$$X = C([t_0 - c, t_0 + c], Y), 0 < c < \infty;$$

c'est-à-dire que X est l'espace de toutes les fonctions continues $x : [t_0 - c, t_0 + c] \to y$.

En tant que norme, nous choisissons

$$\|x\|_X = \max_{t\in[t_0 - c, t_0 + c]} \|x(t)\|;$$

Théorème 1.5.11 *(théorème du point fixe de type Krasnoselskii-Schaefer)*

Le théorème du point fixe de Schaefer donnera une solution T-périodique de

$$x(t) = a(t) + \int_{t+h}^{t} D(t, s)g(s, x(s))ds : (2.1)$$

Si D et g vérifient certaines conditions de signes indépendantes de leur grandeur. Une combinaison du théorème de l'application contractante et le théorème de Schauder (connu sous le nom de Krasnoselskii théorème) donnera une solution T-périodique de

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_{t+h}^{t} D(t, s)g(s, x(s))ds \tag{1,7}$$

Si f définit une contraction et si D et g sont assez petits. On prouve un théorème de point fixe qui est une combinaison du théorème de l'application contractante et théorème de Schaefer qui donne une solution T-périodique de [1, 7] lorsque f définit une contraction, tandis que D et g satisfont aux conditions de signes précitées.

Chapitre 2

Le théorème du point fixe de Bourbaki-Kneser :

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous introduisons des concepts de base, des notations et des propriétés fondamentales sur Application équations différentielles dans l'espace Banach. De plus, nous rappelons Le théorème du point fixe de Bourbaki-Kneser

Théorème 2.1.1 *(théorème de Taylor généralise) :*

Soit la fonction $f : U(x) \to Y$ défini sur un voisinage convexe ouvert U(x) de x et soit XetY des espace Banach

a)Si $\delta^k f(y, h)$ *existe*, soit k=1...n et pour tous y$\in U(x)$ et fixé h avec x+h$\in U(x)$ alors

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \delta^k f(x, h) + R_n$$

est valable avec le reste

$$\left\| R_n^{\star} \right\| \leq \frac{1}{n!} \sup_{0<\tau<1} \left\| \delta^n f(x + \tau h, h) \right\|$$

si la fonction g→ $\delta^n f$(y,h)est continue sur U(x) alors

$$R_n^{\bigstar} = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^n f(x+\tau h, h)d\tau$$

b)Si $f', f'', ..., f^{(n)}$ existent en fait sous la forme de dérivé f sur U(x) puis $f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\delta^k f(x,h) + R_n$
les reste lié

$$\|R_n\| \leq \frac{1}{n!}\sup_{0<\tau<1} \left\|f^{(n)}(x+\tau h)h^n\right\|$$

Si $f^{(n)}$ est également continue sur U(x), alors

$$R_n = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\tau h)h^n d\tau$$

Proposition 2.1.1 *(Picard(1890), Lindelof(1894)) :*

soit donné les nombres à t_0 p_0 et le rectangle

$$Q_b = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |t-t_0| \leq a, |x-p_0| \leq p\}$$

pour a>0, b>0 fixé supposons que $f : Q_b \to \mathbb{R}$ est continue et que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq l\,|x-y| \ \ pour\ tous\ (t,x),(t,y) \in Q_b$$

$$|f(t,x)| \leq k\ pour\ tous\ (t,x) \in Q_b$$

Où l>0 et k>0 sont fixés alors :

a) Existence et caractère unique. Si nous posons c=min(a,b/k) et b=p_0, l'équation intégrale

$$x(t) = p_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s))ds\ pour\ tous\ t \in [t_0-c, t_0+c]$$

a exactement une solution continue x(.). Sur l'intervalle $[t_0 - c, t_0 + c]$, cette fonction est également la seule solution du problème de valeur initiale

$$x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = p \text{ sur } [t_0 - c, t_0 + c]$$

b) Approximation successive, Les approximations successives

$$x_{n+1}(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds, \;\; \mathrm{x}_0(t) = 0; \;\; \text{n=0,1,...}$$

pour convergence uniformément sur $[t_0 - c, t_0 + c]$ $vers$ la solution x(.)

c) Dépendance continue de la solution aux valeurs initiales. Soit $[t_0 - d, t_0 + d]$ avec un d fixé 0<d<c choisi

Alors l'équation intégrale

$$x(t) = p + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \; pour \; tous \; t \in [t_0 - c, t_0 + c]$$

a exactement une solution continue $\mathrm{x}_p(.)$. Sur l'intervalle $[t_0 - d, t_0 + d]$, pour chaque p dans un voisinage suffisamment petit de p_0

De plus, ce qui suit est vrai :

Si p$\rightarrow p_0$, alors $x_p(t) \rightarrow x_{p_0}(t)$ uniformément sur $[t_0 - d, t_0 + d]$

Corollaire 2.1.1 *(Error estimée)*

Soit k=1-exp(-$l \times c) = 1 - e^{-l \times c}$ et pour tous n=0,1,...Ona :

$\|x_n - x\|_1 \leq k^n (1-k)^{-1} \|x_1 - x_0\|_1$

$\|x_{n+1} - x\|_1 \leq k(1-k)^{-1} \|x_{n+1} - x_n\|_1$

$\|x_{n+1} - x\|_1 \leq k \|x_n - x\|_1$

et

$$\|x\|_1 = \max_{t_0-c \le t \le t_0+c} |x(t)| \, \varrho^{-l|t-t_0|}$$

Dans le corollaire suivant, nous considérons une situation où contrairement à la proposition2.2.1un plus grand intervalle d'existence pour la solution peut être garantie

Corollaire 2.1.2 *Soit fixé a>0 et L≥* 0, *et soit*

$$Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \le a\}$$

Si $f : Q \to \mathbb{R}$ est continu avec

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L\,|x-y| \text{ pour tous } (t,x),(t,y) \in Q$$

Dans le théorème2.1.1nous généraliserons la proposition2.1.1aux équations différentielles ordinaires pour les fonctions avec des valeurs dans les espaces B, Nous y tirons également des conclusions sur des solutions globales.

Théorème 2.1.2 *(Krasnoselskii (1955), Reinermann (1971)). Supposons que :*

(i) l'ensemble M est un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe de l'espace Banach X,

et

(ii) les opérateurs T, S : M⊆X→X ont la propriété (T + S) (M)⊆M.

Alors T + S a un point fixe sur M si l'une des deux conditions supplémentaires suivantes est remplie :

(a) T est k-contractif et S est compact ;

(b) T est non expansif, S est fortement continue et X est uniformément convexe.

Théorème 2.1.3 *(théorème généralisé de Picard Lindelöf).soit* $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in Y$ *et*

$$Q_b = \{(t, y) \in: |\mathbb{R} \times Y \, |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$$

pour le point fixe a,b> 0. Supposons f :Q_b →Y est continue et

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\,\|x - y\|\,, pour\ tous\ (t,x),(t,y) \in Q_b$$

et

$$\|f(t,y)\| < k, pour\ tous\ (t,y) \in Q_b$$

où L≥0 et k> 0 sont des nombres réels fixes. Choisissez C tel que 0<C<a et kc <b. Ensuite, les suivants sont vrais.

(a)L' existence et unicité. Le problème de la valeur initiale (x'(t)=$f(t, x(t)), x(t_0) = 0)$) a exactement une solution continuellement différente X (.) Sur l'intervalle [t_0-C, t_0+ C].

(b) L'approximation successive. Les approximations successives (x_n) où

$$x_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds, x_0(t) = y_0$$

convergent uniformément sur [t_0-c,t_0+c] comme n→ ∞ vers la solution x (.).

(c) Dépendance continue à la valeur initiale. La solution x (.) dépend en permanence, par rapport à la norme de

C([t_0-c,t_0+c],Y), de la valeur initiale y

Erreur d'estimation, l'approximation successive(x_n) peut être formulée de manière similaire à corollaire2.1.1 en remplaçant simplement la quantité $|x(t)|\, dans\ \|x\|_1 = \max\limits_{t_0 - c \leq t \leq t_0 + c} |x(t)|\, \varrho^{-l|t-t_0|}$ par la norme $\|x(t)\|$, la preuve du résultat suivant est similaire à la corollaire2.1.2

Théorème 2.1.4 *(théorème généralisé du Peauo) : Soit* $t_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in Y$ *et*

$$Q_b = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times Y : |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$$

pour les numéros fixes, 0<a, b<∞. Supposons que f :Q_b $\rightarrow$y est compact et c'est $\|f(t, y)\| \leq k$ pour

tous (t,y)$\in$ Q_b avec k> 0. Nous avons défini c=min (a,$\frac{b}{k}$).

Ensuite x$'$(t) = f(t,x(t)) ; x(t_0) = y_0 ; a une solution continuellement différente solution sur [t_0 - C, t_0 +C]

2.2 Applications équations différentielles dans l'espace Banach :

Nous considérons le problème de la valeur initiale

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)), x(t_0) = y_0 \tag{2.1}$$

Ici $y_0 \in Y$ Ce qui suit est une généralisation des théorèmes 2.1.3et2.1.4. En préparation, nous définissons

$$Q = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times Y : |t - t_0| < a, \|y - y_0\|_y \leq b\}$$

pour les nombres positifs fixes a et b.

Proposition 2.2.1 *(Solution de (1)). Pour fixe, étant donné y$\in$Y et $t_0 \in \mathbb{R}$, l'équation2.1a une solution différentiellement continue x (.) Sur l'intervalle compact [t_0 - c,t_0 + c] avec des valeurs dans l'espace B Y si le Les conditions suivantes sont remplies :*

i) La fonction : $f : Q \rightarrow Y$ est continue et également Lipschitzienne - continue par rapport à la deuxième variable c'est-à-dire

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L||x-y||_y$$

pour tous (t,x) et (t,y) dans Q et L fixes ;

(ii) la fonction g :Q→Y est compacte ;

(iii) la Somme f+ g est bornée, i.e : $||f$(t,y)+g(t,y)$|_y \leq B$, pour tous (t,y) dans Q et B fixes ;

(iv) Nous choisissons le nombre c> 0 pour que cL<1, c≤a et Bc≤b

Preuve. Au lieu de 2.1 nous considérons l'équation intégrale ■

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \{f(s,x(s)) + g(s,x(s))\}ds. \tag{2.2}$$

Laisser

$$X = C([t_0 - C, t_0 + c], Y)$$

et

$$M = \{x \in X : ||x - y_0||_x < b\}.$$

ensuite 2.2 devient l'équation de l'opérateur

$$x = Kx + Cx \qquad , x \in M \tag{2.3}$$

où

$$(Kx)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

$$(Cx)(t) = \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))ds$$

Comme dans les démonstrations des théorèmes2.1.1 et2.1.2, il s'ensuite que (K + C) (M) $\subseteq$ M.

De plus, l'opérateur K est k-contractuel avec K=Lc

Donc le théorème2.1.2 implique l'existence d'une solution de 2.3, donc de2.2, et donc, finalement, de 2.1.

2.2.1 Le théorème du point fixe de Bourbaki-Kneser :

Définition 2.2.1 *(1) Un ensemble M est appelé ordonné si M n'est pas vide et pour certaines paires (x,y) dans M $\times$ M il existe une relation x<y qui satisfait :*

(i) x $\leq$y pour tout x$\in$M ;

(ii) si x $\leq$y et y $\leq$x alors x = y ;

(iii) si x $\leq$y et y $\leq$z alors x $\leq$z.

La notation x<y signifie x $\leq$y et x $\neq$ y.

(2) Soit N $\subseteq$M et M ordonnés. L'ensemble N est appelé chaîne (de M) si N est non vide et pour tout x,y$\in$N, l'une des deux conditions x$\leq$y et y$\leq$x est vraie.

(3) Soit N$\subseteq$M encore. L'élément x$\in$N est appelé le plus grand ou le plus petit dans N si y$\leq$x ou x$\leq$y, respectivement, pour tout y$\in$N. L'élément x$\in$N est appelé élément maximal de N ssi il n'y a pas de y$\in$N tel que x<y.

(4) L'ensemble ordonné M est appelé bien ordonné si chaque sous-ensemble non vide de M a le plus petit élément

Il résulte de (ii) que l'ensemble N peut avoir au plus un plus grand et un plus petit élément. Les éléments maximaux n'ont pas besoin d'être uniques. Chaque plus grand élément est également un élément maximal. De nombreux autres concepts sont définis comme pour les nombres réels. Parmi ceux-ci, il y a les limites supérieures et inférieures, infimum et supremum. Soit y$\in$M et N $\subseteq$M. Alors y est appelé le supremum (la plus petite borne supérieure) de N si y est une borne supérieure de N, c'est-à-dire x$\leq$y pour tout x$\in$N, et y$\leq$u pour toutes les bornes supérieures u de N. Nous écrivons y=sup(N). De même, inf(N) est défini comme étant la plus grande borne inférieure. Si sup(N) et inf(N) existent, ils sont uniques.

Définition 2.2.2 *Par un réseau, nous entendons un ensemble ordonné M avec la propriété que inf{x,y} et sup{x,y} existent pour tout x,y$\in$M.*

Un treillis est appelé IFF inf(N) et sup(N) existent pour tous les sous-ensembles non impartis N de M.

Exemple 2.2.1 *L'ensemble des nombres réels avec l'habituel $\leq$-relation est*

commandé, mais pas bien

commandé, car]0,1], par exemple, ne contient aucun élément plus petit. De plus, $\mathbb{R}$ est une chaîne. De plus, $\mathbb{R}$ est un treillis, mais pas un réseau complet, car inf$\mathbb{R}$ et sup$\mathbb{R}$ n'existent pas. En revanche, l'intervalle [0,1] est un réseau complet.

Exemple 2.2.2 *Soit x être un ensemble et laisser m=2^x être l'ensemble de tous les sous-ensembles de X. Nous définissons une relation de commande A $\leq$B sur M par un A$\subseteq$ B. Puis m est un réseau complet avec*

infM = $\bigcap\limits_{A\in M}$ A et supM = $\bigcap\limits^{A\in M}$ A.

Théorème 2.2.1 *(Théorème à point fixe de Bourbaki (1940) et Kneser (1950)). Supposons que*

(i) la fonction f : M$\rightarrow$ M sur un ensemble ordonné M satisfait x $\leq$ f(x) pour tous x$\in$ M, et

(ii) chaque chaîne de M a un supérieur.

Alors : f à un point fixe

Corollaire 2.2.1 *Le théorème reste vrai si nous remplaçons "$\leq$" dans (i) par "$\geq$", et "supérieur" par "inférieur" dans (ii).*

Des éléments de ce théorème peuvent déjà être trouvés dans Zermelo (1908), dans la preuve du théorème de bon ordre. Une interprétation visuelle est montrée à la figure [2, 1] avec M=[0,1]. Si nous supposons le lemme de Zorn alors :

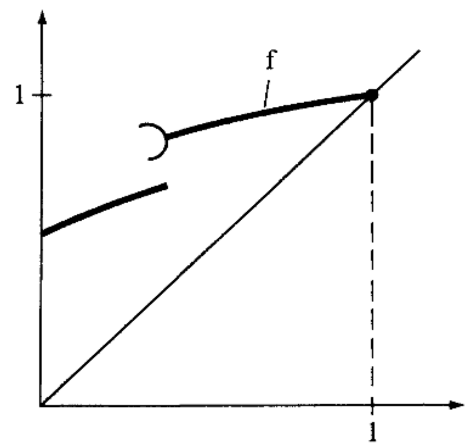

FIG. 2.1 – figure

La preuve du théorème 2.2.1 est triviale. En effet, avec le lemme de Zorn, (ii) implique l'existence d'un élément maximal x, chez M. par (i), $x_0 \leq f(x_0)$, de sorte que $x_0=f(x_0)$.

Cependant, nous voulons présenter une preuve ici qui est indépendante du lemme de Zorn et de l'axiome de choix (cf. $A_1(0)$). L'avoir fait, nous pourrons utiliser le théorème2.2.1 afin d'établir de nombreux résultats importants appartenant aux fondements de la théorie définie.

Preuve. L'idée de la preuve est de construire une chaîne A avec $f(A)\subseteq A$ et $\sup(A)\in A$. Laisser $U=\sup(A)$.Alors $f(u)\in A$ implique $f(u)\leq u$. Par (i), $u\leq f(u)$ de sorte que $u = f(u)$ et $\sup(A)$ est le point fixe souhaité. ∎

(I) Construction de A. Nous choisissons un $x_0 \in M$et appelé un sous-ensemble B dans M Admissible IFF :

(a) $x_0 \in$ B ;

(b)-f(b)$\in$ B ;

(c) le supérieur de chaque chaîne de B appartient à B.

L'ensemble M est admissible par (ii). Soit un désigné l'intersection de tous les ensembles admissibles B. Évidemment A est admissible. En particulier,$f(A) \subset A$. Ainsi, la preuve est complète si nous pouvons montrer que A est une chaîne. À cette fin, nous définissons les deux ensembles :

$$P \stackrel{def}{=} \{x \in A : si\ A \in y\ et\ y < x\ alors\ f(y) \leq x\}$$

$$B_x \stackrel{def}{=} \{z \in A : z \leq x\ ou\ f(x) \leq z\}.$$

(II) Nous montrons que $B_x = A$, pour x$\in P$, puisque $B_x \subseteq A$ il suffit de montrer que B_x est admissible, car dans ce cas A$\subseteq$ B_x

(II-1) La condition (a) est vraie pour B_x. Pour l'ensemble D$\stackrel{def}{=}${x$\in$M :y$\geq$ x_0}est admis par (i), (ii), donc A$\subseteq$D et donc

$$x_0 \leq y\ pour\ tout\ y \in A. \tag{2.4}$$

Pour x$\in$P, nous avons x$\in$ A, de sort que x_0 $\leq$x par2.4. L'ensemble A est admissible, c'est-à-dire x_0 $\in$A. Par conséquent, x_0 $\in B_0$.

(II-2) La condition (b) est vraie pour B_x, Soit z$\in B_x$. Alors z=x, z<x ou f(x)$\leq$z. Or $f(A)$ $\subseteq$A et z$\in$ B_x $\subseteq$A implique $f(z) \in A$. Pour montrer que$f(z)$ $\in B_x$, il suffit donc de montrer que f(z) $\leq$x ou f(x) $\leq$ f(z). Si z=x alors f (z)=f(x). Si z<x alors f(z)$\leq$x depuis x$\in$P et z$\in$ A. Enfin, f(x)$\leq$z implique immédiatement f(x)$\leq$z $\leq$ f(z) par (i).

(II-3) La condition (c) est vraie pour B_x. Soit C une chaîne de B_x et $u\overset{def}{=}\sup(C)$, qui existe par (ii). Nous devons montrer que u$\in B_x$.

Par l'admissibilité de A et (c), C$\subseteq$A implique u$\subseteq$A. Par la définition de B_x, soit c$\leq$x pour tout c$\in$ C ou f(x)$\leq$c pour un certain c$\in$C. Dans le premier cas u=sup(C)$\leq x$, Dans le second cas f(x)$\leq u$ Ainsi u$\in B_x$ pour x$\in P$ implique la difinition de B_x et A=B_x pour x$\in P$ implique si x$\in P$ et z$\in A$ alors

$$z \leq x \ ou \ f(x) < z \tag{2.5}$$

(III) Nous montrons que P=A. Depuis P$\subseteq A$, il suffit de montrer que P est admissible, car alors A $\subseteq$P.

(III-1) La condition (a) est vraie pour P, c'est-à-dire $x_0 \in$ P. En effet, nous avons $x_0 \in$A. De plus, y$\in$ A et y<x_0 impliquent toujours trivialement que f(y)<x_0, puisqu'il n'y a pas de y$\in$A, par 2.4, tel que y<x_0

(III-2) La condition (b) est vraie pour P. Soit x$\in$ P. Nous devons montrer que f(x) $\in$ P, c'est-à-dire que f(x)$\in$A et que si z$\in$ A avec z<f(x) alors f(z)$\leq f$(x).

Puisque f(A)$\subseteq$ A et x$\in$ A, nous avons f(x)$\in$ A. Soit maintenant z$\in$ A et z <f (x). Par2.5, nous avons z $\leq$x ou f(x)$\leq$z. Puisque z$\leq f$ (x), seul z$\leq$x est possible.

Nous considérons les deux cas, z=x et z<x. Si z=x alors f(z)=f (x). Si z <x alors f(z)$\leq$x parce que x$\in$ P, z$\in$ A, et par la définition de P By (i), f(z) $\leq$x $\leq f$ (x). Donc f(z)$\leq f$(x) dans les deux cas.

(III-3) est vraie pour P. Pour voir cela, soit C une chaîne de P et $\vartheta \overset{def}{=}\sup(C)$. Nous devons montrer que $\vartheta \in$ P, c'est-à-dire que $\vartheta \in$ A et que si z$\in$ A et z<ϑ alors f(z)$\leq \vartheta$.

Puisque P$\subseteq$A est aussi une chaîne de A. Mais A est admissible, donc par (c)

$\vartheta \in$ A. Soit maintenant z$\in$A et z<ϑ. Depuis C $\subseteq$ P, il résulte de 2.5 que si X$\in$C alors on a z$\leq$x ou z$\geq f$(x)$\geq$ x. Remarque (i). Il est impossible que z$\geq$x soit valable pour tout x$\in$ C, car z<ϑ=sup(C). Par conséquent z$\leq x_1$ pour certains $x_1 \in$C. On distingue les deux cas z=$x_1$et z<x_1.

Supposons que z=x_1 Rappelez $x_1 \in$C. Alors z<ϑ =sup(C) implique qu'il y a un $y_1 \in$ C pour lequel z<y_1.Sinon

y $\leq$z pour tout y$\in$C, puisque C est une chaîne. Mais cela contredit z<sup (C). Puisque C $\subseteq$ P, on a $y_1 \in$P. Par la définition de P, il découle à la fois de $y_1 \in$P, z$\in$A et z<$y_1$que f(z)<y_1. Puisque $y_1 \in$C, nous avons $y_1 \leq$sup(C)=ϑ, de sorte que f(z)$\leq y_1 \leq \vartheta$.

Supposons que z<x_1. Alors par la définition de P, $x_1 \in$P et z$\in$ A implique immédiatement f(z)$\leq x_1$. De plus, $x_1 \in$C implique $x_1 \leq$sup(C)=ϑ, de sorte que f(z)$\leq \vartheta$.

Ainsi, nous avons obtenu f(z)$\leq \vartheta$

dans les deux cas.

(IV) Nous montrons que A est une chaîne. D$\in$ P=A et 2.5, il s'ensuit que pour x$\in$A et z$\in$ A, nous avons z$\leq$x ou

z$\geq f$(x)$\geq$x. Remarque (i)

Chapitre 3

Le résultat du théorème du point fixe de Bourbaki-Kneser :

3.1 Introduction :

Conséquences du théorème du point fixe Bourbaki-Kneser. Utilisez le théorème 3.2.1 et le théorème3.2.2 ou le corollaire 3.2.1 pour prouver les théorèmes à point fixe suivants.

3.2 Les théorèmes à point fixe d'Amann et de Tarski et Browder :

Théorème 3.2.1 *(Browder (1965c), Göhde (1965), Kirk (1965)). Supposons que la fonction* $T : M \subseteq X \to M$ *est non expansive, où* M *est un ensemble non vide, fermé, borné et convexe dans l'espace* B *uniformément convexe* X*. Ensuite, l'ensemble de points fixes de* T*, Fix* (T)*, est non vide , fermé et convexe.*

Théorème 3.2.2 *(Théorème à point fixe d'Amann (1977)) :supposons que*

(i) la fonction f : X→X est monotone augmentant sur un ensemble ordonné X, c'est-à-dire si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$,et

(ii) chaque chaîne de X a un supérieur, et

(iii) là est un élément $x_0 \in X$ pour lequel $x_0 \leq f(x_0)$. Alors f a un plus petit point fixe dans l'ensemble $\{x \in X : x_0 \leq x\}$.

Corollaire 3.2.1 *La carte f a le plus grand point fixe dans l'ensemble*

$$\{x \in X : x_0 \leq x\}$$

si (i) est vrai, (ii) est vrai avec "supérieur" remplacé par "inférieur", et (iii) est vrai avec $x_0 \leq f(x_0)$ remplacé par

$f(x_0) \leq x_0$. Ce théorème à point fixe fournit une approche uniforme à un certain nombre de théorèmes à point fixe supplémentaires, y compris le théorème3.2.1.

(I) Existence d'un point fixe. Nous posons

$$M = \{x \in X : x \leq f(x) \ et \ x_0 \leq x\}$$

et montrons que les hypothèses du théorème 2.2.1 sont remplies. $M \neq \emptyset$, puisque $x_0 \in M$ par (iii).

Nous avons $f(M) \subseteq M$. Pour $x \in M$ implique $x \leq f(x)$ et $x_0 \leq x$. La monotonie de f implique que $f(x) < f(f(x))$, c'est-à-dire

$f(x) \in M$.

Evidemment, $x \leq f(x)$ pour tout $x \in M$. Nous montrons que chaque chaîne C de M a un supérieur dans M. Tout d'abord, C a un supérieur u dans X par (ii). Maintenant $x \leq u$ pour tout $x \in M$ implique que $x \leq f(x) \leq f(u)$ pour tout $x \in M$. Puisque u=sup(C), cela dit que $u \leq f(u)$. Alors $x_0 \in M$ implique $x_0 \leq u$, de sorte que $u \in M$.

Maintenant le théorème2.2.1 garantit l'existence d'un point fixe dans M.

(II) Existence du plus petit point fixe dans l'ensemble {x∈X : x_0 ≤x}. Nous définissons maintenant

$$N = \{y \in M : y \text{ est une borne inférieur pour l/ensemble à point fixe de } f \text{ dans } M\}.$$

Par analogie avec et sous utilisation de (I), on montre facilement que f a un point fixe sur N, à nouveau à l'aide du théorème 2.2.1. Ce point fixe est alors le plus petit point fixe de f en M et donc dans {x∈ X : $x_0 \leq$ x}.

Théorème 3.2.3 *(Le théorème à point fixe de Tarski (1955)). Chaque fonction croissante monotone f : X→ X on a Terminé Trettice X a un point fixe le plus petit et le plus grand.*

L'interprétation intuitive de ceci est contenue à la figure [3, 1] Ici x = [0,1]

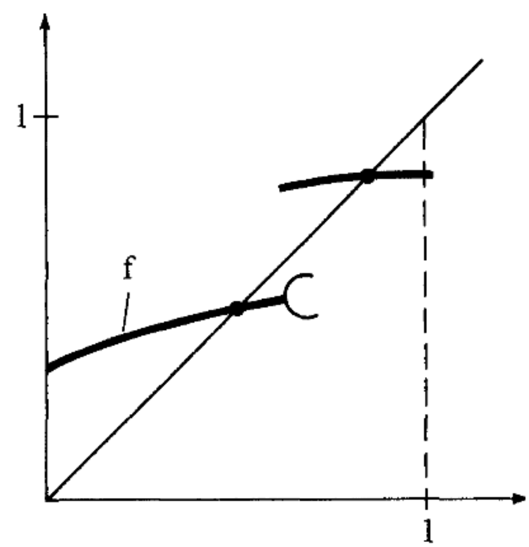

FIG. 3.1 – figure

Preuve. Chaque sous-ensemble non vide de X à la fois un inférieur et un supérieur, puisque X est un réseau complet. Soit u_0=inf (x) et ϑ_0=sup (x). Ensuite, $u_0 \leq f(u_0)$ et $f(\vartheta_0) \leq \vartheta_0$. La conclusion suit maintenant du théorème3.2.1 et du corollaire 3.2.1

Bibliographie

[1] D.R. SMART, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, Cambridge, 1980

[2] Brezis, H., Ciarlet, P. G, & Lions, J. L. (1999). Analyse fonctionnelle : thèorie et applications (Vol. 91). Paris : Dunod.

[3] . ERWIN KREYSZIG, Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley New York, 1978

[4] Sondaz, D. Bien Maîtriser les mathématiques. Compacité, Connexité. Introduction à la topologie. L3, Masters, Capes, Agrègation. Exercices corrigés avec rappels de cours

[5] G. GRIPENBERG, S.O. LONDEN, and O. STAFFANS, Volterra Integral and Functional Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[6] J.J. LEVIN, On a nonlinear Volterra equation, J. Math. Anal. Appl. 39 (1972) 458ñ 476

[7] Zeidler, E. (1998). Nonlinear functional analysis and its applications : I Fixed-Point Théorèms . Springer Science

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

ε, λ	:	*Des petites paramétres positives.*
$\mathbb{N}$	:	*Ensemble des nombres naturels*
$\mathbb{R}$	:	*Ensemble des nombres réels*
$\mathbb{C}$	:	*Ensemble des nombres complexes*
$co(A)$	:	*Le plus petite ensemble convexe contenant* A.
$B - espace$	:	*Espace de Banach*
B^n	:	*La boule d'unité fermée dans* $\mathbb{R}^n$.
$\varnothing$	:	*Ensemble vide*