

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **analyse**

Par

Chettouh Besma

Titre :

Stabilité et contrôle d'un système d'ordre fractionnaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Guidad Daradji	UMKB	Président
Dr. Menacer Tidjani	UMKB	Encadreur
Dr. Tberha Warda	UMKB	Examineur

Septembre 2020

DÉDICACE

Avant tout, je remercie **Allah** le tout puissant qui m'a donnée
La santé, le courage et la volonté de réaliser ce travail, et je
souhaite de faire que le mieux à chaque pas dans ma vie
professionnelle et privée.

Je dédie ce travail :

A ma très chère Mère **Salima Chettouh** pour son encouragement,
son Soutien, son affection et ses prières incessantes tout au
long de mon Parcours.

A mon très cher Père **Abd Elmadjid** que je lui souhaite une
longue heureuse vie c'est grâce à lui que je suis ici

A mes chers frères **Yassine, Sami et Anis.**

A ma précieuse sœur **Leila**

Et à toute ma grande famille **CHETTOUH**

A mes amies (**Amel, Ilhem et Noura**) que le dieu l'aide
pour réaliser ses rêves, Et toute mes amis qui sont pas là avec
moi mais ils ont un place dans mon cœur

Sans oublier mes cousines **Imène et Madiha.**

A tous mes collègues de ma promotion 2019/2020, spécialement (**Oumiama, Manel,**
Fouziya, Bouthaina, Sawsen et Houda)

REMERCIEMENTS

C'est avec l'aide de **DIEU** tout puissant que ce modeste travail a pu être réalisé,

DIEU qui m'a donné foi, raison et lucidité.

Je tiens à remercier mon encadreur **Dr Menacer tidjani**, pour m'avoir donné

l'opportunité

de travailler sur ce projet, pour son grand soutien scientifique et moral, pour les suggestions

et les encouragements qu'il m'a apportés durant mon projet.

Mon sincère remerciement aux membres de jury Drs. (**Guidad Daradji**) et (**Taberha**

Warda)

qui ont accepté de juger mon travail.

Je remercie vivement tous les enseignants de notre département qui ont toujours donné le

meilleur d'eux-même afin de nous assurer une formation de qualité.

Je n'oublie pas de remercier ma famille d'être avec nous dans tout les moments.

Enfin je m'exprime ma profonde reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué de

prés ou de loin pour la réalisation de ce travail.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	vi
Introduction	1
1 Calcul Fractionnaire	3
1.1 Opérateurs d'intégration et de la dérivation fractionnaire :	3
1.1.1 Approche de Grünwald-Letnikov (G-L) :	3
1.1.2 Approche de Riemann-Liouville (R-L) :	5
1.1.3 Lien avec l'approche de Grünwald-Letnikov :	10
1.1.4 Approche de Caputo :	10
1.2 Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires :	12
1.2.1 Outils de base de la transformée de Laplace :	12
1.2.2 Transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville :	13
1.2.3 Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo :	13
1.2.4 Transformée de Laplace de la dérivée de Grünwald-Letnikov :	14
1.2.5 Comparaison entre la dérivée au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville :	14

2	Système Chaotique	17
2.1	Système dynamique :	17
2.1.1	Représentations mathématiques des Systèmes dynamiques :	17
2.1.2	Systèmes autonomes ou non-autonomes :	18
2.1.3	Quelques définitions et notations :	19
2.2	Attracteurs :	20
2.2.1	Définition :	20
2.2.2	Différents types d'attracteurs :	20
2.3	Stabilité des systèmes choatiques d'ordre entier :	20
2.3.1	Méthode indirecte de Lyapunov (Linéarisation) :	22
2.3.2	Méthode directe de Lyapunov :	23
2.4	Stabilité des systèmes choatiques d'ordre fractionnaire :	23
2.4.1	Point d'équilibre :	24
2.4.2	Stabilité des systèmes linéaires autonômes :	24
2.4.3	Stabilité des systèmes non linéaires (linéarisation) :	26
2.4.4	Extension au cas fractionnaire de la méthode directe de Lyapounov :	27
2.4.5	Le critère de Routh-Hurwitz pour un système d'ordre fractionnaire :	30
3	Contrôle des systèmes chaotiques	32
3.1	La méthode OGY :	33
3.1.1	Présentation de la méthode :	33
3.1.2	Application dans le cas discret :	35
3.2	La méthode de contrôle en boucle ouverte (nonfeedback) :	37
3.3	La méthode de contrôle en boucle fermée (feedback) :	38
4	Application	40

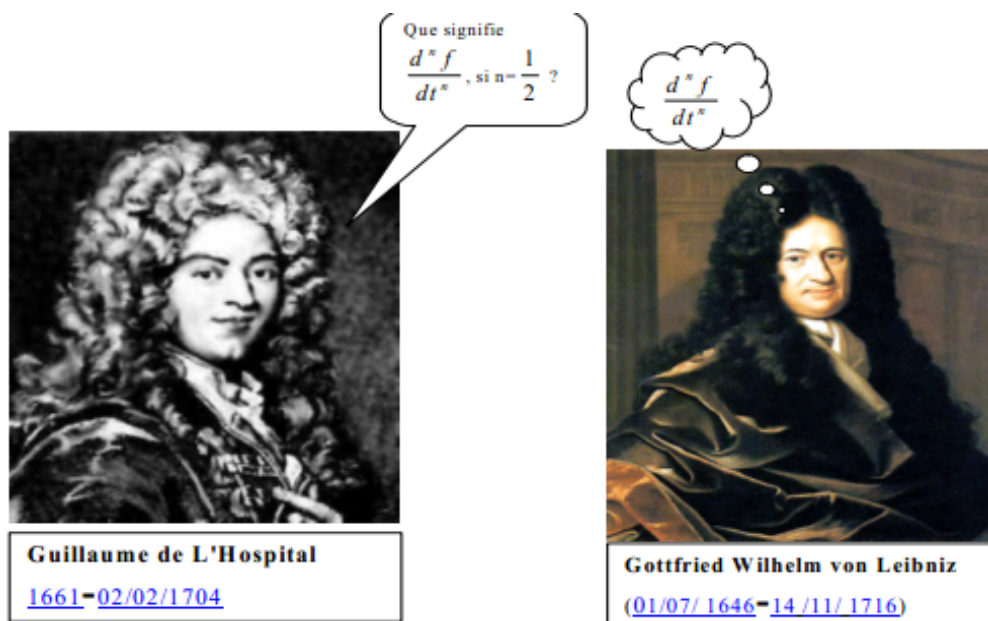
4.1	La stabilité de point d'équilibre :	41
4.2	Le chaos :	42
4.3	Simulation numérique obtenus par critère de Routh-Hurwitz :	43
	Conclusion	45
	Bibliographie	46
	Annexe A : Outils de base	48
4.3.1	Fonction Gamma :	48
4.3.2	Fonction Bêta :	49
4.3.3	Fonction Mittag-Leffler :	50
	Annexe B : Abréviations et Notations	52

Table des figures

1.1	Différence entre l'approche de Riemann et l'approche de Caputo	16
2.1	Régions de stabilité	25
3.1	Les directions propres stables et instables au voisinage du point fixe.	34
3.2	Attracteur de Hénon et l'évolution temporelle pour $a = 1.4$, $b = 0.3$ (x_0, y_0) = (0.01, 0.01)	36
3.3	Résultat de contrôle pour l'application de Hénon en appliquant la méthode OGY	37
4.1	Les trajectoires du système contrôlé 4.3, Stabilisé au point d'équilibre E pour $\alpha = 0.97$	43
4.2	Les trajectoires du système contrôlé 4.3, Non Stabilisé au point d'équilibre E pour $\alpha = 1$	44

Introduction

L'idée de généraliser la notion de différenciation $\frac{d^n f}{dx^n}$ aux ordres non entiers de n est apparue à la naissance du calcul différentiel lui-même. La première tentative de discuter d'une telle idée enregistrée dans l'histoire était contenue dans la correspondance de **Leibniz**. Il a notamment introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la nième dérivée d'une fonction f . Quand il a rapporté cela dans une lettre à **l'Hôpital** (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), **l'Hôpital** a répondu : «Que faire si l'ordre sera de $1/2$?».



Cette lettre de **l'Hôpital**, écrite en 1695, donc le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans. Ce sujet peut être considéré comme un vieux roman et encore nouveau sujet, il a été développé jusqu'à nos jours.

De nombreux mathématiciens ont contribué au développement du calcul fractionnaire, dont on peut citer :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Levy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Amour (1938-1996), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Depuis quelques décennies, les systèmes d'ordre arbitraire ont trouvé beaucoup d'applications dans plusieurs domaines (physique, mathématiques appliquées, électronique, biologie et technologie). D'ailleurs, beaucoup de phénomènes physiques réels sont bien caractérisés par des équations d'ordre fractionnaire. Dans ce la ce sujet peut être considéré un nouveau sujet au même temps.

Nous nous intéressons dans ce mémoire au problème de stabilité et de contrôle des systèmes fractionnaires, il est structurée comme suit :

Dans le premier chapitre nous donnons quelques notions préliminaires essentielles, utilisées dans la dérivation fractionnaire (approche de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, la transformée de Laplace et leurs propriétés).

Au deuxième chapitre, nous donnons les notions générales d'un système dynamique et quelques résultats sur la stabilité des systèmes dynamiques d'ordre entiers puis la stabilité des systèmes d'ordre non entiers.

Au troisième chapitre, nous présentons deux méthodes célèbres pour contrôler le chaos et leurs principes, la méthode OGY et la méthode Feedback.

Enfin au quatrième chapitre, nous avons prondre un système fractionnaire "système de Jerk" et nous appliquons les théorèmes du deuxième et troisième chapitre.

Chapitre 1

Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présentons quelques concepts et connaissances sur la théorie du calcul fractionnaire, à savoir, les notions de base et définitions essentielles dans ce mémoire.

1.1 Opérateurs d'intégration et de la dérivation fractionnaire :

L'intégration et La dérivation d'ordre fractionnaire est une généralisation des concepts d'intégration et de la dérivation d'ordre entière, il existe plusieurs approches pour l'intégration et la dérivation fractionnaire, nous présentons dans cette partie les approches de **Grünwald-Letnikov**, de **Riemann-Liouville** et de **Caputo** qui sont les plus populaires et les plus praticable.

1.1.1 Approche de Grünwald-Letnikov (G-L) :

L'idée de cette approche est de généralisation la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraire .

soit $f(t)$ une fonction continue sur $[a, b]$, la dérivée première de la fonction $f(t)$ est définie

par 3 :

$$f'(t) = D^{(1)}f(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \quad (1.1)$$

Et la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(t) &= D^{(2)}f(t) = \frac{d^{(2)}f(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Et par recurrence on peut généraliser cette formule pour tout entier n

$$D^{(n)}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(t-mh), \quad (1.3)$$

Où $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}$.

Avec $h = \frac{t-a}{n}$, où a est un réel, la généralisation au sens de **Grünwald-Letnikov** de cette formule pour l'ordre α non entier ($n-1 < \alpha < n$) est définie par :

$${}_a^{GL}D_t^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-mh), \quad (1.4)$$

Telle que :

$$(-1)^m \binom{\alpha}{m} = \frac{-\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(m-\alpha-1)}{m!} = \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\alpha)}. \quad (1.5)$$

1. Soit $f^{(k)}(t)$ sont continuées pour tout $0 \leq k \leq m-1$ et $m-1 < \alpha < m$, on trouve :

$${}_a^{GL}D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)} \int_a^x (t-s)^{m-1-\alpha} f^{(m)}(s) dt. \quad (1.6)$$

2. Les dérivées fractionnaires de **Grünwald-Letnikov** vérifient les propriétés de compositions suivantes :

a) Les deux opérateurs $\frac{d^n}{dx^n}$ et ${}^GL D_t^\alpha$ commutent dans le cas $f^{(k)}(a) = 0$ où ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$)

$$\frac{d^n}{dx^n} ({}^GL D_t^\alpha f(x)) = {}^GL D_x^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}^GL D_t^{\alpha+n} f(t). \quad (1.7)$$

b) Avec la même condition $f^{(k)}(a) = 0$, ($k = 0, 1, 2, \dots, p-1$) on trouve :

$${}^GL D_t^\alpha ({}^GL D_t^\beta f(t)) = {}^GL D_t^{\alpha+\beta} f(t). \quad (1.8)$$

Mais dans ce cas $p = \max(n, m)$, avec $0 \leq m-1 < \alpha < m$ et $0 \leq n-1 < \beta < n$.

Exemple 1.1.1 on a $f(t) = C$, alors $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, m$.

$$\begin{aligned} {}^GL D_t^\alpha f(t) &= \frac{C(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)} + \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}}_{=0} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)} \int_a^x \underbrace{(t-a)^{m-1-\alpha} f^{(m)}(s)}_{=0} ds \\ &= \frac{C}{\Gamma(-\alpha+1)} (t-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

1.1.2 Approche de Riemann-Liouville (R-L) :

L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]:

La définition de l'intégration fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** se base sur la formule de Cauchy qui calcule n fois l'intégrale répétée d'une fonction causale $t \rightarrow f(t)$;

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.9)$$

La généralisation de cette formule 1.9 à un ordre réel positif, implique le remplacement de la fonction factorielle par la fonction **Gamma** comme suit :

Définition 1.1.1 8

Pour une fonction f continue sur $[a; b]$, $t \in]a, b[$

1. L'intégrale fractionnaire (**à gauche**) de **Riemann-Liouville** d'ordre $\alpha \succeq 0$ est donnée

par :

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds & , \text{ si } \alpha > 0 \\ f(t) & , \text{ si } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

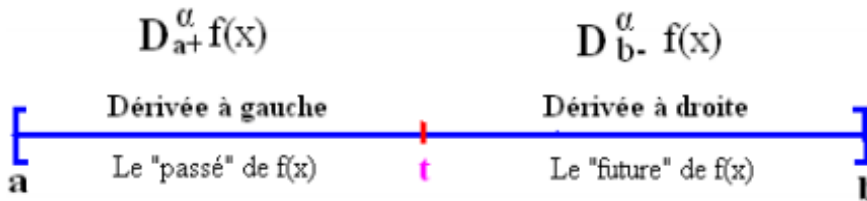
Où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction **gamma**.

2. L'intégrale fractionnaire (**à droite**) de **Riemann-Liouville** d'ordre $\alpha \succeq 0$ est donnée

par :

$$I_{b-}^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds & , \text{ si } \alpha > 0 \\ f(t) & \text{ si } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Remarque 1.1.1 Dans tout ce qui suit au chapitre, on utilise uniquement l'intégrale et la dérivée (**à gauche**) car la droite est rare utilisée puisque elle dépend du futur des fonctions.



Proposition 1.1.1 pour $f \in C([a; b])$, on a :

1. $I_{a+}^{\alpha} [I_{a+}^{\beta} f(t)] = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t) \quad , \alpha, \beta > 0.$
2. $I_{a+}^{\alpha} [I_{a+}^{\beta} f(t)] = I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f(t) \quad , \alpha, \beta > 0.$
3. $\frac{d}{dx} [I_{a+}^{\alpha} f(t)] = I_{a+}^{\alpha-1} f(t) \quad , \alpha > 1.$

Preuve. Soient $\alpha > 0$; $\beta > 0$; et $f \in C([a; b])$: ■

1. La démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Beta. En effet :

$$\begin{aligned}
 I_{a+}^{\alpha}[I_{a+}^{\beta}f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (I_{a+}^{\beta}f)(s) ds & (1.12) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \right) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\tau) \left(\int_{\tau}^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right) d\tau
 \end{aligned}$$

On posant :

$$x = \frac{s-\tau}{t-\tau}. \quad (1.13)$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{\tau}^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} dx & (1.14) \\
 &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \beta(\alpha, \beta) \\
 &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
 \end{aligned}$$

En remplaçant 1.14 dans 1.12, on aura :

$$I_{a+}^{\alpha}[I_{a+}^{\beta}f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau = I_{a+}^{\alpha+\beta}f(t). \quad (1.15)$$

2. En utilisant la propriété précédente (1), alors :

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}f(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta}f(t) = I_{a+}^{\beta+\alpha}f(t) = I_{a+}^{\beta}I_{a+}^{\alpha}f(t). \quad (1.16)$$

3. Pour la troisième égalité en utilisant la définition :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [I_{a+}^{\alpha} f(t)] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \left[\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Puisque $f(s)$ et $(t-s)^{\alpha-1}$ sont continue donc l'application : $s \rightarrow (t-s)^{\alpha-1} f(s)$ est continue, et on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [I_{a+}^{\alpha} f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{d}{dt} [(t-s)^{\alpha-1} f(s)] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\alpha-1) (t-s)^{\alpha-2} f(s) ds \\ &= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-2} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-2} f(s) ds \\ &= I_{a+}^{\alpha-1} f(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exemple 1.1.2 On considère la fonction suivante : $f : t \mapsto e^t$, et par application de I_0^{α} , on obtien :

$$I_0^{\alpha} e^t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} e^{\tau} d\tau \quad (1.17)$$

En posant: $x = t - \tau$, on peut écrire :

$$I_0^{\alpha} e^t = \frac{e^t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (1.18)$$

Maintenant, en utilisant l'intégrale par partie plusieurs fois, on peut avoir :

$$I_0^\alpha e^t = \sum_{k \geq 0} \frac{t^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)}. \quad (1.19)$$

Dérivée fractionnaire sur intervalle [a,b] :

Riemann réalise le lien entre l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire à partir de la solution de l'équation intégrale d' **Abel** pour tout $\alpha \in]0; 1[$.

Définition 1.1.2 Pour $m \in \mathbb{N}^*$; et $a \in \mathbb{R}$; l'expression :

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = \begin{cases} D^m I_a^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) & , m-1 < \alpha < m. \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t) & , \alpha = m. \end{cases} \quad (1.20)$$

Est appelée la dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in C([a; +\infty); \mathbb{R})$.

Proposition 1.1.2 Soient $f \in C([a; b])$; et $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$: Alors, on a les propriétés suivantes :

- (1) : ${}^{RL}D_a^\alpha$ est un opérateur linéaire.
- (2) : $({}^{RL}D_a^\alpha) (I_a^\alpha f) (t) = f(t)$. (C'est-à-dire l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de **Riemann-liouville** est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** du même ordre).
- (3) : Si $({}^{RL}D_a^\alpha f) (t) = 0$, alors $f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)} (t-a)^{j+\alpha-m}$, $(c_j)_{j=0, \dots, m-1} \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.1.3

$f(t)$	$I_{a+}^\alpha f(t)$	$D_{a+}^\alpha f(t)$	Spécifications
$(t-a)^\beta$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0, \beta > -1$
C	$\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha$	$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$
$e^{\lambda t}$	$\lambda^{-\alpha} e^{\lambda t}$	$\lambda^{+\alpha} e^{\lambda t}$	$a = -\infty, \alpha > 0, \lambda > 0$
$e^{-\lambda t}$	$\lambda^{-\alpha} e^{-\lambda t}$	$\lambda^\alpha e^{-\lambda t}$	$a = +\infty, \alpha > 0, \lambda > 0$

1.1.3 Lien avec l'approche de Grünwald-Letnikov :

On peut vérifier facilement que si f est $(n - 1)$ -fois continûment différentiable dans l'intervalle $[a; b]$; et que $f^{(n)}(t)$ est intégrable, la dérivée au sens **Riemann-Liouville**, existe et coïncide avec la dérivée au sens de **Grünwald-Letnikov**.

1.1.4 Approche de Caputo :

Il existe plusieurs définitions de dérivée fractionnaire. Dans les application réelles, la dérivation au sens de **Caputo** est plus populaire puisque les conditions initiales non homogènes sont autorisées .

Définition 1.1.3 *8* Pour $m - 1 < \alpha < m$; $m \in \mathbb{N}^*$; et $f \in C^m([a; +\infty))$, l'expression :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{ds^m} f(s) ds = I_a^{m-\alpha} D^m f(t) & , m - 1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t) & , \alpha = m \end{cases} \quad (1.21)$$

Est appelée la dérivée fractionnaire de **Caputo** d'ordre α de f .

Proposition 1.1.3 Pour $m - 1 < \alpha < m$; $m \in \mathbb{N}^*$; et $f \in C^m([a; +\infty))$, l'opérateur de dérivation de **Caputo** (${}^C D_a^\alpha$) a les propriétés suivantes :

1. $({}^C D_a^\alpha)$ est un opérateur linéaire.
2. $({}^C D_a^\alpha)(I_a^\alpha f)(t) = f(t)$.
3. si ${}^C D_a^\alpha f(t) = 0$, alors $f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j$, $(c)_{j=0, \dots, m-1} \in \mathbb{R}$.
4. $I_a^\alpha ({}^C D_a^\alpha f(t)) = f(t) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j$, $(c)_{j=0, \dots, m-1} \in \mathbb{R}$

Exemple 1.1.4 On considère la fonction suivante : $f : t \rightarrow t^\beta$.

Pour $0 < m - 1 < \alpha < m$, on a :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = I^{m-\alpha} (D^m) t^\beta.$$

Où :

$$D^m t^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - m)} t^{\beta - m}$$

Par suit,

$$I^{m-\alpha} = \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - m)} t^{\beta - m} \right) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - m) \Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{m-\alpha} s^{\beta - m} ds$$

On fait le changement de variable : $s = yt \Rightarrow ds = t dy$ alors,

$$\begin{aligned} \int_0^t (t - s)^{m-\alpha} s^{\beta - m} ds &= \int_0^1 (t - ty)^{m-\alpha-1} (ty)^{\beta - m} t dy \\ &= \int_0^1 t^{m-\alpha-1} (1 - y)^{m-\alpha-1} y^{\beta - m} t^{\beta - m + 1} dy \\ &= t^{\beta - \alpha} \int_0^1 (1 - y)^{m-\alpha-1} y^{\beta - m} dy \\ &= t^{\beta - \alpha} \beta(m - \alpha, \beta - m + 1) \\ &= t^{\beta - \alpha} \frac{\Gamma(m - \alpha) \Gamma(\beta - m + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}. \end{aligned}$$

D'où,

$$I^{m-\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - m)} t^{\beta - m} \right) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - m) \Gamma(m - \alpha)} \frac{\Gamma(m - \alpha) \Gamma(\beta - m + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{\beta - \alpha}.$$

Et finalement on obtient :

$$D^m t^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} t^{\beta - \alpha}.$$

Dans l'exemple précédent, on remarque que pour $\beta = 0$; on aura :

$$D^m t^0 = D^m 1 = 0.$$

C'est-à-dire que la dérivée de **Caputo** d'une fonction constante est nulle.

1.2 Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires :

1.2.1 Outils de base de la transformée de Laplace :

La fonction $F(s)$ de la variable complexes s définie par :

$$F(s) = L \{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.22)$$

Est appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, laquelle est appelée l'originale. Pour l'existence de l'intégrale 1.22 la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel α , ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que :

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M \quad \text{pot tout } T < t.$$

On peut reconstituer f à partir de sa transformée F à l'aide de la transformée de Laplace inverse :

$$f(t) = L^{-1}(F(s))(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s) ds. \quad c = \text{Re}(s) > c_0. \quad (1.23)$$

Où c_0 est l'indice de convergence de l'intégrale 1.23.

Le produit de convolution des fonctions f et g est donné par :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (1.24)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution des fonctions f et g peut s'écrire sous la forme :

$$L \{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s). \quad (1.25)$$

Sous l'hypothèse que les fonctions $F(s)$ et $G(s)$ existent.

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n de la fonction f peut s'écrire :

$$L \{ f^{(n)}(t); s \} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(k)} f^{(n-k-1)}(0). \quad (1.26)$$

1.2.2 Transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville :

Afin d'établir la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** en utilisant la formule 1.26 de la transformée de Laplace, on trouve :

$$L \{ {}_0^{RL} D^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}_0 D^{(\alpha-k-1)} f(t)]_{t=0}, m-1 \leq \alpha < m. \quad (1.27)$$

Remarque 1.2.1 Cette transformée est bien connue cependant son application pratique est limitée par l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des dérivées en borne inférieure $t = 0$.

1.2.3 Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo :

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de l'intégrale de **Riemann-Liouville** et les même formule précédente 1.26, on arrive à la formule suivante :

$$L \{ {}_0^C D^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), m-1 \leq \alpha < m.$$

Comme cette formule de la transformée de Laplace de la dérivée de **Caputo** induit les valeurs de la fonction $f(t)$ et ses dérivées en la borne inférieure $t = 0$, pour laquelle une certaine interprétation physique existe, on peut espérer qu'il pourrait être utile pour la résolution des problèmes appliqués conduisant aux équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnées de conditions initiales dans leur forme traditionnelle.

1.2.4 Transformée de Laplace de la dérivée de Grünwald-Letnikov :

- Tout d'abord, considérons le cas $0 < \alpha < 1$, quand la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov avec la borne inférieure $a = 0$ de la fonction $f(t)$, qui est bornée en $t = 0$, peut s'écrire sous la forme suivante :

$${}_{GL}D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{f(0)(x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \quad (1.28)$$

en utilisant la transformée de Laplace de la fonction polynôme et celle de convolution on obtient :

$$L\{{}_{GL}D_{0+}^{\alpha} f(t); s\} = \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} + \frac{1}{s^{1-\alpha}} (sF(s) - f(0)) = s^{\alpha} F(s) \quad (1.29)$$

- Si $\alpha > 1$ la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de **Grünwald-Letnikov** n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non intégrables dans la somme de la formule 1.26.

1.2.5 Comparaison entre la dérivée au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville :

- Soient $f \in C([a; b])$; et $m - 1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$, la relation reliant la dérivée au sens de **Riemann-Liouville** à celle de **Caputo** est donnée par :

$${}^C D_a^{\alpha} f(t) = {}^{RL} D_a^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}, \quad (1.30)$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ on aura

$${}^C D_a^{\alpha} f(t) = {}^{RL} D_a^{\alpha} f(t).$$

- La définition du **Caputo** est bien utilisée puisque sa transformation de Laplace permet conditions initiales prenant les mêmes formes que celles des dérivées d'ordre entier, qui ont des interprétations physiques claires et comportement d'applications dans le processus actuel la modélisation.
- La dérivée d'une fonction constante au sens de **Caputo** est nulle, par contre par **Riemann-Liouville** elle est $\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x - \alpha)^{-\alpha}$.
- La formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est donnée par :

$$L \{ {}^{RL}D^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}_0D^{(\alpha-k-1)} f(t)]_{t=0}, m-1 \leq \alpha < m.$$

La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo est donnée par la formule suivante :

$$L \{ {}^C D^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), m-1 \leq \alpha < m.$$

- On a la dérivée de **Caputo** est ${}^C D_a^\alpha f(x) = I_a^{n-\alpha} \left[\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right]$ par contre la dérivée de **Riemann-Liouville** est ${}^{RL} D_a^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} [I_a^{m-\alpha} f(x)]$.

Graphiquement, on peut dire que le chemin suit pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de **Caputo** est également l'inverse quand on suit les autres sens (**Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov**) comme le montre la figure suivante :

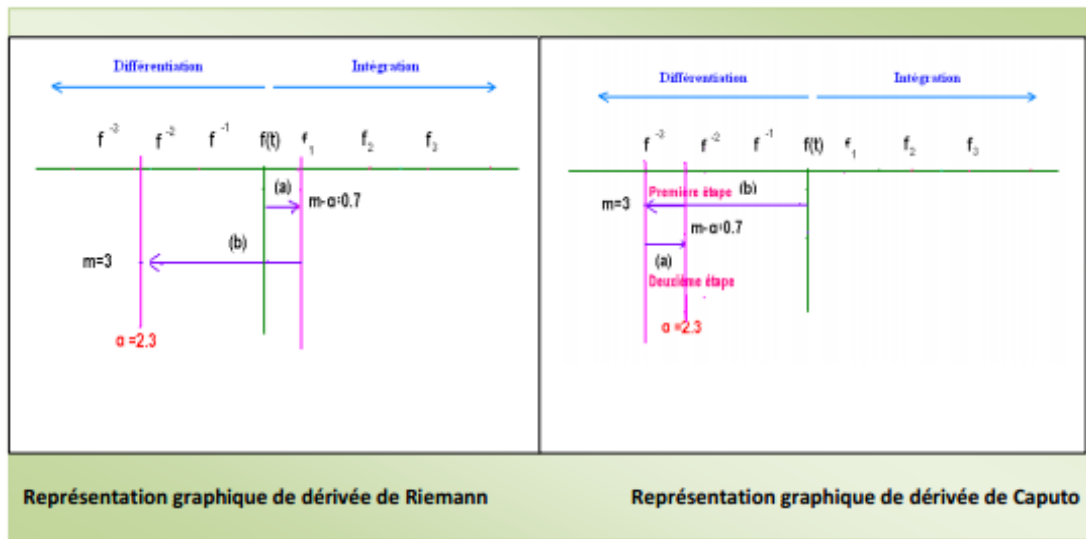


FIG. 1.1 – Différence entre l’approche de Riemann et l’approche de Caputo

Chapitre 2

Systeme Chaotique

Dans ce chapitre, nous donnons les notions générales d'un système dynamique et quelques résultats sur la stabilité des systèmes dynamiques d'ordre entiers puis la stabilité des systèmes d'ordre non entiers.

2.1 Système dynamique :

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme " système " fait référence à un ensemble de variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. qui utilise des équations différentielles, des équations intégro-différentielles, des itérations ou un ensemble composite de tout cela et de façon générale qui soit décrit par une ou des "relations" entre un état du système et un (ou des)  tat(s)   une autre étape (ou instant).

2.1.1 Représentations mathématiques des Systèmes dynamiques :

Un Système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques encore appelés paramètres

du système sont fixes.

- Dans le cas où la composante temps est continu un système dynamique est décrit par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu) \quad (2.1)$$

Où de la forme généralisée (fractionnaire) :

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(t, x, \mu) \quad , \alpha > 0 \quad (2.2)$$

$x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mu \in D \subseteq \mathbb{R}^p$ est le vecteur des paramètres, $f : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé champ de vecteur sur Ω .

- Dans le cas discret un système dynamique est décrit par une itération de la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), k \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

2.1.2 Systèmes autonomes ou non-autonomes :

- Lorsque f dépend explicitement du temps 2.1 est dit **non-autonome**. dans le cas contraire on dit que 2.1 est **autonome**.
- On peut toujours transformer un système non-autonome dans \mathbb{R}^n en système autonome dans \mathbb{R}^{n+1} (où t n'apparaît pas explicitement), en posant :

$F : J \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ par $F(t, x) = (1, f(t, x))$.

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, x) \end{pmatrix} = F(t, x). \quad (2.4)$$

2.1.3 Quelques définitions et notations :

Définition 2.1.1 (*L'espace des phases*)

L'ensemble des variables d'état d'un système permet de construire un espace mathématique appelé "**espace des phases**". L'espace des phases est un espace souvent multidimensionnel. Chaque axe de coordonnées de cet espace correspond à une variable d'état du système dynamique étudié et chaque variable d'état caractérise le système à un instant donné. Pour chaque instant donné, le système est donc caractérisé par un point de cet espace. À l'instant suivant, il sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite.

Définition 2.1.2 (*Orbit*)

Une solution du système 2.1 est une fonction dérivable $t \rightarrow x(t)$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans Ω telle que pour tout $t \in I$ on a $x'(t) = f(t; x, \mu)$.

L'image d'une solution x est appelée orbite et notée :

$$\gamma_x = \{a \in \Omega; \exists t \in I : x(t) = a\}.$$

Définition 2.1.3 (*Points d'équilibres*)

On appelle "**point d'équilibre**" d'un système dynamique 2.1 tout point x_e tel que :

$$f(x_e) = 0.$$

Parfois, ces points sont appelés aussi points **stationnaires**, ou points **stables**, ou point **critique**.

Définition 2.1.4 (*Un cycle limite*)

Une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires est dite "**cycle limite**" c'est donc une solution périodique isolée.

2.2 Attracteurs :

2.2.1 Définition :

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

1. Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.
2. $\cap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$.
3. Il existe une orbite dense dans A .

2.2.2 Différents types d'attracteurs :

Il existe deux types d'attracteurs :

1. **Les attracteurs réguliers :** Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes : (Le point fixe, Un cycle limite, Un tore) .
2. **Les attracteurs étranges :** sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques.

2.3 Stabilité des systèmes chaotiques d'ordre entier :

La stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques

Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \quad (2.5)$$

avec f une fonction non linéaire.

Définition 2.3.1 *le point d'équilibre x_e du système 2.5 est :*

1. Stable au sens de Lyapunov si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_e\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_e\| < \varepsilon, t \geq t_0 \quad (2.6)$$

2. Asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si :

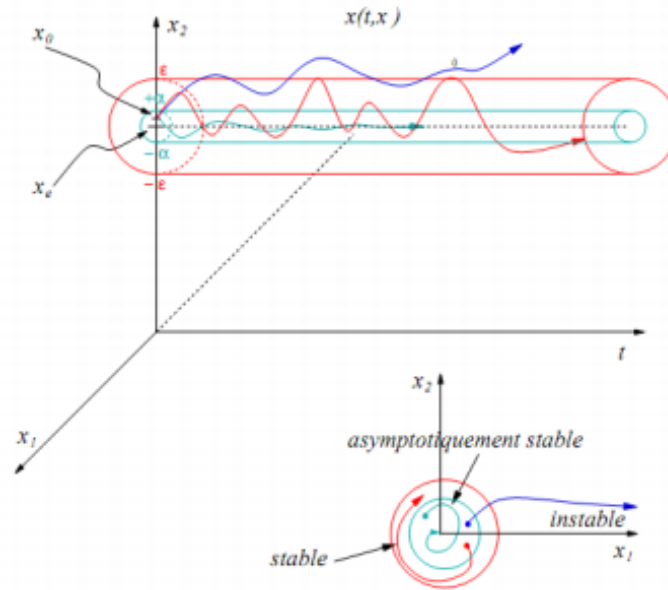
$$\exists \delta > 0, \|x(t_0) - x_e\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_e\| = 0 \quad (2.7)$$

3. Exponentiellement stable au sens de Lyapunov si :

$$\forall \varepsilon, \exists a, b, \delta > 0, \|x(t_0) - x_e\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_e\| < a \|x(t_0) - x_e\| \exp(-bt) \quad \forall t > t_0 \quad (2.8)$$

4. On dit que x_e est instable si il n'est pas stable .

5. Si x_e **exponentiellement stable** implique que x_e est **asymptotiquement stable** et ça implique que x_e est stable.



2.3.1 Méthode indirecte de Lyapunov (Linéarisation) :

Pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires, **A.M.Lyapunov** a proposé un méthode indirect qui consiste à calculer les points d'équilibre x_e afin de linéariser autour de ces points pour évaluer la stabilité ou bien l'instabilité, cette méthode consiste à examiner les valeurs propres de la matrice Jacobienne 9.

Les propriétés de stabilité de x_e s'expriment comme suit :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative, x_e est **exponentiellement stable**.
- Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, x_e est *instable*.

Remarque 2.3.1 quand la matrice jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable, et dans ce cas, la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode.

2.3.2 Méthode directe de Lyapunov :

La seconde méthode est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de **Lyapunov**, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Ce théorème va résumer cette méthode 9

Théorème 2.3.1 (65) *si x_e le point d'équilibre du système 2.5, et s'il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

- i) D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x_e \in D$
- ii) $V(x_e) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq x_e$ dans D .
- iii) V décroît le long de toutes trajectoires ($\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t,x) \leq 0$).

Alors x_e est **stable** au sens de Lyapunov.

- Si de plus pour x , $\dot{V}(x) < 0$; $\forall x \neq x_e$ dans D alors x_e est **asymptotiquement stable** au sens de Lyapunov.
- Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x_e , tendent vers x_e (on dit que x_e est **globalement asymptotiquement stable**).

2.4 Stabilité des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire :

Les systèmes d'ordre fractionnaires sont des systèmes décrits par des équations différentielles où ses dérivées sont d'ordre non entier, le problème de la stabilité consiste à étudier le comportement d'un système donné après qu'il ait subi une perturbation venant l'écartier de sa position d'équilibre.

Dans tout ce qui suit, on considère le système différentiel suivant :

$${}^C D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \quad (2.9)$$

Où $0 < \alpha \leq 1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et ${}^C D^\alpha x(t)$ désigne la dérivée de Caputo.

2.4.1 Point d'équilibre :

Prenons le système 2.9, avec condition initiale $x(t_0) = x_0$, Pour évaluer les points d'équilibre du système 2.9, il suffit de résoudre l'équation :

$$D^\alpha x(t) = 0. \tag{2.10}$$

Si x_e est une solution de l'équation, alors :

$$f(x_e) = 0.$$

2.4.2 Stabilité des systèmes linéaires autonomes :

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant, nous savons bien qu'un système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont négatives ou à parties réelles négatives si elles sont complexes conjugués donc situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est différente des systèmes d'ordre entier. En effet, la notion intéressante est que les systèmes fractionnaires peuvent bel et bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe 7.

Théorème 2.4.1 *soit le système autonome suivante :*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.11}$$

Telle que $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$ et $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

1. La solution $x(t) = 0$ du système 2.11 est **asymptotiquement stable**, si et seulement si $|\arg(\lambda)| > \alpha \frac{\pi}{2}$, où λ sont toute les valeurs propres de la matrice A , De plus le vecteur d'état $x(t)$ tends vers 0 et verifie la condition suivante : $\|x(t)\| < Nt^{-\alpha}$, $t > 0$, $\alpha > 0$.
2. La solution $x(t) = 0$ du système 2.11 est **stable**, si et seulement si la condition : $|\arg(\lambda)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}$ est vérifie pour toute λ valeur propre de la matrice A , et les valeurs propres critiques satisfont à $|\arg(\lambda)| = \alpha \frac{\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique qui coincide avec leur multiplicité algebrique.
3. La solution $x(t) = 0$ du système 2.11 est **instable**, si et seulement si s'il existe une valeur propre de A vérifiant $|\arg(\lambda)| < \alpha \frac{\pi}{2}$.

Remarque 2.4.1 si $1 < \alpha < 2$, le système 2.11 est asymptotiquement stable, si et seulement si $|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}$, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$

La figure suivante montre les régions stables et les régions instables

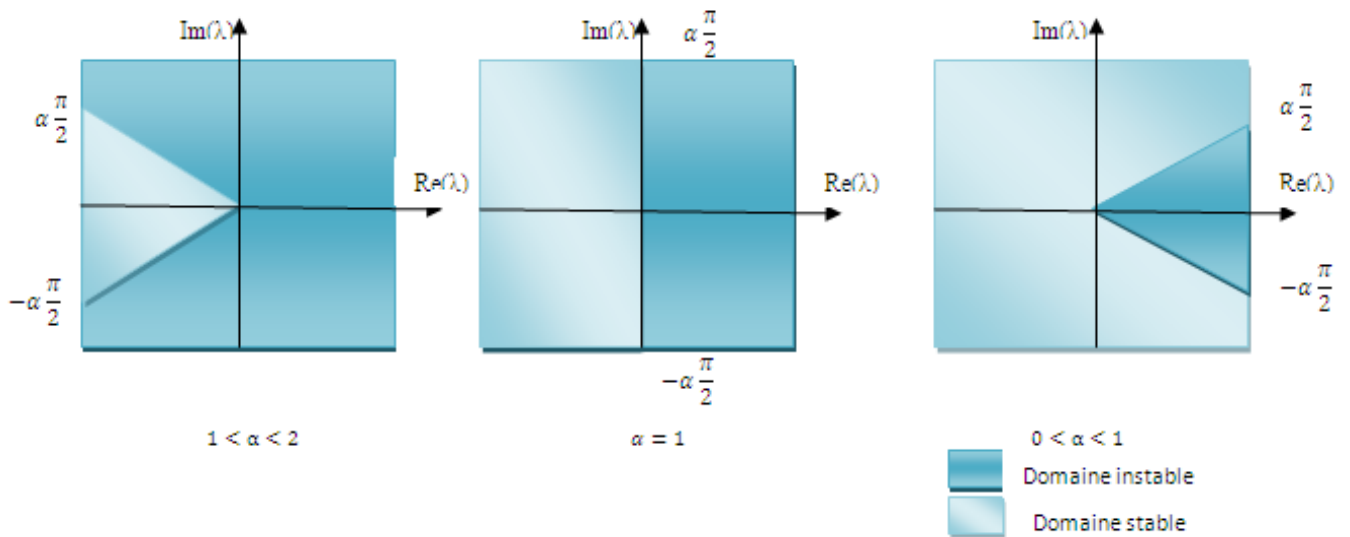


FIG. 2.1 – Régions de stabilité

Corollaire 2.4.1 si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$ et tous les α_i sont des nombres rationnels entre 0 et 1, tel que $\alpha_i = \frac{v_i}{u_i}$; $u_i, v_i \in \mathbb{Z}^+$, soit m le plus petit commun multiple des dénominateurs u_i

avec $i = \overline{1, n}$ et en posant $\rho = \frac{1}{m}$, alors le system 2.11 est asymptotiquement stable si toutes les racines de l'équation

$$\det [\text{diag}([\lambda^{m\alpha_1}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}]) - A] = 0$$

satisfont $|\arg(\lambda)| \geq \rho \frac{\pi}{2}$.

1. Ce corollaire dit que dans le cas des ordres rationnelles l'équation caractéristique peut être transformée en une équation polynomiale d'ordre entier.
2. Le degré de stabilité d'un système d'ordre fractionnaire dépend avec l'ordre fractionnaire α .

2.4.3 Stabilité des systèmes non linéaires (linéarisation) :

Maintenant, considérons un système fractionnaire non linéaire donné par :4

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

Supposons le point x_e est un point d'équilibre du système 2.12 c'est à dire $f(x_e) = 0$,

Pour analyser la stabilité de ce point on définit $\epsilon = x - x_e$, alors

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x_e + \epsilon(t)), \tag{2.13}$$

Par développement en séries de Taylor de la fonction f au voisinage du point x_e on trouve :

$$f(x_e + \epsilon(t)) \approx f(x_e) + \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_e} \epsilon(t),$$

Où $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n]$, on sait que $f(x_e) = 0$, alors :

$$f(x_e + \epsilon(t)) \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e} \epsilon(t),$$

Et 2.13 devient

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x(t) &= {}^C D^\alpha (x_e + \epsilon(t)) = {}^C D^\alpha x_e + {}^C D^\alpha \epsilon(t) \\ &= {}^C D^\alpha \epsilon(t), \quad (\text{car } {}^C D^\alpha x_e = 0) \end{aligned}$$

On obtient donc

$${}^C D^\alpha \epsilon(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e} \epsilon(t),$$

Alors,

$${}^C D^\alpha \epsilon(t) = J_f(x_e) \epsilon(t).$$

Où $J_f(x_e)$ est la matrice jacobienne associée à f au point x_e

On peut maintenant appliquer le théorème précédent pour étudier la stabilité locale des solutions d'équilibres du système d'équations fractionnaires autonomes non-linéaires 2.12.

2.4.4 Extension au cas fractionnaire de la méthode directe de Lyapunov :

La stabilité de Lyapunov fournit un outil important pour l'analyse de la stabilité dans les systèmes non linéaires, la méthode consiste à trouver une fonction candidate de Lyapunov pour un système non linéaire donné. Si une telle fonction existe, le système est stable, cette méthode est difficile à mettre en oeuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que la méthode directe de Lyapunov nous donne une condition suffisante de stabilité, c'est-

à-dire que le système peut être stable même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapounov car il n'y a pas de règle générale pour trouver une telle fonction, cependant, dans les problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat. Commençons par définir la stabilité au sens de Mittag-Leffler 6 :

Définition 2.4.1 *La solution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire*

$${}^c D^\alpha x(t) = \begin{cases} f(t, x(t)), 0 < \alpha < 1 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

est dite Mittag-Leffler stable si

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)] E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\}^b \quad (2.15)$$

Où $0 < \alpha < 1, \lambda \geq 0, b > 0, m(0) = 0, m(x) \geq 0$ et $m(x)$ est localement lipschitzienne sur $x \in B \subset \mathbb{R}^n$ avec m_0 comme constante de Lipschitz.

Définition 2.4.2 *(Stabilité deMittag- Leffler au sens généralisée)*

La solution de 2.14 est dite stable au sens généralisée de Mittag-Leffler si

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)] (t-t_0)^{-\gamma} E_{\alpha,1-\gamma}(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\}^b \quad (2.16)$$

où $0 < \alpha < 1, -\alpha < \gamma < 1 - \gamma, \lambda \geq 0, b > 0, m(0) = 0, m(x) \geq 0$ et $m(x)$ est localement lipschitzienne sur $x \in B \subset \mathbb{R}^n$ avec m_0 comme constante de Lipschitz.

- La stabilité Mittag-Leffler et la stabilité Mittag-Leffler généralisée impliquent la stabilité asymptotique.
- Pour $\lambda = 0$, on trouve 2.16

$$\|x(t)\| \leq \left[\frac{m[x(t_0)]}{\Gamma(1-\gamma)} \right]^b (t-t_0)^{-\gamma b},$$

Ce qui implique que la stabilité asymptotique est un cas particulier de la stabilité au sens de Mittag-Leffler.

On va maintenant énoncer un théorème qui est considéré comme une extension de la méthode directe de **Lyapounov** au cas d'un système d'équations fractionnaires, et qui a pour résultat la stabilité au sens de Mittag-Leffler 2.

Théorème 2.4.2 *soit $x_e = 0$ un point d'équilibre pour le système 2.14 et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine. soit $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et localement Lipschitz par rapport à x tels que*

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|x\|^a &\leq V(t, x(t)) \leq -\alpha_2 \|x\|^{ab} . \\ {}^C D^\beta V(t, x(t)) &\leq -\alpha_3 \|x\|^{ab} . \end{aligned}$$

Avec $t \geq 0, x \in D, \beta \in (0, 1), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ et b sont des constantes positives . Alors $x_e = 0$ est Mittag-Leffler stable si les hypothèses sont globalement sur \mathbb{R}^n , alors $x_e = 0$ est globalement Mittag-Leffler stable.

Preuve. voir 2 ■

Exemple 2.4.1 *Soit le système fractionnaire suivant :*

$${}_0 D^\alpha |x(t)| = -|x(t)|, \alpha \in (0, 1)$$

Considérons la fonction Lipschitzienne $V(t, x) = |x|$, nous avons ,

$${}_0^C D^\alpha V = {}_0^C D^\alpha |x| \leq {}_0 D^\alpha |x| \leq -|x|$$

Donc il suffit de prendre $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, et l'application du théorème nous donne

$$|x(t)| \leq |x(0)| E_\alpha(-t^\alpha).$$

2.4.5 Le critère de Routh-Hurwitz pour un système d'ordre fractionnaire :

Pour démontrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il faut donc a priori calculer les n valeurs propres λ_i de A et vérifier que $\forall i \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Une méthode algébrique a été développée par **Routh-Hurwitz**, basée sur le calcul des déterminants particuliers dits déterminants de **Routh-Hurwitz**.

En [97] une généralisation est faite pour le cas des systèmes d'ordre fractionnaire, nous donnons ici un résumé pour un système en trois dimensions comme le suivant :

Soit (x_e, y_e, z_e) un point d'équilibre du système d'ordre fractionnaire en trois dimensions suivant 9 :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x, y, z) \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = g(x, y, z) \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = h(x, y, z) \end{cases}, \text{ où } \alpha \in (0, 1] \quad (2.17)$$

Nous avons vu dans les précédentes sections la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit asymptotiquement stable (locale) :

$$|\arg(\lambda_i)|_{i=1,n} > \alpha \frac{\pi}{2},$$

Pour toutes les valeurs propres λ_i de la matrice Jacobiéenne de f .

Les valeurs propres sont solutions de l'équation caractéristique du point d'équilibre (x_e, y_e, z_e)

est donnée par le polynôme suivante :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda - a_3 = 0 \quad (2.18)$$

Et son déterminant $D(P)$ est donné par :

$$D(p) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2 \quad (2.19)$$

Il est facile de montrer que la zone de stabilité dans le cas d'ordre fractionnaire est plus (2.19) grande que celle de la région de stabilité du cas d'ordre entier. En utilisant les résultats de [97] nous avons les conditions de Routh-Hurwitz suivante :

1. Si $D(P) > 0$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que le point (x_e, y_e, z_e) soit localement asymptotiquement stable est : $a_1 > 0, a_2 > 0$ et $a_1 \times a_2 - a_3 > 0$.
2. Si $D(P) < 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$ et $a_3 > 0$, alors (x_e, y_e, z_e) localement asymptotiquement stable pour $\alpha < 2/3$ cependant, si $D(P) < 0, a_1 < 0, a_2 < 0$ et $\alpha > 2/3$ alors toutes les racines de l'équation (2.18) satisfont à la condition $|\arg(\lambda)| < \alpha \frac{\pi}{2}$.
3. Si $D(P) < 0, a_1 > 0, a_2 > 0$ et $a_1 \times a_2 - a_3 = 0$, alors (x_e, y_e, z_e) est localement asymptotiquement stable pour tout $\alpha \in (0, 1)$.
4. La condition nécessaire pour que le point (x_e, y_e, z_e) , soit localement asymptotiquement stable est : $a_3 > 0$.

Chapitre 3

Contrôle des systèmes chaotiques

Avec l'avènement du concept du chaos dans la littérature scientifique, le comportement chaotique était vu comme un phénomène qui intéresser seulement les mathématiciens, plus tard on découvrit que la dynamique chaos est présente dans n'importe quel champs scientifique ou technique. Avec ce fait, la question du contrôle est devenu un problème centrale, est donc plusieurs travaux concernant cet aspects. Pour contrôler un système chaotique il y a plusieurs formes, selon le but recherché.

On peut souhaiter qu'un système chaotique reste dans un domaine chaotique. En effet il est possible que naturellement, le système évolue jusqu'à perdre les caractéristiques chaotiques (sensibilités aux conditions initiales, ...). On peut vouloir le forcer à rester chaotique, auquel cas on procède à des opérations de contrôle convergeant vers ce but.

De même on peut vouloir amener un système à l'origine non chaotique, vers un domaine chaotique. Réciproquement, on peut souhaiter voir un système chaotique évoluer de façon à perdre son caractère chaotique. Pour cela, plusieurs méthodes de contrôle et de chaotification ont été développées, on citera : la méthode d'**OGY** et le **feedback**

3.1 La méthode OGY :

Cette méthode a été proposée par Ott, Grebogi et Yorke au début des années 1990, s'appuie sur le fait qu'un attracteur chaotique étant la superposition d'une infinité d'orbite périodiques instables, alors on détermine quelques orbites instables on les examine puis on choisit une qui représente la performance du système on ajuste les paramètres de petites perturbations afin de stabiliser l'orbite instable 1.

3.1.1 Présentation de la méthode :

Soit un système dynamique discret suivant :

$$X_{n+1} = F(X_n, p) \quad X_n \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Et supposons que pour une certaine valeur p^* de p le système admet un attracteur chaotique.

Si le système est continu alors on le discrétise en utilisant la section de Poincaré.

Soit $\bar{x}(p^*)$ un point fixe dans l'attracteur, pour p suffisamment proche de p^* et dans un voisinage de $\bar{x}(p^*)$ on a l'approximation suivante :

$$X_{n+1} - \bar{x}(p^*) = A[X_n - \bar{x}(p^*)] + B(p - p^*) \quad ,$$

Où $A = \frac{\partial F}{\partial x}$ et $B = \frac{\partial F}{\partial p}$.

La matrice A se décompose comme suit :

$$A = \lambda_u e_u f_u^T + \lambda_s e_s f_s^T.$$

$\{e_u, e_s\}$ sont les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres instables et stables $\{\lambda_u, \lambda_s\}$.

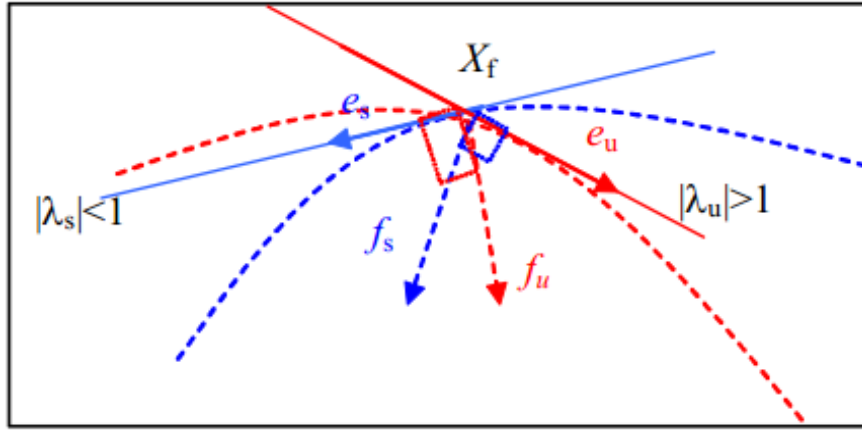


FIG. 3.1 – Les directions propres stables et instables au voisinage du point fixe.

$\{f_u, f_s\}$ sont les vecteurs de covariance telle que :

$$f_u^T e_u = f_s^T e_s = 1 \text{ et } f_u^T e_s = f_s^T e_u = 0.$$

Afin de contrôler les systèmes on ajuste le paramètre p pour pousser le point X_{n+1} à entrer dans la variété stable de $\bar{x}(p^*)$ pour ce faire on doit avoir $f_u^T (X_{n+1} - \bar{x}(p^*)) = 0$. En utilisant la linéarisation autour du point fixe et la décomposition de A on aura

$$p - p^* = -K^T [X_n - \bar{x}(p^*)].$$

avec $K = \frac{\lambda_u}{f_u^T B} f_u$ et $f_u^T B \neq 0$.

Si on désire que les valeurs de p vérifient $|p - p^*| < \delta$ alors le contrôle sera activé seulement si X_n vérifie $K^T [X_n - \bar{x}(p^*)] < \delta$ par suite le contrôle est déterminé par :

$$\delta_p = \begin{cases} -K^T [X_n - \bar{x}(p^*)], & \text{si } K^T [X_n - \bar{x}(p^*)] < \delta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

3.1.2 Application dans le cas discret :

On considère le système de Hénon suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n \\ y_n = x_n \end{cases}$$

Ce système à l'avantage d'être connu explicitement et d'offrir la possibilité d'effectuer analytiquement tous les calculs.

Il possède deux points fixes :

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}(b + \sqrt{4a - 2b + b^2 + 1} - 1), \frac{1}{2}(b + \sqrt{4a - 2b + b^2 + 1} - 1) \right).$$

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}(b - \sqrt{4a - 2b + b^2 + 1} - 1), \frac{1}{2}(b - \sqrt{4a - 2b + b^2 + 1} - 1) \right).$$

La matrice jacobienne est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} -2x_i & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{i=1,2}$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_{i1} = -x_i - \sqrt{b + x_i^2}$ et $\lambda_{i2} = -x_i + \sqrt{b + x_i^2} - 0.88390 - \sqrt{0.3 + 0.88390^2} = -1.9237$.

Si $b = 0.3$ le système représente un attracteur chaotique pour la valeur $a^* = 1.4$ du paramètre a , l'attracteur est représenté dans la figur[] avec l'évolution des coordonnées en temps.

Les points fixes pour ces valeurs des paramètres sont :

$$(x_1, y_1) = (0.88390, 0.88390).$$

$$(x_2, y_2) = (-1.5839, -1.5839).$$

Nous allons appliquer le contrôle pour stabiliser le point fixe : $(x_1, y_1) = (0.88390, 0.88390)$.

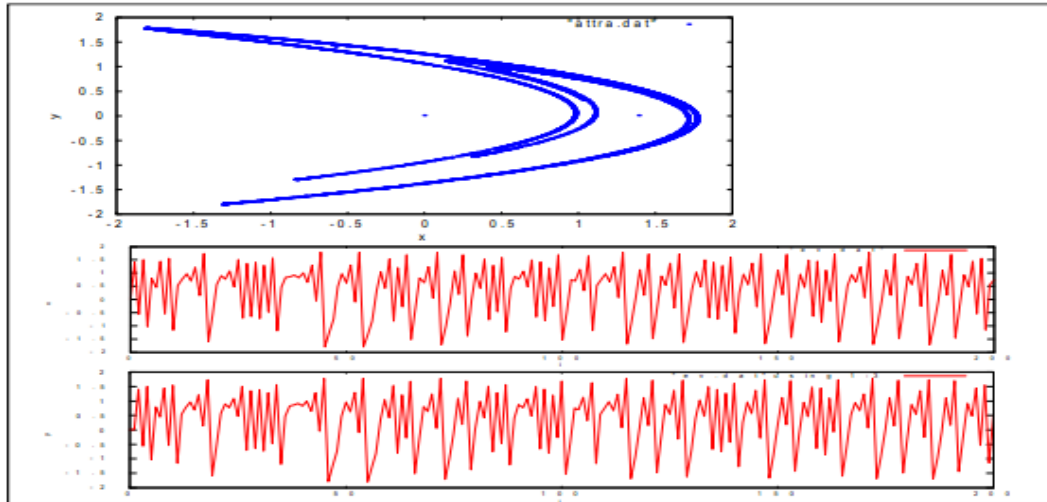


FIG. 3.2 – Attracteur de Hénon et l'évolution temporelle pour $a = 1.4$, $b = 0.3$ $(x_0, y_0) = (0.01, 0.01)$

On a :

$$A = \begin{bmatrix} -1.7678 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_u = 1.9237$ et $\lambda_s = 0.15595$.

Les vecteurs propres sont donnés par la relation $(A - \lambda I)e = 0$ d'où :

$$[e_u, e_s] = \begin{bmatrix} 0.88728 & 0.15408 \\ -0.46123 & 0.98806 \end{bmatrix}$$

Et comme $f_u^T e_u = f_s^T e_s = 1$ et $f_u^T e_s = f_s^T e_u = 0$ on obtiens :

$$\begin{bmatrix} f_u \\ f_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0425 & -0.16257 \\ 0.48666 & 0.93619 \end{bmatrix}$$

Alors : $K = \frac{-1.9237}{1.0425} [1.0425 \quad -0.16257] = [-1.9237 \quad 0.29999]$.

Donc $\delta_a = \begin{bmatrix} 1.9237 & -0.29999 \end{bmatrix} \delta X$, avec $\delta X_n = \begin{bmatrix} x_n - x^* \\ y_n - y^* \end{bmatrix}$

La région de contrôle est définie par :

$$(x_n - x^*)^2 + (y_n - y^*)^2 < 0.01$$

Les résultats de contrôle sont représentés dans la figure suivante :

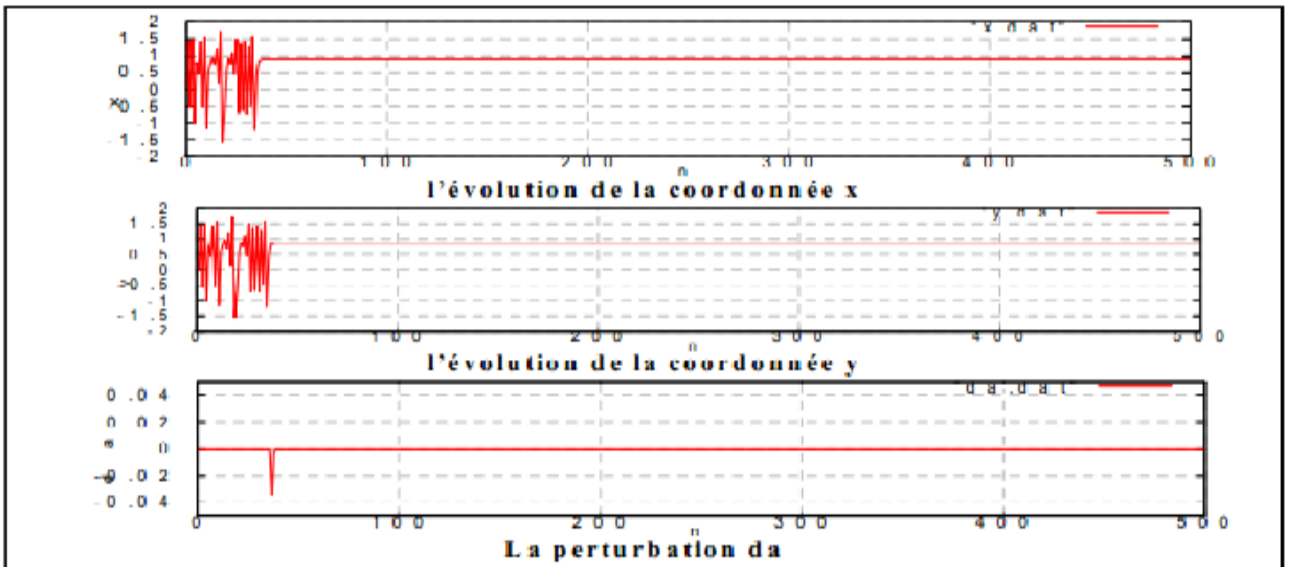


FIG. 3.3 – Résultat de contrôle pour l’application de Hénon en appliquant la méthode OGY

3.2 La méthode de contrôle en boucle ouverte (non-feedback) :

La première catégorie inclue les méthodes dans lesquelles le contrôle du chaos est réalisé en convertissant le comportement chaotique en n’importe quel comportement périodique désiré.

5

Dans ce type d’algorithmes, le but est de faire en sorte que le flot $x(t)$ suit une dynamique $g(t)$ choisie au préalable. Ceci implique l’addition à l’équation du mouvement :

$$\dot{x} = F(x).$$

D'un terme $u(t)$ de tel sorte que

$$|x(t) - g(t)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Dans ce cas, les auteurs choisissent :

$$u(t) = dg/dt - F(g(t)).$$

Le problème est que la valeur de la perturbation u est généralement grande .

3.3 La méthode de contrôle en boucle fermée (feedback) :

La deuxième catégorie qui est la plus intéressante inclue les méthodes qui sélectionnent la perturbation basée sur la structure du modèle.

Cette méthode consiste à perturber les variables d'état de système pour atteindre l'orbite cible, elle a l'avantage de garantir la stabilité robuste, la forte capacité de rejet de bruit 5.

Généralement elle est formulée comme suit :

$$\dot{x}(t) = F(x, u, t).$$

Où $x(t)$ est le vecteur d'état de système et $u(t)$ le vecteur de contrôle.

Le problème est de déterminer le contrôle $u(t) = g(x; t)$; g est un vecteur non linéaire (inclus le cas linéaire) de telle manière que Le système contrôlé :

$$\dot{x}(t) = F(x, g(x, t), t).$$

Peut se conduire par le contrôle en boucle fermé $g(x; t)$ pour atteindre l'orbite cible $x^*(t)$

$$\lim_{t \rightarrow t_f} \|x(t) - x^*(t)\| = 0$$

Généralement on détermine le contrôle $u(t)$ qui guide le vecteur d'état $x(t)$ correspondant au système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + u(t)$$

Vers l'orbite cible $x^*(t)$ de la manière suivante :

$$u(t) = \dot{x}^*(t) - f(x(t), t) + K(x(t) - x^*(t))$$

Où K est une matrice dont les parties réelles de ses valeurs propres sont toutes négatives.

Si on pose

$$e(t) = x(t) - x^*(t)$$

Alors

$$\dot{e}(t) = Ke(t)$$

Et on a $e(t) \rightarrow 0$ par suite $x(t) \rightarrow x^*(t)$ pour $t \rightarrow \infty$

Chapitre 4

Application

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité et le contrôle de système de jerk de version fractionnaire

Le système de Jerk défini comme suite :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = & y \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = & z \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = & -\mu z - y - \beta e^x + \delta \end{cases} \quad (4.1)$$

Avec les paramètres $\mu, \beta, \delta \in \mathbb{R}^+$ et α est l'ordre fractionnaire du système 4.1

On calcule les points d'équilibre du système 4.1 :

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= 0 \\ -\mu z - y - \beta e^x + \delta &= 0 \end{aligned}$$

Alors le point d'équilibre est $E\left(\ln \frac{\delta}{\beta}, 0, 0\right)$.

4.1 La stabilité de point d'équilibre :

La matrice jacobienne $J_f(x^*, y^*, z^*)$ associée au point E est donné par suit :

$$J_f(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta e^{x^*} & -1 & -\mu \end{pmatrix}$$

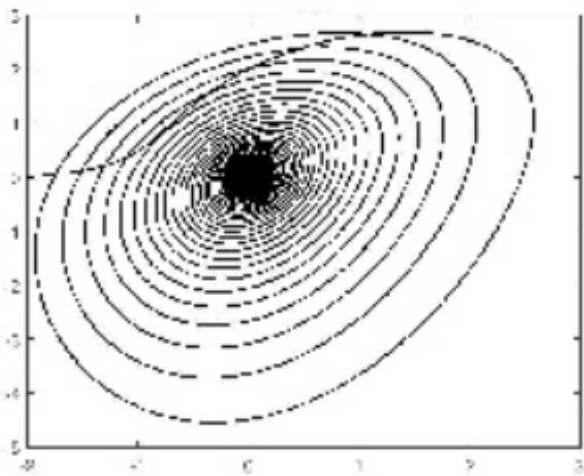
On suppose que :

$$(\mu, \beta, \delta) = (0.5, 1, 5) \tag{4.2}$$

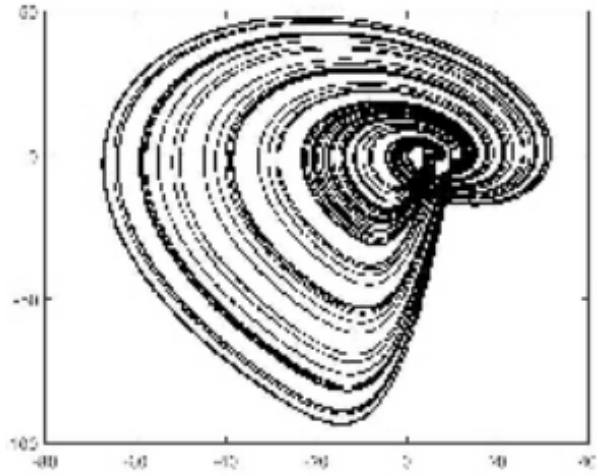
La forme d'ordre entier du système 4.1 présente un comportement chaotique, avec le plus grand exposant de Lyapunov calculé numériquement $LE = 0.035$, et son équilibre $E(\ln 5, 0, 0)$, leurs valeurs propres sont données comme : $\lambda_1 = -1.6787, \lambda_{2,3} = 0.58933 \pm 1.6221i$

Alors le point d'équilibre E est localement asymptotiquement stable lorsque $\alpha < 2/3$.

Le point d'équilibre est un point de selle d'index 2, donc la condition nécessaire pour que le système d'ordre fractionnel 4.1 reste chaotique est $\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{|\lambda_{2,3}|}{\text{Re } \lambda_{2,3}}\right)$, Par conséquent, l'ordre fractionnaire le plus bas, pour lequel le système d'ordre fractionnel démontre le chaos aux paramètres mentionnés ci-dessus, est donné par l'inégalité $\alpha > 0.79051$, La figure montre que le système 4.1 est chaotique pour $\alpha = 0,97$ et est stable pour $\alpha = 0,77$.



Le système 4.1 stable pour $\alpha = 0,77$.



Le système 4.1 chaotique pour $\alpha = 0,97$

4.2 Le chaos :

Le système d'ordre fractionné contrôlé associé au système 4.1 est donné

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = y - k_1(x - x^*) \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = z - k_2(y - y^*) \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = -\mu z - y - \beta e^x + \delta - k_3(z - z^*) \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Où (x^*, y^*, z^*) représente un point d'équilibre arbitraire du système 4.1. Le but est de conduire les trajectoires du système vers l'un des trois points d'équilibre instables E . Pour simplifier, nous allons choisir les gains de rétroaction $K = \text{diag}(0, k_2, 0)$.

La condition suffisante de la stabilisation de contrôle de chaos est donnée par la proposition suivante :

Proposition 4.2.1 *si $k_2 = \frac{-1}{2\mu}(-\sqrt{-2\mu^2 + \mu^4 + 4\mu\beta + 1} + \mu^2 + 1)$ et $\beta > \mu$, alors les trajectoires des contrôlés système 4.1 sont conduits au point d'équilibre instable E .*

Preuve. Le polynôme caractéristique du point d'équilibre E est donné par

$$\lambda^3 + (\mu + k_2) + (\mu k_2 + 1)\lambda + \beta = 0$$

Choisissez le paramètre $\beta > \mu$ et le gain de contrôle de rétroaction

$$k_2 = \frac{-1}{2\mu}(-\sqrt{-2\mu^2 + \mu^4 + 4\mu\beta + 1} + \mu^2 + 1), \text{ alors :}$$

si $D(p) < 0$ pour la valeur trouvée du paramètre k_2 , alors la condition de stabilité (3) est vérifiée et les trajectoires du système contrôlé 4.3 sont conduit au point d'équilibre stable E pour tous $\alpha \in]0, 1[$. ■

4.3 Simulation numérique obtenus par critère de Routh-Hurwitz :

Si on prend les mêmes conditions qu'est déjà déterminé 4.2 , $q = 0.97$, et par proposition précédente $k_2 = 0,35078$, $k_1 = k_3 = 0$. Il s'ensuit que l'équation des valeurs propres du point d'équilibre E est donnée par : $p(\lambda) = \lambda^3 + 0.85078\lambda^2 + 1.17539\lambda + 1 = 0$.

Et on a :

- $D(p) = 8 \times 1 \times 0.85078 \times 1.17539 + (1 \times 1.17539)^2 - 4 \times 1 (0.85078)^3 - 4 (1.17539)^3 - 27 (1)^2$
 $D(p) = -22.25 < 0$
- $a_1 = 0.85078 > 0$, $a_2 = 1.17539 > 0$, $a_1 \times a_2 = a_3$.

Cela implique que les trajectoires du système d'ordre fractionné contrôlé 4.3 convergent vers le point d'équilibre E comme le montre la Fig 5.1

Mais dans le cas de l'ordre entier, il existe deux valeurs propres imaginaires pures de l'équation caractéristique. Cela signifie que la forme d'ordre entier du système contrôlé 4.3 n'est pas stabilisée au même point d'équilibre E lors du choix des valeurs de paramètres et des gains de contrôle en retour mentionnés ci-dessus, voir Fig.

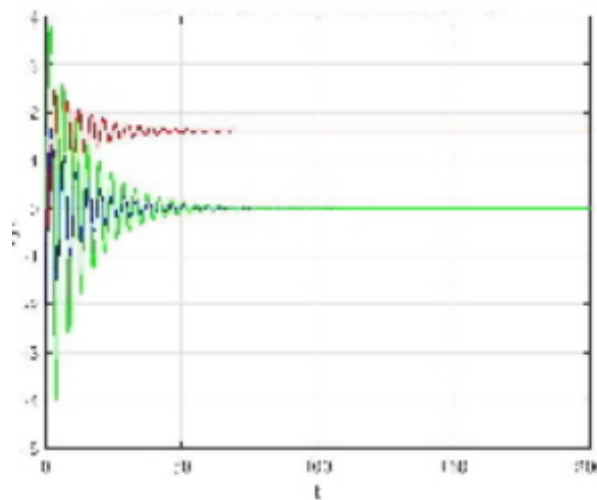


FIG. 4.1 – Les trajectoires du système contrôlé 4.3, Stabilisé au point d'équilibre E pour $\alpha = 0.97$

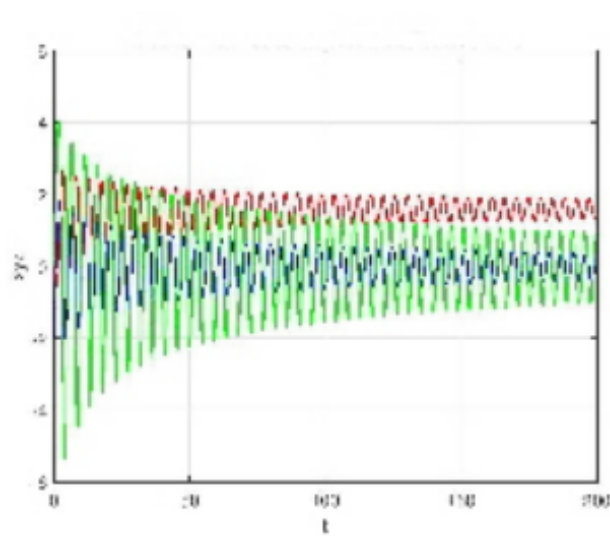


FIG. 4.2 – Les trajectoires du système contrôlé 4.3, Non Stabilisé au point d'équilibre E pour $\alpha = 1$

Conclusion

L'objectif de ce mémoire entre dans le cadre de l'étude la stabilité et le contrôle pour un système d'ordre fractionnaire, il est organisé de la façon suivante :

Le chapitre 1 : nous allons aborder l'intégration et la dérivation fractionnaire en présentant trois approches célèbres (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo), la transformée de Laplace, et leurs propriétés. .

Le chapitre 2 : nous avons cité les notions de la théorie des systèmes dynamiques, puis nous avons étudié la stabilité des systèmes entiers puis la stabilité des systèmes non entiers.

Le chapitre 3 : nous avons présenté deux méthodes pour contrôler le chaos (la méthode OGY et la méthode Feedback).

Le chapitre 4 : nous terminons notre travail par application, nous choisissons "Le système de Jerk" pour appliquer la théorie de stabilité et le contrôle basés sur le critère de Routh-Hurwitz généralisé à l'ordre fractionnaire.

Bibliographie

- [1] A.E.M.Salah, "les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires ",Mémoire Magistere en Université Mentouri-constantine,2009.
- [2] DADRAS, Sara, DADRAS, Soodeh, MALEK, Hadi, et al. A note on the lyapunov stability of fractional-order nonlinear systems. In : ASME 2017 International design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2017..
- [3] DUBOIS, François, GALUCIO, Ana Cristina, et POINT, Nelly. Introduction à la dérivation fractionnaire-Théorie et Applications. 2010..
- [4] HOUMOR, Tarek. Analyse du chaos dans un système d'équations différentielles fractionnaires.Thèse de doctorat .Univ.Mentouri. 2014.
- [5] LAOUIRA, Widad et HAMRI, Nasr-Eddine. Contrôle des systèmes dynamiques chaotiques. 2018. Thèse de doctorat .Univ.Mentouri. Constantine .
- [6] LI, Yan, CHEN, YangQuan, et PODLUBNY, Igor. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. Computers & Mathematics with Applications, 2010, vol. 59, no 5, p. 1810-1821.
- [7] MATIGNON, Denis. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In : Computational engineering in systems applications. 1996. p. 963-968.
- [8] TAÏEB, Amele. étude analytique des équations différentielles fractionnaires et applications. 2016. Thèse de doctorat..

- [9] TIDJANI, Menacer. Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires. Thèse de doctorat .Univ.Mentouri. Constantine ,2013 .

Annexe A : Outils de base

On utilise dans ce mémoire, certaines fonctions spéciales qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire sont les fonctions **Gamma**, **Bêta** et **Mittag-Leffer**, ainsi dans cette section, on donne les définitions et certaines propriétés les concernant.

4.3.1 Fonction Gamma :

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire la fonction **Gamma** $\Gamma(\cdot)$ qui prolonge le factoriel aux valeurs non entières.

Définition 4.3.1 On note Γ la fonction définie par la relation suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (4.4)$$

Où $x \in \mathbb{C}$ quelconque tel que $\text{Re}(x) > 0$, avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$,

Remarque 4.3.1 pour $0 < x \leq 1$, $x \mapsto \Gamma(x)$ est une fonction monotone et strictement décroissante.

Propriété 4.3.1

1. On a la propriété importante suivante :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (4.5)$$

On peut démontrer cette propriété 4.5 par une intégration par parties

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt = x\Gamma(x). \quad (4.6)$$

2. La fonction Gamma d'Euler généralise la fonction factorielle car

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4.7)$$

4.3.2 Fonction Bêta :

Définition 4.3.2 La fonction **Bêta** est donnée par :

$$B(x; y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}t^{y-1} dt \quad \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0. \quad (4.8)$$

Proposition 4.3.1 La fonction **Gamma d'Euler** et la fonction **Bêta** sont liées par la relation suivante :

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \beta(y, x). \quad (4.9)$$

Preuve. On peut démontrer cette relation 4.9 par un changement de variable

On a :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)} dt ds.$$

On pose :
$$\begin{cases} z = t + s \\ t = z.w \end{cases} \quad \text{alors } 0 \leq z; 0 \leq w \leq 1$$

Et

$$\frac{\partial(t, s)}{\partial(z, w)} = \begin{vmatrix} z & w \\ -z & 1-w \end{vmatrix} = z.$$

Anssi

$$dt ds = z dw dz.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 (zw)^{x-1} (z(1-w))^{y-1} e^{-z} z dw dz \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 z^{x+y-1} w^{x-1} (1-w)^{y-1} e^{-z} dw dz \\ &= \left(\int_0^{+\infty} z^{x+y-1} e^{-z} dz \right) \left(\int_0^1 w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw \right) \\ &= \Gamma(x+y) \beta(x, y).\end{aligned}$$

Donc,

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

■

Remarque 4.3.2 *il est clair que la fonction **Bêta** est une fonction symétrique :*

$$\beta(x, y) = \beta(y, x).$$

4.3.3 Fonction Mittag-Leffler :

La fonction de **Mittag-Leffler** prolonge naturellement l'exponentielle usuelle.

Définition 4.3.3 *La fonction de **Mittag-Leffler** E_α d'indice $\alpha > 0$ est définie pour tout z*

$\in \mathbb{C}$ par le développement en série entière

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \alpha n)} \quad (4.10)$$

- En particulier, si $\alpha = 1$ on trouve la fonction exponentielle.

$$E_1(z) = e^z \quad (4.11)$$

- Cette fonction peut être généralisée pour deux paramètres

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad \text{avec } \alpha > 0, \beta > 0. \quad (4.12)$$

Exemple 4.3.1 voici les fonction de *Mittag-Leffler* pour quelques valeurs spéciales de α et β :

- $E_{2,1} = \cosh(x)$.
- $E_{2,2}(x) = \frac{\sinh(x)}{x}$.
- $E_{\alpha,1}(x) = E_\alpha(x)$.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\Gamma(x)$: La fonction Gamma de la variable x
$\beta(x, y)$: La fonction Béta de variable x et y
$E_{\alpha, \beta}(x)$: La fonction de Mittag-Leffer à deux paramètres
I_a^α	: Intégration d'ordre α
${}^GL D_t^\alpha f$: La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Grunwald-Letnikov
${}^{RL} D_a^\alpha f$: La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f
${}^C D_a^\alpha f$: La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f
$L\{F(t)\}$: La transformé de Laplace de la fonction f .
$L^{-1}\{F(s)\}$: Transformé de La place inverse.
$f(t) * g(t)$: Convolution des fonctions f et g .
x_e	: point d'équilibre.
$J_f(x_e)$: Matrice Jacobienne.
\mathbb{R}	: l'ensemble des nombres réels.
\mathbb{C}	: l'ensemble des nombres complexes.
$V(x)$: Fonction de Lyapunov.

Abstract

Many dynamic systems are better characterized by a dynamic fractional order model, generally based on the notion of differentiation or integration of the non-whole order.

In this work, we have given an overview of fractional calculus. We have introduced three approaches to fractional derivatives (the approach of Grunwald-Letnikov, by Riemann Liouville and that of Caputo) and the transform of the Laplace as well as their properties.

Then we study the stability of fractional order systems by generalizing the methods (Lyapunov, Routh-Hurwitz criterion) of the whole order to fractional order. In addition, to control the chaos, we have presented two most popular methods (the OGY method, the Feedback method).

Keywords: Dynamic systems, fractional derivative, Caputo approach, Laplace transform, stability, Lyapunov method, criterion of Routh-Hurwitz, control, the OGY method, the Feedback method.

Résumé

Beaucoup de systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre fractionnaire, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration de l'ordre non-entier.

Dans ce travail nous avons donné un aperçu du calcul fractionnaire. On a introduit trois approches des dérivées fractionnaires (l'approche de Grunwald-Letnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo) et la transformé de Laplace ainsi que leurs propriétés.

Puis nous avons étudié la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire en généralisant les méthodes (de Lyapunov, critère de Routh-Hurwitz) de l'ordre entier à l'ordre fractionnaire. Et pour contrôler le chaos, nous avons présenté deux méthodes les plus populaires (la méthode de OGY, la méthode de Feedback).

Les mots clés : Systèmes dynamiques, dérivée fractionnaire, approche de Caputo, transformé de Laplace, stabilité, méthode de Lyapunov, critère de Routh-Hurwitz, contrôle, la méthode de OGY, la

التلخيص

العديد من الأنظمة الديناميكية يتم بشكل أفضل نمذجتها بنظام ديناميكي برتب كسرية، التي تعتمد بشكل عام على فكرة التمايز أو تكامل النظام غير الكلي.

قدمنا في هذا العمل لمحة عامة عن حساب التفاضل والتكامل الكسري. لقد قدمنا ثلاث طرق للمشتقات برتب كسرية (نهج جرونوالد-ليوتنيكوف، ريمان ليوفيل وكابوتو) وتحويل Laplace بالإضافة إلى خصائصها.

ثم قمنا بدراسة استقرار أنظمة الترتيب الكسري بتعميم طرق Lyapunov، Routh-Hurwitz من الترتيب الكامل إلى الترتيب الكسري، وللتحكم في الاختيارات، قدمنا طريقتين أكثر شيوعاً (طريقة OGY، طريقة Feedback).

الكلمات المفتاحية: الأنظمة الديناميكية، المشتق برتبة كسرية، نهج كابوتو، تحويل المكان، الاستقرار، طريقة ليابونوف، معيار روث هورويتز، التحكم، طريقة OGY، طريقة Feedback.