

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**MELIOUH Meriem**

Titre :

**Contrôle de système chaotique de Chua**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. <b>SENOUCI Assia</b>	UMKB	Président
Dr. <b>MENACER Tidjani</b>	UMKB	Encadreur
Dr. <b>HAMDI Soumia</b>	UMKB	Examineur

Septembre 2020

## DÉDICACE

*Je dédie cet humble travail :*

*À mes chers parents; source de la vie et d'amour*

*À mon cher frère et mes sœurs; source de joie et de bonheur*

*À mes grands parents*

*À tous les membres de ma famille*

*À toute personne qui occupe une place dans mon cœur.*

## REMERCIEMENTS

En premier lieu, je remerci **ALLAH** qui m'a donné la volonté et le courage pour pouvoir réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire monsieur **MENACER Tidjani**. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse aussi mes remerciements aux membres des jurys madame **SENOUCI Assia** et madame **HAMDI Soumia** pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, “ Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ”.

Un salut du cœur à mes grands parents pour leurs prières et leurs encouragements.

Toute ma gratitude et mes chaleureux remerciements vont à mon cher frère, à mes chères sœurs, à mes amies et à tout ma famille.

# Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	vi
Introduction	1
<b>1 Notions de base sur les systèmes chaotiques</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions et notations : . . . . .	3
1.2 Espace des phases : . . . . .	4
1.3 Flot : . . . . .	5
1.4 Orbite : . . . . .	5
1.5 Points d'équilibre : . . . . .	5
1.5.1 Points limites : . . . . .	6
1.6 Attracteurs : . . . . .	7
1.6.1 Les différents types d'attracteurs : . . . . .	8
1.7 Stabilité : . . . . .	10
1.7.1 Stabilité de Lyapunov : . . . . .	10
1.7.2 Stabilité des systèmes linéaires autonome : . . . . .	11
1.7.3 Stabilité des systèmes linéaires non autonome : . . . . .	12

1.8	Bifurcations : . . . . .	13
1.8.1	Les types de bifurcations : . . . . .	13
1.9	Définitions du chaos : . . . . .	18
1.9.1	Chaos au sens de Li-Yorke : . . . . .	19
1.9.2	Chaos dans le sens de Devaney : . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Contrôle des systèmes chaotiques</b>	<b>22</b>
2.1	Techniques de contrôle du chaos : . . . . .	22
2.2	But et formes de contrôle : . . . . .	23
2.3	Les méthodes de suppression du chaos : . . . . .	24
2.4	Les méthodes de stabilisation des systèmes chaotiques : . . . . .	24
2.4.1	La méthode de contrôle OGY : . . . . .	24
2.4.2	Méthodes dérivant de la méthode OGY : . . . . .	32
2.4.3	Méthode de Pyragas : . . . . .	33
2.4.4	Méthode de contrôle prédictif : . . . . .	34
2.4.5	La méthode Backstepping : . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Système de Chua</b>	<b>35</b>
3.1	Présentation du système : . . . . .	35
3.1.1	La dynamique du circuit : . . . . .	36
3.2	Etude du système : . . . . .	38
3.2.1	La stabilité : . . . . .	38
3.3	Contrôle du système de Chua : . . . . .	41
3.4	Simulation numérique : . . . . .	41
	<b>Conclusion</b>	<b>43</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>



# Table des figures

1.1	Orbite hétérocline et orbite homocline . . . . .	6
1.2	Les différents types d'attracteurs . . . . .	9
1.3	Quelques attracteurs étranges . . . . .	10
1.4	Stabilité globale . . . . .	13
1.5	Diagramme de bifurcation noeud-col . . . . .	14
1.6	Diagramme de bifurcation transcritique . . . . .	15
1.7	Diagramme de bifurcation fourche a) sur-critique b) sou-critique. . . . .	17
1.8	Diagramme de bifurcation Hopf . . . . .	18
2.1	Contrôle du système de Hénon par OGY . . . . .	30
2.2	Contrôle de l'attracteur de Hénon par la deuxième condition . . . . .	31
3.1	Circuit de Chua . . . . .	36
3.2	Caractéristique de la résistance non-linéaire de Chua . . . . .	37
3.3	Exposants de Lyapounov du système de Chua.(a) pour $\alpha = 5$ .(b) pour $\alpha = 10$ . . . . .	38
3.4	Variation des valeurs propres du système de Chua . . . . .	40
3.5	Choix de le section de Poincaré. . . . .	41
3.6	Contrôle du système de Chua . . . . .	42

# Introduction

Il existe un comportement entre la régularité rigide et l'aspect aléatoire. Ce comportement s'appelle : chaos.

L'histoire de la théorie du chaos naquit à plus d'un siècle, vers 1900, lorsque des mathématiciens comme Henri Poincaré étudièrent les trajectoires complexes des corps en mouvement. Au début des années soixantes Edward Lorenz découvre le premier système chaotique dans la météo ou encore appelé attracteur étrange. En 1975 le terme "chaos" a été présenté par Tien-Yien Li et James A. Yorke dans un article intitulé "Period three implies chaos". Mitchell Feigenbaum introduit un nombre universel associé au chaos en 1978. Et en 1990 Edward Ott, Celso Grebogi et James A. Yorke. Introduisent la notion de contrôle du chaos. La Première application du chaos est le contrôle du comportement irrégulier dans les circuits et les systèmes.

Le domaine d'application du chaos est vaste on peut citer quelques domaines. Dans l'engineering (Contrôle de vibration, stabilisation des circuit). L'ordinateurs (la Commutation des paquets dans des réseaux informatiques Cryptage). Et aussi dans la domaine médicale comme la Cardiologie, analyse du rythme du cœur (EEG), prédiction et contrôle d'activité irrégulière du cœur.

Le travail est présenté selon le plan suivant :

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques de manière générale et les systèmes chaotiques de manière un plus détaillé. Ainsi les modèles généraux qui définissent les systèmes dynamiques en temps continu et en temps discret, sont présentés en même temps que les notions d'espace de phase, de trajectoire, des diagrammes de bifurcation, notamment le théorème de Li-Yorke et celui de Devaney.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les techniques de contrôle des chaos. Une description



complète de la méthode de contrôle OGY est faite. Nous examinons l'efficacité de cette méthode de contrôle sur le système discret de Hénon. Nous présentons aussi la méthode de Pyragas, la méthode de contrôle prédictif et la méthode de backstepping qui est utilisé pour le contrôle des systèmes chaotiques continus.

Nous consacrons le chapitre 3 à le système de Chua. La présentation, l'étude et le contrôle du système.

Et enfin, nous terminons par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Notions de base sur les systèmes chaotiques

Ce chapitre est consacré à donner quelques notions élémentaires sur les systèmes dynamiques pour mieux appréhender ce qui le chaos.

### 1.1 Définitions et notations :

**Définition 1.1.1** *On peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continu), ou par rapport une autre variable (système discret). Cette description nous oblige faire une représentation graphique : Chaque état du système est associé un vecteur  $X$  dans un espace vectoriel appelé espace des phases. La modélisation mathématique de cette évolution nous permet de définir une équation différentielle de la forme :*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), x \in X, t \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

si le cas est continu, avec :

$X \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état ,  $\mu \in D \subseteq \mathbb{R}^p$  le vecteur des paramètres

$f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé champ de vecteur sur  $\Omega$ .

ou de la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, k), k \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

si le cas discret.

**Définition 1.1.2** *Mathématiquement, un système dynamique est défini par un triplet  $(X, T, f)$  constitué de l'espace des phases  $X$ , du domaine temporel  $T$ , et d'une fonction de transition d'état  $f$ .*

**Remarque 1.1.1** *Les systèmes dynamique sont des systèmes déterministes ; cela signifie que l'évolution du système au cours du temps est complètement déterminée par son état dans un instant donné.*

**Définition 1.1.3** *(système autonome et non-autonome)*

Un système dynamique est dit **autonome** lorsqu'il ne dépend pas explicitement du temps  $t$ . Dans le cas contraire on dit que le système est **non autonome**.

**Remarque 1.1.2** *Par un changement de variables approprié, on peut transformer un système **non-autonome** avec  $X \in \mathbb{R}^n$  en système **autonome** avec  $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ .*

## 1.2 Espace des phases :

L'espace des phases est un espace mathématique souvent multi-dimensionnel. Chaque axe de coordonnées de cet espace correspond une variable d'état du système dynamique étudié et chaque variable d'état caractérise le système à un instant donné. Pour chaque instant donné, le système est donc caractérisé par un point de cet espace. A l'instant suivant, il sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite. Si l'espace des phases est représenté en trois dimensions, cette suite de points peut montrer graphiquement l'évolution du système dans le temps. L'ensemble des trajectoires possibles constitue le portrait de phases.

### 1.3 Flot :

On suppose que les solutions du système (1.1) sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

On note  $\phi_t(X_0) = X(t, X_0)$  l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X, t, \mu) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

**Définition 1.3.1** L'application "à temps  $t$  fixé"  $X \mapsto \phi_t(X)$  s'appelle **flot** du système (1.1)

$\phi_t(X_0)$  possède les propriétés suivantes :

- i)  $\phi_t(X_0)$  est de classe  $C^r$ .
- ii)  $\phi_0(X_0) = X_0$ .
- iii)  $\phi_{t+s}(X_0) = \phi_t(\phi_s(X_0))$ .

### 1.4 Orbite :

La solution du système (1.1) est une fonction dérivable  $t \rightarrow X(t)$ , définie d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $\Omega$  telle que pour tout  $t \in I$  on a  $X'(t) = f(X, t, \mu)$ .

L'image d'une solution  $X$  est appelée **orbite** et notée :

$$\gamma_x = \{a \in \Omega; \exists t \in I : X(t) = a\}$$

L'orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteur  $f$ .

### 1.5 Points d'équilibre :

Un point  $x_0$  est dit point d'équilibre du système (1.1) si :  $f(x_0, t) = 0, \forall t$  sinon  $x_0$  est dit point ordinaire. Les points d'équilibres d'un système jouent un rôle important dans la description du système.

**Définition 1.5.1** On dit que un point  $x_0$  ordinaire est périodique s'il existe  $T > 0$  tel que  $\phi_T(x_0) = x_0$ ,

Un point ordinaire  $x_0$  et non périodique est dit récurrent si pour tout  $V$  de  $x_0$  et tout  $T \in \mathbb{R}$  il existe  $t > T$  tel que  $\phi_t(x_0) \in V$ .

**Remarque 1.5.1** Tout point d'équilibre peut être ramené à l'origine par un simple changement de variable  $X \leftarrow X - X_e$ .

**Définition 1.5.2 (orbite hétérocline et homocline)**

$\gamma_{x_0}$  une orbite, s'il existe deux points d'équilibres  $a$  et  $b$  vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = b$$

est dite orbite hétérocline si  $a \neq b$  et homocline si  $a = b$ .



FIG. 1.1 – Orbite hétérocline et orbite homocline

### 1.5.1 Points limites :

**Définition 1.5.3** Un point  $a \in X$  est un point  $\omega$ -limite d'une trajectoire  $X(x_0, t)$  s'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n} = a \tag{1.4}$$

**Définition 1.5.4** *Un point  $b \in X$  est un point  $\alpha$ -limite d'une trajectoire  $X(x_0, t)$  s'il existe une suite  $t_n \rightarrow -\infty$  tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n} = b \quad (1.5)$$

**Définition 1.5.5** *L'ensemble des points  $\alpha$ -limites (resp  $\omega$ -limite) est désigné par  $\alpha(x)$  (resp  $\omega(x)$ ), alors on définit l'ensemble limite de  $x(x_0, t)$  par l'ensemble  $\alpha(x) \cup \omega(x)$ .*

**Remarque 1.5.2** – *Si  $a$  est un point d'équilibre alors  $\alpha(a) = \omega(a) = \{a\}$ .*

– *Si  $a$  est périodique alors  $\alpha(a) = \omega(a) = \gamma_a$ .*

– *Si  $a$  et  $b$  sont dans la même orbite alors  $\omega(a) = \omega(b)$  et  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , donc on définit les ensembles limites d'une orbite comme étant les ensembles limites de l'un de ses points.*

– *Si  $\gamma$  est une orbite hétérocline allant du point d'équilibre  $a$  au point d'équilibre  $b$  alors  $\omega(\gamma) = \{b\}$ ,  $\alpha(\gamma) = \{a\}$ .*

## 1.6 Attracteurs :

**Définition 1.6.1** *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.*

Mathématiquement, l'ensemble  $A$  est un attracteur si :

1.  $A$  est un ensemble compact, fermé et invariant par le flot  $\phi_t$  (c-à-d  $\phi_t(A) = A$  pour tout  $t$ ).
2. Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $\phi_t(X_0) = X(t, X_0)$  restera dans  $U$  si  $X_0 \in V$ .
3.  $\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$ .
4. Il existe une orbite dense dans  $A$ .

Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur considéré. c'est l'ensemble :

$$W = \cup \phi_t(V), t < 0$$

On peut donc avoir plusieurs attracteurs dans un même espace de phases.

**Remarque 1.6.1** *Un attracteur est indécomposable, c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.*

### 1.6.1 Les différents types d'attracteurs :

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs **réguliers** et les attracteurs **étranges ou chaotiques**.

#### Attracteurs réguliers :

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

- **Un point fixe** : c'est le cas le plus simple d'attracteur . Il est représenté par un point dans l'espace de phase . On dit que  $x_e \in E$  est un point fixe de l'application  $f : E \rightarrow E$  si :  
 $f(x_e) = x_e$ .
- **Un cycle limite** : c'est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. Donc c'est une solution périodique du système.
- **Un tore** : Il est caractérisé par un régime quasi-périodique ayant n fréquences de base indépendantes.



FIG. 1.2 – Les différents types d'attracteurs

### Attracteurs étranges :

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps , tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent former l'attracteur étrange.

L'attracteur étrange se caractérise par :

1. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
2. La dimension de l'attracteur est fractale et non entière (ce qui justifie l'adjectif étrange).
3. L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.



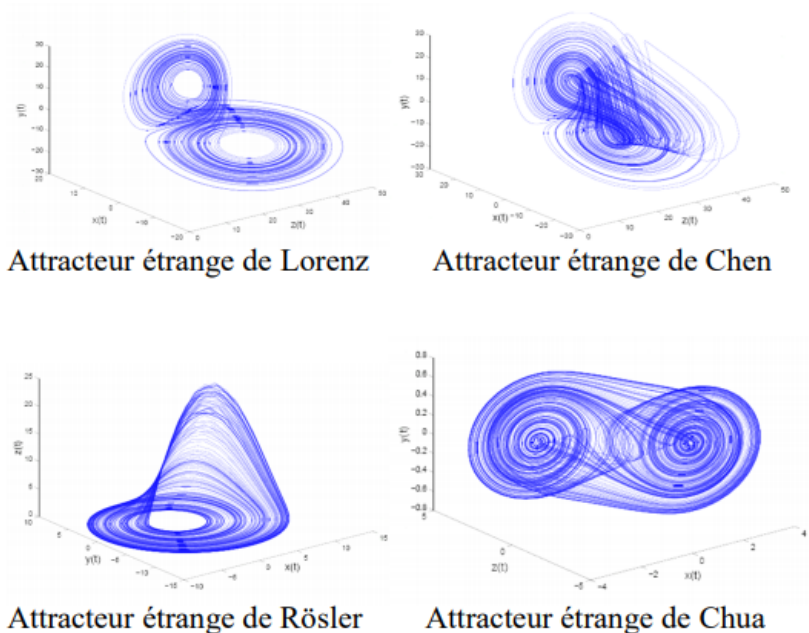


FIG. 1.3 – Quelques attracteurs étranges

## 1.7 Stabilité :

La stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires .

### 1.7.1 Stabilité de Lyapunov :

Il existe plusieurs définitions de la stabilité , la plus généralement admise est celle donnée par **Lyapunov** . Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X, t, \mu) \\ X \in \mathbb{R}^n, f(X_e) = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Avec  $f$  est une fonction non linéaire .Le point d'équilibre  $X_e$  est :

– **Stable** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(0) - X_e\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|X(t) - X_e\| < \varepsilon. \quad (1.7)$$

– **Asymptotiquement stable** si :  $X_e$  est stable et si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(0) - X_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_e\| \quad (1.8)$$

– **Exponentiellement stable** s'il existe deux réels positifs  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(0) - X_e\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_e\| < a \|X(t_0) - X_e\| \exp(-bt), \forall t > t_0 \quad (1.9)$$

– **Instable** si la condition (1.7) n'est pas satisfaite.

## 1.7.2 Stabilité des systèmes linéaires autonome :

Soit le système linéaire autonome suivant :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) \quad (1.10)$$

Où :  $A$  est une matrice constante. Le théorème ci-dessous caractérise la stabilité des systèmes linéaires autonomes.

**Théorème 1.7.1** - *S'il existe une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  telle que  $\text{Re}(\lambda) > 0$ , alors le point d'équilibre  $0$  est instable.*

- Si toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre  $0$  est asymptotiquement stable.
- Le point d'équilibre  $0$  est stable si et seulement si toute valeur propre de  $A$  a une partie réelle négative ou nulle, et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.

Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe) :

La seconde méthode est plus difficile à mettre en oeuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  et

appelée fonction de **Lyapunov**, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Le théorème suivant va résumer cette méthode.

### 1.7.3 Stabilité des systèmes linéaires non autonome :

Considérons le système dynamique **nonlinéaire** défini par :

$$\dot{x} = f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n), f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (1.11)$$

et soit  $x_0$  un point fixe (d'équilibre) de ce système.

**Théorème 1.7.2** *Le point d'équilibre  $x_0$  du système (1.11) est stable au sens de Lyapunov s'il existe une fonction  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  ayant les propriétés suivantes :*

1.  $D$  est ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in D$ .
2.  $V(x) > V(x_0), \forall x \neq x_0$  dans  $D$ .
3.  $V(x) \leq 0$  dans  $D$ .

Si de plus pour  $x \neq x_0, V(x) < 0$ , alors  $x_0$  est asymptotiquement stable au sens de **Lyapunov**.

Si on suppose encore que  $V$  tend vers l'infini lorsque  $x \in \mathbb{R}^n$  tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de  $x_0$ , tendent vers  $x_0$  (on dit que  $x_0$  est globalement asymptotiquement stable), mais si  $V(x) > 0$  pour  $x \neq x_0$  alors  $x_0$  est instable.

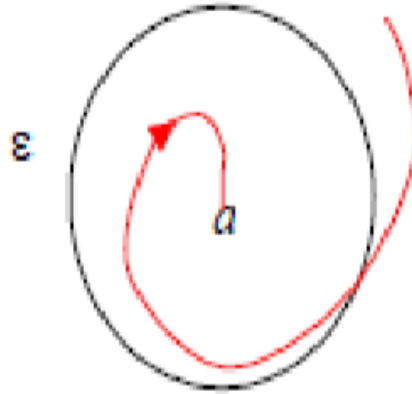


FIG. 1.4 – Stabilité globale

**Remarque 1.7.1** *Il n'y a aucune méthode générale pour déterminer une fonction de **Lyapunov**. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de **Lyapunov**.*

**Remarque 1.7.2** *Un système chaotique est :*

- localement instable.
- globalement bornée.

## 1.8 Bifurcations :

**Définition 1.8.1** *Une bifurcation est un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système. d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions. La codimension d'une bifurcation est la plus petite dimension de l'espace des paramètres telle que la bifurcation soit persistante.*

### 1.8.1 Les types de bifurcations :

Les bifurcation de codimension un sont quatre types de bifurcations correspondant tous des comportements génériques (nud-col, transcritique, fourche et Hopf).

**Bifurcation noeud-col :**

C'est la bifurcation la plus simple, un point d'équilibre stable (noeud) et un point d'équilibre instable (col) apparaissent simultanément, elle est représentée par l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \tag{1.12}$$

qui s'appelle équation générique de bifurcation noeud-col. On a alors  $f(x, \mu) = \mu - x^2$ .

- Si  $\mu < 0$  l'équation  $f(x, \mu) = 0$  n'admet pas de solution alors on n'a pas de points fixes.
- Si  $\mu > 0$  on a  $f(x, \mu) = \mu - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\mu}$ .

Par conséquent (1.12) admet deux points fixes :

$$\begin{cases} \frac{df(x,\mu)}{dt} : x = +\sqrt{\mu} = -2\sqrt{\mu} < 0 \\ \frac{df(x,\mu)}{dt} : x = -\sqrt{\mu} = 2\sqrt{\mu} > 0 \end{cases}$$

L'analyse de la stabilité linéaire montre que :

$$\begin{cases} x = +\sqrt{\mu} \text{ est stable .} \\ x = -\sqrt{\mu} \text{ est instable .} \end{cases}$$

- Si  $\mu = 0$  le seul point fixe est  $x = 0$  est semi stable .

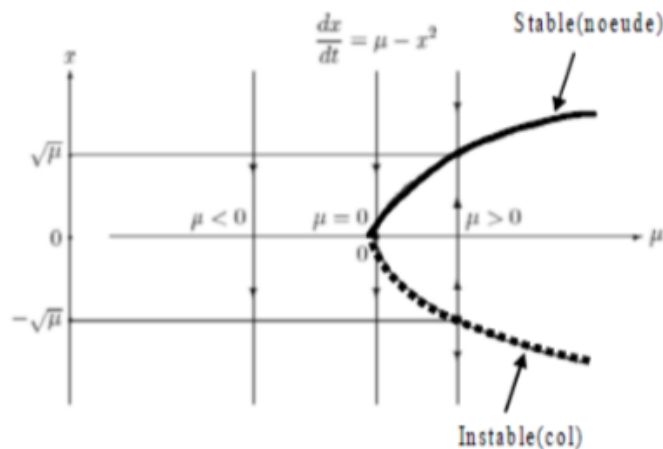


FIG. 1.5 – Diagramme de bifurcation noeud-col

**Bifurcation transcritique :**

Elle est caractérisée par un échange de stabilité entre des points fixes (les points stables deviennent instables et vice versa), son équation générique est représentée par :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 \tag{1.13}$$

On a :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \mu \end{cases}$$

Par conséquent (1.6) admet deux points fixes :

$$\frac{df(x, \mu)}{dt} = \mu - 2x \Rightarrow \begin{cases} \frac{df(x, \mu)}{dt} :_{x=0} = \mu \\ \frac{df(x, \mu)}{dt} :_{x=\mu} = -\mu \end{cases}$$

Et par suite :

- Si  $\mu < 0$  le point fixe  $x = 0$  est stable, mais  $x = \mu$  est instable.
- Si  $\mu > 0$  le point fixe  $x = 0$  est instable, mais  $x = \mu$  est stable.
- Si  $\mu = 0$  le seul point fixe est  $x = 0$  est semi stable

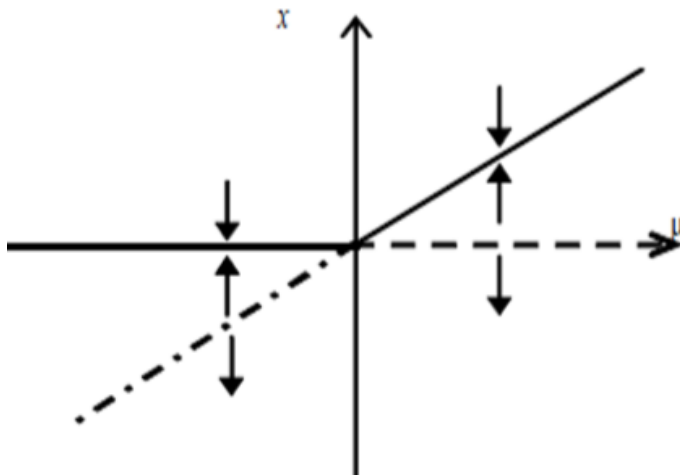


FIG. 1.6 – Diagramme de bifurcation transcritique

**Bifurcation fourche :**

Au point de bifurcation fourche la stabilité d'un point fixe change au profit de la naissance d'une paire de points fixes.

L'équation générique d'une bifurcation fourche (sur-critique) est :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 \tag{1.14}$$

et pour la sous-critique c'est :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3 \tag{1.15}$$

**\*Cas d'une bifurcation fourche sur-critique :**

On a :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x = \sqrt{\mu} \\ ou \\ x = -\sqrt{\mu} \end{cases}$$

Alors :

- Si  $\mu < 0$  on a un seul point fixe  $x = 0$ .
- Si  $\mu > 0$  alors (1,7) admet trois points fixes :

$$\frac{df(x, \mu)}{dt} = \mu - 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{df(x, \mu)}{dt} :_{x=0} = \mu \\ \frac{df(x, \mu)}{dt} :_{x=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu \end{cases}$$

Et par suite :

- Si  $\mu < 0$  le seul point fixe  $x = 0$  est stable.
- Si  $\mu > 0$  le point fixe  $x = 0$  est instable , mais  $x = \pm\sqrt{\mu}$  sont stables.
- Si  $\mu = 0$  on remarque un échange dans le nombre des points fixes dans la stabilité.

**\*Cas d'une bifurcation fourche sous-critique :**

Dans ce cas on a  $f(x, \mu) = \mu x + x^3$ .

Faisons le même calcul on trouve :

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{pour tout } \mu \\ \text{ou} \\ x = \pm\sqrt{-\mu} & \text{pour } \mu < 0 \end{cases}$$

Alors (1.15) admet trois points fixes :

$$\frac{df(x, \mu)}{dt} = \mu + 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{df(x, \mu)}{dt} :_{x=0} = \mu \\ \frac{df(x, \mu)}{dt} :_{x=\pm\sqrt{-\mu}} = -2\mu \end{cases}$$

Par suite :

- Si  $\mu < 0$  le seul point fixe  $x = 0$  est stable.
- Si  $\mu > 0$  contrairement au cas supercritique , le point fixe  $x = 0$  est stable , mais  $x = \pm\sqrt{-\mu}$  sont instables.

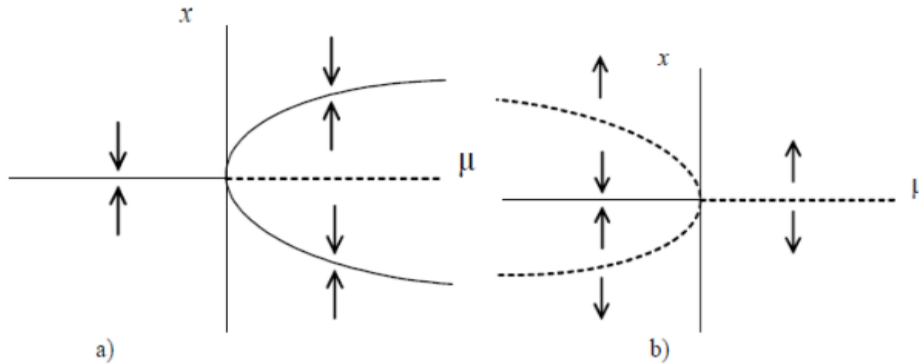


FIG. 1.7 – Diagramme de bifurcation fourche a) sur-critique b) sou-critique.

**Bifurcation Hopf :**

La bifurcation Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle prend une valeur critique 0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées



qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite.

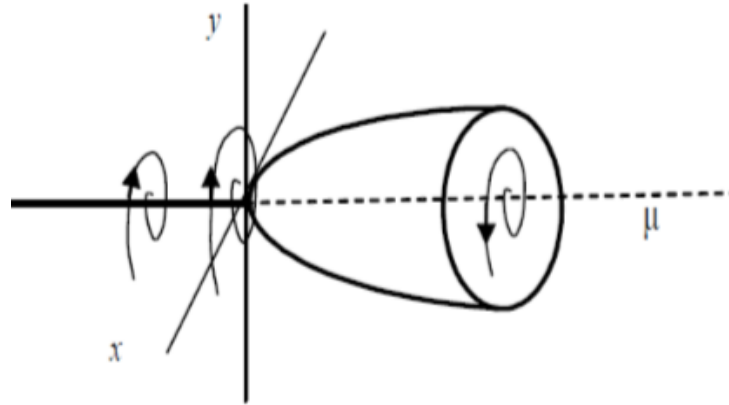


FIG. 1.8 – Diagramme de bifurcation Hopf

## 1.9 Définitions du chaos :

Le chaos est un mouvement des dynamiques temporelles de système simple qui peuvent être décrit en terme de plusieurs variables :

$$\dot{x}(t) = f(t, x, x_0, \dots) \quad (1.16)$$

Les caractéristiques du chaos incluent :

- **La non-linéarité** : Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique.
- **Le déterminisme** : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plu-tôt que probabilistes).
- **La sensibilité aux conditions initiales** : de très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- **L'imprévisible** : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- **L'irrégularité** : ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques.

Il existe deux principes mathématiques importants qui expliquent le comportement chaotique celui de **Li-Yorke** et celui de **Devaney**.

### 1.9.1 Chaos au sens de Li-Yorke :

La première définition mathématique du chaos a été introduit par **Li** et **Yorke**. Ils ont établi un critère très simple " La présence de trois périodes impliquent le chaos ". Ce critère joue un rôle très important dans l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques.

Soit une fonction discrète de dimension  $N = 1$ , décrite par la formule suivante :

$$x(k + 1) = f(x(k)), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \quad (1.17)$$

#### Théorème de Li-Yorke :

Soit  $I$  un intervalle dans  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue. Supposons qu'il y a un point  $a \in I$  tel que :

$$b = f(a), c = f^2(a) \text{ et } d = f^3(a) \quad (1.18)$$

Avec :  $d \leq a < b < c$

Alors :

- pour chaque  $k = 1, 2, \dots$ , il y à un point périodique de période  $n$ .
- l'ensemble  $S \in I$  ne contient pas de points périodiques qui satisfassent les conditions suivantes :
  - Pour chaque  $p_s, q_s \in S$  avec  $p_s \neq q_s$  :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p_s) - f^n(q_s)| > 0$$

Et :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p_s) - f^n(q_s)| = 0$$

-Pour chaque  $p_s \in S$  et point périodique  $q_{per} \in S$  avec  $p_s \neq q_{per}$  :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p_s) - f^n(q_{per})| > 0$$

Le théorème peut être généralisé par supposition que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et que  $f(I) \subset I$ . De plus, la fonction  $f$  doit satisfaire :

$$f(I) \cap I \neq \emptyset$$

afin qu'il contienne les points  $a, b, c$  et  $d$ .

### 1.9.2 Chaos dans le sens de Devaney :

Soit  $S$  un ensemble dans un espace topologique  $R$  et soit  $f^m$  la fonction définie par :

$$f^m = f(f^{m-1}), m = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Et :

$$f^0 = I$$

Tel que :

$$f : S \rightarrow S$$

Soit  $\bar{x} \in S$  point périodique d'une période  $m$  s'il satisfait :

$$\bar{x} = f^m(\bar{x}), \text{ mais } \bar{x} \neq f^k(\bar{x}) \text{ pour } 1 \leq k \leq m \quad (1.20)$$

Si  $m = 1$   $\bar{x}$  est un point fixe.

#### **Théorème de Devaney :**

Une fonction  $f : S \rightarrow S$  est chaotique si :

– **La fonction  $f$  est sensible aux conditions initiales** : dans le sens que pour tout  $x \in S$  et

au voisinage de  $x$  dans  $S$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que :

$$|f^m(x) - f^m(y)| > \delta \tag{1.21}$$

Pour  $y \in S$  et pour  $m \geq 0$ .

- **La fonction  $f$  est topologiquement transitive** : dans le sens que pour toute paire de sous ensembles ouverts  $U, V \subset S$ , il existe un nombre entier  $m > 0$  tel que :

$$f^m(U) \cap V = \emptyset \tag{1.22}$$

- les points périodiques de la fonction  $f$  sont denses dans  $S$ .

# Chapitre 2

## Contrôle des systèmes chaotiques

### 2.1 Techniques de contrôle du chaos :

Pour mieux comprendre la nature même de contrôle du chaos, il est utile de distinguer les approches du contrôle du chaos, des approches de contrôle conventionnelles [2].

1. Dans le contrôle classique, un but souhaitable est habituellement de valeur constante qui n'est pas généralement un état du système donné et le temps final du contrôle et le temps final du contrôle est habituellement fini (par exemple, le concept élémentaire de la "contrôlabilité" est typiquement défini en utilisant un temps final fini et fixe). Mais, dans le contrôle du chaos, le but souhaitable n'est pas limitée aux valeurs constantes dans l'espace d'état ; c'est souvent une orbite périodique instable du système. Ceci demande généralement la réalisation de seulement une petite commande. Techniquement, ceci s'avère difficile à cause de l'instabilité du but. D'un autre côté, dans les méthodes de contrôle du chaos le temps final est infini pour être significatif et pratique, puisque la plupart des comportements dynamiques tels que les états d'équilibre, les cycles limites, les attracteurs et le chaos ont des propriétés asymptotiques.
2. Un système chaotique comporte plusieurs orbites périodiques instables, et est énormément sensible aux petites perturbations de ses conditions initiales. Un tel comportement, utile pour le contrôle du chaos, n'est pas disponible dans les systèmes linéaires ou nonlinéaires non-chaotiques.

3. Dans la plupart des méthodes de contrôle classique, on travaille habituellement dans l'espace d'état. Dans le contrôle du chaos, on est amené à travailler dans l'espace de phase, l'espace paramétrique ainsi que la carte de Poincaré. De plus, les exposants de Lyapounov et le diagramme bifurcation sont des outils typiques pour l'étude, mais non conventionnels.
4. Les performances des méthodes de contrôle des systèmes chaotiques peuvent être différentes de celles des méthodes classiques. Le contrôle du chaos emploie des critères tels que les exposants de Lyapounov, l'ergodicité, et les changements de bifurcation, en plus de ce qui est demandé pour une méthode de contrôle classique, à savoir : la robustesse de l'exécution, la stabilité du contrôle, l'optimum d'énergie, le temps de contrôle et influence du bruit.
5. Un système contrôlé est non autonome et ne peut pas être reformulé comme un système autonome car le contrôle ne peut pas être considéré comme une variable d'état du système. Par conséquent, contrairement à ce qui peut paraître, il est plus difficile de concevoir un système chaotique contrôlé.

## 2.2 But et formes de contrôle :

**But:** Si le contrôle peut revêtir plusieurs formes, il vise toujours à influencer l'évolution du système. On agit donc sur le système dans le but de l'amener à évoluer d'une manière ou d'une autre. Lors du contrôle d'un système chaotique on peut agir de diverses manières selon le but recherché :

- On peut souhaiter qu'un système chaotique reste dans un domaine chaotique .En effet il est possible que naturellement le système évolue jusqu'à perdre les caractéristiques chaotiques (sensibilités aux conditions initiales ,...)
- On peut vouloir la forcer à resté chaotique, auquel cas on procède à des opérations de contrôle convergeant vers ce but .
- De même on peut vouloir amener un système à l'origine non chaotique vers un domaine chaotique. Réciproquement ,on peut souhaiter voir un système chaotique évoluer de façon à perdre son caractère chaotique.[6]

Dans ce memoire, on s'intéresse à un autre type de contrôle. Le but de ce contrôle est d'imposer une

évolution périodique au système, sans que ce dernier perde ses caractéristiques. Le système restera dans un domaine chaotique mais ne se comportera pas comme tel puisqu'il aura une évolution périodique.

## 2.3 Les méthodes de suppression du chaos :

Ces méthodes permettent la stabilisation du système sur une valeur fixe mais qui ne représente pas une orbite périodique instable ou un point fixe instable propre au système contrôlé. Parmi ces méthodes on peut citer les méthodes basées sur les modèles mathématiques classiques tel que le modèle **ARMA** , ou la méthode de **Melnikov** basée sur le Hamiltonien des systèmes dissipatifs.

## 2.4 Les méthodes de stabilisation des systèmes chaotiques :

Ce catégorie inclue les méthodes dans lesquelles le contrôle du chaos est réalisé en stabilisant les orbites périodiques instables d'un système chaotique.

### 2.4.1 La méthode de contrôle **OGY** :

La méthode typique de cette classe est la méthode proposée par **Ott, Grebogi et Yorke (OGY)** [7] au début des années 1990. et qui fut la première à évoquer la notion de contrôle des systèmes dynamiques à comportement chaotique.

En toute généralité, l'instabilité de l'état d'un système se traduit par divergence des trajectoires voisines, quelle que soit la nature de l'état en question, stationnaire, périodique ou chaotique. Pour contrer cette instabilité, il suffit toutes les fois où le système s'écarte de l'état considéré de lui appliquer une pichenette qui le ramène là où on l'attend. L'idée sous-jacente à la méthode de **Ott, Grebogi et Yorke (OGY)** est de déterminer cette perturbation de la trajectoire comme si elle résultait d'une variation du paramètre de contrôle [11].

**a) Le principe de la méthode :**

Le principe du contrôle du chaos est relativement simple : il suffit d'abord d'attendre que la trajectoire passe au voisinage de orbite périodique instable (OPI) visée. A ce moment, de très faibles corrections, infinitésimales à la limite, permettent de maintenir le système quasiment sur cette orbite périodique, en tirant avantage autant que possible de la dynamique intrinsèque du système.

Soit un système dynamique non linéaire à comportement chaotique donné par :

$$x(k + 1) = F(x(k), p) \tag{2.1}$$

où le vecteur  $x \in X$  représente les variables d'états du système et  $p$  est un paramètre de contrôle accessible de l'extérieur pour des petits ajustements.

Le but du contrôle est de bien choisir ces ajustements afin de réaliser la stabilisation d'une certaine (OPI) de l'attracteur chaotique.

Pour cela, on suppose que le paramètre de contrôle  $p$  peut varier dans un petit intervalle autour d'une certaine valeur nominale  $p_0$  et que le système chaotique admet des points fixe instables dans la section de Poincaré.

Soit  $x_f$  un point fixe donné. La linéarisation du système (2.1) autour de son point fixe est donnée par :

$$\delta x(k + 1) = A\delta x(k) \tag{2.2}$$

On note  $A$  la matrice jacobienne associée à  $F$ .  $A$  dépend du point où elle est évalué. ( $A = D_x F(x)$ )

On a deux directions propres dont l'une instable  $e_u$  (valeur propre associée strictement supérieur à 1 en valeur absolue), et l'autre stable  $e_s$  (valeur propre associée strictement inférieur à 1 en valeur absolue). On note les vecteurs adjoints dans la base duale  $f_u$  et  $f_s$  [6].

Où :

$$\delta x(k + 1) = x(k + 1) - x_F(p) \quad \text{et} \quad A = \lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s \tag{2.3}$$



Tels que :

$\lambda_s$  : Valeur propre  $|\lambda_s| < 1$ .

$\lambda_u$  : Valeur propre  $|\lambda_u| > 1$ .

$e_s$  : Vecteur propre correspond à la valeur propre  $\lambda_s$ .

$e_u$  : Vecteur propre correspond à la valeur propre  $\lambda_u$ .

$e_s f_s = e_u f_u = 1$ .

$e_s f_u = e_u f_s = 0$ .

Si on applique des petits changements au paramètre  $p$ , alors la coordonnée du point fixe est décalée également à un certain point voisin  $x_F(\bar{p})$ .

Autour de ce point, on peut écrire les approximations suivantes :

$$x_f(\bar{p}) = x_f(p) + (\bar{p} - p_0) \left( \frac{\partial x_f}{\partial p} \right)_{p=p_0} \quad (2.4)$$

$$= x_f(p) + \delta p(k) G \quad (2.5)$$

Où :

$$\delta p(k) = (\bar{p} - p_0) \quad \text{et} \quad G = \left( \frac{\partial x_f}{\partial p} \right)_{p=p_0}$$

Alors on peut réécrire la relation (2.2) sous la forme :

$$\delta x(k+1) = \delta p(k) G + A [\delta x(k) - \delta p(k) G] \quad (2.6)$$

Si on veut que la variation à imposer soit telle que le point  $x(k+1)$  corresponde au point fixe instable, ce qui signifie que la trajectoire du système suive la direction stable et que :

$$f_u \delta x(k+1) = 0 \quad (2.7)$$

Finalement on obtien :

$$\delta p(k) = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{f_u}{f_u G} \delta x(k) \quad (2.8)$$

Cette variation paramétrique est activée seulement lorsque  $x(k)$  est située dans un interval  $|\delta x(k)| < \delta p_{\max}$

On a ainsi déterminer la correction à appliquer au voisinage du point fixe et à chaque passage dans la section de Poincaré.

**b/ Exemple de contrôle par la méthode OGY :**

On va prendre comme un exemple le contrôle du système de Hénon par la méthode OGY. Le système de Hénon est décrit par :[5]

$$\begin{cases} x_{k+1} = a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases} \quad (2.9)$$

Où a et b représentent les paramètres de contrôle.

**Point fixe :**

On pose  $x_{k+1} = x_k$  et  $y_{k+1} = y_k$ , on obtient :

$$\begin{cases} x = a - x^2 + by \\ y = x \end{cases} \quad (2.10)$$

C'est à dire :

$$x_f, y_f = -\frac{(1-b)}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-b)^2}{4} + a} \quad (2.11)$$

On pose :  $c = \frac{1-b}{2}$

On obtient :

$$x_f, y_f = -c \pm \sqrt{c^2 + a} \quad (2.12)$$

**Application de l'algorithme de contrôle :**

L'algorithme de contrôle est appliqué au système avec  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  pour assurer la présence du phénomène chaotique.

Le contrôle par la méthode OGY consiste à effectuer les opérations suivantes :

**1- Identification d'orbite périodique à stabiliser :**

On remplace  $a$  et  $b$  dans l'équation (2.11) on obtient :

$$x_{f_1}, y_{f_1} = 0,8839 \quad (2.13)$$

$$x_{f_2}, y_{f_2} = -1,5839 \quad (2.14)$$

Dans notre cas on choisit le point  $x_{f_1}$ .

**2- Calcul des matrices A et G :**

On a  $A = D_x F(x)$  et  $B = \partial F / \partial p$

$$A = \begin{bmatrix} -2x_{f_1} & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Alors :

$$A = \begin{bmatrix} -1,7678 & 0,3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

**3- Calcul des valeurs propres  $\lambda_u$  et  $\lambda_s$  :**

$\lambda_u$  et  $\lambda_s$  sont définis par :

$$\lambda_{u,s} = -x_{f_1} \pm \sqrt{x_{f_1}^2 + b} \quad (2.17)$$

Soit :

$$\lambda_s = 0,1559 \quad \text{et} \quad \lambda_u = -1,9237 \quad (2.18)$$

**4- Calcul des vecteurs propres  $\{e_s, e_u\}$  et les vecteurs covariances  $\{f_s, f_u\}$  :**

Les vecteurs propres sont calculés à partir de l'équation suivante :

$$[\lambda I - A]e = 0 \quad (2.19)$$

Le vecteur propre est choisi de la forme :

$$e = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \text{ avec } e_s = \begin{bmatrix} \lambda_s \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } e_u = \begin{bmatrix} \lambda_u \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$e_s = \begin{bmatrix} 0,1559 \\ 1 \end{bmatrix}, e_U = \begin{bmatrix} -1,9237 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Comme on a :  $f_s e_s = f_u e_u = 1$  et  $f_s e_u = f_u e_s = 0$

On trouve :

$$f_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_s - \lambda_u} & \frac{\lambda_u}{\lambda_u - \lambda_s} \end{bmatrix} \text{ et } f_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} & \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \end{bmatrix}$$

$$f_s = \begin{bmatrix} 0,4808 & 0,9250 \end{bmatrix} \text{ et } f_u = \begin{bmatrix} -0,4787 & 0,0746 \end{bmatrix}$$

### 5- Calcul de z :

Soit  $z$  un paramètre représenté par :

$$z = \frac{\lambda_u f_u}{f_u G} = \frac{\lambda_u \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} & \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} & \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \lambda_u & -\lambda_u \lambda_s \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$z = \begin{bmatrix} -1,9237 & 0,3011 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

On choisit  $\delta = 0,01$ .

- Résultats de simulations :

L'algorithme appliqué avec la boucle de test : Si  $|z\delta x_k| < \varepsilon$

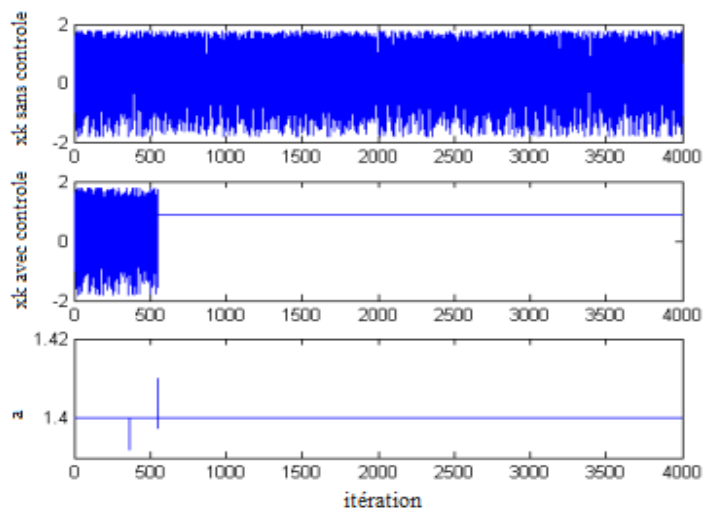


FIG. 2.1 – Contrôle du système de Hénon par OGY

On remarque qu’au environ de la 554<sup>eme</sup> itération, le système se stabilise à la valeur  $x_k = 0,8839$  après deux déclenchements du contrôle.

Pour activer le contrôle plus tôt et pour éviter le double déclenchement du contrôle, on change la condition de test dans l’algorithme par :

$$(x_k - x_{f_1})^2 + (y_k - y_{f_1})^2 < \varepsilon \tag{2.23}$$

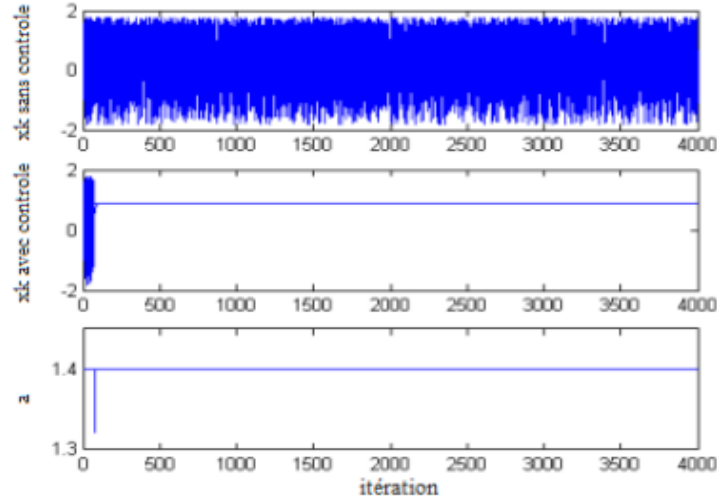


FIG. 2.2 – Contrôle de l’attracteur de Hénon par la deuxième condition

Dans le deuxième cas, on remarque que le déclenchement du contrôle se produit une seule fois. Le système se stabilise à la valeur  $x_k = 0,8839$  après 79 itérations seulement, cela signifie l’efficacité de cette deuxième condition au voisinage du point fixe  $x_{f_1}$ .

### c/ Influence du bruit :

En présence du bruit externe, parfois une trajectoire contrôlée sera mise hors du voisinage de la trajectoire désirée. Si ce phénomène se produit, le contrôle sera désactivé et on doit attendre un autre passage dans l’espoir que la trajectoire chaotique entre à nouveau dans le voisinage de l’orbite périodique désirée et soit contrôlée.

### d/ Distance de contrôle :

La distance entre le point courant et la trajectoire désirée est appelée la distance de contrôle.

Autrement dit, lorsque le système évolue, on peut calculer la distance entre le point de l’attracteur, correspondant à l’état courant, et la trajectoire désirée. Cette distance évolue au cours du temps. Quand elle est suffisamment petite, on considère qu’on se trouve au voisinage de cette trajectoire et que le contrôle peut être appliqué.

On peut rendre la distance de contrôle très faible et s’assurer ainsi que le contrôle une fois déclenché,

sera efficace. Seulement, dans ce cas, il faut attendre longtemps avant que le système passe très près de cette trajectoire. Ce temps vite devient déraisonnable.

La probabilité que la trajectoire entre dans le voisinage du point fixe (OPI approprié) est donnée par :

$$P(\varepsilon) = \int_{x(k)-\varepsilon}^{x(k)+\varepsilon} \rho[x(k)] dx \approx 2\varepsilon\rho[x(k)] \quad (2.24)$$

Où :  $\rho$  est la fréquence à laquelle une trajectoire chaotique visite le proche voisinage du point  $x$  sur l'attracteur.

Il est clair que, plus la valeur de  $\varepsilon$  est petite, plus le temps d'attente est long.

### 2.4.2 Méthodes dérivant de la méthode OGY :

**OPF (Occasional Proportional Feedback)** : en 1991, Hunt [4] a introduite la première modification à la méthode OGY, et propose un algorithme de contrôle à retour d'état proportionnel occasionne (**OPF**). Elle est très simple et s'implémente facilement. La simplicité de la méthode en fait un outil de choix pour le contrôle expérimental du chaos. Cette méthode utilise la carte de Poincaré pour représenter les systèmes dynamique fortement dissipatifs. Le retour d'état est proportionnel à la distance qui sépare la trajectoire du système du point fixe. Afin de minimiser l'ordre de la perturbation du paramètre de contrôle, l'auteur propose de changer la condition sur la loi de contrôle en définissant une fenêtre au voisinage de l'orbite désirée. La largeur de cette fenêtre représente la perturbation maximal du paramètre. Le contrôle peut échouer lorsque un paramètre du système est altéré entre plusieurs valeurs.

**RPF (Recursive Proportional Feedback)** : en 1993, Rollins et al [10] modifient la méthode **OPF** et proposent la méthode de contrôle à retour d'état proportionnel récursif (**RPF**).

Dans le cas où le système chaotique ne possède pas de paramètre accessible de l'extérieur, les auteurs proposent d'appliquer le contrôle, en changeant une variable d'état du système; cette méthode sera appelée méthode de retour d'état proportionnel perturbé (PPF : Perturbed Proportional Feedback).

**MED (Minimal Expected Deviation)** : en 1993, En travaillant avec un laser-NMR. Reyl et al

ont découvert que des valeurs propres complexes survenaient pour des orbites de période 3 ou plus. Le même problème apparaissait quand plusieurs stations de contrôle étaient disséminées le long de l'orbite. **Reyl et al [9]** ont introduit la méthode (**MED**) pour contrôler les systèmes chaotiques ayant des valeurs propres complexes ou des valeurs propres multiples.

**Remarque 2.4.1** *Il faut noter que toutes ces méthodes permettent de contrôler les systèmes chaotiques de dimension  $N \leq 2$ . Le contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé est plus difficile, ceci est dû à leur nature compliquée.*

### 2.4.3 Méthode de Pyragas :

Pyragas [8] propose une méthode a été développée pour stabiliser l'orbite périodique en appliquant un petit contrôle continu à un paramètre d'un système pendant qu'il évolue en temps continu, au lieu d'un contrôle discret au croisement d'une surface. ceci est connu sous le nom de contrôle de rétroaction retardée, et la simulation numérique et les expériences ont prouvé qu'il était facile à mettre en œuvre et efficace au moins pour les orbites périodiques moins instables ; c'est-à-dire les orbites avec des périodes plus petites.

Soit le système dynamique défini par :

$$x(k+1) = F(x(k)) + w(k) \quad (2.25)$$

Où :  $w(k)$  est une fonction qui perturbe l'évolution dynamique de la variable  $x$ .  $F$  est une fonction non linéaire.

Supposons que ce système se comporte de manière chaotique pour  $w = 0$ . Par conséquent, on peut extraire à partir de la variable  $x$  plusieurs orbites périodiques de la forme :

$$x = x_k(k), x_k(k + P_k) = x_k(k) \quad (2.26)$$

Tel que :  $P_k$  représente la période de la  $k^{\text{ème}}$  orbite périodique instable.

Pour stabiliser l'orbite périodique instable choisie, on conçoit le contrôle à retour d'état qui réinjecte



dans le système la différence entre le signal  $x(k)$  et  $x(k - \tau)$  comme signal de contrôle :

$$w(k) = G[x(k - \tau) - x(k)] \quad (2.27)$$

Où :  $G$  représente le gain du contrôle et  $\tau$  le retard d'état, La  $k^{\text{ème}}$  orbite périodique instable se stabilise lorsque  $\tau$  est égale à la période  $P_k$ . Cette loi de contrôle est appliquée lorsque la trajectoire chaotique est autour de l'orbite périodique instable qui se définit par :

$$|x(k - \tau) - x(k)| < \varepsilon \quad (2.28)$$

Avec :  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $\varepsilon > 0$ .

#### 2.4.4 Méthode de contrôle prédictif :

Le contrôle prédictif se base sur la stratégie de contrôle adaptatif introduite pour le contrôle des systèmes chaotiques [14]. Ce type de contrôle conduit le système chaotique vers un attracteur tel que le point fixe.[1]

#### 2.4.5 La méthode Backstepping :

L'algorithme backstepping est utilisé pour le contrôle des systèmes chaotiques continus, c'est un algorithme récursif qui repose sur le choix de la fonction de Lyapunov pour le calcul du contrôleur. A l'étape  $j$ , le  $j^{\text{ème}}$  sous système de dimension  $j$  est stabilisé à l'aide d'un contrôleur virtuel  $\gamma_j$  et de la commande  $\omega_j$  qui est calculée à partir de la fonction de Lyapunov en satisfaisant les conditions de stabilité.[5]

-On peut appliquer l'algorithme backstepping pour le contrôle du système de Lorenz.

# Chapitre 3

## Systeme de Chua

### 3.1 Présentation du système :

Le circuit de Chua est un circuit électrique du troisième ordre autonome, dissipative, il a été investigué entièrement et expérimentalement sur le plan numérique et analytiques. Ce circuit, connu pour son répertoire riche de phénomènes dynamiques non linéaire et est devenu un paradigme universel pour le chaos. Le circuit doit contenir :

1. Au moins une résistance active.
2. Au moins trois éléments de stockage d'énergie.
3. Au moins un élément non linéaire.

En 1983, l'ingénieur Leon Ong Chua a mis au point le plus simple circuit électronique respectant ces critères. Il comporte deux condensateurs, une bobine, une résistance active et une diode de Chua.

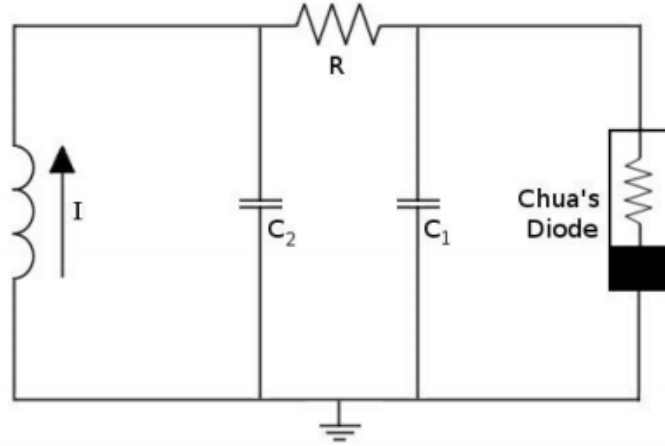


FIG. 3.1 – Circuit de Chua

### 3.1.1 La dynamique du circuit :

La dynamique du circuit est donnée par l'ensemble des équations suivantes [3] :

$$\begin{cases} c_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{(v_2 - v_1)}{R} - g(v_1) \\ c_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{(v_1 - v_2)}{R} + i \\ L \frac{di}{dt} = -v_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $v_{c_1}, v_{c_2}$  représentent les tension aux bornes des condensateurs  $c_1$  et  $c_2$ , respectivement, et  $i$  est le courant dans l'inductance ;  $G$  est la conductance électrique de la résistance. La fonction  $g(v_1)$  la réponse en courant de la diode de chua , et est donné par :

$$g(v_1) = m_0 v_1 + \frac{1}{2}(m_1 - m_0) |v_1 + B_P| + \frac{1}{2}(m_0 - m_1) |v_1 - B_P| \quad (3.2)$$

Avec :

$m_0, m_1$  sont des tangentes interieur et exterieure respectivement.

$\pm B_P$  points de ruputre.

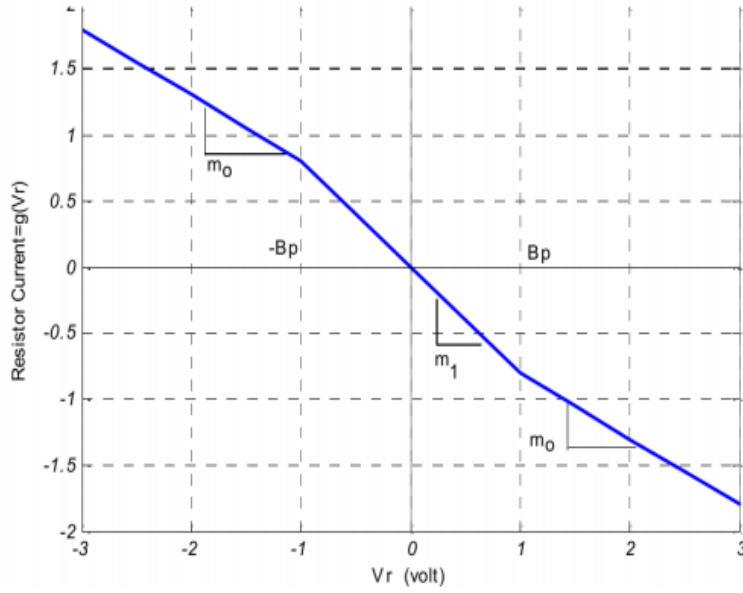


FIG. 3.2 – Caractéristique de la résistance non-linéaire de Chua

Après quelques transformations simples, le système (3.1) peut s'écrire sous une autre forme, appelée forme sans dimension du circuit de Chua . D'où les changement de variables à effectuer sont :

$$x = \frac{v_1}{B_p}, y = \frac{v_2}{B_p} \text{ et } z = \frac{iR}{B_p}$$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - g(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (3.3)$$

Où :

$$g(x) = bx + \frac{a+b}{2}(|x+1| - |x-1|) \quad (3.4)$$

avec :  $b$  et  $a$  sont des constantes.

L'élément non linéaire du circuit représente avec :

$$g(x) = \begin{cases} bx + (a-b) & \text{si } x \geq 1 \\ ax & \text{si } |x| < 1 \\ bx - (a-b) & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \quad (3.5)$$

Les points fixes du systèmes sont donnés par :

$$C_0 = (0, 0, 0) , C_1 = \left(\frac{b-a}{b+1}, 0, \frac{a-b}{b+1}\right), C_{-1} = \left(\frac{a-b}{b+1}, 0, \frac{b-a}{b+1}\right)$$

## 3.2 Etude du système :

### 3.2.1 La stabilité :

Pour l'étude du système, on a pris les paramètres  $\beta, a$  et  $b$  des constants égaux à  $\beta = 14,87, a = -1,27$  et  $b = -0,68$  et  $\alpha$  variable.

#### Stabilité par exposant de Lyapounov :

A partir de deux conditions initiales très proches et pour  $\alpha = 5$  et  $\alpha = 10$ , on mesure le taux de divergence entre les deux orbites créés par les deux évolutions . Pour ces valeurs de  $\alpha$ , le système a deux comportements différents.

Les deux conditions initiales sont :  $(x_0, y_0, z_0) = (-0,1, -0,1, -0,1)$  et  $(\acute{x}_0, \acute{y}_0, \acute{z}_0) = (-0,1 + 10^{-4}, -0,1, -0,1)$ .

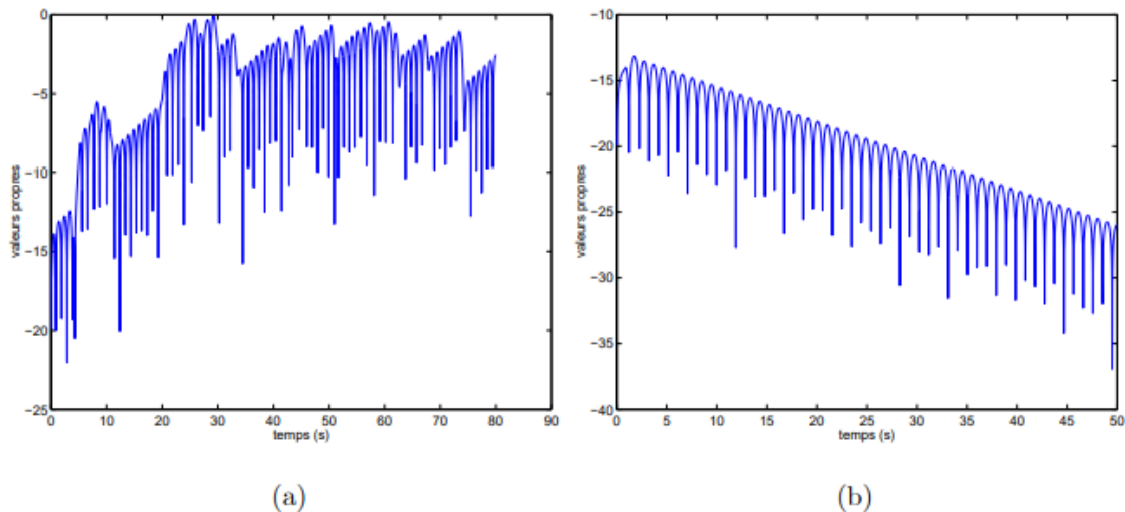


FIG. 3.3 – Exposants de Lyapounov du système de Chua.(a) pour  $\alpha = 5$ .(b) pour  $\alpha = 10$ .

D'après les figures(3.3)(a et b) on trouve que pour la valeur  $\alpha = 5$  la courbe est décroissante avec une pente négative  $\lambda = -0,25$  qui signifie que les deux orbites se rapprochent l'une de l'autre,

alors le système est stable. Mais pour la valeur  $\alpha = 10$ , l'exposant de Lyapounov est estimé à  $\lambda = 0,39$ . Cette valeur positive signifie une divergence entre les deux orbites initiales, le système est chaotique.

**Méthode de l'espace de phase :**

Une fois les points d'équilibre déterminés, on calcule la matrice Jacobienne du système pour ces différents points d'équilibre. La matrice Jacobienne est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} \alpha(-1 - \dot{g}(x)) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

**a/ Au point fixe  $C_0$  :**

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha(1+a) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \implies [\lambda I - J] = \begin{bmatrix} \lambda + \alpha(1+a) & -\alpha & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & \beta & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $[\lambda I - J]$  est :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det[\lambda I - J] = (\lambda + \alpha(1+a))(\lambda(\lambda + 1) + \beta) - \alpha\lambda \\ &= \lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(1+a)) + \lambda(\beta + \alpha a) + \alpha\beta(1+a) \end{aligned} \quad (3.8)$$

b/ Aux points  $C_1$  et  $C_{-1}$  :

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha(1+b) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \implies [\lambda I - J] = \begin{bmatrix} \lambda + \alpha(1+b) & -\alpha & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & \beta & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $[\lambda I - J]$  est donné par :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det[\lambda I - J] = (\lambda + \alpha(1+b))(\lambda(\lambda + 1) + \beta) - \alpha\lambda \\ &= \lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(1+b)) + \lambda(\beta + \alpha b) + \alpha\beta(1+b) \end{aligned} \quad (3.10)$$

La figure (3.4)(a et b) représente la variation des valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  en fonction de  $\alpha$  pour le point d'équilibre  $C_0$  et pour les points d'équilibre  $C_1$  et  $C_{-1}$  respectivement.

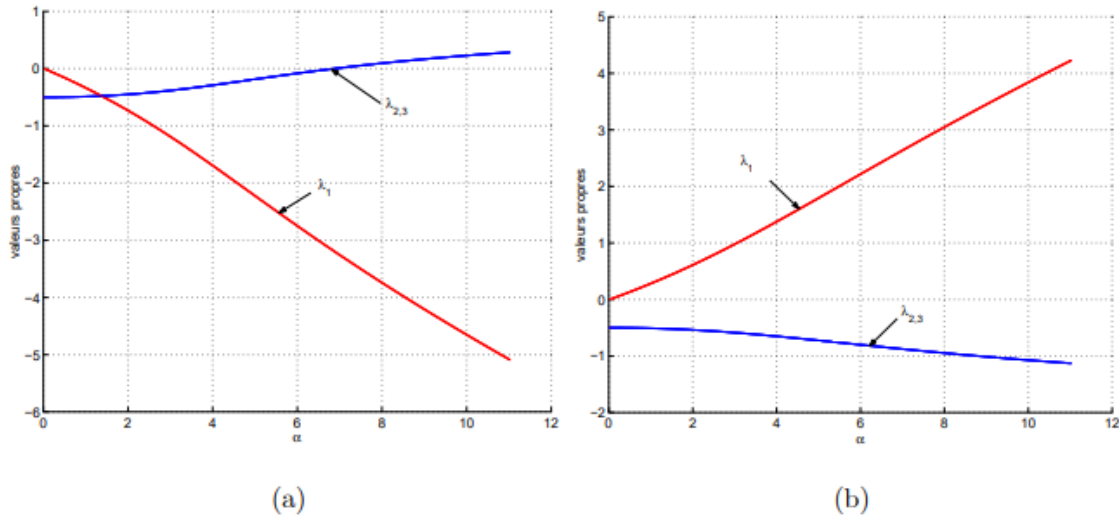


FIG. 3.4 – Variation des valeurs propres du système de Chua

Dans le premier cas, le point d'équilibre  $C_0$  est stable pour  $\alpha < 6,60$ , tandis que les points d'équilibre  $C_1$  et  $C_{-1}$  sont instables car l'une des trois valeurs propres du système a toujours une partie réelle positive.

### 3.3 Contrôle du système de Chua :

La section de Poincaré correspond à l'ensemble des points  $X = X_{\max}$ .

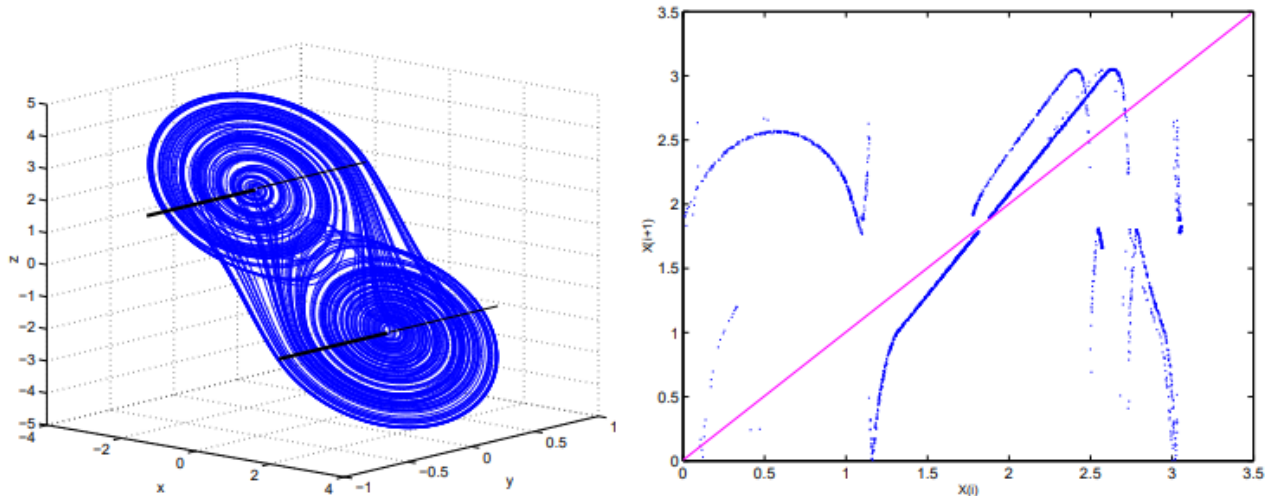


FIG. 3.5 – Choix de la section de Poincaré.

### 3.4 Simulation numérique :

La variable d'état  $x$  du point d'équilibre est déterminée par :

$$x_f = 2,707 \quad (3.11)$$

Pour  $\alpha = 10, 2$ , on trouve :

$$\dot{x}_f = 3,313 \quad (3.12)$$

La loi de contrôle déduite est :

$$\begin{aligned} \delta\alpha(k) &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_f}(x(k) - x_f) + \zeta\delta\alpha(k-1) \\ &= \frac{10,2 - 10}{3,313 - 2,707}(x(k) - x_f) + \zeta\delta\alpha(k-1) \end{aligned}$$



$$= 0,331(x(k) - x_f) + \zeta\delta\alpha(k - 1) \tag{3.13}$$

La région d'activation du contrôle est définie par :

$$(x(k) - x_f)^2 + (y(k) - y_f)^2 < 1 \tag{3.14}$$

avec  $y_f = 0,2787$ .

Partant de la même condition initiale, le figure (3.6) représente le résultat de l'application du contrôle.

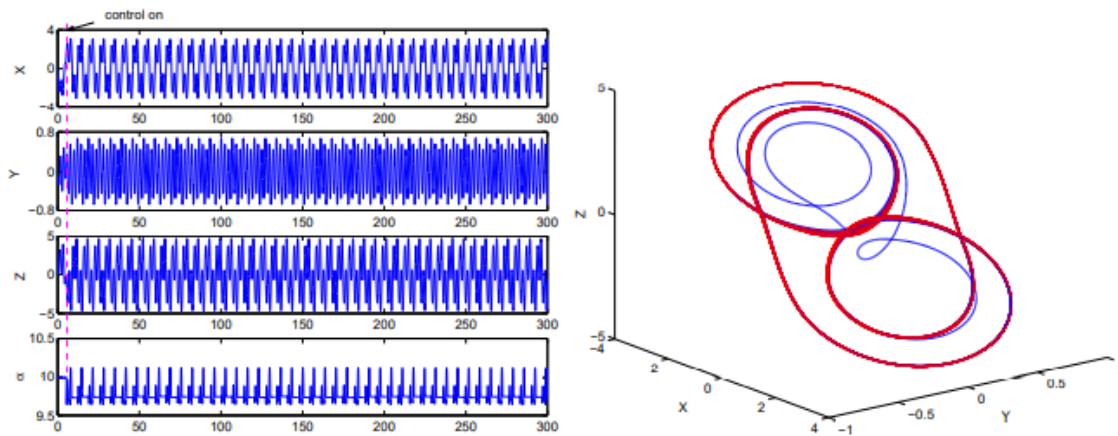


FIG. 3.6 – Contrôle du système de Chua

# Conclusion

Le travail développé dans le cadre de ce mémoire, a eu pour objectif l'étude de différentes méthodes de contrôle du comportement chaotique dans les systèmes dynamiques nonlinéaires.

Le premier chapitre porte sur quelques notions concernant les systèmes dynamiques puis nous nous sommes rapprochés des systèmes chaotiques qui présentent plusieurs caractéristiques très intéressantes, parmi ces caractéristiques on peut citer la sensibilité aux conditions initiales, ce qui signifie que la moindre différence dans les conditions initiales engendre une évolution qui diffère à chaque fois. Une autre caractéristique serait le déterminisme, ce qui veut dire qu'il est possible de reproduire le comportement chaotique.

Dans le deuxième chapitre on a proposé quelques méthodes de contrôle associées aux systèmes dynamiques chaotiques. Tel que la méthode de OGY qu'on a l'appliquer sur le système de Hénon, et autres méthodes dérivées de cette méthode, méthode de Pyragas, le contrôle prédictif et l'algorithme backstepping.

Ce travail a été finalisé dans le troisième chapitre par le système de Chua et ce qu'est un circuit de Chua et de quoi il se compose ainsi que la stabilité et le contrôle.

# Bibliographie

- [1] Abdelkrim Boukabou (2000) “Neural networks prediction based Feedback control of Unknown chaotic system”, mémoire de magistère, université de Constantine.
- [2] Abdelkrim Boukabou (Juin 2006). Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d’ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l’élaboration de nouvelles approches. Thèse de doctorat en science. Université de Constantine.
- [3] Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A., & Zhong, G. Q. (1993). A universal circuit for studying and generating chaos. I. Routes to chaos. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 40(10), 732-744.
- [4] Hunt, E. R. (1991). Stabilizing high-period orbits in a chaotic system : The diode resonator. *Physical Review Letters*, 67(15), 1953.
- [5] IKHLEF Ameer (2011). Synchronisation, Chaotification et Hyperchaotification des Systèmes Non-linéaires : Méthodes et Applications. Thèse de doctorat en science. Université Mentouri de Constantine.
- [6] LAUNAY Frédéric mars 2011. Cours commande robuste multivariable application au chaos.

<https://slideplayer.fr/slide/1168058/>.

# Bibliographie

- [7] Ott, Edward, Celso Grebogi, and James A. Yorke. "Controlling chaos." *Physical review letters* 64.11 (1990) : 1196.
- [8] Pyragas, K. (1992). Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics letters A*, 170(6), 421-428.
- [9] Reyl, C., Flepp, L., Badii, R., & Brun, E. (1993). Control of NMR-laser chaos in high-dimensional embedding space. *Physical Review E*, 47(1), 267.
- [10] Rollins, R. W., Parmananda, P., & Sherard, P. (1993). Controlling chaos in highly dissipative systems : A simple recursive algorithm. *Physical Review E*, 47(2), R780.
- [11] Shinbrot, Troy, et al. "Using small perturbations to control chaos." *Nature* 363.6428 (1993) : 411-417.

# Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

*OPI* : *Orbite périodique instable.*

*OPF* : *Occasional Proportional Feedback.*

*RPF* : *Recursive Proportional Feedback.*

*MED* : *Minimal Expected Deviation.*