République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique
**Université Mohamed Khider, Biskra**
Faculté des Sciences Exactes et Des Sciences de la Nature et de La Vie
**Département de Mathématiques**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :
**MASTER** en **Mathématiques**
**Option :** Analyse

Par
**BEY Ahmed**
Titre :

# Équations Intégrales Linéaires de Fredholm de Première Espèce et Méthode de Régularisation

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | *REZKI Ibrahim* | Université de Biskra | Président |
| Dr. | *CHEMCHAM Madani* | Université de Biskra | Rapporteur |
| Dr. | *OUAAR Fatima* | Université de Biskra | Examinateur |

**Année universitaire : 2019 - 2020**

## Résumé

Le but de ce travail est d'étudier les équations intégrales linéaires de Fredholm de première espèce et méthode de régularisation pour les transformer en équations intégrales linéaire de Fredholm de seconde espèce, en tenant prendre quelques méthodes de résolution analytiques.

Concernant les équations intégrales linéaire de Fredholm La méthode de régularisation consiste à remplacer un problème mal posé par un problème bien posé.

La méthode de régularisation transforme l'équation intégrale de première espèce en équation de seconde espèce.



MOTS-CLÉS: Equations Intégrales Linéaires De Fredholm De Première Espèce, Equations Intégrales Linéaires De Fredholm De Seconde Espèce, Méthode De Régularisation.



## Abstract

The aim of this work is to study the linear integral Fredholm equations of the first kind and regularization method to transform them into the linear integral Fredholm equations of the second kind, taking some analytical methods of resolution.

Concerning the linear integral equations of Fredholm The method of regularization consists in replacing a badly posed problem by a well posed problem.

The regularization method transforms the integral equation of the first kind into an equation of the second kind.



KEYWORDS: Fredholm Linear Integral Equation Of First Kind, Fredholm Linear Integral Equation Of Second Kind, Regularization Method.



## تلخيص

الهدف من هذا العمل هو دراسة معادلات فريدهولم الخطية التكاملية من النوع الأول و طريقة إعادة التنظيم من أجل تحويلها إلى معادلات فريدهولم الخطية التكاملية من النوع الثاني عن طريق اتخاذ بعض طرق الحل التحليلي.

فيما يتعلق بالمعادلات التكاملية الخطية لـ Fredholm تتمثل طريقة التنظيم في استبدال مشكلة مطروحة بشكل سيئ بمشكلة مطروحة جيدًا. طريقة التنظيم تحول المعادلة التكاملية من النوع الأول إلى معادلة من النوع الثاني.



**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التكاملية الخطية لفريدهولم من الصنف الاول, المعادلات التكاملية الخطية لفريدهولم من الصنف الثاني, طريقة التنظيم.

# Remerciement

Je tiens à remercier, en premier lieu ,Mon Dieu qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier Dr **: Madani CHEMCHAM** directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail .

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de prés à l'élaboration de ce mémoire.

# Dedicace

Ce travail est particulièrement dédie à :

Mes parents, tout spécialement ma très chère mère .
Ma femme et mes enfants.
Mes frères.
Tous mes amis.et à ceux qui se battent pour l'humanité

# Table des matières

# Liste des tableaux

# Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

| | |
|---|---|
| $f\ (x)$ | Fonction donnée . |
| $k(x,t)$ | noyau de l'équation intégrale . |
| $\lambda$ | réel constant |
| $\mathbb{R}$ | Ensemble des réels. |
| $\mathbb{R}^d$ | produit cartésien $\mathbb{R}\times\ \mathbb{R}$.........($d$ fois ) |
| $\mathbb{C}$ | Ensemble des complexes |
| $\varphi$ | La fonction inconnue dans l'équation intégrale. |
| $\varphi_n$ | Les composants de fonction $\varphi$. |
| $A$ | Opérateur intégrale linéaire . |
| $T\ (\ f\ (x)\ )$ | La série de Taylor de $f\ (x)$ |
| $R(x,t\ ;\lambda)$ | La résolvante de Fredholm de l'équation intégrale. |
| $\mu$ | Un petit paramètre positif. |

# Introduction

La théorie des équations intégrales qui s'est développée très rapidement à la suite des travaux de Volterra et Fredholm constitue aujourd'hui une importante branche de l'analyse fonctionnelle.

Ce genre d'équations intégrales a été découvert par J.Fourier (1760-1830) du au fait qu'il a obtenu la formule de la transformée de Fourier .

En 1837 ,Liouville (1809-1882) a publié une discussion sur la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles dans lesquelles il montrait qu'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire est obtenue par la résolution d'une équation intégrale.

En 1887,V.Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés .En outre ,il a étendu la théorie des équations intégrales aux équations intégro-différentielles et au équations intégrales singuliers .

En suite en 1900 Fredholm (1866-1927) a étudié la méthode pour résoudre des équations intégrales de deuxième espèce.

Dans ce mémoire qui se devise en deux chapitres, nous allons traiter les équations intégrales linéaires de Fredholm du seconde espèce , du première espèce et méthode de régularisation .

**Chapitre 1 :** nous rappelons brièvement quelques notations de base concernant les opérateurs intégraux et étudions ensuite les équations intégrales de la seconde espèce avec quelques méthodes de résolution analytique.

**Chapitre 2 :** nous présentons la méthode de régularisation d'équations de première espèce et combinaison cette méthode avec quelques méthodes de résolution analytique.

L'étude des équations intégrales constitue une large branche de l'analyse fonctionnelle, elles ont plusieurs applications en quelques branches scientifiques et techniques celles en biologie, économie et ingénierie etc.

Parmi les équations intégrales les plus connues, on a choisi dans cette étude l'équation intégrale linéaire de Fredholm du première et seconde espèce.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution analytique de l'équation intégrale linéaire de Fredholm.

# Chapitre 1

# Equations intégrales linéaires de Fredholm

## 1.1 Opérateurs intégraux

### 1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

**Définition 1.1.1 :** soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels . une application $\boxed{\mathrm{A} : E \to F}$ dite linéaire si pour tout $x, y$ dans $E$ et pour tout scalaire $\alpha$ et $\beta$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \tag{1.1}$$

Cette application est appelée aussi opérateur linéaire.

**Définition 1.1.2 :** soient E et F deux espaces normés ,un opérateur linéaire $\mathrm{A} : E \to F$ est dite borné ,s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour $u \in E$ ,

$$\|Au\| \leq M. \|u\| \tag{1.2}$$

**Définition 1.1.3 :** soient $E$ et $F$ deux espaces normés,on définit une norme sur l'espace vectoriel de tous les opérateurs linéaires bornés de $E$ dans $F$ par : $\|u\| = 1$ , $\|u\| \neq 0$

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} \tag{1.3}$$

l'espace des opérateurs linéaires bornés de $E$ dans $F$ muni de cette norme est noté par $\mathcal{L}(E, F)$

si $E = F$ il est simplement par $\mathcal{L}(E)$

**Théorème 1.1.1 :** soit $A$ un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés $E$ et $F$ .Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

-$A$ est borné.

-$A$ est continu sur $E$.

-$A$ est continu à l'origine.

**Théorème 1.1.2 :** tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet et par conséquence tout sous espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

### 1.1.2 opérateurs intégraux

Dans ce qui suit, nous allons définir une classe importante d'opérateurs définis à l'aide d'une intégrale, ces derniers sont dits opérateurs intégraux dont le domaine de l'intégration. $I$ dans $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 1.1.4 :** soit $K$ une fonction mesurable sur $I \times I$ ,alors la forme générale d'un opérateur intégrale linéaire dit aussi :opérateur à noyau et est formellement donné par l'expression :

$$A\varphi(x) = \int_I k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.4}$$

**Remarque 1.1.1 :** $A\varphi$ est défini si l'intégrale existe.

**Remarque 1.1.2 :** si $k$ est une fonction continue de $[a, b] \times [a, b]$ ,alors l'opérateur est bien défini de $L^2$ $[a, b]$ sur $L^2$ $[a, b]$ .

**Théorème 1.1.3 :** si le noyau $k(x, t)$ est continu sur $[a, b] \times [a, b]$ alors la fonction $(A\varphi)(x)$ est continue sur $[a, b]$ pour tout $\varphi \in L^2$ $[a, b]$

preuve :

$$
\begin{aligned}
A\varphi(x) &= \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \ . \\
|A\varphi(x)| \quad &\leq \quad \int_a^b |k(x,t)\varphi(t)| \, dt \ . \\
\int_a^b A^2\varphi(x)dx &\leq \ \ \|\varphi\|_2^2 \ \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dt \ dx. \\
&= \ \|\varphi\|_2^2 \ \|k\|_2^2 \ < +\infty
\end{aligned}
$$

**Définition 1.1.5 :** soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés ,un opérateur $A\varphi \in \mathcal{L}(E,G)$ est dit de rang fini si la dimension de l'image de $A$ est fini : $\dim A(E) < +\infty$

**Exemple 1.1.1 :**

$$
\begin{aligned}
k(x,t) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t). \\
\textit{alors} \qquad\qquad A\varphi(x) \quad &= \quad \int_a^b \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t)\varphi(t)dt \ . \\
&= \quad \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \ \int_a^b \ h_i(t)\varphi(t)dt \ . \\
&= \quad \sum_{i=1}^{n} c_i g_i(x) \qquad et \qquad c_i = \int_a^b h_i(t)\varphi(t)dt.
\end{aligned}
$$

alors $A\varphi$ est de dimension $\leq n$ et de rang $\leq n$ .

## 1.2 Equations intégrales linéaires de Fredholm

### 1.2.1 Équation intégrale linéaire.

-On définit l'équation intégrale toute équation où la fonction $\varphi(x)$ s'apparait sous le signe de l'intégrale.

La plupart de toutes les équations s'écrivent sous la forme

$$
\varphi(x) = f \ \ (x) + \lambda \ \int_{g(x)}^{h(x)} k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.5}
$$

tel que $g(x)$ *et* $h(x)$ sont les limites de l'intégration .

$\lambda$ est un paramètre constant.

$k(x,t)$ une fonction connue de deux variables s'appelle" le noyau de l'intégrale".

$\varphi(x)$ c'est la fonction inconnue à déterminer comme solution de l'équation de Fredholm.

### 1.2.2 L'équation intégrale linéaire de Fredholm

Si les limites $g(x)$ et $h(x)$ dans (1-5) sont finies ,on dit que l'équation intégrale est de Fredholm et vérifie :

$$\varphi(x) = f\ (x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.6}$$

si la fonction $\varphi(x)$ s'apparait seulement sous le signe de l'intégrale, on dit que l'équation intégrale de Fredholm est du $1^{ère}$ espèce :

$$f\ (x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.7}$$

dans le cas général (1.6) l'équation intégrale *de* Fredholm est dite du $2^{nde}$ espèce

**Remarque 1.2.1 :** Si la fonction $f\ (x)$ est la fonction nulle , l'équation intégrale est dite homogène.

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.8}$$

### 1.2.3 Noyaux particuliers

-si le noyau $k(x,t)$ d'une équation intégrale s'écrit sous la forme :

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t)$$

où les fonctions $\alpha_i(x)$ pour $i = 1, 2.........n$.sont linéairement indépendantes, on dit que l'équation intégrale à noyau séparable ,ou dégénéré.

exemple :$k(x,t) = x - t,\ \ k(x,t) = \sin(x-t)$ .

-si le noyau $k(x,t)$ est une fonction à valeur complexe, telle que : $k(x,t) = \overline{k(t,x)}$ ,alors il est dit symétrique ou hermitien ,une équation intégrale à noyau symétrique est dite aussi symétrique

exemple : sur le carré $a \leq x, t \leq b$ les noyaux :$x+t, x^2+t^2,\ i\ (x-t)$

-si le noyau est de la forme : $k(x,t) = x - t$

alors l'équation intégrale est dite à noyau de convolution

-si le noyau $k(x,t)$ est tel que :$\int_a^b \int_a^b k(x,t)dtdx \prec +\infty$ a une valeur finie,

alors ce type est dit : noyau régulier .

-si le noyau $k(x,t)$ est de la forme : $k(x,t) = h(x,t\ )\,|x-t|^{-m}$

ou $h(x,t\ )$ une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, $a \leq x \leq b$ et $a \leq t \leq b$ ,avec $h(x,t\ ) \neq 0 et$ $0 \leq m \leq 1$ alors l'équation intégrale est dite équation faiblement singulier .

si le noyau $k(x,t)$ est de la forme $k(x,t) = \frac{h(x,t\ )}{x-t}$ avec $h(x,t\ )$ est une fonction différentiable et $h(x,t\ ) \neq 0$ , alors l'équation intégrale est dite singulière à noyau de Cauhy ou l'intégrale

$\int_a^b \frac{h(x,t)}{x-t}u(t)\ dt$ est prise au sens de la valeur principale de Cauchy ainsi

$$v\ \ .p\ \int_a^b \frac{u(t)}{x-t}\,dt \ \ = \lim_{\varepsilon \to 0}\ \left\{ \int_a^{x-\varepsilon} \frac{u(t)}{x-t}dt\ + \int_{x+\varepsilon}^{b} \frac{u(t)}{x-t}\,dt \right\}$$

### 1.2.4 Solution d'une équation intégrale

**Définition 1.2.1 :** On dit que la fonction continue $\varphi(x)$ est une solution de l'équation :

$$\varphi(x) = f\ \ (x) + \lambda\ \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.9}$$

si et seulement si vérifie l'équation (1.9)

**Exemple 1.2.1 :** Montrer que la fonction $\varphi(x) = 1$ est une solution de l'équation :

$$\varphi(x) + \int_0^1 x(e^{xt}-1)\varphi(t)dt\ = e^x - x. \tag{1.10}$$

solution :

$$\begin{aligned}
\varphi(x)+\int_0^1 x(e^{xt}-1)\varphi(t)dt &= 1+\int_0^1 x(e^{xt}-1)dt\\
&= 1+\int_0^1 xe^{xt}dt - \int_0^1 xdt\\
&= 1+e^x-x-1\\
&= e^x-x
\end{aligned}$$

**Exemple 1.2.2 :** Montrer que la fonction $\varphi(x)=\cos 2x$ est une solution de l'équation intégrale de Fredholm :

$$\varphi(x)-3\int_0^\pi k(x,t)\varphi(t)dt = \cos x \tag{1.11}$$

$$k(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t & 0\le x\le t\\ \sin t\cos x & t\le x\le \pi\end{cases}$$

solution : Mettons le premier terme sous la forme suivante :

$\varphi(x)-\ 3\left\{\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt\ +\int_x^\pi k(x,t)\varphi(t)dt\ \right\}$

$=\varphi(x)-\ 3\left\{\int_0^x \sin t\ \cos x\ \cos 2t\ dt\ +\int_x^\pi \sin x\cos t\ \cos 2t\ dt\ \right\}$

$=\varphi(x)-\ 3\left\{\cos x\ \int_0^x \sin t\ \cos 2t\ dt\ +\sin x\int_x^\pi \cos t\ \cos 2t\ dt\ \right\}$

portons dans cette dernière $\cos 2x$ au lieu de $\varphi(x)$,il vient :

$=\cos 2x\ -3\left\{\cos x\ \int_0^x\left(\frac{\sin 3t-\sin t}{2}\right)dt\ +\sin x\int_x^\pi\left(\frac{\cos t\ +\cos 3t}{2}\right)dt\ \right\}$

$=\cos 2x\ -\frac{3}{2}\left\{\cos x\ \left(\cos t-\frac{\cos 3t}{3}\right)\Big|_{t=0}^{x}+\sin x\ \left(+\sin t+\frac{\sin 3t}{3}\right)\Big|_{t=x}^{\pi}\right\}$

$=\cos 2x\ -\frac{3}{2}\left\{\cos x\ \left(\cos x-\frac{\cos 3x}{3}-\frac{2}{3}\right)+\sin x\left(-\sin x-\frac{\sin 3x}{3}\right)\right\}$

$=\cos 2x\ -\frac{3}{2}\left\{\ \cos^2 x-\frac{\cos 3x\cos x}{3}-\frac{2}{3}\cos x\ \ -\sin x^2-\frac{\sin x\sin 3x}{3}\right\}$

$=\cos 2x-\frac{3}{2}\left\{\ \cos 2x-\frac{\cos 4x}{6}-\frac{\cos 2x}{6}-\frac{2}{3}\cos x\ +\frac{\cos 4x}{6}-\frac{\cos 2x}{6}\right\}$

$=\cos 2x-\frac{3}{2}\left\{\ \cos 2x-\frac{\cos 2x}{3}-\frac{2}{3}\cos x\ \right\}$

$=\quad \cos 2x-\cos 2x+\cos x$

$=\cos x$

## 1.3 Quelques méthodes analytiques de résolution des équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce

### 1.3.1 Méthode de Fredholm

la solution de l'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.12}$$

est donnée par la formule :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)dt \tag{1.13}$$

où la fonction $R(x,t;\lambda)$ est dite résolvante de Fredholm de l'équation (1.12) est définie par l'égalité :

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{1.14}$$

sous la condition $D(\lambda) \neq 0$ ;ici $D(x,t;\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des séries de puissance de $\lambda$ .

$D(x,t;\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont données par les formules :

$$D(x,t;\lambda) = k(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t)\ \lambda^n \tag{1.15}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n\ \lambda^n \tag{1.16}$$

avec les coefficients ainsi définis :

$$B_n\,(x,t)=\underbrace{\int_a^b ......\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) & .... & .... & .... & k(x,t_n) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) & .... & .... & .... & k(t_1,t_n) \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ k(t_n,t) & k(t_n,t_1) & .... & .... & .... & k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt\,_1 dt\,_2 ...\, dt\,_n \tag{1.17}$$

$$c_n=\underbrace{\int_a^b ......\int_a^b}\begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) & .... & .... & .... & k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) & .... & .... & .... & k(t_2,t_n) \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2) & .... & .... & .... & k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt\,_1\, dt\,_2\, dt\;\, ...\, dt\,_n \tag{1.18}$$

Les fonctions $D(\lambda)$ et $D(x,t\;\;;\lambda)$ sont respectivement : le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm.

si le noyau $k(x,t)$ est borné ou si l'intégrale :

$$\int_a^b\int_a^b k^2(x,t)dt\;dx\quad . \tag{1.19}$$

est finie .

Les séries convergent quelque soit $\lambda$ et sont donc des fonctions analytiques entières de $\lambda$.

la résolvante :

$$R(x,t\;\;;\lambda)=\frac{D(x,t\;\;;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{1.20}$$

est une fonction analytique de $\lambda$; sauf les $\lambda$ qui sont les zéros de $D(\lambda)$ :ces derniers sont les pôles de la résolvante $R(x,t\;\;;\lambda)$

**Exemple 1.3.1 :** montrer que si

$$k(x,t)=f\;\;_1(x)f\;\;_2(t).\quad et\qquad \int_a^b f\;\;_1(x)f\;\;_2(x)d\;x\;\;=A$$

Alors :

$$D(\lambda) = 1 - \lambda A \qquad , \qquad D(x,t\ ;\lambda) = f_1(x)f_2(t)$$

et la solution de l'équation intégrale non homogène avec le second membre $f(x)$ ayant la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1-\lambda A}\int_a^b f(t)f_2(t)dt$$

**Solution :** on a $B_0(x,t) = f_1(x)f_2(t)$

$$B_1(x,t) = \int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x)f_2(t) & f_1(x)f_2(t_1) \\ f_1(t_1)f_2(t) & f_1(t_1)f_2(t_1) \end{vmatrix} dt_1 = 0$$

$$B_1(x,t) = \int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x)f_2(t) & f_1(x)f_2(t_1) & f_1(x)f_2(t_2) \\ f_1(t_1)f_2(t) & f_1(t_1)f_2(t_1) & f_1(t_1)f_2(t_2) \\ f_1(t_2)f_2(t) & f_1(t_2)f_2(t_1) & f_1(t_2)f_2(t_2) \end{vmatrix} dt_1dt_2 = 0$$

puisque les déterminants sous l'intégrale sont nuls ,il est évident que $B_n(x,t)$ ; $n \geq 1$ sont nuls.

Trouvant les coefficients $c_n$

$$c_1 = \int_a^b k(t_1,t_1)dt_1 = \int_a^b f_1(t_1)f_2(t_1)dt_1 = A \tag{1.21}$$

$$c_2 = \int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} f_1(t_1)f_2(t_1) & f_1(t_1)f_2(t_2) \\ f_1(t_2)f_2(t_1) & f_1(t_2)f_2(t_2) \end{vmatrix} dt_1dt_2 = 0 \tag{1.22}$$

$$c_3 = \int_a^b\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} f_1(t_1)f_2(t_1) & f_1(t_1)f_2(t_2) & f_1(t_1)f_2(t_3) \\ f_1(t_2)f_2(t_1) & f_1(t_2)f_2(t_2) & f_1(t_2)f_2(t_3) \\ f_1(t_3)f_2(t_1) & f_1(t_3)f_2(t_2) & f_1(t_3)f_2(t_3) \end{vmatrix} dt_1dt_2dt_3 = 0 \tag{1.23}$$

Alors $c_3 = 0$, évidement tous les $c_n$ suivants sont nuls .

Dans notre cas, nous avons conformément aux formules (1.15) et (1.16)

$$\begin{aligned} D(x,t\ ;\lambda) &= k(x,t) = f_1(x)f_2(t) \\ D(\lambda) &= 1 - \lambda A \end{aligned}$$

Donc :

$$R(x,t\;;\lambda)\;=\frac{D(x,t\;;\lambda)}{D(\lambda)}=\frac{f_1(x)f_2(t)}{1-\lambda A}$$

appliquons ce résultat à l'équation de l'intégrale ,on obtient

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda f_1(x)}{1-\lambda A}\int_a^b f(t)f_2(t)dt$$

### 1.3.2 Méthode des noyaux itérés

(construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés )
Soit l'équation intégrale de Fredholm :

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt\;=f(x) \tag{1.24}$$

On pose :

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x)\lambda^n \tag{1.25}$$

avec :$\Psi_n$ définies par les formules :

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x)&=\int_a^b k(x,t)f(t)dt\\
\Psi_2(x)&=\int_a^b k(x,t)\Psi_1(t)dt\;=\int_a^b k_2(x,t)f(t)dt\\
\Psi_3(x)&=\int_a^b k(x,t)\Psi_2(t)dt\;=\int_a^b k_3(x,t)f(t)dt\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Psi_n(x)&=\int_a^b k(x,t)\Psi_{n-1}(t)dt\;=\int_a^b k_n(x,t)f(t)dt
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Ici :

$$\begin{aligned} k_2(x,t) &= \int_a^b k(x,z)k_1(z,t)dz \\ k_3(x,t) &= \int_a^b k(x,z)k_2(z,t)dz \end{aligned}$$

et en général :

$$k_n(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_{n-1}(z,t)dz \tag{1.26}$$

n=2,3,... et $k_1(x,t) = k(x,t)$

Les fonctions $k_n(x,t)$ définies par les formules (1.26) s'appellent noyaux itérés .Elles vérifient la relation :

$$k_n(x,t) = \int_a^b k_m(x,z)k_{n-m}(z,t)dz \tag{1.27}$$

où $m$ est un entier naturel quelconque inférieur à $n$ .

La résolvante de l'équation intégrale (1.24) est définie en fonction des noyaux itérés de la façon suivante

$$R(x,t\ ;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x,t)\lambda^{n-1} \tag{1.28}$$

Le second membre est la série de Neumann du noyau $k(x,t)$ .Cette série converge pour

$$|\lambda| \prec \frac{1}{B} \tag{1.29}$$

avec :

$$B = \left(\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)dt\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

la solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce (1.24) s'exprime par :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t\ ;\lambda)f(t)\ dt \tag{1.30}$$

la borne (1.29) est essentielle pour la convergence de la série (1.28)

Mais l'équation (1.24) peut également admettre une solution pour $|\lambda| \succ \frac{1}{B}$.

**Exemple 1.3.2 :** Trouver les itérés du noyau $k(x,t) = x - t$ si $a = -1$ et $b = +1$

utilisant les formules (1.26),on obtient de proche en proche.

$$\begin{aligned}
k_1(x,t) &= x - t \\
k_2(x,t) &= \int_{-1}^{+1} (x-z)(z-t)dz = -2xt - \frac{2}{3} \\
k_3(x,t) &= \int_{-1}^{+1} (x-z)(-2zt - \frac{2}{3})dz = -\frac{4}{3}(x-t) \\
k_4(x,t) &= -\frac{4}{3}\int_{-1}^{+1} (x-z)(z-t)dz = -\frac{4}{3}(-2xt - \frac{2}{3}) \\
k_5(x,t) &= -\frac{4}{3}\int_{-1}^{+1} (x-z)(-2zt - \frac{2}{3})dz = (-\frac{4}{3})^2(x-t) \\
k_6(x,t) &= (-\frac{4}{3})^2\int_{-1}^{+1} (x-z)(z-t)dz = (-\frac{4}{3})^2(-2xt - \frac{2}{3})
\end{aligned}$$

Il en résulte que les itérés sont de la forme :

1) pour $n = 2m - 1$

$$k_{2m-1}(x,t) = (-\tfrac{4}{3})^{m-1}(x-t)$$

2) pour $n = 2m$

$$k_{2m}(x,t) = 2(-1)^m(-\tfrac{4}{3})^{m-1}(xt + \tfrac{1}{3})$$

ou $m = 1, 2, 3...$

### 1.3.3 Équation à noyau séparable :

Nous rappelons qu'un noyau séparable s'écrit sous la forme

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t) \tag{1.31}$$

les fonctions $\alpha_i(x)$ et $\beta_i(t)$ ; $i = 1, 2.........n$. seront supposées continues dans le carré $a \leq x, t \leq b$ ,et linéairement indépendantes .

l'équation intégrale à noyau séparable (1.31) prend la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t)\Big) \varphi(t)\, dt \tag{1.32}$$

se résout comme suit :

Tout d'abord ,on pose

$$\int_a^b \beta_i(t) \; \varphi(t)\, dt = c_i \qquad i = 1, 2.........n.$$

Les $c_i$ sont des constantes inconnues car la fonction $\varphi(t)$ est inconnue .

Réécrivons (1.32) comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(t)\, \varphi(t)\, dt \tag{1.33}$$

et introduisons les notations

$$\int_a^b \beta_i(t) \; \varphi(t)\, dt = c_i \qquad i = 1, 2.........n. \tag{1.34}$$

L'égalité (1.33) peut être réécrite sous la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x) \tag{1.35}$$

avec les $c_i$ des constantes inconnues car la fonction $\varphi(t)$ est inconnue.

Ainsi la résolution d'une équation intégrale à noyau séparable est réduite à la détermination des constantes

$$c_i \quad ; \quad ( \; i = 1, 2.........n).$$

si nous portons (1.35) dans l'équation intégrale (1.32) et effectuons des calculs simples nous obtiendrons :

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ c_m - \int_a^b \beta_m(t) \left[ f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(t) \right] dt \right\} \alpha_m(x) = 0$$

les fonctions $\alpha_m(x)$ ; ( $m = 1, 2.........n$) .étant linéairement indépendantes, il en résulte que

$$c_m - \int_a^b \beta_m(t) \left[ f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(t) \right] dt = 0$$

$$c_m - \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \alpha_i(t)\beta_m(t)dt = \int_a^b \beta_m(t)f(t)dt \qquad (\ m = 1, 2.........n).$$

Afin d'alléger l'écriture, introduisons les notations :

$$\begin{aligned} \alpha_{im} &= \int_a^b \alpha_i(t)\beta_m(t)dt \\ f_m &= \int_a^b \beta_m(t)f(t)dt \end{aligned}$$

nous obtiendront :

$$\begin{aligned} (1-\lambda\alpha_{11})c_1 - \lambda\alpha_{12}c_2 - .................. - \lambda\alpha_{1n}c_n &= f_1 \\ -\lambda\alpha_{21}c_1 + (1-\lambda\alpha_{22})c_1 - .................. - \lambda\alpha_{2n}c_n &= f_2 \\ ....................................................... \\ -\lambda\alpha_{n1}c_1 - \lambda\alpha_{n2}c_2 - .................. + (1-\lambda\alpha_{nn})c_n &= f_n \end{aligned}$$

pour trouver $c_i$ ;nous allons résoudre ce système linéaire à n inconnue dont le déterminant :

$$\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & ..... & ..... & ..... & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & ..... & ..... & ..... & -\lambda\alpha_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & ..... & ..... & ..... & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

par la méthode classique .

**Exemple 1.3.3 :** Résoudre l'équation intégrale à noyau dégénéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-t)\varphi(t)dt = \cos x \qquad (1.36)$$

c'est une équation à noyau dégénéré

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda \int_0^{\pi} \sin x \cos t \varphi(t)dt \ - \lambda \int_0^{\pi} \cos x \sin t \varphi(t)dt \ + \cos x \\ \varphi(x) &= \lambda\ c_1 \sin x + (1-\lambda\ c_2)\cos x \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^{\pi} \cos t\ \varphi(t)dt \\ c_2 = \int_0^{\pi} \sin t\ \varphi(t)dt \end{cases} \tag{1.38}$$

Nous portons l'égalité (1.37) dans les égalités (1.38) :

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^{\pi} \cos t\ (\lambda\ c_1 \sin t + (1-\lambda\ c_2)\cos t)dt \\ c_2 = \int_0^{\pi} \sin t\ (\lambda\ c_1 \sin t + (1-\lambda\ c_2)\cos t)dt \end{cases} \tag{1.39}$$

$$\begin{cases} c_1 = \lambda\ c_1 \int_0^{\pi} \cos t\ \ \sin t\ dt + (1-\lambda\ c_2) \int_0^{\pi} \cos^2 t\ dt \\ c_2 = \lambda\ c_1 \int_0^{\pi} \sin^2 t\ dt + (1-\lambda\ c_2) \int_0^{\pi} \cos t\ \ \sin t\ dt \end{cases} \tag{1.40}$$

Nous avons :

$$\begin{cases} \int_0^{\pi} \sin^2 t\ dt = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi} \cos^2 t\ dt \ \ = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi} \cos t\ \ \sin t\ dt = 0 \end{cases}$$

D'après un calcul rapide ,nous obtenons :

$$\begin{cases} 2c_1 = (1-\lambda c_2)\ \pi \\ 2c_2 = \lambda\ c_1 \pi \end{cases}$$

Ce système a le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \lambda\pi \\ -\lambda\pi & 2 \end{vmatrix} = 4 + \lambda^2\pi^2$$

Le déterminant est toujours positif ,alors le système possède une solution unique

$$\Delta c_1 = \begin{vmatrix} \pi & \lambda\pi \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\pi \qquad \Delta c_2 = \begin{vmatrix} 2 & \pi \\ -\lambda\pi & 0 \end{vmatrix} = \lambda\pi^2$$

$$c_1 = \frac{2\pi}{4+\lambda^2\pi^2} \qquad c_2 = \frac{\lambda\pi^2}{4+\lambda^2\pi^2}$$

$$\varphi(x) = \lambda\,\frac{2\pi}{4+\lambda^2\pi^2}\,\sin x + (1-\lambda\,\frac{\lambda\pi^2}{4+\lambda^2\pi^2})\cos x$$

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{4+\lambda^2\pi^2}\,\sin x + (\,\frac{4}{4+\lambda^2\pi^2})\cos x \tag{1.41}$$

### 1.3.4 Méthode de décomposition d'Adomian :

Cette méthode consiste à décomposer la fonction inconnue $\varphi(x)$ en une somme de nombre infini de composants définie par :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{1.42}$$

ou d'une façon équivalente :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots. \tag{1.43}$$

pour la relation de récurrence nous substituons (1.42) dans (1.12) pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t))dt \tag{1.44}$$

d'une façon équivalente :

$$\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots\ldots = f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)(\varphi_0(t)+\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\ldots\ldots)dt\,. \tag{1.45}$$

Les composants zéros sont définis par tous les termes qui ne sont pas sous le signe de l'intégrale .

ces composants $\varphi_j(x)$ ; $j \geq 0$ de la fonction inconnue $\varphi(x)$ sont déterminés par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= f\ (x)\\ \varphi_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t\ )\varphi_n(t)\ dt\ .\end{aligned} \tag{1.46}$$

d'une façon d'équivalence :

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= f\ (x)\\ \varphi_1(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t\ )\varphi_0(t)\ dt\ .\\ \varphi_2(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t\ )\varphi_1(t)\ dt\ .\\ \varphi_3(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t\ )\varphi_2(t)\ dt\ .\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ainsi de suite pour les autres composants .
la solution $\varphi(x)$ de l'équation de Fredholm :

$$\varphi_0(x)+\ \varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots\ldots = f\ (x)+\lambda \int_a^b k(x,t\ )(\varphi_0(t)+\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\ldots\ldots)dt\ .$$

est définie finalement par la formule (1.42) :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

**Exemple 1-3-4 :** Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm :

$$\varphi(x) = xe^x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(t)dt$$

par la méthode de décomposition d'Adomian .

La méthode de décomposition d'Adomian suppose la solution $\varphi(x)$ sous la forme de la série (1.42) , substituons la série de décomposition (1.42) en (1.46) .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = xe^x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)\ dt \tag{1.47}$$

Nous définissons les composants zéros tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe de l'intégrale , nous obtiendrons la relation de récurrence .

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = xe^x - \frac{1}{2} \\ \varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_n(t)\ dt\ . \end{cases} \tag{1.48}$$

par conséquence nous obtenons

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= xe^x - \frac{1}{2}. \\
\varphi_1(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(t)\ dt\ . \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (te^t - \frac{1}{2}\ )dt\ = \frac{1}{4}. \\
\varphi_2(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{4} dt\ = \frac{1}{8}. \\
\varphi_3(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{8} dt\ = \frac{1}{16} \\
\varphi_4(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{16} dt\ = \frac{1}{32}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \\
&= xe^x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= xe^x - \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{2^n} \\
&= xe^x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-(\frac{1}{2})} \\
&= xe^x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
\varphi(x) &= xe^x \qquad (1.49)
\end{aligned}$$

### 1.3.5 Méthode de décomposition modifiée

**Définition 1.3.1 :** la méthode de décomposition modifiée fournit les solutions dans une série infinie de composants .

Les composants $\varphi_j$ ; $j \geq 0$ sont facilement calculés si le terme non homogène $f\ (x)$ dans l'équation intégrale :

$$\varphi(x) = f\ (x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.50}$$

consiste en un polynôme d'un ou deux termes.

**propriétés :**

-La fonction $f\ (x)$ se compose d'une combinaison de deux ou plusieurs fonctions polynomiales ,trigonométriques, exponentielles et autres.

-L'évaluation des composants nécessite plus de travail, une modification fiable de méthode de décomposition d'Adomian a été utilisée et présentée précédemment.

- Il est montré que cette modification facilite le travail de calcul et accélère la convergence de la solution série, tel que présenté avant.

- La méthode de décomposition modifiée dépend principalement de la division de la fonction $f\ (x)$ en deux parties.

- La méthode de décomposition modifiée présente une légère variation de la relation de récurrence pour déterminer les composantes de la fonction d'une manière plus facile.

-Bien que cette variation dans la formation de $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ soit fiable ,il a cependant été démontré qu'elle accélère la convergence de la solution

**Principe de la méthode :**

la méthode est basée sur les relations suivantes :

Tout d'abord la fonction $f\ (x)$ se décompose comme suit :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x) + f_2(x). \\
\varphi_0(x) &= f_1(x) \\
\varphi_1(x) &= f_2(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_0(t)\,dt \\
\varphi_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)\,dt \;. \qquad n \succ 1
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

**Corollaire 1.3.1 :** Cette méthode ne peut donc pas être utilisée ,si la fonction $f(x)$ se compose d'un seul terme .

**Remarque 1.3.1 :** -D'abord en sélectionnant correctement les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$,la solution exacte peut être obtenue ,en utilisant $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

**Remarque 1.3.2 :**–Le succès de cette méthode ne dépend que du bon choix de $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

**Exemple :** Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fre*d*holm ;en utilisant la méthode de décomposition modifiée :

$$
\varphi(x) = \sin x - x + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\varphi(t)dt \tag{1.52}
$$

la fonction $f(x) = \sin x - x$ se compose de deux termes, par essai nous avons divisé en deux parties :

$$f_1(x) = \sin x \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = -x$$

En utilisant la formule de récurrence modifiée

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= f_1(x) = \sin x \\
\varphi_1(x) &= f_2(x) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\varphi(t)dt \\
&= -x + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt \\
&= 0 \\
\varphi_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)\,dt \;. \\
&= 0 \qquad ;\; n \geq 1
\end{aligned}
$$

II est évident que chacun des composants $\varphi_j$ ; $j \geq 1$ est nul

A son tour donne la solution exacte

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \sin x \tag{1.53}$$

### 1.3.6 Méthode de phénomène des termes de bruit :

Il a été montré qu'une bonne sélection de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ est essentielle pour utiliser la décomposition modifiée .

Le phénomène des termes de bruit démontre une convergence rapide de la solution .

**Définition 1.3.2 :** les termes de bruit sont les termes identiques aves des signes opposés qui peuvent s'apparaitre entre d'autres composants .

En annulant les termes de bruit entre $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ , même si $\varphi_1(x)$ contient d'autre termes ,les termes non annulés restant de $\varphi_0(x)$ peuvent donner la solution exacte de l'équation intégrale .

Il est donc nécessaire de montrer que les termes non annulés de $\varphi_0(x)$ satisfont l'équation intégrale donnée.

On résume tout ce qui se passe :

Pour résoudre une équation intégrale linéaire de Fredholm par la méthode des termes de bruit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.54}$$

en posant :

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

et

$$\varphi_1(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_0(t)dt \tag{1.55}$$

et finalement ,en annulant les termes de bruits ( les termes identiques de signes opposés qui s'apparaissent entre les composants $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ ) de $\varphi_0(x)$.

**Exemple :**utiliser le phénomène des termes de bruit pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante :

$$\varphi(x) = 1 + (\frac{\pi}{2} + \ln 2)x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\varphi(t)dt \tag{1.56}$$

En suivant la méthode d'Adomian standard ,nous définissons la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 + (\frac{\pi}{2} + \ln 2)x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \\ \varphi_{n+1}(x) &= -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(t)\ dt \quad . \qquad\qquad n \succ\ 0 \end{aligned} \tag{1.57}$$

qui nous donne :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 + (\frac{\pi}{2} + \ln 2)x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \\ \varphi_1(x) &= -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + (\frac{\pi}{2} + \ln 2)t + \frac{\cos t}{1 + \sin t})dt \\ &= -(\frac{\pi}{2} + \ln 2)x - (\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} + \ln 2)\frac{\pi^2}{8})x \end{aligned} \tag{1.58}$$

les termes de bruit : $+(\frac{\pi}{2} + \ln 2)x$ et $-(\frac{\pi}{2} + \ln 2)x$ s'apparaissent dans $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ respectivement .

L'annulation de ces termes du composant zéro $\varphi_0(x)$ donne la solution exacte :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 + (\frac{\pi}{2} + \ln 2)x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} - (\frac{\pi}{2} + \ln 2)x \\ &= 1 + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \\ &= \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 + \sin x} \\ \varphi(x) &= \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 + \sin x} \end{aligned} \tag{1.59}$$

qui justifie l'équation intégrale .

Les autres termes de $\varphi_1(x)$ disparaissent dans la limite avec les autres termes des autres composants.

### 1.3.7 La méthode des approximations successives :

La méthode des approximations successives appelée aussi la méthode d'itération de Picard,fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes de valeur initiale où des équations intégrales.

Cette méthode résout tout problème en trouvant des approximations successives de la solution ,en commençant par une supposition initiale comme $\varphi_0(x)$ ,appelée approximation zéro .

comme sera vu approximation zéro est toute fonction sélective à valeur réelle qui sera utilisée dans une relation de récurrence pour déterminer les autres approximations .

Les valeurs les plus couramment utilisées pour les approximations nulles sont 0 ,1 , où $x$ .

Bien sûr, d'autres valeurs réelles peuvent également être sélectionnées .

- Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.60}$$

La méthode des approximations successives introduit la relation récurrente

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_0(x) : \text{toute fontion sélective à valeur réelle.} \\ \varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_0(t)\,dt \\ \varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)\,dt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)\,dt \end{array}\right\} \tag{1.61}$$

La solution est déterminée ,en utilisant la limite :

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$$

**Exemple :** Résoudre l'équations intégrale linéaire de Fredholm ,en utilisant la méthode des approximations successives :

$$\varphi(x) = 2 + 2x + e^x - \int_0^1 xt\varphi(t)dt \qquad (1.62)$$

solution : pour l'approximation zéro $\varphi_0(x)$,on peut sélectionner

$$\varphi(x) = 0 \qquad (1.63)$$

la méthode des approximations successives admet l'utilisation de formule d'itération :

$$\varphi_{n+1}(x) \ = 2 + 2x + e^x + \ \lambda \int_0^1 xt\varphi_n(t)dt \qquad n \geq 0 \qquad (1.64)$$

En substituant (1.63) dans (1.64) :
nous obtenons :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) \ = 2 + 2x + e^x - \ \int_0^1 xt\varphi_0(t)dt \ = 2 + 2x + e^x \\ \varphi_2(x) \ = \ 2 + 2x + e^x - \ \int_0^1 xt\varphi_1(t)dt \ = 2 + e^x - \frac{1}{3}x \\ \varphi_3(x) \ = \ 2 + 2x + e^x - \ \int_0^1 xt\varphi_2(t)dt \ = 2 + e^x + (-\frac{1}{3})^2 x \\ \varphi_4(x) \ = \ 2 + 2x + e^x - \ \int_0^1 xt\varphi_3(t)dt \ = 2 + e^x + (-\frac{1}{3})^3 x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x) \ = \ 2 + 2x + e^x - \ \int_0^1 xt\varphi_3(t)dt \ = 2 + e^x + (-\frac{1}{3})^{n-1} x \end{cases}$$

par conséquent ,La solution $\varphi(x)$ de (1.62) ,est donnée par :

$$\varphi(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} \ \varphi_n(t) \ = 2 + e^x \qquad (1.65)$$

| **La méthode de decomposition d'Adomian** | **La méthode des approximations successive** |
|---|---|
| donne des composantes successives de la solution $\varphi(x)$ | donne des approximations successives de la solution $\varphi(x)$ |
| la composante nule est la somme de tous les termes qui ne sont pas à l'intérieur de l'intégrale | admet l'utilisation d'une fonction à valeur réelle pour l'approximation $\varphi_0(x)$ |
| $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ | $\varphi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(t)$ |

TAB. 1.1 – Tableau de comparaison

### 1.3.8 La méthode de solution en série

**Définition 1.3.3 :** Une fonction réelle est dite analytique ,si elle possède des dérivées de tous les ordres tels que la série de Taylor en tout point $b$ de son domaine :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n \tag{1.66}$$

converge vers $f\ (x)$ dans un voisinage de $b$ .

pour simplifier la forme générique de la série de Taylor à $x = 0$ ,peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1.67}$$

**Principe de méthode :**

La méthode de solution en série découle principalement de la série de de Taylor pour les fonctions analytiques être utlisée pour résoudre des équations intégrales de Fredholm , nous supposerons que la solution $\varphi(x)$ d'équation intégrale de Fredholm :

$$\varphi(x) = f\ (x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.68}$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée en (1.67) ,où les coefficients $a_n$ seront déterminés de façon récurrente .

Une substitution (1.67) dans les deux cotés de (1.68) donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt \tag{1.69}$$

ou pour plus de simplicité, nous utilisons :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.. = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x,t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots\ldots)dt \tag{1.70}$$

ou $T(f(x))$ :est la série de Taylor de $f(x)$

L'équation intégrale (1.68) sera être converti en une intégrale traditionnelle en (1.69) et (1.70) .

ou au lieu d'intégrer la forme $\varphi(x)$,les termes de forme $t^n$ ,$n \geq 0$,seront intégrés .

Notez que parce que nous cherchons une solution en série ,alors $f(x)$ comprend des fonctions élémentaire telles que les fonctions trigonométriques, exponentielles...etc, alors les extensions de Taylor pour les fonctions impliqués dans $f(x)$ devraient être utilisées .

Nous intégrons d'abords le coté droit de l'intégrale dans (1.69) et (1.70) .et recueillir les coefficients de puissance similaires de $(x)$ .

Nous égalisons ensuite les coefficients comme les pouvoirs de $(x)$ . dans les deux cotés de l'équation résultante pour obtenir une relation de récurrence

La résolution de la relation de récurrence conduira à une détermination des coefficients $a_j$ , $j \geq 0$ .

Après avoir déterminé les cofficients $a_j$ , $j \geq 0$ ,la solution en série suit immédiatement en remplaçant les coefficients dérivés en (1.67).

La solution exacte peut être obtenue si la solution existe .

**Exemple :** Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante ,en utilisant la méthode de solution en série:

$$\varphi(x) = 3x - 5x^3 + \int_{-1}^{+1} (1 - xt)\varphi(t)dt \tag{1.71}$$

Solution : Substituons $\varphi(x)$ par

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{\,n} x^{\,n} \qquad (1.72)\\
\sum_{n=0}^{\infty} a_{\,n} x^{\,n} &= 3x - 5x^3 + \int_{-1}^{+1} (1-xt) \sum_{n=0}^{\infty} a_{\,n} t^{\,n} dt \\
a_{\,n} &= 0, \quad n \geq 4
\end{aligned}
$$

Evaluer l'intégrale du coté droit et égaliser les coefficients similaires puissances de $x$ dans les deux cotés :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{3} a_{\,n} x^{\,n} &= 3x - 5x^3 + \int_{-1}^{+1} (1-xt) \sum_{n=0}^{3} a_{\,n} t^{\,n} dt \\
\sum_{n=0}^{3} a_{\,n} x^{\,n} &= 3x - 5x^3 + \int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{3} a_{\,n} t^{\,n} dt \; - x \int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{3} a_{\,n} t^{\,n+1} dt \\
\sum_{n=0}^{3} a_{\,n} x^{\,n} &= 3x - 5x^3 + \sum_{n=0}^{3} \frac{a_{\,n} t^{\,n+1}}{n+1} \Bigg|_{t=-1}^{+1} - x \sum_{n=0}^{3} \frac{a_{\,n} t^{\,n+2}}{n+2} \Bigg|_{t=-1}^{+1} \\
\sum_{n=0}^{3} a_{\,n} x^{\,n} &= 3x - 5x^3 + (a_{\,0} t \; + a_{\,1} \frac{t^{\,2}}{2} + a_{\,2} \frac{t^{\,3}}{3} + a_{\,3} \frac{t^{\,4}}{4}) \Bigg|_{t=-1}^{+1} \\
& \quad x\,(a_{\,0} \frac{t^{\,2}}{2} + a_{\,1} \frac{t^{\,3}}{3} + a_{\,2} \frac{t^{\,4}}{4} + a_{\,3} \frac{t^{\,5}}{5}) \Bigg|_{t=-1}^{+1} \\
\sum_{n=0}^{3} a_{\,n} x^{\,n} &= 3x - 5x^3 + 2a_{\,0} + \frac{2}{3} a_{\,2} \; - x(\frac{2}{3} a_{\,1} + \frac{2}{5} a_{\,3}) \\
\sum_{n=0}^{3} a_{\,n} x^{\,n} &= \frac{2}{3} a_{\,2} + 2a_{\,0} + x(3 - \frac{2}{3} a_{\,1} - \frac{2}{5} a_{\,3}) \; - 5x^3
\end{aligned}
$$

Egaliser les coefficients similaires puissance de $x$ dans les deux cotés ,on obtient le système :

$$\begin{cases} a_{\,0} = \frac{2}{3}a_{\,2} + 2a_{\,0} \\ a_{\,1} = 3 - \frac{2}{3}a_{\,1} - \frac{2}{5}a_{\,3} \\ a_{\,2} = 0 \\ a_{\,3} = -5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{\,0} = 0 \\ a_{\,1} = 3 \\ a_{\,2} = 0 \\ a_{\,3} = -5 \end{cases} \quad et \qquad a_{\,n} = 0, \quad n \geq 4 \tag{1.73}$$

la solution exacte de (1.71) est donnée par Subistitution (1.73) dans (1.72) :

$$\varphi(x) = 3x - 5x^3 \tag{1.74}$$

### 1.3.9 Résolution d'une équation intégrale homogène de Fredholm

**La méthode de calcul direct**

Cette méthode remplace l'équation intégrale homogène de Fredholm par équation algébrique unique ou par un système d'équations algébriques simultanées dépendant de nombre de termes du noyau séparable.

Comme indiqué précédemment ,la méthode de calcul direct transforme l'équation intégrale homogène de Fredholm manière direct donne la solution sous une forme exacte.

**Remarque :**Il est important d'indiquer que cette méthode est appliquée pour les noyaux séparables de la forme :

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t) \tag{1.75}$$

La résolution de l'équation par cette méthode :

-Nous d'abord substituons (1.75) dans l'équation intégrale homogène de Fredholm la forme :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.76}$$

-Cette substitution donne :

$$\varphi(x) = \lambda\alpha_1(x) \int_a^b \beta_1(t)\varphi(t)dt + \lambda\alpha_2(x) \int_a^b \beta_2(t)\varphi(t)dt + ........... + \lambda\alpha_n(x) \int_a^b \beta_n(t)\varphi(t)dt \tag{1.77}$$

Chaque intégrale de l'équation (1.77) dépend seulement de $t$ avec des limites constantes de l'intégration par rapport à $t$ .

Basé sur ceci l'équation (1.77) devient :

$$\varphi(x) = \lambda c_1\alpha_1(x) + \lambda c_2\alpha_2(x) + ........... + \lambda c_n\alpha_n(x) \tag{1.78}$$

où

$$c_i = \int_a^b \beta_i(t)\varphi(t)dt \qquad 1 \leq i \leq n \tag{1.79}$$

-Une substitution dans (1.79) nous donne un système des équations algébriques simultanées, la solution de ce dernier détermine les constantes :

$$c_i = \int_a^b \beta_i(t)\varphi(t)dt \qquad 1 \leq i \leq n \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

En utilisant les valeurs numériques obtenues de $c_i$ dans (1-74) ,la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale homogène de Fredholm suit immédiatement.

**Exemple :** Résoudre l'équation intégrale linéaire homogène de Fredholm ,en utilisant la méthode de calcul direct :

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin^2 x\varphi(t)dt \tag{1.80}$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$\varphi(x) = \lambda\, c\sin^2 x \tag{1.81}$$

où :

$$c = \int_0^{\pi} \varphi(t)dt \tag{1.82}$$

substitution (1.81) dans (1.82) donne :

$$c = \int_0^{\pi} \lambda c \sin^2 t dt \tag{1.83}$$

cette dernière donne :

$$c = \frac{\pi}{2}\lambda c \tag{1.84}$$

Nous rappelons que $c = 0$ donne la solution triviale .

Pour $c \neq 0$ ,nous trouverons la valeur propre $\lambda$ est donnée par :

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \tag{1.85}$$

à son tour donne la fonction propre :

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\ \alpha \sin^2 x \tag{1.86}$$

**Valeurs caractéristiques et fonctions propres :**

l'équation (1.76) admet toujours la solution évidente $\varphi(x) \equiv 0$ appelée solution nulle (triviale)

Un nombre $\lambda$ telle que cette équation admette des solutions non nulles, s'appele valeur (nombre) caractéristique de l'équation (1.76) ou du noyau $k(x,t)$ et chaque solution non nulle de l'équation (1.76) est une fonction propre correspondant au nombre caractéristique $\lambda$

la valeur $\lambda = 0$ n'est pas un nombre caractéristique (la solution triviale)

**Exemple :** Trouver les valeurs caractéristiques et les fonctions propres pour l'équation intégrale homogène à noyau dégénéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.87}$$

solution :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lambda \int_0^{\pi} \cos x \cos t\varphi(t)dt - \lambda \int_0^{\pi} \sin x \sin t\varphi(t)dt \\
\varphi(x) &= \lambda\ c_1 \sin x + (1 - \lambda\ c_2)\cos x
\end{aligned}$$

introduisons la notation

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^\pi \cos t \ \varphi(t)dt \\ c_2 = \int_0^\pi \sin t \ \varphi(t)dt \end{cases} \tag{1.88}$$

nous avons donc

$$\varphi(x) = \lambda \ c_1 \cos x - \lambda \ c_2 \sin x \tag{1.89}$$

Nous portons (1.89) dans (1.88) ,nous obtenons un système linéaire d'équations homogènes :

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^\pi \cos t \ (\lambda \ c_1 \cos t - \ \lambda c_2 \sin t)dt \\ c_2 = \int_0^\pi \sin t \ (\lambda \ c_1 \cos t - \ \lambda c_2 \sin t)dt \end{cases} \tag{1.90}$$

tandis que :

$$\begin{cases} \int_0^\pi \sin^2 t \ dt = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^\pi \cos t \ \sin t \ dt = 0 \end{cases}$$

le système (1.90) s'écrit

$$\begin{cases} c_1(1 - \frac{\lambda\pi}{2}) = 0 \\ c_2(1 + \frac{\lambda\pi}{2}) = 0 \end{cases} \tag{1.91}$$

L'équation qui permet de trouver les valeurs caractéristiques :

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\lambda\pi}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Les valeurs caractéristiques sont $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$ et $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$
Lorsque $\lambda = \frac{2}{\pi}$ le système (1.91) se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 0.c_1 = 0 \\ 2.c_2 = 0 \end{cases}$$

d'ou $c_1$est un arbitraire et $c_2 = 0$
La fonction correspondante est $\varphi_1(x) = \cos x$

Lorsque $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ le système (1.91) se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 2.c_1 = 0 \\ 0.c_2 = 0 \end{cases}$$

d'où $c_1 = 0$ et $c_2$ est un arbitraire

La fonction correspondante est $\varphi_2(x) = \sin x$

# Chapitre 2

# Equations intégrales linéaires de Fredholm du première espèce et méthode de régularisation

## 2.1 Equations intégrales linéaires de Fredholm du première espèce

**Définition 2.1.1 :** Nous rappelons que l'équation intégrale de Fredholm du première espèce est donnée par :

$$f\ \ (x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.1}$$

où $[a,b]$ est un ensemble fermé et borné en nombres réels et $f\ \ (x)$ une fonction donnée.

-La plage de $x$ ne coïncide pas nécessairement avec la plage d'intégration.

-La fonction inconnue $\varphi(x)$ qui sera déterminée ne se produit qu'à l'intérieur de signe de l'intégrale et cela pose des difficultés particulières.

**Propriétés :**

-Le noyau $k(x,t)$ et la fonction $f\ \ (x)$ reçoivent des fonctions à valeurs réelles .

- Le paramètre $\lambda$ joue un rôle important dans le cas singulier et dans les points de bifurcation .

- La fonction $f\ \ (x)$ se situe dans la plage de noyau $k(x,t)$, si on prend comme exemple $k(x,t) = \cos x . \sin t$.

et nous évaluons l'intégrale, la fonction résultante doit être clairement un multiple de *cos* $x$ , si n'est pas le cas alors la solution n'existe pas.

**Corollaire 2.2.1 :** Cette condition nécessaire sur $f \ \ (x)$ peut être généralisée .

-La fonction de donnée $f \ \ (x)$ doit être contenu des composants qui sont apparus par les composants correspondants du noyau $k(x,t)$ .

## 2.2 Le problème bien posé et le problème mal posé

**Définition 2.2.1 :** Un problème est appelé bien posé s'il satisfait aux trois propriétés suivantes :

-Existence d'une solution

- Unicité de la solution.

-Dépendance continue de la solution $\varphi(x)$ aux données de la fonction $f \ \ (x)$ :cette signifie que de petites erreurs dans données de la fonction $f \ \ (x)$ devraient provoquer des petites erreurs dans la solution $\varphi(x)$ .

-Les problèmes qui ne sont pas posés sont appelés mal posés ,qui ne pourraient pas avoir de solution dans le vrai sens ,si une solution existe ,elle ne peut pas dépendre en permanence de données observées.

**Remarque 2.2.1 :** la plupart des problèmes inverses sont des mal posés :ça signifie que les équations intégrales linéaires de Fredholm du première espèce sont problèmes mal posés et la résolution de ces équations peut entrainer de nombreux difficultés.

## 2.3 Méthode de régularisation

La Méthode de régularisation a été établie indépendamment par Philips et Tikhonov.

**Définition 2.3.1 :** La méthode de régularisation consiste à remplacer un problème mal posé par un problème bien posé .

**Définition 2.3.2 :** La méthode de régularisation transforme l'équation intégrale linéaire de Fredholm de la première espèce :

$$f\ \ (x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.2}$$

à l'approximation de l'équation intégrale linéaire de Fredholm du seconde espèce :

$$\mu\varphi_\mu(x) = f\ \ (x) - \int_a^b k(x,t)\varphi_\mu(t)dt \tag{2.3}$$

où $\mu$ est un petit paramètre positif.

**Remarque 2.3.1 :** Il est clair que l'équation intégrale linéaire de Fredholm du seconde espèce peut être réécrite comme suit :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{\mu}f\ \ (x) - \frac{1}{\mu}\int_a^b k(x,t)\varphi_\mu(t)dt \tag{2.4}$$

**Lemme 2.31 :** Supposons que l'opérateur (2.2) est continu et coércive dans l'espace de Hilbert où $f\ \ (x)$ ,$\varphi(x)$ et $\varphi_\mu(x)$ sont définies telle que

- $|\varphi_\mu|$ est borné indépendamment de $\mu$ et
- $|\ \varphi_\mu(x) - \varphi(x)| \to 0$;quand $\mu \to 0$

## 2.4 Exemples de résolution par la méthode de régularisation

**Exemple 2.4.1 :** Combiner la méthode de régularisation avec la méthode de calcul direct ,pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm du première espèce :

$$\frac{3}{4}x = \int_0^1 xt^2\varphi(t)dt \tag{2.5}$$

En utilisant la méthode de régularisation ,l'équation (2.5) est transformée en :

$$\mu\varphi_\mu(x) = \frac{3}{4}x - \int_0^1 xt^2\varphi_\mu(t)dt \tag{2.6}$$

Cette équation du seconde espèce se résout comme suit :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{3}{4\mu}x - \frac{1}{\mu}\ x\int_0^1 t^2\varphi_\mu(t)dt \tag{2.7}$$

Et à son tour cette dernière peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(x) &= \frac{3}{4\mu}x - \frac{c}{\mu}\ x \\ \varphi_\mu(x) &= \frac{3-4c}{4\mu}\ x \end{aligned} \tag{2.8}$$

et

$$c = \int_0^1 t^2 \varphi_\mu(t)dt \tag{2.9}$$

Pour déterminer $c$ on substitue (2.8) dans (2.9)

$$\begin{aligned} c &= \int_0^1 t^2 \frac{3-4c}{4\mu}\ t\ dt \\ c &= \frac{3-4c}{4\mu} \int_0^1 t^3\ dt \\ c &= \frac{3}{16\mu+4} \end{aligned}$$

Substituons une fois ce résultat dans (2.8) nous trouvons :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{12}{16\mu+4}\ x \tag{2.10}$$

La solution exacte s'obtient de cette façon :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{\mu\to 0} \varphi_\mu(x) \\ \varphi(x) &= \lim_{\mu\to 0} \frac{12}{16\mu+4}\ x \\ &= 3x \end{aligned}$$

La solution est :

$$\varphi(x) = 3x \tag{2.11}$$

**Exemple 2.4.2 :** Combiner la méthode de régularisation avec la méthode de décomposition d'Adomian ,pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm du première espèce :

$$\frac{1}{2}e^{3x} = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{3x-3t}\varphi(t)dt \ . \tag{2.12}$$

En utilisant la méthode de régularisation ,l'équation (2.12) peut être transformée en :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{2\mu}e^{3x} - \frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{3x-3t}\varphi_\mu(t)dt \tag{2.13}$$

En utilisant la méthode de décomposition d'Adomian ,on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu_0}(x) &= \frac{1}{2\mu}e^{3x} \\ \varphi_{\mu_{n+1}}(x) &= \frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{\mu_n}(t)dt \qquad (2.14) \\ \varphi_\mu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{\mu_n}(x) \qquad (2.15) \end{aligned}$$

La relation de récurrence (2.15) nous donne :

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_{\mu_0}(x) = \frac{1}{2\mu}e^{3x} \\ \varphi_{\mu_1}(x) = -\frac{1}{(2\mu)^2}e^{3x} \\ \varphi_{\mu_2}(x) = \frac{1}{(2\mu)^3}e^{3x} \\ \varphi_{\mu_3}(x) = -\frac{1}{(2\mu)^4}e^{3x} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{\mu_{n-1}}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{(2\mu)^n}e^{3x} \end{array}\right\} \tag{2.16}$$

Une substitution de ce résultat en (2.15) donne la solution approximative:

$$\begin{aligned}
\varphi_\mu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{\mu_n}(x) \\
&= \frac{1}{2\mu}e^{3x} - \frac{1}{(2\mu)^2}e^{3x} + \frac{1}{(2\mu)^3}e^{3x} - \frac{1}{(2\mu)^4}e^{3x} + \ldots\ldots\ldots \\
&= \frac{1}{2\mu}e^{3x}(1 + \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{(2\mu)^2} + \frac{1}{(2\mu)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\
&= \frac{1}{2\mu}e^{3x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-2\mu)^n} \\
&= \frac{1}{2\mu}e^{3x}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-\frac{1}{2\mu})^n}{1-(-\frac{1}{2\mu})} \\
&= \frac{1}{(1+2\mu)}e^{3x} \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

La solution exacte $\varphi(x)$ de (2.12) Peut être obtenue par :

$$\varphi(x) = \lim_{\mu\to 0}\varphi_\mu(x) = \lim_{\mu\to 0}\frac{1}{(1+2\mu)}e^{3x} = e^{3x} \qquad (2.18)$$

**Exemple 2.4.3 :** Combinez la méthode de régularisation avec la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm de la première espèce :

$$\frac{6}{5}x^2 = \int_0^1 x^2t^2 \ \varphi(t)dt \ . \qquad (2.19)$$

En utilisant la méthode de régularisation, l'équation (2.19) peut être transformée en :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{6}{5\mu}x^2 - \frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2t^2 \ \varphi_\mu(t)dt \qquad (2.20)$$

Pour utiliser la méthode des approximations successives, nous sélectionnons d'abord.

$$\varphi_{\mu_0}(x) = 0 \qquad (2.21)$$

La méthode d'approximations successives admet l'utilisation de la formule de l'itération :

$$\varphi_{\mu_{n+1}}(x) = \frac{6}{5\mu}x^2 - \frac{1}{\mu}\int_0^1 x^2t^2 \ \varphi_{\mu_n}(t)dt \qquad (2.22)$$

Par conséquent ,nous obtenons les approximations successives suivantes :

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi_{\mu_0}(x)=0\\ \varphi_{\mu_1}(x)=\frac{6}{5\mu}x^2\\ \varphi_{\mu_2}(x)=\frac{6}{5\mu}x^2-\ \frac{6}{(5\mu)^2}x^2\\ \varphi_{\mu_3}(x)=\frac{6}{5\mu}x^2-\ \frac{6}{(5\mu)^2}x^2+\frac{6}{(5\mu)^3}x^2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_{\mu_n}(x)=\frac{6}{5\mu}x^2-\ \frac{6}{(5\mu)^2}x^2+\frac{6}{(5\mu)^3}x^2+\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{6}{(5\mu)^n}x^2\\ \varphi_{\mu_n}(x)=\frac{6}{5\mu}x^2(1+\ \frac{1}{(-5\mu)}+\frac{1}{(-5\mu)^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(-5\mu)^n})\end{array}\right. \tag{2.23}$$

etc, sur cette base ,nous obtenons la solution approximative :

$$\varphi_\mu(x)=\ \frac{6}{5\mu+1}x^2 \tag{2.24}$$

La solution exacte $\varphi(x)$ de (2.24) peut être obtenue par :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{\mu\to 0}\varphi_\mu(x)\\ \varphi(x) &= \lim_{\mu\to 0}\frac{6}{5\mu+1}x^2\\ \varphi(x) &= 6x^2 \qquad (2.25)\end{aligned}$$

Il était intéressant de souligner qu'une autre solution de cette équation est donnée par :

$$\varphi(x)=3+x^2 \tag{2.26}$$

Comme indiqué précédemment, l'équation intégrale linéaire de Fredholm du première espèce est problème mal posé et la solution ne peut pas être unique.

**Exemple 2.2.4 :** Combinez la méthode de régularisation avec la méthode des noyaux itérés pour

résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm du première espèce :

$$\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-3x}=\int_0^1 e^{-3x-4t}\ \ \varphi\ (t)dt\ . \tag{2.27}$$

En utilisant la méthode de régularisation, l'équation (2.27) peut être transformée en équation de la seconde espèce :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{2\mu}(1-e^{-2})e^{3x} - \frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{3x-4t} \quad \varphi_\mu(t)dt \tag{2.28}$$

En utilisant la méthode des noyaux itérés, on obtient

$$\left\{\begin{array}{c} k(x,t) = e^{3x-4t} \\ k_2(x,t) = \int_0^{+1} e^{3x-4z}e^{3z-4t}d \quad z \quad = (1-e^{-1})e^{3x-4t} \\ k_3(x,t) = (1-e^{-1})\int_0^{+1} e^{3x-4z}e^{3z-4t}d \quad z \ = (1-e^{-1})^2e^{3x-4t} \\ k_4(x,t) = (1-e^{-1})^2\int_0^{+1} e^{3x-4z}e^{3z-4t}d \quad z \ = (1-e^{-1})^3e^{3x-4t} \\ k_5(x,t) = (1-e^{-1})^3\int_0^{+1} e^{3x-4z}e^{3z-4t}d \quad z \ = (1-e^{-1})^4e^{3x-4t} \\ k_6(x,t) = (1-e^{-1})^4\int_0^{+1} e^{3x-4z}e^{3z-4t}d \quad z \ = (1-e^{-1})^5e^{3x-4t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n(x,t) = (1-e^{-1})^{n-2}\int_0^{+1} e^{3x-4z}e^{3z-4t}d \quad z \ = (1-e^{-1})^{n-1}e^{3x-4t} \end{array}\right. \tag{2.29}$$

calculons la résolvante

$$\begin{aligned} R(x,t \quad ;\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x,t)\lambda^{n-1} \\ R(x,t \quad ;\lambda) &= e^{3x-4t}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{e^{-1}-1}{\mu})^{n-1} \end{aligned}$$

avec :

$\lambda = -\frac{1}{\mu}$

donc :

$$R(x,t \quad ;\lambda) = \frac{\mu}{\mu - e^{-1} + 1}e^{3x-4t} \tag{2.30}$$

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce (2.27) s'exprime par :

$$\varphi_\mu(x) = f\ \ (x) + \lambda \int_0^{+1} R(x,t\ \ ;\lambda) f\ \ (t\ )\ dt$$

sur cette base ,nous obtenons la solution approximative :

$$\begin{aligned}
\varphi_\mu(x) &= \frac{1}{2\mu}(1-e^{-2})e^{3x} - \frac{1}{\mu}\int_0^{+1} \frac{\mu}{\mu - e^{-1}+1} e^{3x-4t}\ \frac{1}{2\mu}(1-e^{-2})e^{3t}\ dt \\
\varphi_\mu(x) &= \frac{(1-e^{-2})}{2(\mu - e^{-1}+1)} e^{3x} \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

La solution exacte peut être obtenue par :

$$\varphi(x) = \lim_{\mu\to 0} \varphi_\mu(x) = \frac{(1+e^{-1})}{2} e^{3x} \qquad (2.32)$$

**Exemple 2.4.5 :** Combiner la méthode de régularisation avec la méthode de solution en série ,pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm du première espèce :

$$\frac{1}{6}x^2 = \int_0^1 x^2 t^2 \varphi(t) dt \qquad (2.33)$$

En utilisant la méthode de régularisation, l'équation (2.33) est transformée en :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{6\mu}x^2 - \frac{1}{\mu}x^2 \int_0^1 t^2 \varphi_\mu(t) dt \qquad (2.34)$$

Cette équation du seconde espèce se résout comme suit :

En utilisant la méthode de solution en série
Substituons $\varphi_\mu(x)$ par

$$\begin{aligned}
\varphi_\mu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{\ n} x^{\ n} \qquad (2.35) \\
\sum_{n=0}^{\infty} a_{\ n} x^{\ n} &= \frac{1}{6\mu}x^2 - \frac{1}{\mu}x^2 \int_0^1 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{\ n} t^{\ n} dt \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

$a_n = 0, \quad n \geq 3$

Evaluer l'intégrale du coté droit et égaliser les coefficients similaires puissances de $x$ dans les deux cotés

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{2} a_n x^n &= \frac{1}{6\mu}x^2 - \frac{1}{\mu}x^2 \int_0^1 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt \\
\sum_{n=0}^{2} a_n x^n &= \frac{1}{6\mu}x^2 - \frac{1}{\mu}x^2 \int_0^{+1} \sum_{n=0}^{2} a_n t^{n+2} dt \\
\sum_{n=0}^{2} a_n x^n &= \frac{1}{6\mu}x^2 - \frac{1}{\mu}x^2 \sum_{n=0}^{2} \frac{a_n t^{n+3}}{n+3}\Bigg|_{t=0}^{+1} \\
\sum_{n=0}^{2} a_n x^n &= \frac{1}{6\mu}x^2 - \frac{1}{\mu}x^2 \left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{5}\right) \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Egaliser les coefficients similaires puissances de $x$ dans les deux cotés ,on obtient le système :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{1}{6\mu} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{5}\right) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{5}{6(5\mu+1)} \end{cases} \quad et \quad a_n = 0, \quad n \geq 4 \qquad (2.38)$$

sur cette base ,nous obtenons la solution approximative :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{5}{6(5\mu+1)}x^2 \qquad (2.39)$$

La solution exacte Peut être obtenue par :

$$\varphi(x) = \lim_{\mu \to 0} \varphi_\mu(x) = \frac{5}{6}x^2 \qquad (2.40)$$

**Exemple 2.4.6 :** Combiner la méthode de régularisation avec la méthode de Fredholm ,pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm du première espèce :

$$\frac{1}{12}x = \int_0^1 xt\varphi(t)dt \qquad (2.41)$$

En utilisant la méthode de régularisation ,l'équation ((2.41)) est transformée en :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{12\mu}x - \frac{1}{\mu}x \int_0^1 t\varphi_\mu(t)dt \tag{2.42}$$

D'après l'exemple précédent (1.36) de méthode de Fredholm
si ,on a

$$\begin{cases} k(x,t) = f_1(x)f_2(t). \\ f_1(x) = f_2(x) = x. \\ \int_a^b f_1(x)f_2(x)d\,x = A \end{cases} \tag{2.43}$$

Alors

$$\begin{cases} D(\lambda) = 1 - \lambda A \\ D(x,t\ ;\lambda) = f_1(x)f_2(t) \\ \varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1-\lambda A}\int_a^b f(t)f_2(t)dt \end{cases} \tag{2.44}$$

Dans notre cas

$\lambda = -\frac{1}{\mu}$ , $A = \frac{1}{3}$

La solution de l'équation intégrale non homogène avec le second membre $f(x)$ a la forme

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1-\lambda A}\int_a^b f(t)f_2(t)dt \\ \varphi_\mu(x) &= \frac{1}{12\mu}x + (-\frac{1}{\mu})\frac{x}{3\mu+1}\ 3\mu \int_0^1 \frac{1}{12\mu}t^2\ dt \end{aligned}$$

sur cette base ,nous obtenons la solution approximative :

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{4(3\mu+1)}x \tag{2.45}$$

La solution exacte peut être obtenue par :

$$\varphi(x) = \lim_{\mu\to 0}\varphi_\mu(x) = \frac{1}{4}x \tag{2.46}$$

# Conclusion

Nous avons essayé de donner des méthodes de résolution analytique concernant les équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce et la méthode de régularisation du première espèce ,ainsi la résolution par combinaison de la méthode de régularisation avec quelques méthodes les plus connues .

Nous espérons que ce humble travail a répondu à certaines aspirations dans ce vaste domaine de l'analyse fonctionnelle.

# Bibliographie


[1] Wazwaz A. M., (2011), "Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications", Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, London, New York..

[2] M.KRASNOV,A.KISSELEV,G.MAKARENKO,Equations Intégrales.Editions Mir Moscou.Traduction Française Editions Mir 1977.

[3] Abdul J.Jerri ,1999 Introduction aux équations intégrales avec applications ,John Willey Sons Inc.

[4] Shanti Swarup .2007-Equations Intégrales,Krishna Prakashan Media (p) Ltd quinsième édition .

[5] F.GTricomi integral Equations Dover .1985.

[6] S.M.Zemyan,the classical theory Integral Equations ,Birkauser Basel.2012.

[7] A.N.Tikhonov,VY.Arsenin On the solution of ill-posed problems John Willey NewYork 1977.

[8] R.Kress linear integral Equations Spriger Berlin .1999.

# Annexe A : Formulaire

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \tfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \tfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \tfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \tfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \tfrac{\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

# Annexe B : Formulaire

Séries de Taylor :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - ... = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) x^n}{n!}$$