

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Lakhnèche Khaoula

Titre :

Bifurcation d'un système dynamique

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Senouci Assia	UMKB	Encadreur
Dr. Laadjal Baya	UMKB	Examineur
Dr. Ghodjmis Fatiha	UMKB	Examineur

Septembre 2020

DÉDICACE

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...

Tous les mots ne sauraient exprimer la staturade, la reconnaissance...

Je dédie ce modeste travail à :

A mes chers parents, je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formules, les fruits de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez

A mes chers et adorables frères et ma sœur :

A toute ma famille, et tous mes amis, qui de près ou de loin m'ont supporté, soutenu et encouragé tout au long de ces années.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le tout puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master

Je remercie du fond de mon cœur, mes parents pour le soutien inconditionnel dont ils ont fait preuve depuis que mon projet professionnel est défini. Merci pour le soutien financier, moral, psychologique et matériel. Si je suis ici aujourd'hui c'est grâce à vous

Je tiens à remercier *Dr : Senouci Assia* d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux

Je tiens à remercier les membres du jury :

Dr : Laadjal Baya et *Dr : Ghodjmis Fatiha*

qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail

Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants du département de mathématiques qui m'ont aidée tout au long des années de ma scolarité

Enfin, je remercie mes amies et mes camarades de promotion pour ces trois années passées ensemble, dans les meilleurs moments comme dans les pires

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 Introduction aux systèmes dynamiques	2
1.1 La notion de système dynamique	2
1.1.1 Présentation	2
1.1.2 Définition D'un Système Dynamique	3
1.2 Système Dynamique Continu et Discret	3
1.2.1 Système Dynamique Continu	3
1.2.2 Système Dynamique Discret :	4
1.3 L'espace de phase	5
1.4 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs	5
1.5 Flot ou système dynamique	6
1.5.1 Flot d'un système linéaire	6
1.5.2 Flot d'un système non linéaire	7
1.6 Cycles limites	7
1.6.1 Classification des cycles limites	8

1.7	Section de Poincaré	8
1.7.1	Point fixe ou point d'équilibre :	9
1.8	Stabilité d'équilibres	9
1.8.1	Stabilité des solutions d'équilibre	10
1.8.2	Type de stabilité :	10
1.8.3	Stabilité des systèmes linéaires	10
1.8.4	Stabilité des systèmes non linéaires	11
2	Théorie de bifurcation	14
2.0.5	Bifurcation noeud-col	15
2.0.6	Bifurcation transcritique	16
2.0.7	Bifurcation fourche(Pitchfork)	17
2.0.8	Bifurcation Hopf	18
2.1	Comportement des systèmes dynamiques	19
2.1.1	Point d'équilibre	19
2.1.2	Régime périodique	20
2.1.3	Régime quasi-périodique :	20
2.1.4	Régime chaotique :	20
2.1.5	Diagramme de bifurcation :	22
3	Bifurcation du système de Lorenz	23
3.0.6	Calcul des points d'équilibres	24
3.0.7	Etude de bifurcations	27
	Conclusion	30
	Annexe A : Programme en matlab	33

Table des figures

1.1	<i>Cycle limite</i>	8
1.2	<i>Section de Poincaré</i>	8
1.3	<i>Signification géométrique au sens de Lyapunov</i>	11
1.4	<i>Signification géométrique de la stabilité asymptotique</i>	11
2.1	<i>Bifurcation noeud-col</i>	16
2.2	<i>Bifurcation transcritique</i>	17
2.3	<i>Bifurcation fourche</i>	18
2.4	<i>Bifurcation Hopf</i>	19
2.5	<i>Diagramme de bifurcation</i>	22
3.1	Trajectoire de Lorenz	24
3.2	Une vue schématique du flux près de l'origine pour r près d'un (a) $r < 1$	
	(b) $r > 1$	27
3.3	Bifurcation de Lorenz	29

Introduction

L'analyse des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires, a fait l'objectif d'une importante quantité de travaux de recherche menée par des chercheurs de différents domaines, certains systèmes dynamiques non linéaires offrent la particularité dans certaines situations.

Les systèmes d'équations différentielles paramétrés peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite. . .) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (l'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle par exemple). Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation. Le terme de bifurcation a été introduit par Henri Poincaré au début du 20ème siècle dans ses travaux sur les systèmes d'équations différentielles.

L'objectif de cet mémoire est d'étudier la bifurcation d'un système dynamique.

Notre travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre nous présentons des notions de base sur le système dynamique : système dynamique continu, système dynamique discret, attracteur, point d'équilibre, stabilité de point d'équilibre.

Le deuxième chapitre sera consacré à la théorie de la bifurcation où on introduit deux types de bifurcations, et on présente leurs diagrammes de bifurcation.

Au troisième chapitre on propose la bifurcation du système de Lorenz.

A la fin du mémoire, on donne une conclusion générale suivie d'une bibliographie.

Chapitre 1

Introduction aux systèmes dynamiques

1.1 La notion de système dynamique

1.1.1 Présentation

Avant de définir de manière précise la notion de système dynamique, nous allons essayer d'en donner une idée intuitive. Considérons un système physique (système solaire) dont l'état vrai en fonction du temps. Une origine du temps et une unité de temps étant choisies, l'ensemble de temps sera identifié à l'ensemble \mathbb{R} des réels. Supposons que l'état du système, à un instant donné, puisse être représenté mathématiquement par un point d'un ensemble Ω . Par abus de langage, nous dirons "l'instant t ", au lieu de dire l'instant représenté (avec l'origine de temps et l'unité de temps choisies) par le réel t . De même, nous dirons "l'état x du système", au lieu de dire l'état du système représenté par l'élément x de l'ensemble Ω .

Supposons aussi que lorsque l'état du système, à un instant t_1 , est un point x_1 de Ω , son état x_2 à tout autre instant postérieur $t_2 \geq t_1$, s'il existe, est entièrement déterminé par le point x_1 et par la durée $t_2 - t_1$ de l'intervalle de temps considéré. Attention : il importe de remarquer que x_2 ne dépend pas séparément de t_1 et t_2 , mais seulement de la différence $t_2 - t_1$ (et bien sûr aussi de x_1).

Cas où tous les mouvements sont positivement illimités : considérons d'abord le cas, un peu plus simple, où quel soit l'état x_0 du système à un instant initial donné t_0 , le système existe encore à tout instant postérieur $t \geq t_0$. Nous dirons alors que tous les mouvements du système sont positivement illimités.

1.1.2 Définition D'un Système Dynamique

Définition 1.1 On va étudier des systèmes d'équations différentielles de la forme (cas continu) :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad v \in V \subseteq \mathbb{R}^p \quad (1.1)$$

ou des applications (cas discret) :

$$x_{k+1} = f(x_k, v), \quad x_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad v \in V \subseteq \mathbb{R}^p \quad (1.2)$$

Définition 1.2 les systèmes 1.1, 1.2 s'appellent des systèmes dynamiques. \mathbb{R}^n est l'espace des phases, \mathbb{R}^p est l'espace des paramètres.

1.2 Système Dynamique Continu et Discret

1.2.1 Système Dynamique Continu

Définition 1.3 On appelle système dynamique à temps continu sur un ensemble Ω une famille d'application $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}^+\}$, ou $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$, paramétrée soit par l'ensemble \mathbb{R}^+ des réels positifs ou nuls, soit par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels, vérifiant les propriétés suivantes :

- i) chaque application φ_t est définie sur une partie U_t de Ω , et à valeur dans Ω .
- ii) L'application φ_0 définie sur Ω entier, est id_Ω .
- iii) Si $0 \leq t_1 \leq t_2$, alors $U_{t_2} \subset U_{t_1}$.

- iv) Soient t et s deux éléments de l'ensemble $(\mathbb{R}^+ \text{ ou } \mathbb{R})$ qui paramétré la famille d'application considérée. Soit $x \in U_s$, alors $\varphi_s(x)$ est élément de U_t si et seulement si x est un élément de U_{s+t} est lorsque c'est le cas,

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x),$$

Système dynamique paramétré par \mathbb{R} , soit $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ un système dynamique sur Ω . au sens de la définition ci-dessus, paramétré par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels. En plus des propriétés i) à iv) de la définition précédente vérifie aussi les propriétés suivantes :

Définition 1.4 Remarque 1.1 v) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $U_{-t} = \varphi_t(U_t)$, et l'application φ_t est une bijection de U_t sur U_{-t} , dont l'inverse est φ_{-t} .

- vi) Si $t_2 \preceq t_1 \preceq 0$, alors $U_{t_2} \subset U_{t_1}$

1.2.2 Système Dynamique Discret :

Définition 1.5 On appelle système dynamique à temps discret sur un ensemble Ω une famille d'application $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{N}\}$, ou $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$, paramétrée soit par l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, soit par l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs, vérifiant les propriétés suivantes :

- i) Chaque application φ_n est définie sur une partie U_n de Ω , et à valeurs dans Ω .
- ii) L'application φ_0 , définie sur Ω entier, est id_Ω .
- iii) Si $0 \leq n_1 \leq n_2$, alors $U_{n_2} \subset U_{n_1}$.
- iv) Soient n et m deux éléments de l'ensemble $(\mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z})$ qui paramétré la famille d'applications considérée. Soit $x \in U_m$. Alors $\varphi_m(x) \in U_n$ si et seulement si $x \in U_{m+n}$ et, lorsque c'est le cas,

$$\varphi_n(\varphi_m(x)) = \varphi_{m+n}(x).$$

1.3 L'espace de phase

Dès que la dimension n du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment le système évolue. L'outil de base pour y pallier est l'espace de phase. On considère chaque composante x_i de X comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension n . L'évolution suivante t du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.

1.4 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Mais n'oublions pas que les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, alors pour préciser cette définition, on arrive à dire qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 un et un seul état final $x(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective de l'espace des phases.

$$\begin{aligned} \varphi : X * R &\rightarrow X \\ (x, t) &\rightarrow \varphi_t = \varphi(x, t) \end{aligned}$$

Définition 1.6 *on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \varphi_t(x_0) &= x_0 \\ \varphi_{t+s}(x_0) &= \varphi_t(\varphi_s(x_0)) \text{ pour tous } t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.

Exemple 1.1 *Cas continu (l'oscillateur de Duffing)*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t\end{aligned}$$

où δ, γ et ω sont des paramètres physiques réels. L'espace des phases est \mathbb{R}^2 et l'espace des paramètres \mathbb{R}^3 .

Exemple 1.2 *Cas discret (L'application de Hénon)*

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= y_k + 1 - ax_k^2, \\ y_{k+1} &= bx_k\end{aligned}$$

où a et b sont des paramètres réels. L'espace des phases est \mathbb{R}^2 et l'espace des paramètres est \mathbb{R}^2 .

1.5 Flot ou système dynamique

Soit M un ensemble quelconque et G un groupe additif (\mathbb{R} ou \mathbb{Z}). Considérons $\{\varphi_t\}_{t \in G}$ un groupe à un paramètre d'applications M dans M indexées par le groupe G . On appelle flot ou système dynamique le couple $(M ; \{\varphi_t\}_{t \in G})$

L'ensemble M précédent constitue l'espace des phases du flot. Tout point x de cet espace représente un état du système dynamique.

1.5.1 Flot d'un système linéaire

Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{1.3}$$

où A une matrice constante. La solution du système 1.3 avec la valeur initiale $x(0) = x_0$ est $x(t) = x_0 \exp(At)$.

Définition 1.7 L'ensemble des applications $\exp(At) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé le flot du système 1.3

1.5.2 Flot d'un système non linéaire

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = F(x, t) \tag{1.4}$$

On suppose que les solutions du système 1.4 sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, le flot du système 1.4 est la famille avec un paramètre d'applications $\{\phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de Ω dans lui-même définies par $\phi_t(a) = x(t, a)$, pour tout $a \in \Omega$, $x(t, a)$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = F(X, t) \\ X(0) = a \end{array} \right\}$$

* ϕ_t est différentiable sur Ω .

* $\phi_0 = Id$, $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$ pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, ϕ_t est une bijection de Ω et $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$

Alors l'ensemble $G = (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphisme.

* $\left. \frac{d\phi_t(a)}{dt} \right|_{t=0} = F(a, 0)$ cette formule montre que la donnée du flot ϕ_t définit le système 1.4.

1.6 Cycles limites

Un cycle limite est une trajectoire fermée solution du système.

Définition 1.8 Un système $\dot{x} = f(x)$ possèdent un **cycle limite** C s'il existe un intervalle de temps $[t_0; t_0 + T[$ et un point de départ $x_0 \in C$, tel que en désignant par $\phi(t)$ la solution de système avec pour condition initiale $x(t_0) = x_0 = \phi(t_0)$ on ait :

- $\phi(t) \in C \quad \forall t \in [t_0; t_0 + T[$,
- $\phi(T) = x_0$.

1.6.1 Classification des cycles limites

Définition 1.9 Soit C un cycle limite

1. **stable** : toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle $\rightarrow C$.
2. **instable** : toutes les trajectoires divergent de C .
3. **semi-stable** : certaines trajectoires convergent vers C .

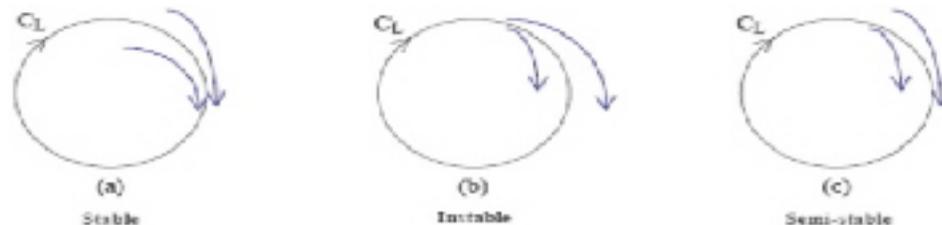


FIG. 1.1 – Cycle limite

1.7 Section de Poincaré

La technique dite des sections de Poincaré facilite l'étude des systèmes dynamiques considérés en ramenant l'analyse d'un système différentiel (temps continu) à celle d'une application (temps discret). Par le biais de cette méthode, la dimension d du problème initial sous forme de système différentiel est réduite d'une unité avec l'application en dimension $d-1$. L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface représente la section de Poincaré.

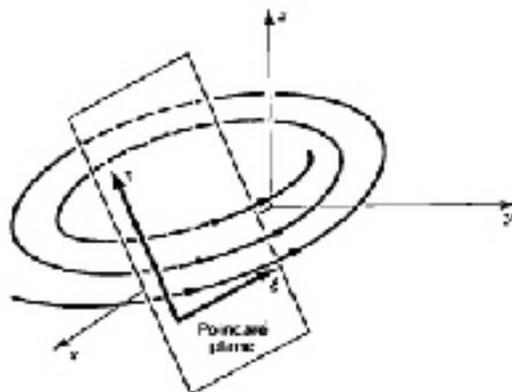


FIG. 1.2 – Section de Poincaré

1.7.1 Point fixe ou point d'équilibre :

Un point fixe ou point d'équilibre est une solution constante du système. Il est obtenu en résolvant le système d'équations :

- Cas discret :

$$X = G(X)$$

- Cas continue :

$$X = F(X) \rightarrow \dot{x}(t) = 0$$

Dans l'espace de phase, le point fixe se représente par un point. Sa valeur est déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibre. De même, ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre-elles.

1.8 Stabilité d'équilibres

La question de la stabilité et de l'équilibre se posait naturellement en dynamique, depuis les débuts de l'étude du problème à trois corps au milieu du XVIII^e siècle (avec Clairaut, sur la figure de la Terre, d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Poisson, etc., sur le système solaire dans son ensemble). La « Stabilité à la Poisson » que Poincaré devait privilégier était telle que, bien que sans périodicité au sens strict, le système étant perturbé retourne au voisinage d'une configuration donnée au bout d'un certain temps. Poincaré aborda les problèmes d'équilibre et de stabilité de l'équilibre en 1885, à propos du comportement d'une masse fluide en rotation dans un champ de forces. Mais c'est surtout dans son travail sur « le problème des trois corps et les équations de la dynamique », de 1890, qu'il développa les idées qui sont à l'origine de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires.

1.8.1 Stabilité des solutions d'équilibre

Avant de présenter les outils d'analyse de la stabilité des solutions non linéaires statiques, quelques définitions, concernant la classe des systèmes dynamiques non linéaires décrits dans l'espace d'état, sont rappelées (Slotine, 1991 ; Nayfeh, 1995).

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

où $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs analytiques non linéaires.

La stabilité des systèmes dynamiques non linéaires 1.5 est liée aux notions de point d'équilibre et de flot dynamique.

Définition 1.10 *Le point d'équilibre x_e , appelé aussi point singulier, du système 1.5 est défini par la solution du problème non linéaire statique*

$$f(x_e) = 0 \tag{1.6}$$

1.8.2 Type de stabilité :

Stabilités au sens de Lagrange : la solution $X(t)$ est stable au sens de Lagrange si elle est bornée :

$$\exists L_s \succ 0 \text{ tel que } \forall t, \|X(t)\| \leq L_s.$$

Stabilité au sens de Lyapunov : la solution $X(t)$ est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\varepsilon_s \succ 0$, il existe $\delta(\varepsilon_s) \succ 0$ tel que toute solution $Y(t)$ vérifiant $\|Y(t_0) - X(t_0)\| \prec \delta$ implique que $\forall t \geq t_0, \|Y(t) - X(t)\| \prec \varepsilon_s$.

Stabilité asymptotique : la solution $X(t)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si de plus on a : $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0$.

1.8.3 Stabilité des systèmes linéaires

Le cas linéaire se définit par la situation particulière où f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n d'où

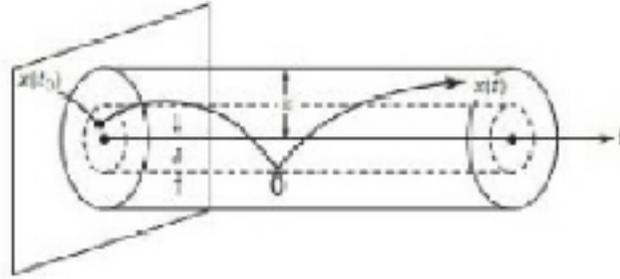


FIG. 1.3 – *Signification géométrique au sens de Lyapunov*

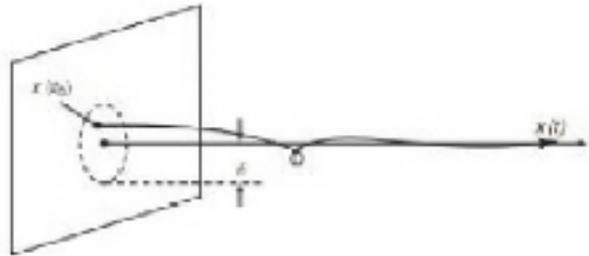


FIG. 1.4 – *Signification géométrique de la stabilité asymptotique*

$$\dot{x} = f(x) = Ax \tag{1.7}$$

où A est une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$.

L'origine est toujours un équilibre de cette équation (mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de $\ker A$ est un équilibre).

- L'origine est un équilibre asymptotiquement stable de $\dot{x} = Ax$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.
- Si A a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un équilibre stable de $\dot{x} = Ax$.

1.8.4 Stabilité des systèmes non linéaires

Comme souligné précédemment, la propriété de la stabilité des systèmes non linéaires 1.5 est liée à la notion de point d'équilibre, solution de l'équation statique 1.6. Plusieurs solutions peuvent exister donnant lieu à plusieurs points d'équilibre. L'analyse de la stabilité se fait

pour chacun de ces points.

Méthode indirecte de Lyapunov

La méthode indirecte de Lyapunov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre x_e , consiste à étudier le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{1.8}$$

avec

$$A = Df(x_e) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_e}$$

A est la matrice jacobienne de f en x_e , qui s'appelle le linéarisé du système 1.5 au point d'équilibre x_e . Par un changement de coordonnées, le point fixe de 1.5 se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) et le développement de f en série de Taylor autour de $x = 0$ donne le développement du premier ordre de Taylor suivant :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \cdots$$

Si A possède n valeurs propres distinctes $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ (les valeurs propres de A sont appelées exposants caractéristiques de l'équilibre 0) alors la solution de 1.8 est

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \exp(\lambda_i t) v_i$$

v_i le vecteur propre associé à λ_i . les $c_i; i = 1; \dots; n$ sont des constantes (déterminées par les conditions initiales).

La stabilité du point d'équilibre est analysée en utilisant les résultats du théorème suivant, pour le système 1.8 :

Théorème 1.1 :

1. Si toutes les valeurs propres sont strictement dans le demi-plan complexe gauche alors

x_e est asymptotiquement stable.

2. S'il existe au moins une valeur propre appartenant strictement au demi-plan complexe droit alors x_e est instable.
3. Si toutes les valeurs propres appartiennent strictement au demi-plan complexe gauche avec au moins une qui soit imaginaire pure ou nulle, alors on ne peut rien dire .

Méthode directe de Lyapunov :

Définition 1.11 (*Fonction définie positive*) Une fonction définie positive est une fonction $f(x) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) > 0, \forall x \neq 0$ et $f(x) = 0$ lorsque $x = 0$.

Définition 1.12 (*Candidat de Lyapunov*) Une fonction définie positive continue, notée $V(x)$, est un candidat de Lyapunov.

Définition 1.13 (*Fonction de Lyapunov*) Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov, à savoir une fonction continue $V(x)$ telle que

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ et } V(x) = 0 \quad x = 0 \quad ,$$

ayant en plus la propriété

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ et } \dot{V}(x) = 0 \quad x = 0.$$

Théorème 1.2 (*Seconde méthode de Lyapunov, dite aussi méthode directe*) Si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable.

Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est-à-dire que $V(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$, alors la stabilité est en plus asymptotique.

Chapitre 2

Théorie de bifurcation

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de la "bifurcation". Ce concept renvoie à l'étude des changements de comportement d'un système lorsque les paramètres de ce dernier changent. La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système. Par exemple, déstabilisation d'un équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur, ...

La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation.

Soit le système dynamique non linéaire de dimension n

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (2.1)$$

avec le paramètre de contrôle μ , et soit x^* sa solution.

Définition 2.1 *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x^* du système 2.1 lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.*

Définition 2.2 *Un système est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle (la valeur du paramètre pour laquelle le système 2.1 n'est pas structurellement stable)*

Dans un système se ramènent à quatre types de bifurcations générique que nous allons présenter sur quatre cas simples monodimensionnels.

2.0.5 Bifurcation noeud-col

C'est la bifurcation la plus simple lorsque c franchit 0, un point d'équilibre stable (noeud) et un point d'équilibre instable (col) apparaissent simultanément, elle est souvent représenté par l'équation :

$$\frac{dX}{dt} = c - X^2 \tag{2.2}$$

Qui s'appelle équation générique de bifurcation noeud-col, On a alors $F(X, c) = c - X^2$

* Si $c < 0$, l'équation $f(X, c) = 0$ n'admet pas de solution alors on n'a pas de points fixes.

* Si $c > 0$ on a :

$$c - X^2 = 0 \iff X^2 = c$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} X = \sqrt{c} \\ \text{ou} \\ X = -\sqrt{c} \end{array} \right.$$

Par conséquent 2.2 admet deux points fixes.

$\frac{dF(X, c)}{dX} = -2X$ alors $\frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=\sqrt{c}} = -2\sqrt{c} < 0$ et $\frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=-\sqrt{c}} = 2\sqrt{c} > 0$ par suite :

Le point fixe $X = -\sqrt{c}$ est stable, mais $X = \sqrt{c}$ est instable.

* Si $c = 0$ le seul point fixe est $X = 0$, par intégration de 2.2 on obtient :

$$X(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{X_0}}$$

D'où le point $X = 0$ est semi-stable. (stable si $X_0 > 0$ est instable si $X_0 < 0$)

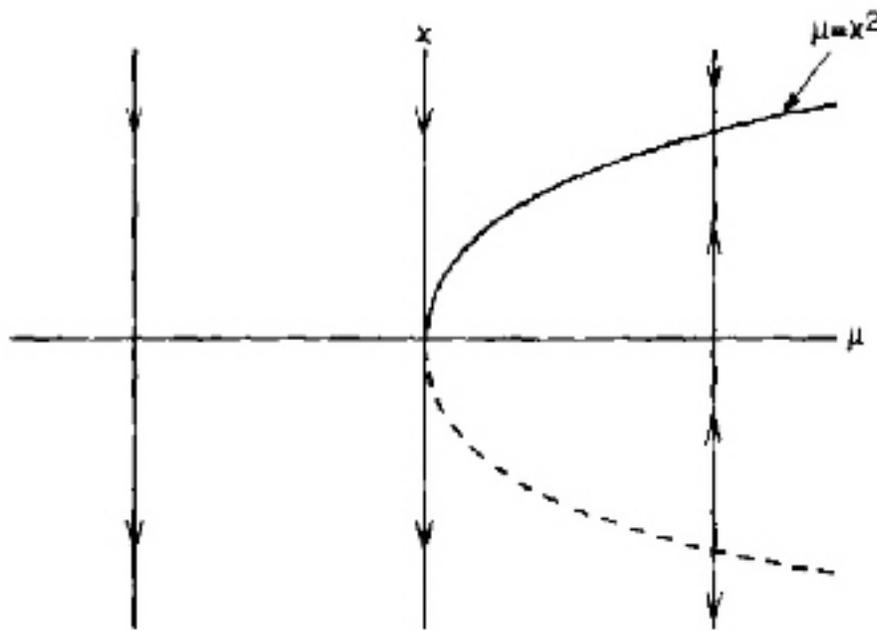


FIG. 2.1 – Bifurcation noeud-col

2.0.6 Bifurcation transcritique

Elle est caractérisée par un échange de stabilité entre des points fixes (les points stables deviennent instable et vice versa) lorsque c franchit 0.

Elle est souvent représentée par l'équation :

$$\frac{dX}{dt} = cX - X^2 \quad (2.3)$$

Qui s'appelle équation générique de la bifurcation transcritique. On a alors

$$\begin{aligned}
 cX - X^2 = 0 &\iff X(c - X) = 0 \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ \text{ou} \\ X = c \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Par conséquent on a deux points fixes

$\frac{dF(X, c)}{dX} = c - 2X$ donc $\left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=0} = c$ et $\left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=c} = -c$ par suite :

* Si $c < 0$, le point fixe $X = 0$ est stable, mais $X = c$ est instable.

* Si $c > 0$, le point fixe $X = 0$ est instable, mais $X = c$ est stable.

On remarque un échange de stabilité en $c = 0$.

* Si $c = 0$, le seul point fixe est $X = 0$, par intégration de 2.3 on obtient :

$$X(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{X_0}}$$

D'où le point $X = 0$ est semi-stable. (stable si $X_0 > 0$ et instable si $X_0 < 0$)

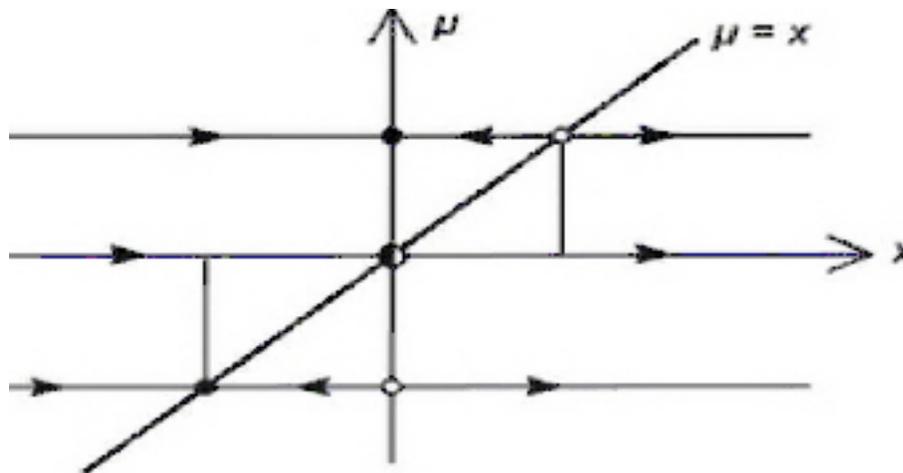


FIG. 2.2 – Bifurcation transcritique

2.0.7 Bifurcation fourche (Pitchfork)

Au point de bifurcation fourche la stabilité d'un point fixe change au profit de la naissance d'une paire de points fixes.

$$\frac{dX}{dt} = cX - X^3$$

Et pour sous-critique :

$$\frac{dX}{dt} = cX + X^3$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche sur-critique on a $F(X, c) = cX - X^3$

$$cX - X^3 = 0 \iff X(c - X^2) = 0$$

$$\iff \begin{cases} X = 0 \\ \text{ou} \\ c - X^2 = 0 \iff X^2 = c \end{cases}$$

Alors si $c < 0$ on a un seul point fixe $X = 0$.

Si $c > 0$ on a trois point fixes :

$$\begin{cases} X = 0 \\ X = \sqrt{c} \\ X = -\sqrt{c} \end{cases}$$

$$\frac{dF(X, c)}{dX} = c - 3X^2 \text{ alors } \left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=0} = c \text{ et } \left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=\mp\sqrt{c}} = -2c \text{ par suite :}$$

*Si $c < 0$, le seul point fixe $X = 0$ est instable.

*Si $c > 0$, le point fixe $X = 0$ est stable, mais $X = \sqrt{c}$ et $X = -\sqrt{c}$ sont instables.

On remarque un échange dans le nombre des points fixes est dans la stabilité en $c = 0$.

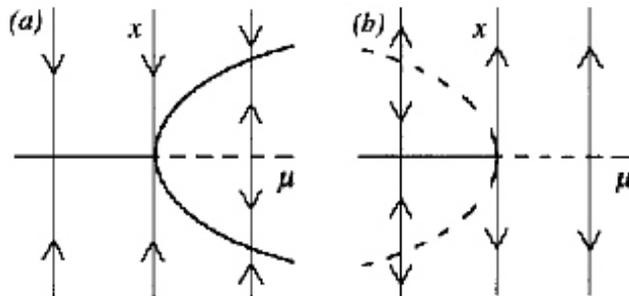


FIG. 2.3 – Bifurcation fourche

2.0.8 Bifurcation Hopf

La bifurcation Hopf aura lieu lorsque la paramètre de contrôle c prend une valeur critique c_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes

conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite.

Définition 2.3 *Soit :*

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X}, \mathbf{t}, \mathbf{c}) \quad (2.4)$$

Un système dynamique non linéaire de dimension n et de paramètre de contrôle \mathbf{c} . Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution X_0 de système 2.4 lors qu'on modifie \mathbf{c} , d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

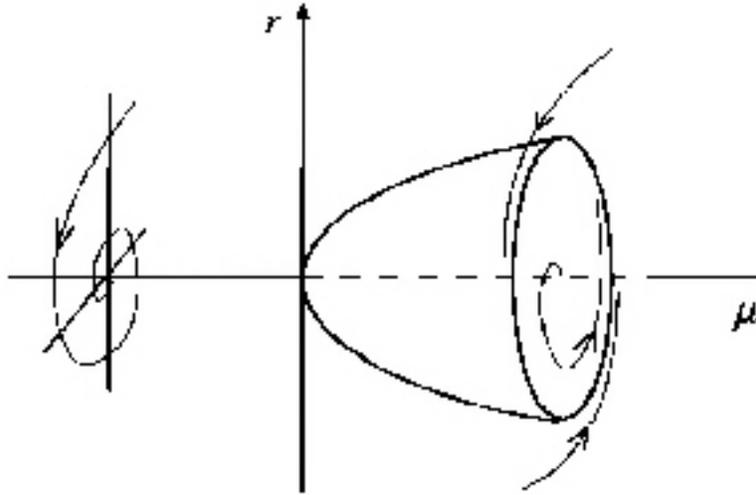


FIG. 2.4 – *Bifurcation Hopf*

2.1 Comportement des systèmes dynamiques

2.1.1 Point d'équilibre

Dans ce cas, la solution asymptotique est représentée par un point, sa valeur étant déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibres. De même ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre elles.

2.1.2 Régime périodique

Le régime asymptotique permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles nT , $n \in \mathbb{N}^+$ et T la période de la solution.

Dans l'espace de phase, l'ensemble limite correspondant à cette solution est une courbe fermée. Si l'espace de phase est de dimension 2, la solution périodique sera un cercle, une ellipse, ou toute autre forme géométrique fermée. Pour revenir à son état précédent, le système met exactement une période.

Si on travaille dans un espace de phase de dimension supérieur à 2, il faut tenir compte de certaines subtilités. En effet, dans un tel espace, une trajectoire périodique ne se situe pas nécessairement dans un même plan et elle peut se développer dans différentes formes fermées, il est parfois impossible d'étudier la trajectoire générée par le système dans l'espace de phase. Pour éviter ce problème on utilise la section de Poincaré.

2.1.3 Régime quasi-périodique :

Un régime quasi-périodique correspond à une somme de solutions périodiques dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique est représenté dans l'espace d'état par un tore.

2.1.4 Régime chaotique :

Une telle solution a une trajectoire asymptotique bornée avec une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ainsi, deux trajectoires de phases initialement voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelle que soit leur proximité initiale.

La moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale peut mener à un comportement très différent ce qui ne permet pas de faire une prédiction sur le comportement à long terme du système. Ainsi, bien que l'on traite de systèmes déterministes, il est impossible de prévoir à long terme leurs comportements. L'espace de phases est un outil qui permet d'avoir une évaluation qualitativement de la solution obtenue. La théorie des équations différentielles

linéaires à coefficients constants montre que la solution générale est obtenue à partir des valeurs propres de l'équation caractéristique déduite de la matrice des dérivées partielles du système. Ainsi, la méthode de l'espace de phase qui est une technique qualitative simple et efficace permet la détermination du type de stabilité du point d'équilibre, à partir de la nature des valeurs propres de la matrice Jacobienne de la fonction f linéarisée au tour du point d'équilibre x_{eq} .

La linéarisation revient à poser :

$$x = x_{eq} + \delta x$$

Ce qui donne

$$\dot{x} = \dot{x}_{eq} + \delta \dot{x}$$

On obtient donc :

$$\dot{x}_{eq} + \delta \dot{x} = f(x_{eq} + \delta x)$$

Par le développement de Taylor du premier ordre de $f(x)$, on obtient

$$f(x_{eq} + \delta x) = f(x_{eq}) + f'(x_{eq})(x - x_{eq})$$

D'où

$$\delta \dot{x} = Df(x_{eq})\delta x, \delta x(0) = \delta x_0$$

$Df(x)$ représente la matrice jacobienne de $f(x)$ par rapport à x , tel que

$$Df(x) = \left\{ \frac{df_i}{dx_j} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$$

Cette équation montre l'évolution dans le temps d'une perturbation δx_0 au voisinage du point d'équilibre. Il a été démontré que les parties réelles des valeurs propres de $Df(x_{eq})$ représentent la vitesse d'expansion [$\text{Re}(\lambda_i) > 0$], ou de contraction [$\text{Re}(\lambda_i) < 0$] d'une spirale alors que les parties imaginaires indiquent la fréquence de rotation.

2.1.5 Diagramme de bifurcation :

“ *La représentation d’une propriété quelconque, mais caractéristique de la ou des solutions en fonction du paramètre de bifurcation, constitue un diagramme de bifurcation.* ” **Bergé** [1984].

Comme cela a été souligné par **Glass et Mackey** [1988], la construction d’un diagramme de bifurcation est un bon moyen pour mettre en lumière une signature du chaos. Le graphe représentant comment la valeur de z_{\max} (par exemple) associée à chaque point d’un attracteur varie en fonction d’un des paramètres du modèle (le paramètre de bifurcation μ , par exemple) permet de mettre en évidence deux types de comportements. Soit l’attracteur est représenté par un nombre fini de points visités successivement, ce qui va correspondre à un comportement périodique, soit par tout un ensemble de points répartis sur la verticale correspondant à la valeur du paramètre considéré, points visités de façon irrégulière, ce qui permettra de conclure à un attracteur chaotique. De plus, ce type de diagramme met également en évidence l’un des trois scénari conduisant au chaos, à savoir, la cascade de doublement de période.

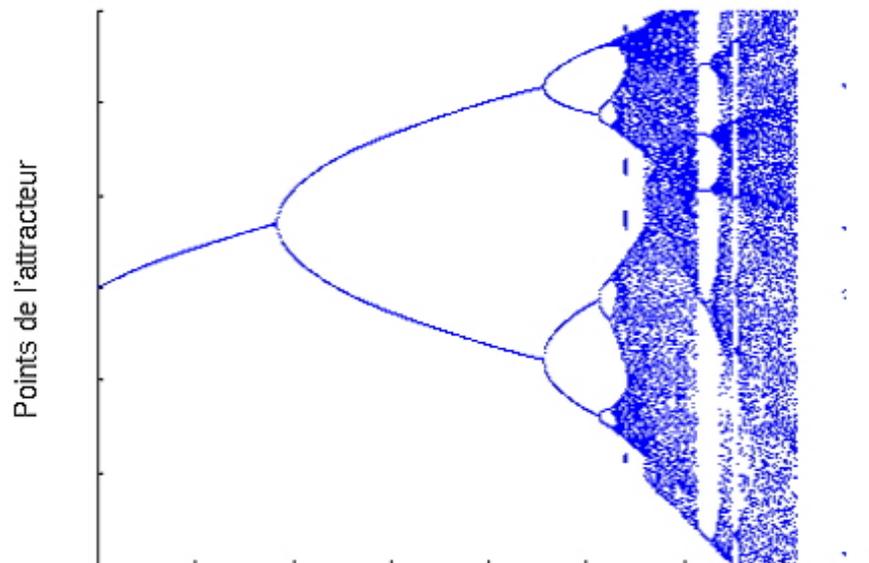


FIG. 2.5 – *Diagramme de bifurcation*

Chapitre 3

Bifurcation du système de Lorenz

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stockes de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier et célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres. Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées s'écrit :

$$\dot{X} = \sigma(Y - X)$$

$$\dot{Y} = rX - Y - XZ$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$

σ ou Pr désigne le nombre de Prandtl (égale à 10 dans les simulations), $b = 8/3$ et r est le nombre de Rayleigh réduit.

Nous allons étudier le comportement et les différents portraits de phases obtenus pour diffé-

rentes valeurs du paramètre de contrôle.

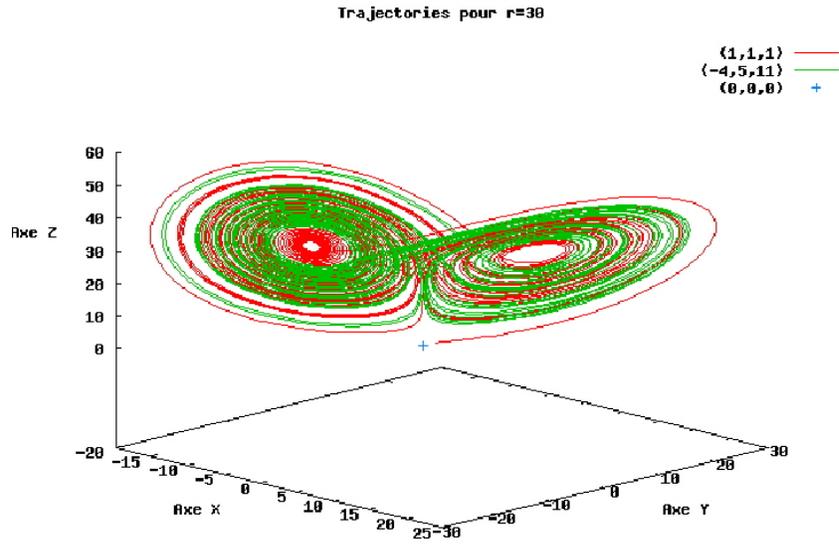


FIG. 3.1 – Trajectoire de Lorenz

3.0.6 Calcul des points d'équilibres

Les points fixes sont par définition tel que $\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0$. Un premier point fixes trivial est $C_0 : X = Y = Z = 0, \forall r \geq 0$

$$\begin{cases} \sigma(Y - X) = 0 \Leftrightarrow X = Y & (1) \\ rX - Y - XZ = 0 \Leftrightarrow X(r - Z) = Y & (2) \\ XY - bZ = 0 \Leftrightarrow bZ = XY & (3) \end{cases}$$

(1) dans (2) donne $\Leftrightarrow X(r - Z) = X \Leftrightarrow Z = r - 1$ (4)

(4) dans (3) donne $\Leftrightarrow X^2 = Y^2 = b(r - 1) \Leftrightarrow X = Y = \pm\sqrt{b(r - 1)}$

Les points fixes C_1 et C_2 sont donc

$$C_1 = (\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1) \text{ et } C_2 = (-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1)$$

pour $r = 1$, $C_0 = C_1 = C_2 = (0, 0, 0)$, pour $r \in [0; 1]$, il y a un seul point fixe C_0 et pour

$r > 1$, il y a 3 points fixes C_0, C_1, C_2 .

Stabilité des points d'équilibres

Nous allons maintenant étudier la stabilité linéaire des points fixes pour le cas $|r - 1| < 1$.

La stabilité des points d'équilibre est déterminée en linéarisant le flot au voisinage de ces points et en calculant les valeurs propres, notées λ_i , de la matrice Jacobienne en ces points.

La matrice Jacobienne s'écrit :

$$j = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - Z & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix}$$

Pour C_0

L'origine est un point fixe pour toutes les valeurs de paramètre b, σ et r . La matrice jacobienne est :

$$j = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

et comme $\det(j - \lambda i) = 0$, nous avons l'équation caractéristique, suivante :

$$(\lambda + b) [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0$$

a pour racines :

$$\lambda_1 = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2}$$

$$\lambda_3 = -b$$

Pour C_1 et C_2 :

La matrice jacobienne correspond à ces points s'écrit :

$$j = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(j - \lambda I) = P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1)$$

Le polynôme est d'ordre 3, on peut le résoudre par les formules de **Cardan** et déterminer le signe de racines par les conditions de Routh-Hurwitz.

Et les valeurs du paramètre r , ce polynôme peut avoir trois racines réelles négatives ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

On peut simplifier ce calcul en utilisant le fait qu'il existe une valeur propre $\lambda_1 = 0$ si $r = 1$ donc on peut supposer que $|\lambda_1| < 1$ si $|r - 1| < 1$ on peut négliger λ_1^2 et λ_1^3 de l'équation

$$\lambda_1 \cong -\frac{2\sigma(r-1)}{br} < 0 \text{ pour } r > 1$$

Les autres valeurs propres λ_2, λ_3 ne dépendent pas de r .

$$-\lambda^2 - \lambda(\sigma + 1 + b) - (\sigma b + b) = 0$$

On résout donc :

$$\Delta = (\sigma + 1 + b)^2 - 4b(\sigma + 1)$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = -\frac{(\sigma + 1 + b) - \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 16b^2(\sigma + 1)}}{2} < 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{(\sigma + 1 + b) + \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 16b^2(\sigma + 1)}}{2} < 0$$

On fait de même avec C_2 et on trouve le même résultat $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (noeud stable)

Donc pour les points C_1, C_2 sont stable pour $|r - 1| \ll 1$.

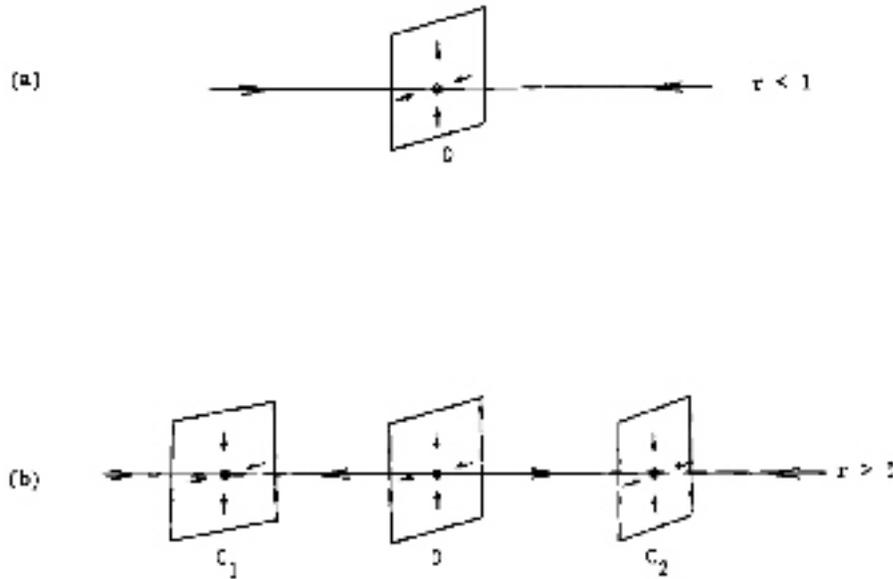


FIG. 3.2 – Une vue schématique du flux près de l'origine pour r près d'un (a) $r < 1$ (b) $r > 1$

3.0.7 Etude de bifurcations

À $r = 1$, on a donc une bifurcation fourche supercritique.

Appelons la valeur r critique (24.74 ..) r_c Quand $r > r_c$ les racines complexes de l'équation ci-dessus ont une partie réelle positive et C_1, C_2 ne sont pas stables. La vraie racine est négative pour tout r .

À $r = r_c$, lorsque les valeurs propres complexes traversent l'axe imaginaire, il y a une bifurcation de Hopf (Marsden § McCracken, 1976) dans laquelle les points C_1 et C_2 perdent leur

stabilité. La théorie de la bifurcation de Hopf est maintenant bien avancée, et nous savons qu'il en existe deux types. La bifurcation est "supercritique" si chaque point perd sa stabilité en expulsant un orbite périodique stable. Il est "*sous-critique*" s'ils perdent leur stabilité en absorbant une orbite périodique non stable. Dans notre cas, nous pouvons montrer (Marsden & McCracken, 1976) que la bifurcation est sous-critique. Il assemble que la bifurcation est susceptible d'être sous-critique pour tous les valeurs σ et b pour lesquelles la bifurcation se produit en $r > 0$ (Hassard et al., 1981). Voir également Van Gib A976). Marsden rapporte (communication privée) que lui et McCracken A971) ont commis des erreurs numériques dans leurs calculs qui indiqué une bifurcation supercritique pour certains σ et b .

On va maintenant montrer que les points fixes issus de la première bifurcation de stabilisent à leur tour pour une valeurs r_c par une bifurcation de Hopf. Cette deuxième bifurcation est caractérisée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées pour les quelles la partie réelle change de signe a la bifurcation. On sait donc qu'il existe des solutions purement imaginaires $\lambda_{1,2} = iw$ quand r assume sa valeur critique r_c . En prenant les parties réelles et imaginaires de l'équation caractéristique on trouvera deux équations indépendantes permettant de déterminer w et la valeur de r_c . Reprenons l'équation

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1)$$

$$\Leftrightarrow (iw)^3 + (\sigma + b + 1)(iw)^2 + b(\sigma + r_c)(iw) + 2b\sigma(r_c - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w^2(\sigma + 1 + b) + 2\sigma b(1 - r_c) = 0 \\ w^3 - w(\sigma b + br_c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w^2 = \frac{2\sigma b(r_c - 1)}{\sigma + 1 + b} \\ w^2 = \sigma b + br_c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma b + \frac{2\sigma b}{\sigma+1+b}}{\frac{2\sigma b}{\sigma+1+b} - b} \\ w = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1} \\ w = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases}$$

Application numérique $r_c = \frac{470}{19} = 24.74$ et $w = \pm 92.64$

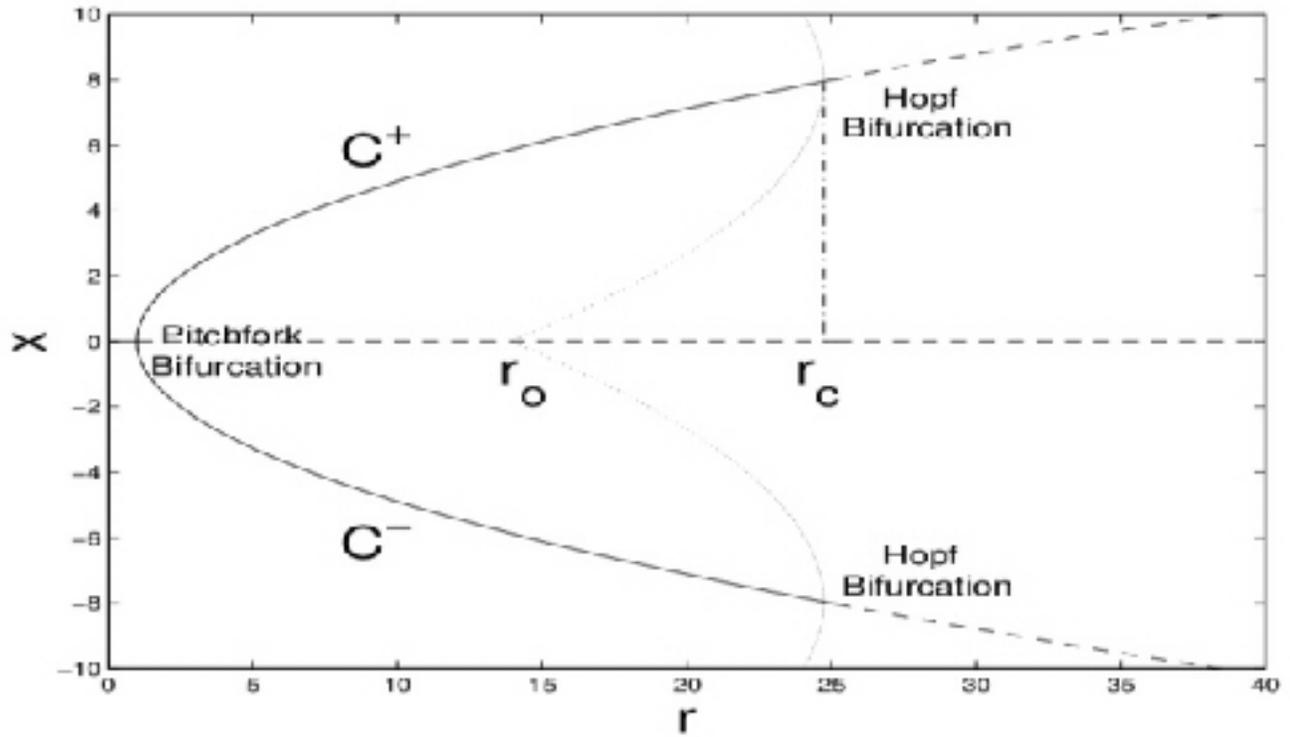


FIG. 3.3 – Bifurcation de Lorenz

Conclusion

L'analyse de bifurcation est une méthode permettant d'examiner l'influence des valeurs de paramètres sur le comportement du système. En général, faire varier un paramètre et évaluer l'effet de la variation sur un système est appelé analyse de sensibilité. L'analyse de bifurcation est finalement un type d'analyse de sensibilité qui se concentre sur des événements importants (changement de comportement asymptotique) dans le système.

Un avantage majeur de cette méthode est que vous pouvez représenter graphiquement des choses, soit pour identifier les branches, soit pour synthétiser les résultats au niveau du diagramme. Vous n'avez pas besoin de connaître les détails mathématiques pour comprendre un diagramme de bifurcation.

Bibliographie

- [1] Abd Elouahab Mohamed Salah (02/03/2009). les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires. Magistère En mathématiques université Mentouri-Constantine.
- [2] Dang-Vu, H., & Delcarte, C. (2000). Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Ellipses Ed. Marketing.
- [3] Hamdi Hamiche (2011). Inversion à gauche des systèmes dynamiques hybrides chaotiques (Application à la transmission sécurisée de données). Thèse de doctorat université de Tizi Ouzou.
- [4] Hateley, J. The Lorenz system. Lecture Notes, <http://web.math.ucsb.edu/~jhateley/paper/lorenz.pdf>,(Access date : 23.09. 2019).
- [5] Ibtissem Talbi (29/06/2010). Système dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos (Application à la cryptographie). Mémoire de magistère en mathématique université Mentouri de constantine.
- [6] Mammerie Mohammed (16/06/2011). Sur la stabilité structuruelle des difféomorphismes quadratique en dimension 2. Magistère en mathématique université Kasdi Merbah-Ourgla.
- [7] Menacer Tidjani(26/05/2014).. . Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université Constantine1.
- [8] Marle, C. M. (2003). Systèmes dynamiques : une introduction. Ellipse.

- [9] Müllhaupt, P. (2009). Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires. PPUR Presses polytechniques.
- [10] Sparrow, C. (2012). The Lorenz equations : bifurcations, chaos, and strange attractors (Vol. 41). Springer Science & Business Media.
- [11] Tayeb Hamaizia (25/04/2013). Systèmes dynamiques et chaos "Application à l'optimisation à l'aide d'algorithme chaotique ". thèse Mathématique université de Constantine

-1-

Annexe A : Programme en matlab

fig 3.1

```
% Programs 14a : The Lorenz attractor.
sigma=10;r=28;b=8/3;fsize=15;
Lorenz=@(t,x) [sigma*(x(2)-x(1));r*x(1)-x(2)-x(1)*x(3);x(1)
*x(2)-b*x(3)];
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t,xa]=ode45(Lorenz,[0 100],[15,20,30],options);
plot3(xa(:,1),xa(:,2),xa(:,3))
title('The Lorenz Attractor')
xlabel('x(t)', 'FontSize', fsize);
ylabel('y(t)', 'FontSize', fsize);
zlabel('z(t)', 'FontSize', fsize);
```