République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Mahboub Adel

Titre

Sur la résolution numérique des équations intégrales mixtes de Fredholm-Volterra

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Guidad Daradji	UMKB	Président
Dr.	Laiadi Abdelkader	UMKB	Encadreur
Dr.	Senouci Assia	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

A mes chères sœurs … pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,

A mes chers frères, … pour leur appui et leur encouragement,

A ma femme,...pour la patience et le soutien dont elle a fait preuve pendant toute la durée de cette thèse

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible,

Merci d'être toujours là pour moi.

REMERCIEMENTS

Je tiens à la fin de ce travail à remercier **ALLAH**.

Mes remerciements s'adressent particulièrement à mon encadreur Docteur **Laiadi Abdelkader**.

Je remercie ègalements les responsables de dèpartements de mathèmatique. Ainsi que tous les enseignants de la facultè.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail

Dr. **Guidad Daradji** et Dr. **Senouci Assia**

Enfin, je remercie mes amis et camarades de promotion pour ces cinq annèes passèes ensemble, dans les meilleurs moments comme dans les pires.

Table des matières

Introduction

Les équations intégrales mixtes de Fredholm-volterra sont issues de plusieurs domaines de la naturellement par modélisation mathématique des différents problèmes issus de la physique mathématique.

Comme la résolution analytique de ce type des équations est souvent n'est pas évidente et même impossible parfois, les gens sont plus intéressés par la résolution numérique, les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques.

La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence de la solution et surtout d'exhiber des méthodes d'approximation efficaces.

Ainsi notre mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre : nous commençons par classifier les èquations intègrales, Ensuite nous prèsentons les équations intégrales linéaires et non linéaires de Fredholm et de Volterra et Fredholm-volterra.

Dans le deuxième chapitre : nous utilisons des théorèmes de virgule fixe pour étudier l'existence et l'unicité de la solution d'équations intégrales mixtes de Fredholm-Volterra. et nous étudions le cas linéaire et nous étendons les résultats obtenus à des équations faiblement singulières. la différentiabilité par rapport au paramètre en utilisant le théorème de contraction des fibres, les équations intégrales mixtes de Fredholm-Volterra avec un argument déviant (à la fois avancé et retardé), nous donnons quelques théorèmes de comparaison en utilisant le cadre général des opérateurs faiblement picards développé par Szilárd András.

De plus, nous étudions la continuité et la différentiabilité de l'opérateur de la solution $S : [\lambda_1; \lambda_2] \to L^2(I)$ Défini par $S(\lambda)(t) = y^*(t, \lambda)$, où $y^*(., \lambda) \in L^2(I)$ est la solution unique de l'équation intégrale mixte de Fredholm-Volterra sur l'intervalle I. L'intervalle I est considéré comme un intervalle borné.

Le troisième chapitre présente les méthodes de résolution numérique de l'équation intégrale mixtes de Fredholm-volterra où nous avons utilisés la méthode trapézoïdale répétée et la méthode 1/3 de Simpson répétée. Nous avons terminé avec quelques exemples numériques qui confirment les résultats théoriques obtenues.

Chapitre 1

Généralités sur les équations intégrales

Un bref historique

Les premières équations intégrales furent obtenues par Daniel Bernoulli vers 1730 dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Après l'introduction du noyau de Green, il fallut attendre les dernières années du $19^{éme}$ siècle, avec les travaux de H. A. Schwarz, de H. Poincaré, de V. Volterra et surtout ceux de I. Fredholm, pour disposer de résultats généraux en liaison étroite avec les premiers développements de l'analyse fonctionnelle. Quelques années plus tard, l'étude des équations intégrales conduisait D. Hilbert à définir l'espace qui porte son nom et à poser les premières bases de la théorie spectrale, cadre dans lequel F.Riesz développa la théorie des opérateurs compacts (1918). Ainsi, les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

1.1 Équations intégrales linéaires

1.1.1 Opérateur intégral linéaire

Soit $K : C\,[a,b] \times C\,[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur intégral ou opérateur à noyau linéaire sur $C\,[a,b]$ définit par la formule suivante :

$$A : u \in C\,[a,b] \longrightarrow Au \in C\,[a,b]$$

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

où la fonction $K(x,t)$ s'appelle le noyau de l'opérateur intégral A.

1.1.2 Les équations intégrales (E.I)

Définition 1.1.1 *Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration $\int$. La forme générale d'une équation intégrale est :*

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega K(x,t)u(t)dt \tag{1.1}$$

Où $\alpha(x), f(x), K(x,t)$ sont des fonctions données, la fonction $u(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer, λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro et Ω un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie. La fonction $K(x,t)$ est appelée noyau de l'équation intégrale.

1.2 Classification des équations intégrales

La classification des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base décrirent leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

i) Le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue. Pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral. Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.

ii) La description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégration. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégrations sont fixées, dans l'équation de Volterra les bornes d'intégration sont indéfinies.

iii) L'adjective singulière est parfois employée d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si l'intégrant est non borné sur l'intervalle donné, évidement, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.

1.3 Noyaux particuliers

1. Si le noyau $k(x,t)$ d'une équation intégrale s'écrit sous la forme

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i(t)$$

où les fonctions$\alpha_i(x)$ pour $i=1,...,n$ sont linéairement indépendantes, alors il est dit noyau séparable ou dégénéré. Par exemple, les noyaux $x-t$, xt, x^2-t^2 *et* xt^2+tx^2 sont s´eparables.

2. Si le noyau $k(x,t)$ est une fonction à valeurs complexes telle que

$$k(x,t)=\overline{k(t,x)}$$

alors il est dit symétrique ou hermitien. Une équation intégrale à noyau symétrique est dite aussi symétrique. Par exemple, sur le carré $a\leq x,\ t\leq b$, les noyaux $x+t$, x^2+t^2 et $i(x-t)$ sont symétriques, tandis que $i(x+t)$ ne l'est pas.

3. Si $k(x,t)=k(x-t)$, alors l'équation intégrale est dite équation intégrale à noyau de convolution.

4. Si le noyau $k(x,t)$ est de la forme

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2dxdt<\infty$$

a un valeur fini, alors ce type de noyau est dit noyau régulier.

5. Si le noyau $k(x,t)$ est de la forme

$$k(x,t)=h(x,t)\,|x-t|^{-m}$$

où $h(x,t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, $a\leq x\leq b$ et $a\leq t\leq b$ avec $h(x,t)\neq 0$, et m est une constante telle que $0<m<1$, alors l'équation intégrale est dite équation intégrale faiblement singulière.

6. Si le noyau $k(x,t)$ est de la forme

$$k(x,t) = \frac{h(x,t)}{x-t}$$

avec $h(x,t)$ est une fonction différentiable avec $h(x,t) \neq 0$, alors l'équation intégrale est dite singulière à noyau de Cauchy où l'intégrale

$$\int_a^b \frac{h(x,t)}{x-t} u(t)dt,$$

est prise au sens de la valeur principale de Cauchy. Ainsi,

$$v.p. \int_a^b \frac{u(t)}{x-t} dt = \lim_{\xi \to 0} \left\{ \int_a^{x-\xi} \frac{u(t)}{x-t} dt + \int_{x+\xi}^b \frac{u(t)}{x-t} dt \right\}$$

1.3.1 Équations intégrales de Fredholm

Une équation de la forme 1.1 dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm.

i) Si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0 \tag{1.2}$$

Elle est dite de première espèce.

ii) Si $\alpha(x) = c = const \neq 0$, l'équation s'écrit

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

Elle est dite de seconde espèce.

iii) Si $\alpha(x) \neq 0$ donc la formule 1.2 est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

iv) Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

Elle est dite homogène.

Remarque 1.3.1 *Si $f(x) \neq 0$, l'équation 1.1 est dite non homogène.*

1.3.2 Équations intégrales de Volterra

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra telle que l'un des deux limites d'intégration est variable, c'est-à-dire

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \tag{1.3}$$

i) Si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = 0$$

Elle est dite de première espèce.

ii) Si $\alpha(x) = c = const \neq 0$, l'équation s'écrit

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$$

Elle est dite de seconde espèce.

iii) Si $\alpha(x) \neq 0$ donc la formule 1.3 est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

iv) Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$$

Elle est dite homogène.

Remarque 1.3.2 *Si $f(x) \neq 0$, l'équation 1.3 est dite non homogène.*

Remarque 1.3.3 *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyou K vérifie la condition*

$$k(x,t) = 0 \text{ pout tout } x < t$$

1.3.3 Équation intégrale de Fredholm-Volterra

Définition 1.3.1 *On appelle équation intégrale de Fredholm-Volterra une équation de la forme*

$$\alpha(x)u(x,t) + \lambda \int_a^b K(x,y)u(y,t)dy + \lambda \int_0^t F(t,s)u(x,s)ds = f(x,t),\ t \in [0,T]\,,\ T < \infty. \quad (1.4)$$

La fonction α détermine le type de l'équation intégrale.

1.3.4 Singularité de type Volterra et Fredholm

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme

$$u(x) = f(x) + \int_a^x M(x,t)K(x,t)u(t)dt,\ a \leq x < \infty. \quad (1.5)$$

où $K(x;t)$ est faiblement singulier, en générale, $K(x;t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} |x-t|^{-\alpha}\,,\ 0 < a < 1 \\ \log|x-t| \end{cases}$$

Alors

(i) L'équation 1.5 est de Volterra.

(ii) Si $\mathbf{x} = \mathbf{b}$; l'équation 1.5 est de Fredholm.

(iii) Le cas où $K(x,t) = |x-t|^{-\alpha}\,, 0 < a < 1$ s'appelle singularité algébriques.

(iv) Le cas où $K(x,t) = \log|x-t|$, s'appelle singularité logarithmiques.

1.4 Équations intégrales non-linéaires

Si l'exposant de la fonction inconnue $u(x)$ à l'intérieur du signe intégral est une, l'équation intégrale est appelé linéaire. Si la fonction inconnue $u(x)$ a un exposant autre qu'un, ou si l'équation contient une fonction non linéaire de $u(x)$, par exemple e^u, $\sinh u$, $\cos u$, $\ln(1+u)$, l'équation intégrale est appelé non linéaire. Pour expliquer ce concept, nous considérons les équations :

$$u(x) = 1 - \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$

$$u(x) = 2 + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$u(x) = 1 + \int_0^x (1+x-t)u^4(t)dt$$

et

$$u(x) = 1 + \int_0^1 x\ t\ e^{u(t)}dt$$

Les deux premiers exemples sont équations intégrales linéaires de Fredholm et Volterra respectivement, alors que les derniers sont l'équation intégrale de Volterra non linéaire et l'équation intégrale de Fredholm non linéaire respectivement.

La forme de l'équation intégrale non linéaire est

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega k(x,t,u\,(t))dt$$

Chapitre 2

Contribution à la théorie des équations intégrale de Fredholm-Volterra

2.1 Équations Intégrale de Fredholm-Volterra en C[a,b]

Dans ce section, nous étudions l'équation

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x, s, y(s))ds + \int_a^b K_2(x, s, y(s))ds. \tag{2.1}$$

On note par $C[a, b]$ sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$.

2.1.1 Les fonctions intégrables

Définition 2.1.1 *on désigne par $L^1[a, b]$ l'espace des fonctions intégrables sur $[a, b]$.On pose*

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Définition 2.1.2 *on dit qu'une fonction f est de carré intégrable sur $[a, b]$ si l'intégrale $\int_a^b f^2(x)dx < +\infty$ (existe et finie). L'ensemble de toutes les fonctions de carré integrable sur $[a, b]$ sera noté $L^2[a, b]$.*

Définition 2.1.3 *le produit scalaire de deux fonctions de* $L^2[a,b]$ *est défini par*

$$(f,g)_{L^2} = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

on appelle norme d'une fonction $f \in L^2[a,b]$ le nombre positif

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Propriétés fondamentales des fonctions de $\mathbf{L^2}$

a) Le produit de deux fonctions de carré integrable est une fonction intégrable.

En effet si :

$$\int_a^b f^2(x)dx < +\infty \text{ et } \int_a^b g^2(x)dx < +\infty,$$

alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx < \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

b) La somme de deux fonctions de carré intégrable est une fonction de carré integrable

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx < +\infty \text{ ,on a } \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2\int_a^b f(x)g(x) < +\infty$$

c) Le produit d'une fonction à carré intégrable par un scalaire est une fonction de carré intégrable

$$\int_a^b (\lambda f)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2.$$

d) Pour $f(x)$ et $g(x)$ de L^2 on a l'inégalité triangulaire

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

e) Soient $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ des fonctions de carré intégrable sur $[a,b]$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0.$$

On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est convergente uniformément vers $f(x)$ dans $L^2[a,b]$ alors $f(x) \in L^2[a,b]$.

2.1.2 Théorèmes d'existence

Théorème 2.1.1 *Si*

a) K_1,$K_2 \in C([a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ et $f \in C([a,b]\,; \mathbb{R}^n)$

b) Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ telle que $\|K_1(x,s,u)\| \leq \alpha \cdot \|u\| + \beta$;

c) Il existe $M \in \mathbb{R}$ avec la propriété $M = \sup\limits_{(x,s,u)\in[a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R}^n} \|K_2(x,s,u)\|$;

alors l'équation 2.1 a au moins une solution y^* dans l'espace $C([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ avec la propriété $\|y^*\|_{c\cdot\alpha} \leq R_c$, où R_c est un nombre réel supérieur à $\frac{c-1}{c}.\,[\|f\| + (M+\beta)(b-a)]$ et $c > 1$.

Pour $\tau > 0$ la norme de Bielecki d'une fonction $y \in C([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\|y\|_\tau = \max_{x\in[a,b]} \|y(x)\|\,.e^{\tau(x-a)}.$$

Théorème 2.1.2 *Si*

a) K_1,$K_2 \in C([a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ et $f \in C([a,b]\,; \mathbb{R}^n)$

b) K_2 a la propriété de Lipschitz par rapport à sa dernière variable et il existe $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}_+$ telle que $\|K_1(x,s,u)\| \leq \alpha_1.\,\|u\| + \beta_1$;

c) il existe une fonction intégrable $k_2 : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}_+$ et un nombre $\tau_0 > \alpha_1$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} \int_a^b k_2(x,s)ds \leq \left(1 - \frac{\alpha_1}{\tau_0}\right) e^{-\tau_0(b-a)}; \tag{2.2}$$

d) il existe $\beta_2 \in$ telle que $\mathbb{R}$

$$\|K_2(x,s,z)\| \leq k_2(x,s).\,\|z\| + \beta_2,\ \forall(x,s) \in [a,b] \times [a,b]\,,\ z \in \mathbb{R}^n;$$

puis l'équation 2.1 a au moins une solution en $C([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.1.3 *Si*

a) K_1,$K_2 \in C([a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ et $f \in C([a,b]\,; \mathbb{R}^n)$

b) il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ telle que $\|K_1(x,s,u)\| \leq \alpha_1.\,\|u\| + \beta_1$;

c) il existe $k_2 : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ et $p > 1$ telle que

$$\|K_2(x,s,z)\| \leq k_2(x,s).\|z\| + \beta_2,\ \forall (x,s) \in [a,b] \times [a,b]\,,\ z \in \mathbb{R}^n;$$

$k_2(x,.) \in L^p\,[a,b]$ et

$$\left\| \|k_2(x,.)\|_{L^p} \right\|_{\tau_0} < \tfrac{1}{b-a}.e^{-1-\alpha q^2(b-a)},$$

où$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $\tau_0 = \alpha q + \frac{1}{q(b-a)}$.

alors l'équation 2.1 a au moins une solution dans $C([a,b]\,;\mathbb{R}^n)$.

2.1.3 Théorèmes d'existence et d'unicité

Nous étudions l'équation linéaire suivante

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,s)y(s)ds + \lambda \int_a^b K_2(x,s)y(s)ds. \tag{2.3}$$

où λ est un paramètre réel.

Théorème 2.1.4 *Pour l'équation intégrale*

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,s)y(s)ds + \lambda \int_a^b K_2(x,s)y(s)ds$$

les noyaux itérés sont définis par

$$K_1^{(n+1)}(x,s) = \int_s^x K_1(x,t)K_1^n(t,s)dt$$

et

$$K_2^{(n+1)}(x,s) = \int_a^x K_1(x,t)K_2^{(n)}(t,s)dt + \int_a^b K_2(x,t)K_2^{(n)}(t,s)dt + \int_s^b K_2(x,t)K_1^{(n)}(t,s)dt.$$

Les noyaux résolvants sont

$$R_1(x,s,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j K_1^j(x,s) \text{ et } R_2(x,s,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j K_2^j(x,s).$$

La solution peut être représentée par

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R_1(x,s,\lambda) f(s) ds + \int_a^b R_2(x,s,\lambda) f(s) ds.$$

Les séries définissant les noyaux résolvants sont convergentes en $C[a,b]$ si $L_1 = \max |K_1(x,s)|$ et $L_2 = \max |K_2(x,s)|$ satisfont à l'une des conditions C^1 et C^2.

Les noyaux résolvants satisfont les équations intégrales suivantes :

$$R_1(x,s,\lambda) = \lambda K_1(x,s) + \lambda \int_s^x K_1(x,s) R_1(t,s,\lambda) dt$$

et

$$R_2(x,s,\lambda) = \lambda K_2(x,s) + \lambda \int_a^x K_1(x,t) R_2(t,s,\lambda) + \int_a^b K_2(x,t) R_2(t,s,\lambda) ds + \int_s^b K_2(x,t) R_1(t,s,\lambda) ds.$$

Équations intégrales de Fredholm-Volterra faiblement singulières

Théorème 2.1.5 *Si* $K(x,s,\lambda) = \frac{L(x,s,\lambda)}{(x-s)^{\alpha}}$ *avec* $L \in C([a,b] \times [a,b] \times [\lambda_1, \lambda_2])$ *et* $0 < \alpha < 1$*, puis l'équation*

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s,\lambda) u(s) ds \tag{2.4}$$

avec $f \in C\,[a,b]$ et $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ a une solution unique en $C([a,b])$ et cette solution peut être obtenue par approximations successives. Cette solution dépend continuellement de λ et si K est continuellement différentiable par rapport à λ, la solution est également continuellement différentiable par rapport à un λ.

Remarque 2.1.1 *On peut utiliser une preuve directe (sans les opérateurs itérés) si on utilise l'inégalité suivante :*

$$|T_u(x) - T_v(x)| \leq \int_a^x \frac{\max\limits_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |L(x,s,\lambda)|}{|x-s|^{\alpha}} . |u(s) - v(s)|\, ds \leq L^* \|u - v\| . \int_a^x \frac{e^{\tau(s-a)}}{(x-s)^{\alpha}} ds \leq$$
$$\left(\int_a^x \frac{ds}{(x-s)^{\alpha p}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x e^{\tau(s-a)q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{(b-a)^{1-\alpha.p}}{1-\alpha.p} \right)^{\frac{1}{p}} . \frac{e^{\tau(x-a)}}{(\tau.q)^{\frac{1}{q}}},$$

où $\alpha.p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $L^* = \max\limits_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |L(x,s,\lambda)|$ et

$$\|u - v\| = \max_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |u(x,\lambda) - v(x,\lambda)| . e^{-\tau(x-a)}.$$

On peut donc choisir τ tel que l'opérateur T soit une contraction avec le correspondant métrique de Bielecki.

Théorème 2.1.6 *Pour l'équation*

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,\lambda) y(s) ds + \int_a^b K_2(x,s,\lambda) y(s) ds \tag{2.5}$$

avec

$$L_1 = \max_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |K_1(x,s,\lambda)|$$

et

$$L_2 = \frac{2. \max\limits_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |L(x,s,\lambda)|}{1-\alpha} . (b-a)^{1-\alpha}$$

avec $K_1, L \in C([a,b]\times[a,b]\times[\lambda_1,\lambda_2])$ et K_2 est un noyau faiblement singulier $\left(K_2(x,s,\lambda) = \frac{L(x,s,\lambda)}{|x-s|\alpha}, 0 < \alpha < 1 \right)$ les noyaux itérés sont

$$K_1^{n+1}(x,s,\lambda) = \int_s^x K_1(x,t,\lambda) K_1^n(t,s,\lambda) dt + \int_a^b K_2(x,t,\lambda) K_1^n(x,t,\lambda) dt$$

et

$$K_2^{n+1}(x,s,\lambda) = \int_s^x K_1(x,t,\lambda) K_2^n(t,s,\lambda) dt + \int_a^b K_2(x,t,\lambda) K_2^n(x,t,\lambda) dt$$

et les noyaux résolvants sont

$$R_1(x,s,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} K_1^j(x,s,\lambda), \tag{2.6}$$

$$R_2(x,s,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} K_2^j(x,s,\lambda). \tag{2.7}$$

Si L_1 et L_2 satisfont à la condition a) ou b), il existe une solution continue unique à l'équation 2.5, cette solution dépend continuellement de λ et si les fonctions K_1 et L sont continuellement différentiables par rapport à λ, alors la solution est également continuellement différentiable par rapport à λ. La solution de l'équation 2.5 peut être représentée sous la forme

$$u(x) = f(x) + \int_a^x R_1(x,s,\lambda) f(s) ds + \int_a^b R_2(x,s,\lambda) f(s) ds.$$

Les séries 2.6 et 2.7 sont convergentes si L_1 et L_2 satisfont à la condition C^1 ou C^2.

2.1.4 Différenciabilité des solutions avec respect à un paramètre

Théorème 2.1.7 *Si*

1. Les fonctions $K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R}$ sont continus, $f \in C[a,b]$;

2. Les fonctions $K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R}$ sont dérivables par rapport aux deux dernières variables ;

3. $\left|\frac{\partial K_1(t,s,x;\lambda)}{\partial x}\right| \leq L_1$ et $\left|\frac{\partial K_2(t,s,y;\lambda)}{\partial y}\right| \leq L_2$ dans $[a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M]$;

4. Les nombres L_1 et L_2 satisfont à l'une des conditions C^1 et C^2, alors

a) L'équation 2.3 a une solution unique $x^*(t,\lambda)$ dans $C([a,b],[\lambda_m,\lambda_M])$;

b) $x^*(t,\lambda)$ est dérivable par rapport à λ et sa dérivée partielle satisfait l'équation intégrale

$$\frac{\partial x^*(t,\lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^t \frac{\partial K_1(t,s,x^*(s,\lambda);\lambda)}{\partial \lambda} ds + \int_a^b \frac{\partial K_2(t,s,x^*(s,\lambda);\lambda)}{\partial \lambda} ds + \int_a^b \frac{\partial K_1(t,s,x^*(s,\lambda);\lambda)}{\partial x} \frac{\partial x^*(s,\lambda)}{\partial \lambda} ds + \int_a^b \frac{\partial K_2(t,s,x^*(s,\lambda);\lambda)}{\partial y} \frac{\partial x^*(s,\lambda)}{\partial \lambda} ds;$$

c) La suite d'approximations successives pour l'opérateur $A = (B, C)$ converge.

2.1.5 Comparison entre des théorèmes

Théorème 2.1.8 *Si les fonctions* $K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_{m,}\lambda_M] \to \mathbb{R}$,

$\overline{K_i} : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_{m,}\lambda_M] \to \mathbb{R}$ $i \in 1,2$ satisfaire les conditions du théorème 2.2.2, $f_{1,}f_2 \in C[a,b]$ et les implications suivantes sont vraies

$$u \leq v \Rightarrow K_1(x,s,u) \leq \overline{K_1}(x,s,v),$$

$$u \leq v \Rightarrow K_2(x,s,u) \leq \overline{K_2}(x,s,v),$$

puis les solutions y^* et $\overline{y^*}$ des équations

$$y(x) = f_1(x) + \int_a^x K_1(x,s,y(s);\lambda)ds + \int_a^b K_2(x,s,y(s);\lambda)ds, \tag{2.8}$$

et

$$y(x) = f_2(x) + \int_a^x \overline{K_1}(x,s,y(s);\lambda)ds + \int_a^b \overline{K_2}(x,s,y(s);\lambda)ds,$$

satisfaire l'inégalité $y^*(x) \leq \overline{y}^*(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Théorème 2.1.9 *Si les fonctions* $K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_{m,}\lambda_M] \to \mathbb{R}$, $\overline{K_i} : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_{m,}\lambda_M] \to \mathbb{R}$ $i \in 1,2$, $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $\varphi_2, \overline{\varphi_2} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisfaire les conditions du théorème 2.4.1,* $\varphi_1 \leq \overline{\varphi_1}$, $\varphi_2 \leq \overline{\varphi_2}$, $f_1 \leq f_2$, *et les implications suivantes sont vraies*

$$u \leq v \Rightarrow K_1(x,s,u) \leq \overline{K_1}(x,s,v),$$

$$u \leq v \Rightarrow K_2(x,s,u) \leq \overline{K_2}(x,s,v),$$

puis les solutions uniques y^* et $\overline{y}^*$ des équations

$$y(x) = f_1(x) + \int_a^x K_1(x, s, y(g_1(s)))ds + \int_a^b K_2(x, s, y(g_2(s)))ds$$

et

$$y(x) = f_2(x) + \int_a^x \overline{K_1}(x, s, y(g_1(s)))ds + \int_a^b \overline{K_2}(x, s, y(g_2(s)))ds,$$

vérifie l'inégalité $y^*(x) \leq \overline{y}^*(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

2.2 Equations intégrales de Fredholm-Volterra en $\mathbf{L^2[a,b]}$

2.2.1 Equations intégrales de Fredholm-Volterra sur un intervalle borné

Lemme 2.2.1 *Si $I = [a, b]$ est un intervalle borné, $k \in L^2(I^2)$ et la fonction $u \in L^2(I)$ de valeur positive satisfait l'inégalité*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^b k(t, s)u(s)ds, \ a.e.t \in I,$$

où $\alpha > 0$ et $\|k\|_{L^2(I^2)} < 1$, alors

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{\alpha\sqrt{2(b-a)}}{1-\|k\|_{L^2(I^2)}}.$$

Théorème 2.2.1 *Si*

I. (Conditions de type Carathéodory) les fonctions $K_i : I^2 \times [\lambda_1, \lambda_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$ avec $I = [a, b]$ satisfaire les conditions

a) $K_i(., ., \lambda, u)$ est mesurable sur $I^2 = [a, b] \times [a, b]$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$;

b)$K_i(x, s, \lambda, .)$ est continu sur $\mathbb{R}$ $a.e.p.(x, s) \in I^2$ et chaque $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

II. (invariance spatiale) $f \in L^2(I)$,

$K_i(.,.,\lambda,0) \in L^2(I^2)$ pour chaque $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$, $i \in \{1,2\}$ et il existe $M_1 > 0$ tel que $\|K_i(.,.,\lambda,0)\|_{L^2(I^2)}$ $< M_1$ pour chaque $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$;

III. (Condition de type Lipschitz) il existe $k_i \in L^2(I^2)$, $i \in \{1,2\}$ tel que

$$|K_i(t,s,\lambda,u) - K_i(t,s,\lambda,u)| \leq k_i(t,s)\,|u-v|\,,$$

$\forall t,s \in I,\ \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2],\ u,\ v \in \mathbb{R}$;

IV. (contraction type condition)

$$L^2 : \int_a^b \int_a^t (k_1(t,s) + k_2(t,s))^2 ds dt + \int_a^b \int_t^b k_2^2(t,s) ds dt < 1 \tag{2.9}$$

puis

1. pour chaque $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$ existe une solution unique $y^*(.,\lambda) \in L^2(I)$ pour l'équation

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,\lambda,y(s))ds + \int_a^b K_2(x,s,\lambda,y(s))ds;$$

2. la séquence d'approximations successives

$$y_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,\lambda,y_n(s))ds + \int_a^b K_2(x,s,\lambda,y_n(s))ds$$

converge dans $L^2(I)$ vers $y^*(.,\lambda)$ pour chaque $y_0(.) \in L^2(I)$ et chaque $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$;

3. pour chaque $n \in \mathbb{N}$ que nous avons

$$\|y_n^*(.) - y^*(.,\lambda)\|_{L^2(I)} \leq \tfrac{L^n}{1-L}\,\|y_1(.) - y_0(.)\|_{L^2(I)}\,.$$

De plus, si la condition $I.c)$ est satisfaite, l'opérateur de solution $S : [\lambda_1,\lambda_2] \to L^2(I)$ défini par $S(\lambda)(x) = y^*(x,\lambda)$, $\forall x \in I$, $\forall \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$ est continue.

$I.c)$ les fonctions $(K_i(x,s,\cdot,u))_{x;s\in I,u\in R}$ sont échicontinus ;

au lieu de $I.b)$, $I.c)$ et $III.$ nous avons les conditions suivantes :

$I.b')$ $K_i(x,s,\lambda,.) \in C^1(R)$ pour chaque $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$, $a.e.p(x,s) \in I^2$ et il existe $k_i \in L^2(I^2)$, $i \in \{1,2\}$, tels que

$$\left|\frac{\partial K_i(t,s,\lambda,u)}{\partial u}\right| \leq k_i(t,s),$$

$\forall t, s \in I$, $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $\forall u \in R$;

I.c′) $K_i(x, s, ., u) \in C^1[\lambda_1, \lambda_2]$ pour chaque $u \in R$, *a.e.p*$(x, s) \in I^2$, les dérivées partielles satisfont à la condition $I.$,

$\frac{\partial K_i}{\partial \lambda}(., ., \lambda, u) \in L^2(I^2)$, $i \in \{1, 2\}$ et il existe $M_2 > 0$ tel que

$$\left\|\frac{\partial K_i}{\partial \lambda}(., ., \lambda, u)\right\|_{L^2(I^2)} < M_2,$$

$\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $\forall u \in R$,

alors l'opérateur S est différentiable par rapport à λ.

Théorème 2.2.2 *Si*

a) $K_i : I \times I \times [\lambda_1, \lambda_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 2}$ satisfaire aux conditions $I. - IV.$ du théorème 2.2.1 ;

b) les fonctions injectives et mesurables $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfaire les conditions $\mathrm{Im}(g_1) = [a_1, a_2], \mathrm{Im}(g_2) = [b_2, b_1]$ avec $a1 \leq a \leq a2 \leq b, a \leq b2 \leq b \leq b1$;

c) $\varphi_1 \in L^2([a_1, a])$ et $\varphi_2 \in L^2([b, b_1])$;

1) l'équation 2.8 a une solution unique $y^*(\cdot, \lambda)$ dans $L^2(I_1)$ pour tout $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, où $I_1 = [a_1, b_1]$;

2) la suite d'approximations successives converge en $L_2(I_1)$ à $y^*(\cdot, \lambda)$ pour chaque élément de départ admissible $y_0(\cdot, \lambda)$, où l'ensemble des fonctions admissibles est défini par

$$Y_a = \{y(\cdot, \lambda) \in L^2(I_1) \,|y_0(t, \lambda) = \varphi_1(t),\ \forall t \in [a_1, a],\ y_0(t, \lambda) = \varphi_2(t),\ \forall t \in [b, b_1]\} ;$$

3) nous avons l'estimation suivante :

$$\|y_n(.) - y^*(., \lambda)\|_{L^2(I_1)} \leq \frac{L^n}{1-L} \|y_1(.) - y_0(.)\|_{L^2(I_1)},$$

où L est donné par la relation 2.2.2.

De plus si $I.c)$ est satisfait, l'opérateur $S : [\lambda_1, \lambda_2] \to L_2(I_1)$ défini par $S(\lambda)(x) = y^*(x, \lambda)$, $\forall x \in [a_1, b_1]$, $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ est continu.

Si au lieu de $I.b)$, $I.c)$ et $III.$ on a $I.b')$ et $I.c')$, alors l'opérateur S est différentiable.

Chapitre 3

Méthodes numériques de résolution d'équations intégrales linéaires de Fredholm-Volterra

Résumé

Le but de ce travail est d'utiliser des méthodes numériques pour résoudre les équations intégrales linéaires de Fredholm-Volterra des premier et second types. Ces méthodes sont à savoir la méthode trapézoïdale répétée et la méthode 1/3 répétée de Simpson. Des exemples numériques sont présentés pour montrer l'efficacité et la précision du travail présenté.

3.1 Introduction

Les équations intégrales ont suscité un intérêt considérable dans les littératures mathématiques, en raison de leurs nombreux domaines d'application dans différents domaines des sciences . De nombreux auteurs donnent des solutions numériques pour différents types d'équations intégrales de Fredholm et d'équations intégrales de Volterra .

Dans ce chapitre, nous montrons comment les méthodes numériques basées sur la formule de quadrature trapézoïdale répétée et la formule de quadrature 1/3 répétée de Simpson peuvent être utilisées pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm-Volterra du deuxième type.

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^b L(X,Y)u(y)dy + \mu \int_a^x K(X,Y)u(y)dy \tag{3.1}$$

et l'équation intégrale linéaire de Fredholm-Volterra du premier type :

$$g(x) = \lambda \int_a^b L(X,Y)u(y)dy + \mu \int_a^x K(X,Y)u(y)dy \tag{3.2}$$

où $a \leq x \leq b$, λ et μ sont des nombres réels, $g(x)$, $L(x,y)$ et $K(x,y)$, reçoivent des fonctions continues et $u(x)$ est la fonction inconnue à déterminer. Si $\mu = 0$ alors l'équation 3.1 est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm. Aussi, si $\lambda = 0$ alors l'équation 3.1 est appelée équation intégrale linéaire de Volterra. On sait que si $\lambda = 0$ alors une solution analytique existe pour des types spéciaux d'équation 3.1, sinon la solution est difficile.

3.2 La méthode trapézoïdale répétée

Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm-Volterra du second type donnée par l'équation 3.1. Pour résoudre cet équation sur l'intervalle fini $[a,b]$, on le divise en n intervalles plus petits de largeur h, où $h = (b-a)/n$. Le $i-ème$ point de subdivision est noté x_i, tel que $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, ..., n$. La solution approximative sera définie au point de maillage x_i est noté $u(x_i)$ et est donné par.

$$u(x_i) = g(x_i) + \lambda \int_a^b L(x_i,y)u(y) + \mu \int_a^{x_i} K(x_i,y)u(y)dy,\ i = 0, 1, ..., n \tag{3.3}$$

Si nous approximons les intégrales apparues dans l'équation 3.3 par la formule trapézoïdale répétée, ce qui donnera le système d'équations suivant :

$$u_0 = g_0 + \tfrac{\lambda h}{2}\left(L_{0,0}u_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1} L_{0,j}u_j + L_{0,n}u_n\right),$$

$$u_i = g_i + \tfrac{h}{2}\left((\lambda L_{i,0} + \mu K_{i,0})\, u_0 + 2\sum_{j=1}^{i-1} (\lambda L_{i,j} + \mu K_{i,j})\, u_j + (2\lambda L_{i,j} + \mu K_{i,j})\, u_i + 2\lambda \sum_{j=i+1}^{n-1} L_{i,j}u_j + \lambda L_{i,n}u_n\right)$$

$$i = 1, 2, ..., n-1$$

$$u_n = g_n + \frac{h}{2}\left((\lambda L_{n,0} + \mu K_{n,0})\, u_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1} (\lambda L_{n,j} + \mu K_{n,j})\, u_j + (\lambda L_{n,n} + \mu K_{n,n})\, u_n\right) \tag{3.4}$$

où :

$$K_{i,j} = K(x_i, x_j) \qquad j = 0, 1, ..., i$$

$$L_{i,k} = L(x_i, x_k) \qquad k = 0, 1, ..., n$$

$$g_i = g\,(x_i)\,,$$

et u_i est la valeur approximative de la fonction inconnue u au nœud x_i, $i = 0, 1, ..., n$.

En résolvant le système donné par l'équation 3.4 qui consiste en $(n+1)$ équations et $(n+1)$ inconnues, on obtient la solution approchée de 3.1.

3.3 La méthode 1/3 de Simpson répétée

Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm-Volterra du second type donnée par l'équation 3.1. Ici, nous utilisons la méthode 1/3 de Simpson pour trouver la solution de l'équation 3.1. Pour ce faire, nous divisons l'intervalle fini $[a, b]$ en $2n$ plus petits intervalles de largeur h, où $h = (b - 2a)/2n$. La solution approchée de 3.1 dans les nœuds pairs (x_{2i}) est donnée par

$$u(x_{2i}) = g(x_{2i}) + \lambda \int_a^b L(x_{2i}, y)u(y) + \mu \int_a^{x_{2i}} K\,(x_{2i}, y)\, u(y)dy, i = 0, 1, ..., n \tag{3.5}$$

et dans le nœud impair (x_{2i+1}) est donné par :

$$u(x_{2i+1}) = g\left(x_{2i+1}\right) + \lambda \int_a^b F\left(x_{2i+1}, y\right) u(y)dy, i = 0, 1, ..., n \tag{3.6}$$

En utilisant la formule 1/3 répétée de Simpson pour approximer les intégrales apparaissant dans les équations 3.5-3.6, on peut obtenir le système d'équations suivant :

$$u_0 = g_0 + \tfrac{\lambda h}{3}\left(L_{0,0}u_0 + 4\sum_{j=1}^{n} L_{0,2j-1}u_{2j-1} + 2\sum_{j=1}^{n-1} L_{0,2j}u_{2j} + F_{0,2n}u_{2n}\right)$$

$$u_{2i} = g_{2i} + \tfrac{h}{3}\left(\lambda L_{2i,0} + \mu K_{2i,0}\right)u_0 + 4\sum_{j=1}^{i}\left(\lambda L_{2i,2j-1} + \mu K_{2i,2j-1}\right)u_{2j-1} + 2\sum_{j=1}^{i-1}\left(\lambda L_{2i,2j} + \mu K_{2i,2j}\right)u_{2j}$$

$$+\left(2\lambda L_{2i,2i} + \mu K_{2i,2i}\right)u_{2i} + 4\lambda\sum_{j=i+1}^{i-1} L_{2i,2j-1}u_{2j-1} + 2\lambda\sum_{j=i+1}^{n-1} L_{2i,2j}u_{2j} + \lambda L_{2i,2n}u_{2n}, \ldots .\ i = 0, 1, ..., n-1$$

$$u_{2i+1} = g_{2i+1} + \tfrac{h}{3}\left(\lambda L_{2i+1,0} + \mu K_{2i+1,0}\right)u_0 + 4\sum_{j=1}^{i}\left(\lambda L_{2i+1,2j-1} + \mu K_{2i+1,2j-1}\right)u_{2j-1}$$

$$+2\sum_{j=1}^{i-1}\left(\lambda L_{2i+1,2j} + \mu K_{2i+1,2j}\right)u_{2j} + \left(2\lambda L_{2i+1,2i} + \tfrac{5}{2}\mu K_{2i+1,2i}\right)u_{2i} +$$

$$\left(4\lambda L_{2i+1,2i+1} + \tfrac{3}{2}\mu K_{2i+1,22i+1}\right)u_{2i+1}$$

$$+4\lambda\sum_{j=i+2}^{n} L_{2i+1,2j-1}u_{2j-1} + 2\lambda\sum_{j=i+1}^{n-1} L_{2i+1,2j}u_{2j} + \lambda L_{2i+1,2n}u_{2n}, \quad i = 0, 1, ..., n-1$$

$$u_{2n} = g_{2n} + \tfrac{h}{3}\left(\lambda L_{2n,0} + \mu K_{2n,0}\right)u_0 + 4\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda L_{2n,2j-1} + \mu K_{2n,2j-1}\right)u_{2j-1} + 2\sum_{j=1}^{n-1}\left(\lambda L_{2n,2j} + \mu K_{2n,2j}\right)u_{2j}$$

$$+\left(\lambda L_{2n,2n} + \mu K_{2n,2n}\right)u_{2n}, \quad i = 0, 1, ..., n-1$$

Ce système résout l'équation 3.1 plus précisément que le système 3.4. Parce que dans ce système, nous utilisons la méthode répétée 1/3 de Simpson pour résoudre 3.1 au lieu de la méthode trapézoïdale répétée.

Remarque 3.3.1 *La méthode trapézoïdale répétée et la méthode répétée 1/3 de Simpson peuvent également être utilisées pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm-Volterra de premier type donné par l'équation 3.2. Pour ce faire, supposons que les noyaux et le membre gauche dans* *l'équation 3.2 aient des dérivées continues par rapport à x et que la condition $K(x,x) \neq 0$ soit vérifiée. Dans ce cas, après avoir différencié l'équation 3.2 est divisé l'expression résultante par $K(x,x)$, nous arrivons à l'équation intégrale linéaire de Fredholm-Volterra suivante du deuxième type :*

$$u(x) = G(x,y) + \lambda \int_a^b H(x,y)u(y)dy \tag{3.7}$$

Où :

$$G(x) = \frac{-g'(x)}{K(x,x)},\ H(x,y){=}\frac{\lambda L'_x(x,y)}{K(x,x)} \text{ et } J(x,y){=}\frac{\mu K'_x(x,y)}{K(x,x)}.$$

pour laquelle la condition $K(x,x) \neq 0$ doit être vérifiée.

3.4 Exemples numériques

Dans cette section, nous donnons quelques exemples numériques pour illustrer les méthodes ci-dessus pour résoudre les équations intégrales linéaires de Fredholm-Volterra des premier et second types. Dans tous les cas, nous avons choisi $g(x)$ de manière à connaître la solution exacte. Cette solution exacte est utilisée uniquement pour montrer que la solution numérique obtenue avec notre méthode est correcte. Ensuite, dans un tel exemple, nous calculons les erreurs absolues à certains points.

Exemple 3.4.1 *Considérons l'équation intégrale de Fredholm-Volterra du deuxième type :*

$$u(x) = 2\cos x - x\cos 2 - 2x\sin 2 + x - 1 + \int_0^2 xyu(y)dy + \int_0^x (x-y)u(y)dy,\ 0 \leq x \leq 2$$

pour laquelle la solution exacte est $u(x) = cos(x)$. Les tableaux 1 et 2 montrent que les erreurs absolues à certains points de maillage obtenues en utilisant la méthode trapézoïdale répétée et la méthode 1/3 de Simpson répétée respectivement pour $h = 0.2$, 0.1, 0.05.

Par conséquent, Les tableaux (1 et 2) montrent que la méthode répétée 1/3 de Simpson a donné des résultats plus précis que la méthode répétée trapézoïdale.

Points	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
$x = 0$	0	0	0
$x = 0.2$	3.36697×10^{-4}	8.52287×10^{-5}	2.13739×10^{-5}
$x = 0.4$	8.17363×10^{-4}	2.06533×10^{-4}	5.17720×10^{-5}
$x = 0.6$	1.45337×10^{-3}	3.66811×10^{-4}	9.19223×10^{-5}
$x = 0.8$	2.25741×10^{-3}	5.69301×10^{-4}	1.42638×10^{-4}
$x = 1$	3.24451×10^{-3}	8.17835×10^{-4}	2.04883×10^{-4}
$x = 1.2$	4.43334×10^{-3}	1.11717×10^{-3}	2.79851×10^{-4}
$x = 1.4$	5.84776×10^{-3}	1.47338×10^{-3}	3.69067×10^{-4}
$x = 1.6$	7.51871×10^{-3}	1.89433×10^{-3}	4.74509×10^{-4}
$x = 1.8$	9.48653×10^{-3}	2.39027×10^{-3}	5.98747×10^{-4}
$x = 2$	1.18036×10^{-2}	2.97449×10^{-3}	7.45117×10^{-4}

Tableau 1. *Les erreurs absolues à certains points de maillage de l'exemple 3.4.1 obtenues en utilisant la formule trapézoïdale répétée.*

Points	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
$x = 0$	0	0	0
$x = 0.2$	8.35541×10^{-5}	2.62342×10^{-6}	2.62342×10^{-6}
$x = 0.4$	3.06842×10^{-4}	5.26641×10^{-6}	5.26641×10^{-6}
$x = 0.6$	1.08547×10^{-4}	7.92778×10^{-6}	7.92778×10^{-6}
$x = 0.8$	6.32625×10^{-4}	1.06148×10^{-5}	1.06148×10^{-5}
$x = 1$	1.91537×10^{-4}	1.33473×10^{-5}	1.33473×10^{-5}
$x = 1.2$	9.79100×10^{-4}	1.61622×10^{-5}	1.61622×10^{-5}
$x = 1.4$	9.06532×10^{-5}	1.91179×10^{-5}	1.91179×10^{-5}
$x = 1.6$	1.36428×10^{-3}	2.22986×10^{-5}	2.22986×10^{-5}
$x = 1.8$	2.64724×10^{-4}	2.58190×10^{-5}	2.58190×10^{-5}
$x = 2$	1.83138×10^{-3}	2.98298×10^{-5}	2.98298×10^{-5}

Tableau 2. *Les erreurs absolues à certains points de maillage de l'exemple 3.4.1, obtenues en utilisant la formule 1/3 de Simpson répétée.*

Exemple 3.4.2 *Considérons l'équation intégrale de Fredholm-Volterra du premier type*

$$u(x) = -\tfrac{2}{5}x^7 - \tfrac{5}{4}x^4 - \tfrac{59}{20}x + \int_0^2 x(y+1)u(y)dy + \int_0^x (2x^2y+1)u(y)dy,\ 0 \leq x \leq 2$$

dont la solution exacte est :

$$u(x) = x^3 + 1$$

Les tableaux (3 et 4) montrent que les erreurs absolues à certains points de maillage obtenues en utilisant la méthode des trapèzes répétés et la méthode répétée au 1/3 de Simpson respectivement pour $h = 0.2$, 0.1, 0.05. Par conséquent, les tableaux 3 et 4 montrent que la méthode répetée 1/3 de Simpson a donné des résultats plus précis que la méthode répétée trapézoïdale.

Points	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
$x = 0$	2.21141×10^{-3}	5.53482×10^{-4}	1.38410×10^{-4}
$x = 0.2$	2.20379×10^{-3}	5.51599×10^{-4}	1.37940×10^{-4}
$x = 0.4$	2.16267×10^{-3}	5.41356×10^{-4}	1.35382×10^{-4}
$x = 0.6$	2.08942×10^{-3}	5.23067×10^{-4}	1.30811×10^{-4}
$x = 0.8$	2.02228×10^{-3}	5.06320×10^{-4}	1.26627×10^{-4}
$x = 1$	2.01821×10^{-3}	5.05415×10^{-4}	1.26408×10^{-4}
$x = 1.2$	2.12177×10^{-3}	5.31501×10^{-4}	1.32941×10^{-4}
$x = 1.4$	2.34438×10^{-3}	5.87367×10^{-4}	1.46921×10^{-4}
$x = 1.6$	2.66747×10^{-3}	6.68290×10^{-4}	1.67161×10^{-4}
$x = 1.8$	3.05958×10^{-3}	7.66372×10^{-4}	1.91685×10^{-4}
$x = 2$	3.49113×10^{-3}	8.74235×10^{-4}	2.18649×10^{-4}

Tableau 3. *Les erreurs absolues de l'exemple 3.4.2 obtenues en utilisant la formule trapézoïdale répétée.*

Points	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
$x = 0$	2.26374×10^{-4}	3.05501×10^{-5}	3.94906×10^{-6}
$x = 0.2$	2.24277×10^{-4}	3.03950×10^{-5}	3.93125×10^{-6}
$x = 0.4$	2.17214×10^{-4}	2.94728×10^{-5}	3.81899×10^{-6}
$x = 0.6$	1.30262×10^{-4}	2.73344×10^{-5}	3.55475×10^{-6}
$x = 0.8$	1.74088×10^{-4}	2.41930×10^{-5}	3.16565×10^{-6}
$x = 1$	1.72379×10^{-4}	2.10750×10^{-5}	2.78130×10^{-6}
$x = 1.2$	1.33094×10^{-4}	1.93274×10^{-5}	2.57047×10^{-6}
$x = 1.4$	5.66677×10^{-4}	1.98240×10^{-5}	2.64108×10^{-6}
$x = 1.6$	1.56855×10^{-4}	2.25897×10^{-5}	2.99422×10^{-6}
$x = 1.8$	8.76536×10^{-4}	2.70251×10^{-5}	3.55353×10^{-6}
$x = 2$	2.34124×10^{-4}	3.23478×10^{-5}	4.22071×10^{-6}

Tableau 4. *Les erreurs absolues de l'exemple 3.4.2 obtenues en utilisant la formule 1/3 de Simpson répétée.*

Conclusion

Les équations intégrales linéaires de Fredholm-Volterra sont généralement difficiles à résoudre analytiquement. Dans de nombreux cas, il est nécessaire d'obtenir les solutions approximatives, à cet effet les méthodes présentées peuvent être proposées. À partir d'exemples numériques, on peut voir que les méthodes numériques proposées sont efficaces et précises pour estimer la solution de ces équations, également, nous montrons que lorsque les valeurs de h diminuent, les erreurs absolues diminuent à des petites valeurs

Bibliographie

[1] Rahmoune Azedine, Sur la Résolution Numérique des équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales, (Thèse de doctorat), 2011

[2] Du. H et Cui. M. A, method of solving nonlinear mixed Volterra–Fredholm integral equation. Appl. Math. Sci, 1, pp 2505-2516, 2007

[3] Messaoud Guesba, Sur quelques équations intégrales non linéaires.(Thème de Magister), 2012

[4] M. M. Mustafa et I. N. Ghanim, Numerical Solution of Linear Volterra-Fredholm Integral Equations Using Lagrange Polynomials, Mathematical Theory and Modeling, 4, pp 137-146, 2014

[5] Szilárd András, Contribution to the theory of Fredholm-Volterra integral équations, (Thèse de doctorat), 2004

[6] Majeed. S. J et H. H. Omran, Numerical methods for solving linear Fredholm-Volterra Integral Equations, Al-Nahrain Journal of Science, 11(3), pp 131-134, 2008.

[7] F.A. Hendi a,*, A.M. Albugami, Numerical solution for Fredholm–Volterra integral equation of the second kind by using collocation and Galerkin methods, Journal of King Saud University (Science), vol. 22, pp 37–40, 2010.