

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA
FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la
VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Thème :

Synchronisation généralisée des systèmes
fractionnaires
en utilisant le critère R-H

Présenté par :

Bezziou Hadjer

Devant le jury :

Pr. Khelil Naceur	U.MOHAMED KHIDER, BISKRA	Président
Dr. Menacer Tidjani	U.MOHAMED KHIDER, BISKRA	Encadreur
Dr. Rezki Ibrahim	U.MOHAMED KHIDER, BISKRA	Examineur

Septembre 2020.

Année Universitaire : 2019/2020.

Dédicace

-À mes parents Bezziou Djamel et Bezziou Wahiba
artisanes de ma réussite

Aucun dédicace ne saurait exprimer ma reconnaissance, mon grand attachement et mon profond
amour.

Que Dieu puisse m'aider à vous montrer ma sincère gratitude pour ces nombreuses années de
sacrifice.

À mes frères et mes soeurs

Qu'ils trouvent l'expression de ma gratitude et de ma grande affection.

À mes amies et à tous ceux qui me sont chers.

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la
volonté et le courage pour achever ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur

Dr. Tidjani Menacer pour tout l'effort qu'il a fournis pour faciliter
et aider à accomplir notre travail de fin d'étude.

Nous remercions profondément Mr. **Pr.Khelil Naceur** pour avoir accepté
de présider Notre jury.

Nos remerciement sont aussi adresse Mr. **Dr.Rezki Ibrahim** d'être
membre de jury et ayant de présenter notre mémoire
devant il.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	ii
Table des figures	v
Introduction	1
1 Les systèmes à dérivées d'ordre fractionnaire	3
1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation Fractionnaire	3
1.1.1 Fonction Gamma	3
1.1.2 Fonction Beta	5
1.1.3 La fonction de Mittag-Leffer	5
1.2 Les dérivées fractionnaires	6
1.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	6
1.2.2 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	7
1.2.3 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo	9
1.3 Equations différentielles fractionnaires	10
1.3.1 Problème de Cauchy	10
1.3.2 Equation différentielle fractionnaire linéaire	10
1.3.3 Equation différentielle fractionnaire de forme plus générale	11

1.3.4	Résolution numérique des équations fractionnaires	11
1.4	Généralités sur les systèmes chaotiques	13
1.4.1	Définition du chaos	13
1.4.2	Caractéristiques du chaos	15
1.5	Stabilité des systèmes fractionnaires	15
1.5.1	Point d'équilibre :	15
1.5.2	Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires	16
1.5.3	Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires	17
1.5.4	Conditions de stabilité de Routh-Hurwitz	17
2	La synchronisation	19
2.1	Définition de la Synchronisation	19
2.1.1	Définition mathématique :	19
2.2	Différent types de synchronisation	21
2.2.1	Synchronisation complète	21
2.2.2	Anti-Synchronisation	22
2.2.3	Synchronisation généralisée	22
2.2.4	Synchronisation projective	22
2.3	Méthodes pour la synchronisation	23
2.3.1	Synchronisation par contrôle actif	23
3	Application : Synchronisation par la méthode du système auxiliaire approché	25
3.1	La méthode du système auxiliaire approché	25
3.2	Synchronisation entre le l'oscillateur de Chua modifié et l'oscillateur de Van der	
Pol-Duffing Modifié		27
3.2.1	Analyse théorique	27
3.2.2	Simulation numérique	30

Conclusion	32
Bibliographie	33
Annexe B : Abréviations et Notations	37

Table des figures

3.1	La synchronisation, au sens généralisé, entre les deux systèmes (3.6) et (3.7) est	
	achevée avec l'ordre fractionnaire $\alpha = 0.98$ et le paramètre $k = 90.685$.	31
3.2	La synchronisation n'est pas réalisée entre les deux systèmes (3.6) et (3.7) dans la	
	cas entier, avec $k = 90.685$.	31

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la notion de dérivée d'une fonction $f(t)$ par rapport à la variable t à des valeurs non entières $\alpha > 0$, et dans la cas α est négatif, on parle d'une intégration fractionnaire.

Au cours des dernières années, le calcul fractionnaire est devenu un excellent outil dans plusieurs domaine, par exemple : le modèle mathématique du visco-élastique des matières [1], les problèmes électromagnétiques, le fractance de l'arbre, le fractance de la chaîne, et à ces effet, de nombreuses applications du calcul fractionnaire ont été signalées dans différents domaines tels que : le traitement du signal, le traitement d'image, la commande automatique et robotiques etc....

La synchronisation fait référence à un processus où deux ou plusieurs systèmes chaotiques ajustent leurs dynamiques vers un comportement commun dû à un couplage ou forçage [2].

En 1990, **Pecora** et **Caroll** ont été les premiers à proposer le concept de la synchronisation chaotique et à la réaliser [3], le premier système produisant le signal chaotique, s'appelle le système émetteur (maître), le deuxième est le système récepteur (esclave).

Récemment, la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire est devenue un domaine de recherche actif en raison de ses applications potentielles dans la communication sécurisée et les processus de contrôle. Jusqu'à présent, plusieurs types de synchronisations ont été établis comme la synchronisation projective [4], la synchronisation généralisée [5], la synchronisation complète [6], anti-synchronisation [7], etc., et plusieurs méthodes de synchronisation ont été proposées tels que méthodes de contrôleur actif et adaptif [8].

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la synchronisation généralisée (non identique) entre deux systèmes à dérivées d'ordre fractionnaire .

Notre travail est organisé en trois chapitres :

Dans le première chapitre, nous présentons les notions de base sur les systèmes à dérivées d'ordre fractionnaire, en commençant par les fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire et puis les notions de base sur les systèmes fractionnaires tels que : l'intégrale et la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, la dérivation fractionnaire au sens de Caputo et les équations différentielles fractionnaires, en passant par l'étude la théorie de chaos et finissant par la stabilité des systèmes fractionnaires .

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de la synchronisation où nous introduisons quelques définitions qui nous permettront de donner des définitions assez claires sur le phénomène de la synchronisation, des différents types connus de synchronisation et les méthodes les plus usées.

Dans le troisième chapitre, on propose une application de synchronisation par la méthode du système auxiliaire approché.

A la fin de notre mémoire, nous donnerons une conclusion générale.

Chapitre 1

Les systèmes à dérivées d'ordre fractionnaire

1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation Fractionnaire

Dans cette section, Nous avons besoin de présenter des quelques résultats des fonctions qui jouent un nécessairement rôle dans dérivés fractionnaires, Il s'agit de la fonction Gamma d'Euler, Beta et Mettag-leffler. [9]

1.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler, qui prolonge la fonction factorielle aux nombres réels et complexes.

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma Γ est définie par l'intégrale suivant :*

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \exp(-t) dt, \quad (1.1)$$

cette intégrale converge si $\text{Re}(s) > 0$, en effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x + iy) &= \int_0^{+\infty} t^{x+iy-1} \exp(-t) dt & (1.2) \\
 &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) \exp(iy \ln t) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) [\cos y \ln t + i \sin y \ln t] dt,
 \end{aligned}$$

donc pour $t = 0$ l'intégrale (1.2) converge si $x = \operatorname{Re}(s) > 1$.

On a, pour tout un nombre complexe x tel que $\operatorname{Re}(x) > 0$, la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x - 1), \quad (1.3)$$

est vérifiée, qu'on peut démontrer par une intégration par parties.

Lemme 1.1.1 *La fonction Γ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$:*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} \exp(-t), \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_*^+). \quad (1.4)$$

Quelques valeurs particulières de $\Gamma(x)$:

1. Pour $x = 1$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt = 1.$$

2. Pour $x = \frac{1}{2}$: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \exp(-t) dt$,

Posons $t = z^2$ donc $dt = 2z dz$, alors on obtient : $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-z^2) dz$.

D'après la valeur de l'intégrale de Gauss on trouve que : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Calculons $\Gamma(\frac{5}{2})$: d'après (1.3) et le dernier résultat : on trouve

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

1.1.2 Fonction Beta

La fonction Bêta est une fonction à deux variables notée B et définie pour tout complexes x et y par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} [1-t]^{y-1} dt, \quad (\operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0). \quad (1.5)$$

1. Il y a entre la fonction gamma et la fonction beta une relation définie par :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.6)$$

2. La fonction Beta est symétrique :

$$B(x, y) = B(y, x). \quad (1.7)$$

1.1.3 La fonction de Mittag-Leffer

La fonction de **Mittag-Leffer**, notée $E_{\alpha, \beta}$ qui tient son nom du mathématicien **Gosta Mittag-leffer**, est une fonction spéciale, qui a une grande importance dans le calcul fractionnaire .

La fonction de **Mittag-leffer** d'un seul indice $\alpha > 0$ est une généralisation de la fonction exponentielle e^x , qu'elle est donnée pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}(z) > 0$ par le développement en série entière suivante :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}, \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0), \quad (1.8)$$

cette fonction peut être dépendante de deux paramètres complexes α et β :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\beta + \alpha n)}, \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0), \quad (1.9)$$

où Γ désigne la fonction gamma.

Quelques valeurs particulières :

$$E_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}, |z| > 0.$$

$$E_{1,1}(z) = \exp z, z \in \mathbb{C}.$$

$$E_{2,1}(z) = \cosh \sqrt{z}, z \in \mathbb{C}.$$

$$E_{2,1}(-z^2) = \cos z, z \in \mathbb{C}.$$

$$E_{3,1}(z) = \frac{1}{2}[\exp z^{\frac{1}{3}} + 2 \exp \frac{-1}{2} z^{\frac{1}{3}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} z^{\frac{1}{3}})], z \in \mathbb{C}.$$

$$E_{4,1}(z) = \frac{1}{2}[\cosh z^{\frac{1}{4}} + \cos z^{\frac{1}{4}}], z \in \mathbb{C}.$$

1.2 Les dérivées fractionnaires

Les intégrales et les dérivés fractionnaires ont de nombreuses définitions, mais dans Cette section, nous présentons les définitions qui sont les plus populaires et les plus utilisées [9], à savoir :

- Riemann-Liouville (RLFD).
- Caputo (CFD).

1.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $-\infty < a < x < b < +\infty$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de la fonction f est définie par:

$$(I_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \tag{1.10}$$

où la fonction Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Propriétés

1. Pour $f \in \mathbb{C}$ on a :

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f(t)) = I_a^{\alpha+\beta} f(t), (\alpha > 0 \text{ et } \beta > 0). \tag{1.11}$$

2. L'opérateur I_a^α est continue pour la norme de $L^p[a, b]$, $1 \leq p \leq +\infty$ et on a :

$$\|I_a^\alpha f\|_p \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|f\|_p. \quad (1.12)$$

3. Linéarité :

$$I_a^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda I_a^\alpha f(t) + \mu I_a^\alpha g(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

1.2.2 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Cette définition est basée sur la primitive ou intégrale $k^{\text{ème}}$ d'une fonction.

Définition 1.2.2 La primitive $k^{\text{ème}}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) est définée par :

$$D_{a+}^{-k} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t (t-x)^{k-1} f(x) dx, \quad (1.14)$$

On peut naturellement s'étendre au réel β , comme suit :

$$D_{a+}^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-x)^{\beta-1} f(x) dx, \quad (1.15)$$

alors, on obtient la dérivée au sens de Riemann-Liouville, d'ordre $\alpha > 0$ en remplaçant $n-\alpha = -\beta$:

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx, \quad n-1 < \alpha < n, \quad (1.16)$$

où : $n = [\alpha] + 1$ et $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction Gamma.

1. Soient $\alpha \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$,

Si les deux dérivées fractionnaires $D_a^\alpha f(t)$ et $D_a^m f(t)$ existent, nous avons :

$$D_a^\alpha f(t) + D_a^m f(t) = D_a^{\alpha+m} f(t). \quad (1.17)$$

2. Soient $n-1 \leq \alpha \leq n$, $m-1 \leq \beta \leq m$, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ne

commutent pas car :

$$D_a^\alpha(D_a^\beta f(t)) = D_a^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^n [D_a^{\beta-j} f(t)]_{t=\alpha} \frac{(t-\alpha)^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)},$$

$$D_a^\beta(D_a^\alpha f(t)) = D_a^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^n [D_a^{\alpha-j} f(t)]_{t=\alpha} \frac{(t-\alpha)^{-\beta-j}}{\Gamma(-\beta-j+1)}.$$

3. L'opérateur de dérivée fractionnaire au sens Riemann D_a^α commute avec $\frac{\partial^n}{\partial t^n}$:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}(D_a^\alpha f(t)) = D_a^\alpha\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t)\right) = D_a^{\alpha+n} f(t).$$

4. si $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, \beta$ et $(\beta = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n)$ alors :

$$D_a^\alpha(D_a^\beta f(t)) = D_a^\beta(D_a^\alpha f(t)) = D_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

Exemple 1.2.1 *La dérivée fractionnaire de la fonction constante :*

On a $(0 < \alpha < 1)$ alors :

$$\begin{aligned} D_t^\alpha f(t) &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} [I_t^{n-\alpha} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\alpha^t (t-s)^{-\alpha} c ds \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\alpha^t (t-s)^{-\alpha} ds \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\alpha)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

1.2.3 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Etant donnée que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle, Caputo introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville. La dérivées fractionnaire au sens de caputo incorpore les conditions initiales de la fonction à traité, ainsi que ses dérivées entières..

Définition 1.2.3 *La dérivée fractionnaire de $f(t)$ au sens de caputo (à gauche) d'ordre $\alpha > 0$ teles que $n - 1 < \alpha < n$ est donnée par :*

$${}^C D_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t - s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad (1.18)$$

1. L'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

$${}^C D_a^\alpha [I_a^\alpha f(t)] = f(t).$$

2. Soit $f \in \mathbb{C}[a, b]$, $\alpha > 0$ tel que $[\alpha] = n$ et $\beta \in \mathbb{N}^*$ on a :

$${}^C D_a^\alpha [{}^C D_a^\beta f(t)] = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

Exemple 1.2.2 *On prend $a = 0, \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow n = [\alpha] + 1 = 1, f(t) = \frac{1}{2}t$*

donc pour calculer la dérivée $({}^C D_^{\frac{1}{2}} f)(t)$ on utilise la formule (1.18)*

$$({}^C D_*^{\frac{1}{2}} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{1}{2(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds. = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{2(t-s)^{\frac{1}{2}}} d(t-s),$$

on pose $x = (t-s)^{\frac{1}{2}}$ on obtient :

$$\begin{aligned} ({}^C D_*^{\frac{1}{2}} f)(t) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{2x}{2x} dx \\ &= \sqrt{\frac{t}{\pi}}. \end{aligned}$$

1.3 Equations différentielles fractionnaires

1.3.1 Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation dont on recherche une solution vérifiant une certaine conditions initiales.

On appelle problème de Cauchy le problème suivant

$$\begin{cases} D_{a+}^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), (n < \alpha < n + 1) \\ D_{a+}^{\alpha-k}x(a_+) = b_k, b_k \in \mathbb{R} (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases}, \quad (1.19)$$

où $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application α -dérivable et $f(t, x(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $b_k \in \mathbb{R}^n$, $a_+ \in \mathbb{R}$ et D_{a+}^{α} désigne la dérivée au sens de caputo.

1.3.2 Equation différentielle fractionnaire linéaire

Considérons le problème aux valeurs initiales suivantes :

$$\begin{cases} D_{a+}^{\alpha}x(t) = f(t), (a < t < T < \infty) \\ [D^{\alpha-1}x(t)]_{t=0} = b \end{cases}, \quad (1.20)$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $f(t) \in L_1(a, T)$.

Le problème (1.20) admet un unique solution $x(t) \in L_1(a, T)$ si $f(t) \in L_1(a, T)$. [10]

1.3.3 Equation différentielle fractionnaire de forme plus générale

En plus des équations différentielles fractionnaires linéaires, les équations non linéaires apparaissent aussi dans les applications surtout dans les systèmes qu'on va étudier prochainement. On note que les résultats ci-dessous peuvent les utiliser pour toutes les mutations de différenciation fractionnaire. [10]

Considérons donc le problème à valeur initiale suivante :

$$\begin{cases} D_{a^+}^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \\ [D^{\alpha-1}x(t)]_{t=0} = b \end{cases} \quad (1.21)$$

où $0 < \alpha \leq 1$.

Nous supposons que $f(t, x(t))$ est définie dans un domaine G du plan (t, x) , et nous définissons une région $R(h, k) \subset G$ comme étant l'ensemble des points $(t, x) \in G$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$\left| t^{1-\alpha}x(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}b \right| \leq k.$$

1.3.4 Résolution numérique des équations fractionnaires

Dans la littérature du dérivées fractionnaires, quelques méthodes des approximations ont été proposées pour résoudre une équation différentielle fractionnaire numériquement.

Dans le cas linéaire la méthode la plus simple et rapide est basée sur la définition de la dérivée fractionnaire au sens de **Grunwald-Letnikov**. La méthode la plus adaptée pour les équations non linéaires est la méthode prédiction correction (**PCEC**, Predict-Evaluate-Correct-Evaluate) qui est une généralisation naturelle de la méthode très connue **d'Adams-Bashforth-Moulton**, c'est cette méthode que nous allons utiliser dans notre travail. [11], [12].

Présentation de l'algorithme

Le principe de cette méthode est de remplacer l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} D_0^\alpha x(t) = f(t, x(t)) & 0 \leq t \leq T \\ x^{(k)}(0) = x_0^{(k)} & k = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1.22)$$

par l'équation intégrale de Volterram :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds. \quad (1.23)$$

et on utilise la formule (produit de quadrature des trapèzes) pour remplacer l'intégrale par les nœuds $t_i, i = 0, 1, \dots, n+1$. qui sont prises respectivement à la fonction $(t_{n+1})^{\alpha-1}$ c'est à dire :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)g(s) ds &\simeq \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)\tilde{g}_{n+1}(s) ds \\ &= \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{n+1} a_{i,n+1} g(t_i), \end{aligned}$$

où :

$$a_{i,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & ; i = 0 \\ (n-i+2)^{\alpha+1} + (n-i)^{\alpha+1} - 2(n-i+1)^{\alpha+1} & ; 1 \leq i \leq n \\ 1 & ; \text{si } i = n+1 \end{cases},$$

alors on obtient :

$$\begin{aligned} x_h(t_{n+1}) &= \sum_0^{[\alpha]-1} x_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^{(k)}}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, x_h^p(t_{n+1})) \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_0^n a_{k,n+1} f(t_k, x_h(t_k)), \end{aligned}$$

Pour déterminer la formule de prédiction qui donne $x^p(t_{n+1})$ on procède de la même manière

comme précédemment mais cette fois l'intégrale sera remplacée en utilisant la méthode des rectangles :

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)g(s)ds = \sum_{i=0}^n b_{i,n+1}g(t_i),$$

tel que :

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((n+1-i)^\alpha - (n-i)^\alpha),$$

alors :

$$x_{n+1}^p(t_{n+1}) = \sum_0^{m-1} x_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^{(k)}}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^n b_{i,n+1} f(t_i, x_{hi}).$$

1.4 Généralités sur les systèmes chaotiques

À partir de 1978, Mitchell J. Feigenbaum interpréta le comportement chaotique de certains systèmes comme une transition vers le chaos et déduisit la constante de Feigenbaum [13]. L'attracteur chaotique a été observé pour la première fois dans un circuit électronique par T. Matsumoto et L.O. Chua en 1984 [14]. Le circuit a été réalisé avec seulement une résistance non linéaire caractérisée par une fonction linéaire par morceaux. Cette découverte a été un point de départ dans le développement des circuits électroniques chaotiques.

Le système dynamique chaotique est un système qui dépend de plusieurs paramètres et caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ils ne sont pas déterminés ou modélisés par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique, pourtant, ils ne sont pas nécessairement aléatoires, relevant du seul calcul des probabilités.

1.4.1 Définition du chaos

Avant de donner la définition du chaos, nous introduisons quelques définitions de base données en [15]

Définition 1.4.1 *On dit que la fonction $f : X \rightarrow X$ possède une sensibilité aux conditions*

initiales si

$$\exists \delta > 0, \forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y_0 \in X : d(x_0, y_0) < \varepsilon \Rightarrow d(f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(y_0)) > \delta,$$

où un entier $j \geq 0$ et $f^{(j)}(x_0)$ la $j^{\text{ème}}$ itération de f .

Définition 1.4.2 *Supposons que X un ensemble et Y un sous-ensemble de X ($Y \subset X$), on dit que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Y qui convergent vers x .*

Définition 1.4.3 *f est topologiquement transitive si U et V étant deux ensembles non vides ouverts dans X , il existe un indice $j > 0$ tel que pour $f^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$.*

On est maintenant en position d'énoncer la définition du chaos au sens de Devaney.

Définition 1.4.4 *Soit un sous-ensemble V de X , Une fonction $f : X \rightarrow X$ est dite constituée d'une dynamique chaotique sur V si :*

- i) f possède une sensibilité aux conditions initiales .
- ii) f est topologiquement transitive.
- iii) L'ensembles des points périodiques de la fonction f sont denses dans X ..

1.4.2 Caractéristiques du chaos.

Parmi les caractéristiques principales permettant d'évoquer un comportement chaotique, on peut retenir les trois suivantes [16] :

1. Un système chaotique est un système déterministe : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes)
2. Il exhibe une extrême sensibilité aux conditions initiales : De très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
3. Il présente un comportement asymptotique aperiodique.

1.5 Stabilité des systèmes fractionnaires

La stabilité des systèmes fractionnaires est différente des systèmes d'ordre entier, tel que le critère de stabilité, le plus connue pour les systèmes fractionnaire, est celui de Matignon. Soit le système différentiel suivant :

$${}^C D_{a^+}^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.24)$$

où ${}^C D_{a^+}^\alpha$ désigne la dérivée de Caputo et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

1.5.1 Point d'équilibre :

Prenons le système

$$\begin{cases} {}^C D_{a^+}^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (1.25)$$

la constante x_e est un point d'équilibre du système (1.25), si est seulement si :

$$f(x_e) = 0.$$

1.5.2 Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires

On étudie la stabilité des systèmes fractionnaires linéaires avec la dérivée de Caputo, de la forme :

$${}^C D_{a^+}^{\alpha_i} x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t), i = 1, 2, \dots, n., 0 < \alpha_i < 1, \quad (1.26)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Soit M est le multiple commun des dénominateurs de α_i .

Théorème 1.5.1 *Si α_i sont égaux et la matrice A est satisfait $\forall \lambda_s \in \text{spec}(A) \neq 0, |\text{Arg}(\lambda_s)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$.*

Alors : le système (1.26) est asymptotiquement stable. [17]

Théorème 1.5.2 *Si α_i sont différents et toutes les racines λ de l'équation*

$\text{Det}(\text{Diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - A) = 0$, satisfont $|\text{Arg}(\lambda_t)| > \frac{\pi}{2M}$, d'où M est le multiple commun des dénominateurs de α_i . [18]

Alors : le système (1.26) est asymptotiquement stable.

Théorème 1.5.3 *Si $\forall \lambda_s \in \text{spec}(A) \neq 0, |\text{Arg}(\lambda_s)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$, telles que les valeurs propres critique qui satisfont $|\text{Arg}(\lambda_t)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ possèdent la même multiplicité algébrique et géométrique.*

Alors : le système (1.26) est stable.

1.5.3 Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires

Dans le cas des systèmes fractionnaires non linéaires

$${}^C D_{a^+}^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(X(t)), \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.27)$$

on linéarise le système, supposons que x_e est point d'équilibre du système (1.27), c'est à dire

$$f(x_e) = 0.$$

Alors, on a les résultats suivants :

Théorème 1.5.4 *Si α_i sont égaux et $|\text{Arg}(\text{spec}(J|x_e))| > \frac{\alpha\pi}{2}$, d'où J est la matrice jacobienne du système (1.27). Alors :le point d'équilibre x_e du système (1.27) est asymptotiquement stable.* [19]

Théorème 1.5.5 *Si α_i sont différents et toutes les racines λ de l'équation*

$\text{Det}(\text{Diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - A) = 0$, satisfont $|\text{Arg}(\lambda_t)| > \frac{\pi}{2M}$, d'où M est le multiple commun des dénominateurs de α_i .

Alors :le point d'équilibre x_e du système (1.27) est asymptotiquement stable. [19] [20]

1.5.4 Conditions de stabilité de Routh-Hurwitz

On appelle critère de Routh-Hurwitz un critère algébrique permet d'étudier la stabilité d'un système sans avoir les pôles, une généralisation est faite pour le cas des systèmes d'ordre fractionnaire. [21]

Soit le système d'ordre fractionnaire en trois dimensions suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = f(x, y, z) \\ \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} = g(x, y, z) \\ \frac{d^\alpha z(t)}{dt^\alpha} = h(x, y, z) \end{cases}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.28)$$

L'équation de valeurs propres du point d'équilibre (x_e, y_e, z_e) du système (1.28) est donnée par le polynôme suivant :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda - a_3 = 0, \quad (1.29)$$

et son déterminant $D(P)$ est donné par :

$$D(P) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2, \quad (1.30)$$

sachant que le point d'équilibre (x_e, y_e, z_e) est localement asymptotiquement stable si toutes les racines de (1.29) satisfont à la conditions

$$|Arg(\lambda)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (1.31)$$

(i) Si $D(P) < 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 > 0, \alpha < \frac{2}{3}$, alors la condition (1.31) est satisfaite.

(ii) Si $D(P) < 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_1a_2 = a_3$, alors la condition (1.31) est satisfaite.

(iii) Pour $n = 1, a_1 \geq 0$ est une condition nécessaire pour (1.31)

(iv) Pour $n = 2$, les conditions pour (1.31) sont :

$$a_1 < 0, 4a_2 > (a_1)^2, \left| \frac{\tan^{-1}(\sqrt{4a_2 - (a_1)^2})}{a_1} \right| > \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (1.32)$$

(v) Pour $n = 3$, si $D(P) > 0$ les conditions pour (1.31) sont :

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 > a_3$$

(vi) Pour tout $n, a_n > 0$ est une condition nécessaire pour (1.31).

Chapitre 2

La synchronisation

Synchronisation est un mot grec : syn qui signifie avec et chrono qui est le temps ce qui donne "a lieu au même temps". Le sens original de synchronisation a été maintenu jusqu'à présent dans l'usage familier de ce mot, comme un accord ou corrélation dans le temps des différents processus.

Dans ce chapitre, nous donnons la définition, les différents types et méthodes de synchronisation.

2.1 Définition de la Synchronisation

Dans cette section , nous introduisons différents définitions de synchronisation à savoir définition générale et Mathématique .

Définition 2.1.1 *La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

2.1.1 Définition mathématique :

Pour construire la définition, **Brown** et **Kocarev** supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux systèmes :

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t), \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, t), \quad (x \in \mathbb{R}^{d_1} \text{ et } y \in \mathbb{R}^{d_2}). \quad (2.1)$$

soit $\varphi(w_0)$ une trajectoire du système globale donné par [2.1](#) avec la condition initiale $w_0 = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

On forme $\varphi_x(w_0)$ et $\varphi_y(w_0)$ qui sont des trajectoires des sous-systèmes définis par [2.1](#), respectivement.

On considère deux fonctions (propriétés) $g_x : \chi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $g_y : \zeta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, tel que χ et ζ sont des espaces de toutes les trajectoires du sous-systèmes définis par [2.1](#), respectivement, les deux fonctions ne sont pas identiquement nulles, le premier \mathbb{R} représente le temps, nous disons que les fonctions g_x et g_y sont des propriétés des sous-systèmes définis par [2.1](#) respectivement.

Enfin, **Brown** et **Kocarev** exigent une fonction indépendante de temps $h[g_x, g_y] : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ pour définir un état synchronisé, tel que $\|h\| = 0$ et $h \rightarrow 0$ avec $\|\cdot\|$ est toute norme. On dit que la fonction h compare les propriétés mesurées sur les deux sous-systèmes et les deux mesures conviennent dans le temps si et seulement si $h(g_x, g_y) = 0$. Ci-dessous, le norm est utilisée pour déterminer cette dernière exigence. [\[22\]](#)

Définition 2.1.2 *Les sous-systèmes dans les équations [2.1](#) sont synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(w_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y ; s'il existe un instant indépendant de l'application h tel que $\|h(g_x, g_y)\| = 0$, avec $\|\cdot\|$ toute norme.*

2.2 Différent types de synchronisation

Différents types de synchronisations ont été définis depuis le résultat de la découverte innovatrice de Pecora et Carroll , citons parmi eux la synchronisation complète, anti-Synchronisation, la synchronisation généralisée, la synchronisation décalée [23], la synchronisation projective, la synchronisation GPS [24], la synchronisation Q-S [25], etc. .

L'objectif principal de cette section est de présenter, des différents,types de synchronisation et des méthodes de synchronisation les plus performantes. Pour définir ces types, considérons des systèmes chaotiques maitre-esclave représeté par

$$\begin{cases} D^\alpha X(t) = f(X(t)) \\ D^\beta Y(t) = g(X(t)) + U \end{cases}, \quad (2.2)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^m$, sont les états des systèmes chaotiques maître et esclave, respectivement, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ déterminent le vecteur de controle, D^α est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α .

2.2.1 Synchronisation complète

L'erreur de la synchronisation complète pour (2.2) est donnée par :

$$e(t) = Y(t) - X(t),$$

tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$, ($\|\cdot\|$ designe La norme euclidienne)

- Si $f = g$, la relation devient une synchronisation complète identique.
- Si $f \neq g$, c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète est donc une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés. [26]

2.2.2 Anti-Synchronisation

On dit qu'il y a un anti-synchronisation, si les système maître-esclave (2.2) ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

2.2.3 Synchronisation généralisée

Parmi tous les types de synchronisation, la synchronisation généralisée **GS**(en anglais : **Generalized synchronization**) est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective pour synchroniser des systèmes chaotiques de dimensions et de modèle différent [27], a été introduite par **Rulkov** [28].

Cette méthode est étudiée pour les systèmes chaotiques de dimension arbitraire par un contrôle non linéaire. [29]

On dit que les systèmes chaotiques maître-esclave (2.2) se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction φ , s'il existe un contrôleur $U \in \mathbb{R}^m$ et une fonction différentiable $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - \varphi(X(t))\| = 0, \forall x(0), \forall y(0).$$

2.2.4 Synchronisation projective

La synchronisation projective **PS** (en anglais : **Projective synchronization**) est une autre forme spéciale de la synchronisation généralisée , elle a été largement étudiée au cours des derniers années, car elle peut réaliser une communication plus rapide avec sa caractéristique proportionnelle. Si les variables d'état $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ du système chaotique esclave se synchronisent avec une constante multiple de l'état $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ du système chaotique maître [30], On dit qu'on a une synchronisation projective comme l'indique la relation suivante :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} |y_i(t) - \alpha_i x_i(t)| = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n.$$

2.3 Méthodes pour la synchronisation

Plusieurs techniques ont été utilisées afin d'atteindre les différents régimes de synchronisation entre systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Les méthodes les plus répandues sont les méthodes de contrôle actif, Synchronisation avec commande par rétroaction, Synchronisation par backstepping [31], [32].

2.3.1 Synchronisation par contrôle actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques a été introduite par **Bai** et **Lonngren**. cette méthode a montré son efficacité pour la synchronisation des systèmes chaotiques identiques et non identiques. [33], [34]

Pour comprendre son principe, considérons comme un système chaotique maître ,le systeme non lineaire suivant :

$$D^\alpha X(t) = A_1 X(t) + f(X(t)), \quad (2.3)$$

et un système chaotique esclave comme suit :

$$D^\alpha Y(t) = A_2 Y(t) + g(Y(t)) + \varphi(t), \quad (2.4)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $Y(t) \in \mathbb{R}^m$, sont les états du systèmes chaotiques maître et esclave, respectivement, et $A_1 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $A_2 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sont des matrices constantes, $f(X(t))$ et $g(Y(t))$ leurs parties non lineaire, $\varphi(t)$ est une fonction de contrôle actif.

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini, on définit le dynamique de système

erreur (en posant $e = Y(t) - X(t)$) comme suit :

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) &= D^\alpha Y(t) - D^\alpha X(t) = A_2 Y(t) + g(Y(t)) + \varphi(t) - A_1 X(t) - f(X(t)) \\ &= A e(t) + K(X(t), Y(t)) + \varphi(t), \end{aligned}$$

où $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est une matrice constante ($A = A_2$) et $K(X(t), Y(t)) = g(Y(t)) - f(X(t)) + (A_2 - A_1)X(t)$.

L'objectif est de concevoir le contrôleur $\varphi(t)$ de telle sorte que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0,$$

alors , Le contrôleur $\varphi(t)$ peut être défini par :

$$\varphi(t) = -K(X(t), Y(t)) + U(t),$$

où $U(t) = M.e(t)$ est un contrôleur linéaire et M est une matrice diagonale qui peut être choisie de telle sorte que la condition $|\arg(\text{spec}(A + M))| > \alpha \times \frac{\pi}{2}$ soit satisfaite et la synchronisation entre les systèmes (2.3) et (2.4) soit achevée. α est l'ordre de dérivation.

Chapitre 3

Application : Synchronisation par la méthode du système auxiliaire approché

Dans ce chapitre, on propose une étude de synchronisation entre deux systèmes chaotiques fractionnaire différents en utilisant la méthode du système auxiliaire approché étendue aux systèmes fractionnaires.

3.1 La méthode du système auxiliaire approché

Le principe de cette méthode est basé sur le fait que si le même système maître $x(t)$ conduit deux systèmes esclaves identiques $y(t)$ et $z(t)$ qui commencent par des conditions initiales différentes dans le bassin d'attraction, alors l'analyse de stabilité de la synchronisation dans l'espace $X \oplus Y$, qui peut en général avoir une forme très compliquée $y(t) = \varphi(x(t))$, peut être remplacée par l'analyse de la stabilité tout à fait simple $z(t) = y(t)$ dans l'espace $Z \oplus Y$, à cet effet, nous supposons les systèmes maître, esclave et auxiliaire suivants :

$$D^\alpha x(t) = F(x(t)), \tag{3.1}$$

$$D^\alpha y(t) = G(y(t), g, x(t)), \quad (3.2)$$

$$D^\alpha z(t) = G(z(t), g, x(t)), \quad (3.3)$$

où $\alpha \in [0, 1]$, et D^α est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α . Ce dernier système (3.3) est identique au système esclave (3.2). Clairement, quand le système esclave et son auxiliaire ont le même signal maître $x(t)$, alors les champs vectoriels dans les espaces de phase du esclave et du système auxiliaire sont identiques et les deux systèmes peuvent se développer sur des attracteurs identiques. La stabilité linéaire de la variété $z(t) = y(t)$ est équivalente à celle de variété des mouvements synchronisés dans $X \oplus Y$, qui est déterminée par $\varphi(\cdot)$. Les équations linearisées qui dirigent l'évolution des quantités $\zeta_y(t) = y(t) - \varphi(x(t))$ et $\zeta_z = z(t) - \varphi(x(t))$, sont

$$D^\alpha \zeta_y(t) = DG(\varphi(x(t)), g, x(t)) \cdot \zeta_y(t), \quad (3.4)$$

$$D^\alpha \zeta_z(t) = DG(\varphi(x(t)), g, x(t)) \cdot \zeta_z(t), \quad (3.5)$$

où

$DG(w, h(t)) = \frac{\partial G(w, h(t))}{\partial w}$ et D^α est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α .

Puisque les équations linéarisées pour $\zeta_y(t)$ et $\zeta_z(t)$ sont identiques, les équations linéarisées pour $\zeta_z(t) - \zeta_y(t) = z(t) - y(t)$ ont la même matrice Jacobienne $DG(\cdot, g, x(t))$ dans l'équation précédente. Donc, si la variété des mouvements synchronisés dans $X \oplus Y \oplus Z$ est linéairement stable pour $z(t) - y(t)$, alors elle l'est pour $\zeta_y(t) = y(t) - \varphi(x(t))$ et viceversa. Notons que l'équation linéarisée pour $z(t) - y(t)$ est identique à l'équation qui définit les exposants conditionnels de Lyapunov pour le système esclave. Ainsi, quand la variété $z = y$ est linéairement stable, les exposants conditionnels

de Lyapunov pour le système maître, conditionnés sur la valeur du système esclave $x(t)$, sont tous négatifs. L'étude de la synchronisation se réduit à l'étude de la stabilité dans le voisinage de l'origine d'un nouveau système appelé système d'erreur, il représente la perturbation qui peut exister entre la transmission et les systèmes de réception. Pour étudier la stabilité du système erreur, nous allons utiliser le critère de Routh-Hurwitz généralisé à l'ordre fractionnaire.

3.2 Synchronisation entre le l'oscillateur de Chua modifié et l'oscillateur de Van der Pol-Duffing Modifié

3.2.1 Analyse théorique

Dans ce paragraphe on va prendre deux systèmes chaotiques différents.

Pour cela, on suppose le système de Chua modifié comme système maître :

$$\begin{cases} D^\alpha x_1(t) = \beta(y_1 - x_1^3 + \delta x_1) \\ D^\alpha y_1(t) = x_1 - y_1 - z_1 \\ D^\alpha z_1(t) = \sigma y_1 \end{cases}, \quad (3.6)$$

où les paramètres η, δ et ρ sont des réels positifs, $\alpha \in (0, 1]$. et Supposons comme système esclave le système de MAVPD :

$$\begin{cases} D^\alpha x_2(t) = m(y_2 - x_2^3 + \lambda x_2 + \mu) - k(x_2 - x_1) \\ D^\alpha y_2(t) = x_2 - y_2 - z_2 \\ D^\alpha z_2(t) = \eta y_2 - \gamma z_2 \end{cases}, \quad (3.7)$$

où le paramètre μ est en général annulé avec le décalage actuel de "op-amp", nous annulons plus tard de nos équations, les paramètres m, λ, β et γ sont tous des réels positifs, α est l'ordre fractionnaire satisfait $\alpha \in (0, 1]$.

Le système maître est couplé avec le système esclave seulement par le scalaire $x(t)$.

Nous choisissons comme système auxiliaire, le système qui est identique au système esclave (3.7)

(avec des conditions initiales différentes).

$$\begin{cases} D^\alpha x_3(t) = m(y_3 - x_3^3 + \lambda x_3 + \mu) - k(x_3 - x_1) \\ D^\alpha y_3(t) = x_3 - y_3 - z_3 \\ D^\alpha z_3(t) = \eta y_3 - \gamma z_3 \end{cases} . \quad (3.8)$$

La soustraction des deux systèmes (3.7) et (3.8), nous donne le dynamique de système erreur suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha e_1(t) = (m\lambda - k)e_1 + me_2 - m(x_3^3 - x_2^3) \\ D^\alpha e_2(t) = e_1 - e_2 - e_3 \\ D^\alpha e_3(t) = \eta e_2 - \gamma e_3 \end{cases} . \quad (3.9)$$

Le système (3.9) peut être écrit sous forme matricielle comme le suivant :

$$\begin{pmatrix} D^\alpha e_1(t) \\ D^\alpha e_2(t) \\ D^\alpha e_3(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \varphi(x, y, z), \quad (3.10)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} m\lambda - k & m & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & \eta & -\gamma \end{pmatrix} \text{ et } \varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} -m(x_3^3 - x_2^3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

est une fonction non linéaire satisfait la condition de Lipschitz, donc au voisinage de zéro, elle converge vers zéro. Pour étudier la stabilité du système (3.11), nous utilisons les conditions de critère de Routh-Hurwitz généralisée.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par :

$$\begin{aligned}
 P(x) &= x^3 + (k + \gamma - m\lambda + 1)x^2 \\
 &+ (k - m + \eta - m\lambda + \gamma(k - m\lambda + 1))x \\
 &+ k\eta + k\gamma - m\gamma - m\eta\lambda - m\lambda\gamma.
 \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1 *La synchronisation entre les deux systèmes (3.6) et (3.7) ne peut pas être réalisée, si le paramètre k satisfait :*

$$k \leq \frac{m(\gamma + \lambda\eta + \lambda\gamma)}{\eta + \gamma}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer les conditions de stabilité de Rout-Hurwitz (condition i), la condition nécessaire pour que le point d'équilibre (x_e, y_e, z_e) soit localement asymptotiquement stable, est $a_3 > 0$, par conséquent, si $k \leq \frac{m(\gamma + \lambda\eta + \lambda\gamma)}{\eta + \gamma}$ les systèmes (3.6) et (3.7) ne peuvent pas être synchronisés. ■

Supposons que $\gamma < 1$, $m > (\gamma + 1)(\gamma - 1 + 2\sqrt{\eta})$ et que $k \geq \frac{m(\gamma + \lambda\eta + \lambda\gamma)}{\eta + \gamma}$.

Si $D(P) < 0$ et le paramètre k satisfait

$k = \frac{1}{2\gamma+2}(m - 2\gamma + 2m\gamma - \gamma^2 + 2m\lambda\gamma - 1 + \sqrt{\Delta})$ ou $k = \frac{1}{2\gamma+2}(m - 2\gamma + 2m\gamma - \gamma^2 + 2m\lambda\gamma - 1 - \sqrt{\Delta})$ avec $\Delta = 2m - 4\eta - 2\gamma^2 + \gamma^4 - 8\eta\gamma - 2m\gamma^2 - 4\eta\gamma^2 + m^2 + 1$, alors la synchronisation entre les deux systèmes (3.6) et (3.7) est achevée pour tout $\alpha \in (0, 1)$.

En appliquant les conditions de stabilité de Routh-Hurwitz .Il est claire que si $a_3 > 0$; alors on a aussi $a_2 > 0$ et $a_1 > 0$,

où $a_1 = k + \gamma - m\lambda + 1$, $a_2 = k - m + \eta - m\lambda + \gamma(k - m\lambda + 1)$, $a_3 = k\eta + k\gamma - m\gamma - m\eta\lambda - m\lambda\gamma$

La condition $a_1a_2 - a_3 = 0$ équivaut à résoudre l'équation, de variable k , suivante.

$$(1 + \gamma)k^2 + (1 + 2\gamma + \gamma^2 - m - 2m\lambda - 2m\lambda\gamma)k - m + \eta + \gamma + m^2\lambda^2 - m\lambda + \gamma^2 + \eta\gamma + m^2\lambda + m^2\lambda^2\gamma - 2m\lambda\gamma - m\lambda\gamma^2 = 0,$$

ce qui nous donne $k = \frac{1}{2\gamma+2}(m - 2\gamma + 2m\gamma - \gamma^2 + 2m\lambda\gamma - 1 + \sqrt{\Delta})$ et $k = \frac{1}{2\gamma+2}(m - 2\gamma + 2m\gamma - \gamma^2 + 2m\lambda\gamma - 1 - \sqrt{\Delta})$

avec $\Delta = 2m - 4\eta - 2\gamma^2 + \gamma^4 - 8\eta\gamma - 2m\gamma^2 - 4\eta\gamma^2 + m^2 + 1$

Les conditions $\gamma < 1, m > (\gamma + 1)(\gamma - 1 + 2\sqrt{\eta})$ qui sont données pour que Δ soit strictement positif.

3.2.2 Simulation numérique

Les systèmes couplés d'ordre fractionnaire (3.6) et (3.7) sont intégrés numériquement avec les valeurs des paramètres $\beta = 10$, $\delta = 0.143$ et $\sigma = 16$, pour le système (3.6), $m = 100$, $\eta = 200$, $\lambda = 0,1$ et $\gamma = 0.2$ pour le système (3.7) avec le même ordre fractionnaire $\alpha = 0.98$ puis avec le même ordre entier ($\alpha = 1$). En sélectionnant le paramètre "feedback control" $k = 90.685$ et $k = 11.448$, qui satisfont la condition (v).

Pour $k = 90,685$

$$a_1 = 81.885, a_2 = 197.02, a_3 = 16133 \text{ et } D(P) = -1.134 \times 10^{14} < 0.$$

Pour $k = 11.448$

$$a_1 = 2.648, a_2 = 101.94, a_3 = 269.89 \text{ et } D(P) = -5.3366 \times 10^8 < 0.$$

Les conditions initiales qu'ont prises pour le système émetteur sont : $(0.05, 0.05, 0.05)$, tandis que pour les systèmes récepteur et auxiliaire sont respectivement : $(0.02, 0.01, 0.03)$, $(0.04, 0.06, 0.05)$.

Les figures (3.1) et (3.2) montrent que la synchronisation, au sens généralisé, entre les deux systèmes (3.6) et (3.7) est achevée avec l'ordre fractionnaire 0.98 mais ce n'est pas le cas avec l'ordre entier, ce qui montre l'effet de l'ordre fractionnaire sur la réalisation de la synchronisation.

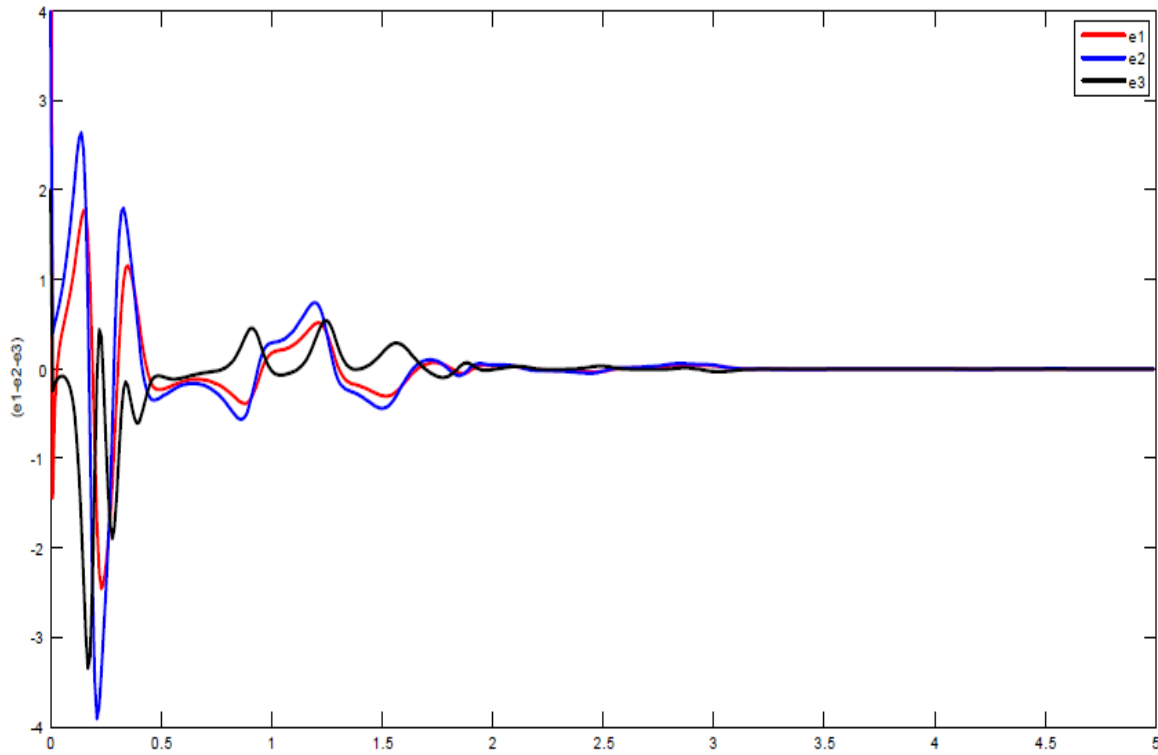


FIG. 3.1 – La synchronisation, au sens généralisé, entre les deux systèmes (3.6) et (3.7) est achevée avec l'ordre fractionnaire $\alpha = 0.98$ et le paramètre $k = 90.685$.

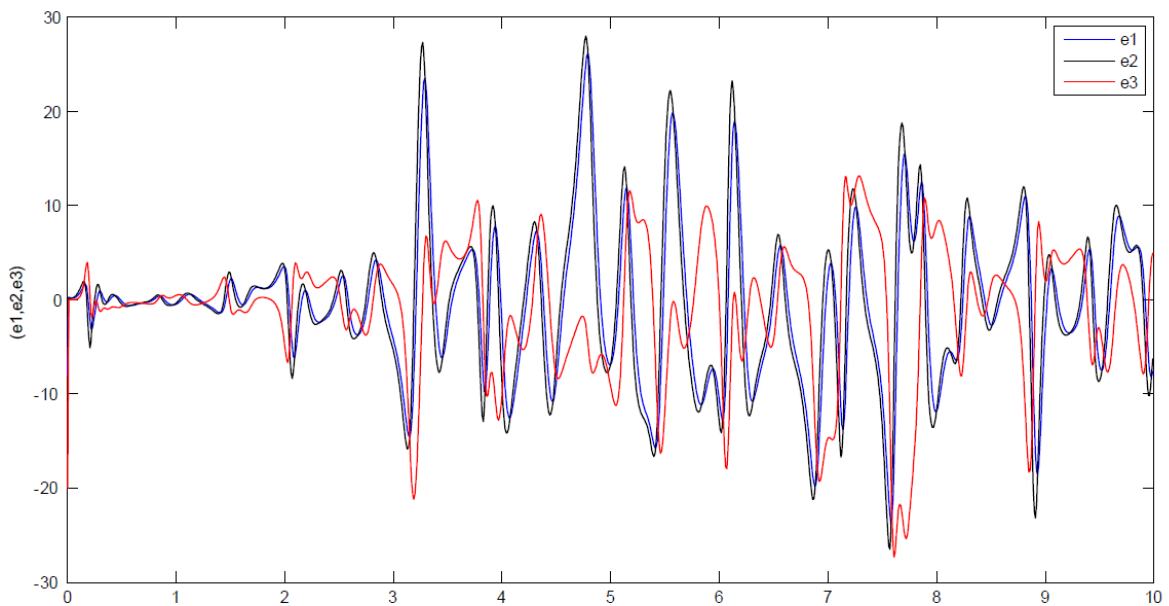


FIG. 3.2 – La synchronisation n'est pas réalisée entre les deux systèmes (3.6) et (3.7) dans la cas entier. avec $k = 90.685$.

Conclusion

On a étudié dans notre travail la synchronisation généralisée des systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires, et pour arriver aux buts visés, nous avons divisé notre travail en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les notions de base sur les systèmes fractionnaires, la théorie de chaos et la stabilité des systèmes fractionnaires.

Lors du deuxième chapitre, nous avons rappelé les différents régimes de synchronisation entre les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire et décrit les différentes stratégies utilisées pour les atteindre.

Dans le troisième chapitre nous avons proposé une méthode de synchronisation de deux différents systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, cette méthode est une généralisation à l'ordre fractionnaire, de la méthode de synchronisation par un "système auxiliaire", en se basant sur le critère de Routh-Hurwitz généralisé aux systèmes fractionnaires.

On peut conclure que la synchronisation des systèmes chaotiques qui a été largement étudiée dans les deux dernières décennies et a plusieurs applications dans divers domaines tels que les télécommunications (sécurité des informations) et la physique.

Bibliographie

- [1] Bagley, R. L., & Calico, R. A. (1991). Fractional order state equations for the control of viscoelasticallydamped structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14(2), 304-311.
- [2] Muthukumar, P. (2015). Studies on synchronization of fractional order dynamical systems and its applications in secure communication. Thèse de Doctorat. The Gandhigram rural institute-Deemed University, Inde.
- [3] Deng, W., & Li, C. (2005). Synchronization of chaotic fractional Chen system. *Journal of the Physical Society of Japan*, 74(6), 1645-1648.
- [4] Wang, X., Zhang, X., & Ma, C. (2012). Modified projective synchronization of fractional-order chaotic systems via active sliding mode control. *Nonlinear Dynamics*, 69(1-2), 511-517.
- [5] Martnez-Guerra, R., & Mata-Machuca, J. L. (2014). Fractional generalized synchronization in a class of nonlinear fractional order systems. *Nonlinear Dynamics*, 77(4), 1237-1244.
- [6] Zhang, R., & Gong, J. (2014). Synchronization of the fractional-order chaotic system via adaptive observer. *Systems Science & Control Engineering : An Open Access Journal*, 2(1), 751-754.
- [7] Srivastava, M., Ansari, S. P., Agrawal, S. K., Das, S., & Leung, A. Y. T. (2014). Anti-synchronization between identical and non-identical fractional-order chaotic systems using active control method. *Nonlinear dynamics*, 76(2), 905-914.
- [8] Agrawal, S. K., & Das, S. (2013). A modified adaptive control method for synchronization of some fractional chaotic systems with unknown parameters. *Nonlinear Dynamics*, 73(1-2), 907-919.

- [9] Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering.
- [10] Letnikov, A. V. (1868). Theory of differentiation of fractional order. *Mat. Sb*, 3(1), 1868.
- [11] Diethelm, K., Ford, N. J., & Freed, A. D. (2002). A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4), 3-22.
- [12] K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, Yu. Luchko., Algorithms for the fractional calculus : A selection of numerical methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*194, pp :743- 773, (2005).
- [13] Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of statistical physics*, 19(1), 25-52.
- [14] Matsumoto, T. (1984). A chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 31(12), 1055-1058.
- [15] Elhadj, Z. (2006). Etude de quelques types de systèmes chaotiques : généralisation d'un modèle issu du modèle de Chen (Doctoral dissertation, Thèse de 3ème cycle, Université Mentouri de Constantine).
- [16] Ibrahima N'DOYE. (2011).Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires , Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy 1 et de l'Université Hassan II Aïn Chock – Casablanca (spécialité automatique) ,81.
- [17] Matignon, D. (1996, July). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Computational engineering in systems applications* (Vol. 2, No. 1, pp. 963-968). .
- [18] Deng, W., Li, C., & Lü, J. (2007). Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays. *Nonlinear Dynamics*, 48(4), 409-416.
- [19] Ahmed, E., El-Sayed, A. M. A., & El-Saka, H. A. (2007). Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 325(1), 542-553.

- [20] Tavazoei, M. S., & Haeri, M. (2009). A note on the stability of fractional order systems. *Mathematics and Computers in simulation*, 79(5), 1566-1576.
- [21] Ahmed, E., El-Sayed, A. M. A., & El-Saka, H. A. (2006). On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems. *Physics Letters A*, 358(1), 1-4.
- [22] Brown, R., & Kocarev, L. (2000). A unifying definition of synchronization for dynamical systems. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10(2), 344-349.
- [23] Diao, M., Yu, Y. G., Wang, S., & Yu, J. Z. (2010). Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 11(7), 503-508.
- [24] Yan, J., & Li, C. (2005). Generalized projective synchronization of a unified chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(4), 1119-1124.
- [25] Hu, M., & Xu, Z. (2008). A general scheme for QS synchronization of chaotic systems. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 69(4), 1091-1099.
- [26] Razminia, A., & Baanu, D. (2013). Complete synchronization of commensurate fractional order chaotic systems using sliding mode control. *Mechatronics*, 23(7), 873-879.
- [27] Ma, Z. J., Liu, Z. R., & Zhang, G. (2007). Generalized synchronization of discrete systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 28(5), 609-614.
- [28] Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S., & Abarbanel, H. D. (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 51(2), 980.
- [29] He, X., Li, C., Huang, J., & Xiao, L. (2015). Generalized synchronization of arbitrary-dimensional chaotic systems. *Optik*, 126(4), 454-459.
- [30] Razminia, A. (2013). Full state hybrid projective synchronization of a novel incommensurate fractional order hyperchaotic system using adaptive mechanism. *Indian Journal of Physics*, 87(2), 161-167.

- [31] Vincent, U. E. (2008). Chaos synchronization using active control and backstepping control : a comparative analysis. *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, 13(2), 253-261.
- [32] Tan, X., Zhang, J., & Yang, Y. (2003). Synchronizing chaotic systems using backstepping design. *Chaos, Solitons & Fractals*, 16(1), 37-45.
- [33] Taghvafard, H., & Erjaee, G. H. (2011). Phase and anti-phase synchronization of fractional order chaotic systems via active control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(10), 4079-4088.
- [34] Bhalekar, S., & Daftardar-Gejji, V. (2010). Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(11), 3536-3546.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

\mathbb{R}	:	Ensemble des nombre réels.
\mathbb{R}^n	:	Vecteur de réels de dimension n.
\mathbb{C}^n	:	Classe de fonctions infiniment dérivables et continues sur un intervalle.
D^α	:	Opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire α .
I^α	:	Opérateur d'intégration d'ordre fractionnaire α .
$\Gamma(\cdot)$:	Fonction Gamma.
$B(\cdot, \cdot)$:	Fonction Beta.
E_α	:	Fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre.
$E_{\alpha, \beta}$:	Fonction Mittag-Leffler à deux paramètres.
$\ \cdot\ $:	le Norme vectorielle ou matricielle.
$\text{Re}(\cdot)$:	la partie réelle d'un nombre complexe
$[\cdot]$:	la partie entière d'un nombre

Résumé

Dans ce mémoire, notre contribution vise à traiter le problème de la synchronisation des systèmes d'ordre fractionnaire. En mathématiques, la synchronisation de deux systèmes consiste à rapprocher leur trajectoires jusqu'à ce qu'elles finissent par être confondues, sous l'effet d'une force d'accouplement exercée sur les deux systèmes .

Au début nous avons présenté quelques notions de base sur les systèmes fractionnaires et la théorie du chaos, en outre nous avons mentionné à quelques types et méthodes de synchronisation, En fin nous avons appliqué une méthode de synchronisation de deux différents systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

Mots clés

Dérivées fractionnaires ; Systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires ; Synchronisation ; Synchronisation généralisée.

Abstract

In this work, our contribution aims to address the synchronization issue of fractional order systems. In mathematics, synchronizing two systems is to bring their trajectories until they end up being together, under the effect of a coupling power exerted on the two systems.

At first we have presented some basics about fractional systems are given and chaos theory, in addition we have we mentioned a few types and synchronization methods. In the end, we have proposed a method of synchronizing two different chaotic systems of fractional order.

Key words

Fractional derivative; Fractional chaotic systems; Synchronization; Generalized synchronization.

المخلص

تهدف مساهمتنا في هذه المذكرة إلى معالجة مشكلة المزامنة المتعلقة بالأنظمة ذات الاشتقاق الكسري. في الرياضيات تزامن نظامين يعني تقارب مساريهما حتى التطابق في نهاية المطاف، تحت تأثير قوة اقتران تمارس على النظام. في البداية قدمنا بعض المفاهيم الأساسية للأنظمة ذات الاشتقاق الكسري، كما قدمنا بعض أنواع وطرق المزامنة، أخيراً اقترحنا تطبيق لطريقة لتزامن نظامين مختلفين فوضويين برتب كسرية.

الكلمات المفتاحية

الاشتقاق الكسري، الأنظمة الفوضوية ذات الاشتقاق الكسري، المزامنة والمزامنة العامة.