

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

GARTI Ines

Titre :

Etude d'un Système Chaotique d'Ordre Fractionnaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Kaboul Hanane	UMKB	Président
Dr. ADOUANE Saida	UMKB	Encadreur
Dr. Senouci Assia	UMKB	Examineur

Septembre 2020

DÉDICACE

Je dédie ce travail à :

♡ Mes chères parents " **Ma mère et Mon père** " pour leurs patiences, leurs amours,
leurs soutiens et leurs encouragements ♡

♡ Ma chère sœur " **Amina** " ♡

♡ Mon cher frère " **Charaf** " ♡

♡ Mes amies proches " **Seloua , Samah , Nour , Soraya , Bouthaina** " ♡

♡ Toute ma famille " **Garti , Debabeche** " ♡

♡ Tout mes amies et mes collègues de **promo 2020** ♡

Ines

REMERCIEMENTS

Avant tout, mes remerciements à **mon Dieu** le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné la santé et le courage durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Je tiens à remercier ma encadreuse **Dr. Adouane Saida** , Merci pour vos échanges scientifiques, vos conseils, pour les suggestions et les encouragements. Merci pour votre soutien scientifique et humain.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers **les membres de jury**. Merci **Dr. Kaboul Hanane** et **Dr. Senouci Assia** qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Mes sincères remerciements à **l'ensemble des enseignants et tous les personnels** de notre département.

Merci à **ma famille** d'être avec moi dans tout le moment.

MERCI

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
1 Généralités	3
1.1 Dérivées fractionnaires	3
1.1.1 Outils de base	3
1.1.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	5
1.1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	8
1.1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov	9
1.2 Systèmes chaotiques	9
1.2.1 Système dynamique	9
1.2.2 Stabilité des systèmes fractionnaires	10
1.2.3 Bifurcation	15
1.2.4 Chaos	20

1.2.5 Système chaotique	24
2 Etude du système de circuit électrique	26
2.1 Introduction du système I	26
2.2 Etude de stabilité du système	31
2.3 Analyse de bifurcation	35
Conclusion	38
Bibliographie	39
Annexe A : Abréviations et Notations	41

Table des figures

1.1	Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$	11
1.2	Diagramme de bifurcation nœud-col	17
1.3	Diagramme de bifurcation transcritique	18
1.4	Diagramme de bifurcation fourche a) sur-critique b) sous-critique	19
1.5	Diagramme de bifurcation Hopf	20
1.6	Attracteur étrange de Lorenz	21
1.7	Illustration de la sensibilité aux conditions initiales pour l'état x du système de Lorenz	24
1.8	Etats chaotiques du système de Hénon	25
2.1	Quatre éléments de base de circuit	27
2.2	Les symboles des éléments du circuit	27
2.3	Schéma du circuit et l'attracteur chaotique à un rouleau	28
2.4	(a) Attracteur chaotique à double rouleaux de $L = 3H$, $C = 1F$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 10.1$, $\gamma = 0.4$. (b) Attracteur chaotique à quatre rouleaux de $L = 3H$, $C = 1F$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 3$, $\gamma = 0.4$	28
2.5	Exemple de circuit d'ordre fractionnaire	29
2.6	Bifurcation par rapport au paramètre β pour $q = 0,92$	36
2.7	Bifurcation par rapport à l'ordre fractionnaire q pour $\beta = 3,3$	37

Liste des tableaux

1.1	Comportements des systèmes dynamiques en fonction des exposants de Lyapunov	
	23

Introduction

Ces dernières années, le calcul fractionnaire est devenu un excellent outil dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, mathématiques appliquées, de la technologie et des problèmes d'ingénierie.

La théorie du chaos est un domaine d'application très important du calcul fractionnaire. Le chaos est un phénomène non linéaire très intéressant qui a été largement étudié au cours des décennies passées [4]. On peut trouver l'outil de la théorie du chaos dans des nombreux domaines comme le cryptage de données, l'ingénierie biomédical [5] et les systèmes financiers [10].

Au cours des dernières années les systèmes dynamiques chaotiques d'ordre fractionnaire ont éveillé l'attention des chercheurs, ils ont démontré que les systèmes d'ordre fractionnaire peuvent exhibent un comportement chaotique, tels que le système de Rössler fractionnaire, le système de Lorenz fractionnaire, le système de Chen fractionnaire, le système de Lü fractionnaire...

Ce mémoire présente l'étude d'un système chaotique d'ordre fractionnaire, ce travail est structuré de la manière suivante :

L'objet du premier chapitre est l'étude des notions fondamentales des systèmes chaotiques en abordant des définitions des dérivées fractionnaires et des rappels sur les systèmes dynamiques en portant un accent particulier sur le système à temps continu et discret, des notions de base sur les systèmes fractionnaires et leurs stabilités. Nous retracerons alors une brève définition du chaos et dans un même temps nous balayerons les différents outils

mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique d'un système, tels que les attracteurs étranges, les exposants de Lyapunov et la dimension fractale.

Le second chapitre sera consacré à l'étude du système de circuit électrique, nous commencerons par une introduction sur le système puis nous passerons à l'étude de la stabilité de ce système et l'étude de la bifurcation de système.

Enfin nous clôturerons le travail par une brève conclusion et des références bibliographiques assez diversifiées.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous intéressons aux systèmes fractionnaires chaotiques. Nous avançons d'abord des notions générales des dérivées fractionnaires, et des notions sur les systèmes fractionnaires et leurs stabilités. Nous donnons aussi une brève définition de la théorie du chaos et de la bifurcation.

1.1 Dérivées fractionnaires

1.1.1 Outils de base

1) Fonction Gamma

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est une fonction complexe, qui prolonge la factorielle à l'ensemble des nombres complexes, on la définit par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, tel que $\text{Re}(\alpha) > 0$.

⊗ Par une intégration par parties, on trouve la relation important de $\Gamma(\alpha)$ qui est la

suyante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

ie :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt = [-t^\alpha e^{-t}]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha\Gamma(\alpha).$$

en particulier :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1.$$

Remarque 1.1.1 $\forall n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n + 1) = n!$

Exemple 1.1.1

a) $\Gamma(2) = 1!$

b) $\int_0^{+\infty} t^5 e^{-t} dt = \Gamma(6) = 5! = 120$

c) $\int_0^{+\infty} t^8 e^{-3t} dt,$

posons $3t = y$ l'intégrale devient alors :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{3}\right)^8 e^{-y} \frac{dy}{3} = \frac{1}{3^9} \int_0^{+\infty} y^8 e^{-y} dy = \frac{1}{3^9} \Gamma(9) = \frac{8!}{3^9}.$$

2) Fonction Bêta

Définition 1.1.2 La fonction **Bêta** (qui est un type d'intégrale, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad ; \quad \text{Re}(p) > 0, \quad \text{Re}(q) > 0.$$

Cette fonction possède quelques propriétés :

⊗ La fonction **Bêta** est une fonction symétrique, c.-à-d. :

$$B(p, q) = B(q, p).$$

⊗ La fonction Bêta liée à la fonction Gamma par l'équation suivante :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p, q : \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0.$$

Exemple 1.1.2 $\int_0^1 t^8(1-t)^7 dt = B(9, 8) = \frac{\Gamma(9)\Gamma(8)}{\Gamma(9+8)} = \frac{8!7!}{16!}.$

1.1.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

1) L'intégrale fractionnaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $-\infty < a < x < b < +\infty$.

On considère l'intégrale

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

la n -ième itération de l'opérateur I peut s'écrire :

$$I^{(n)}f(x) = \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt \quad (1.1)$$

pour tout entier n .

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$, Riemann a rendu compte que le second membre de (1.1) pourrait avoir un sens même lorsque n prend une valeur non-entière, il a définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 1.1.3 (*Intégrale de Riemann-Liouville*)

Soit $f(x) \in C([a, b])$ et $a < x < b$

⊗ *L'intégrale*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \quad \text{telle que } \alpha \in]-\infty, +\infty[$$

est appelée *intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α* .

⊗ Et l'intégrale

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad \text{telle que } \alpha \in]-\infty, +\infty[$$

est appelée *intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville* d'ordre α .

Théorème 1.1.1 Pour $f(x) \in C([a, b])$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe

$$I_a^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] = I_a^{(\alpha+\beta)} f(x) \quad \text{pour } \alpha > 0, \beta > 0.$$

Proof. La démonstration s'obtient par calcul direct, d'après la définition

$$\begin{aligned} I_a^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} I_a^{(\beta)} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-u)^{\beta-1} f(u) du dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} f(u) du dt, \end{aligned}$$

or $f \in C([a, b])$, d'après Fubini :

$$I_a^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \left(\int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} dt \right) du,$$

par un changement de variable $t = u + s(x-u)$

$$\begin{aligned} I_a^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \left[(x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \right] du \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= I_a^{(\alpha+\beta)} f(x). \end{aligned}$$

■

2) Dérivée fractionnaire

Définition 1.1.4 Soit $\alpha \in]n - 1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$

⊗ L'expression :

$$\begin{aligned} {}^R D_{a^+}^\alpha f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a^+}^{(n-\alpha)} f(x)) , \quad \text{pour } a < x < b. \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad , \quad n = [\alpha] + 1 \end{aligned}$$

est appelée la dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** (à gauche) d'ordre α .

⊗ Et l'expression :

$${}^R D_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_b^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad , \quad n = [\alpha] + 1$$

est appelée la dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** (à droite) d'ordre α .

Propriété 1.1.1 Composition avec l'intégrale fractionnaire :

⊗ L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

$${}^R D^p (I^{(p)} f(t)) = f(t),$$

⊗ on a

$${}^R D^p (I^{(q)} f(t)) = {}^R D^{p-q} f(t).$$

⊗ La dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$${}^R D^{-p} ({}^R D_t^q f(t)) = {}^R D^{q-p} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}^R D^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)} \quad \text{avec } m-1 < q < m.$$

1.1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.1.5 La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo [6] est définie par :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \\ &= I_a^{(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right). \end{aligned}$$

Propriétés

1. Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville :

Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$), supposons que f est une fonction telle que ${}_a^c D_t^p f(t)$ et ${}_a^R D_t^p f(t)$ existe, alors :

$${}_a^c D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}.$$

On déduit que, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on aura

$${}_a^c D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t)$$

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :

Si f est une fonction continue, on a

$${}_a^c D_t^p f(t) I_a^{(p)} = f$$

et

$$I_a^{(p)} ({}_a^c D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}.$$

Alors, l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse droit.

3. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}^c D C = I_a^{(p-\alpha)} C = 0.$$

1.1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov

Définition 1.1.6 La dérivée de Grünwald-Letnikov à gauche d'ordre α est :

$$\forall \alpha > 0, \forall t \in \mathbb{R}, {}^{GL} D_+^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh)$$

où $\binom{\alpha}{k}$ sont les coefficients binomiaux

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k!(\alpha - k)!}$$

Définition 1.1.7 La dérivée de Grünwald-Letnikov à droite d'ordre α est :

$$\forall \alpha > 0, \forall t \in \mathbb{R}, {}^{GL} D_-^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t + kh).$$

1.2 Systèmes chaotiques

1.2.1 Système dynamique

Définition 1.2.1 Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.

Cas continu : Dans le cas où la composante temps est continue le système dynamique

est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t, p)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $p \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur des paramètres.

Cas discret : Dans le cas où le temps est discret le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative) :

$$X_{k+1} = f(X_k, p), \quad X_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

1.2.2 Stabilité des systèmes fractionnaires

Soit le système différentiel fractionnaire :

$${}^c D_t^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

où $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$, $0 < \alpha_i < 1$ et $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.2.2 Le système (1.2) est dit commensurable si tous les ordres des dérivations sont égaux, i.e, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$. Sinon le système est dit non commensurable.

Définition 1.2.3 Les points d'équilibres du système (1.2) sont les solutions des équations :

$$f_i(X(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

1) Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires

Soit le système fractionnaire linéaire suivant

$${}^c D_t^{\alpha_i} x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

où $0 < \alpha_i < 1$. Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$ et M est le multiple commun des dénominateurs de α_i .

Théorème 1.2.1 Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, alors le système (1.3) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}.$$

La figure (1.1) montre les régions stables et instables selon les régions au-dessus.

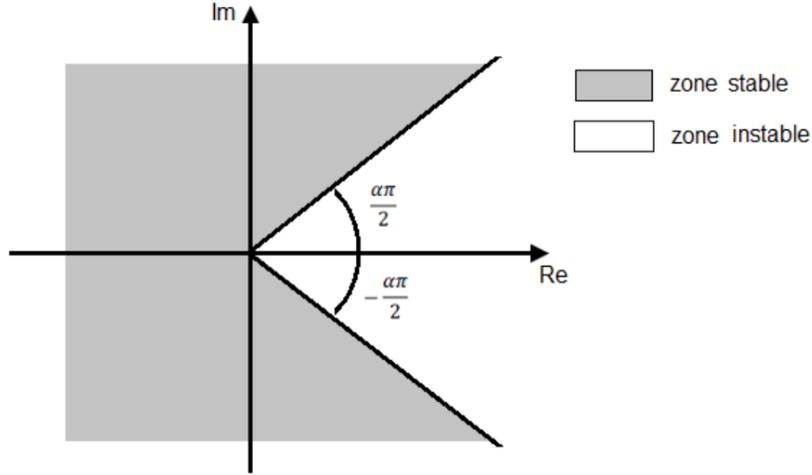


FIG. 1.1 – Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$

Exemple 1.2.1 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} {}_0^c D_t^{0.5}(x_1(t)) = -x_1(t) \\ {}_0^c D_t^{0.5}(x_2(t)) = \frac{1}{4}x_2(t) \end{cases}$$

la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = \cos \pi + i \sin \pi \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Alors

$$|\arg(\lambda_1)| = \pi = |\arg(\lambda_2)| > \alpha \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc ce système est asymptotiquement stable.

Théorème 1.2.2 [8] Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$, alors le système (1.3) est asymptotiquement stable si toutes les racines λ de l'équation

$$\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - A) = 0$$

satisfont $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M}$.

Exemple 1.2.2 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^{\frac{1}{3}} x_1(t) = -x_1(t) \\ {}^c D_t^{\frac{1}{2}} x_2(t) = -x_2(t) \end{cases}$$

le multiple commun M des dénominateurs de $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ et 6. Alors

$$\det \begin{pmatrix} \lambda^{6 \times \frac{1}{3}} + 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{6 \times \frac{1}{2}} + 1 \end{pmatrix} = 0$$

donc les racines sont données comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_1 = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, \\ \lambda_2 = -i = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}, \\ \lambda_3 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi, \\ \lambda_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \\ \lambda_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

alors $|\arg(\lambda_j)| > \frac{\pi}{2M} = \frac{\pi}{12}$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

donc le système est asymptotiquement stable.

2) Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires

Considérons un système fractionnaire non linéaire donné par

$${}^c D_t^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

où $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles secondes continues dans une boule centrée sur un point d'équilibre $x_e = 0$.

Soit $Df(0)$ est la matrice jacobienne du système à l'origine (le point d'équilibre) et M est le multiple commun des dénominateurs de α_i .

Théorème 1.2.3 [2] Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, alors le point d'équilibre x_e du système (1.4) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Théorème 1.2.4 [13] Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$, alors le point d'équilibre x_e du système (1.4) est asymptotiquement stable si toutes les racines λ de l'équation

$$\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - Df(0)) = 0$$

satisfont $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M}$.

Exemple 1.2.3 Soit le système non linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^{\frac{1}{2}} x_1(t) = -x_2(t) + x_1(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1) \\ {}^c D_t^{\frac{1}{2}} x_2(t) = x_1(t) + x_2(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1) \end{cases}$$

Le seul point d'équilibre est $(0, 0)$, La matrice jacobienne du système à l'origine est donnée

par

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

alors les valeurs propres de $Df(0)$ sont $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i$.

Ce qui donne

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \frac{3}{4}\pi > \frac{1}{4}\pi$$

donc le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

3) Méthode de Lyapunov pour les systèmes fractionnaires

Soit le système fractionnaire suivant

$${}^c D_t^\alpha X(t) = F(X(t)) \tag{1.5}$$

où $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < p < 1$, et ${}^c D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α .

Théorème 1.2.5 [7] La solution triviale du système (1.5) est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction Lyapunov définie positive $V(X(t))$ telle que

$${}^c D_t^\alpha V(t) < 0 \text{ pour } t > 0.$$

Lemme 1.2.1 [3] $\forall t > 0$:

$$\frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha (X^T(t)X(t)) \leq X^T(t) {}^c D_t^\alpha (X(t))$$

Exemple 1.2.4 Soit le système non linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c_0 D_t^\alpha x_1(t) = -x_1(t) + x_2^2(t) \\ {}^c_0 D_t^\alpha x_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$. Considérons la fonction Lyapunov suivante :

$$V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{4}x_2^4(t)$$

la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre p de la fonction de Lyapunov peut être décrit comme suit

$${}^c_0D_t^\alpha V(x_1(t), x_2(t)) = {}^c_0D_t^\alpha \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}({}^c_0D_t^\alpha \frac{1}{2}x_2^4(t))$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} {}^c_0D_t^\alpha V(x_1(t), x_2(t)) &\leq x_1(t){}^c_0D_t^\alpha x_1(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t){}^c_0D_t^\alpha \frac{1}{2}x_2^2(t) \\ &\leq x_1(t)(-x_1(t) + x_2^2(t)) + x_2^3(t){}^c_0D_t^\alpha x_2(t) \\ &= -x_1^2(t) - x_2^4(t) < 0 \end{aligned}$$

Donc l'origine est asymptotiquement stable.

1.2.3 Bifurcation

Définition 1.2.4 La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système, par exemple déstabilisation d'un équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur,...

Il existe deux types de bifurcations : bifurcations locales et bifurcations globales, que nous aborderons dans cette section le premier type.

Bifurcation locale : on parle de la bifurcation de codimension un et il existe quatre types de bifurcations :

1/ Bifurcation Nœud-col

La forme normale de la bifurcation nœud-col est donnée par :

$$f(x, \mu) = \frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \quad (1.6)$$

Etudions le comportement de cette équation selon le paramètre μ :

$$f(x, \mu) = 0 \Leftrightarrow \mu - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \mu$$

⊙ Si $\mu > 0$:

$$x^2 = \mu \Leftrightarrow x_e = \pm\sqrt{\mu}$$

par conséquent, l'équation (1.6) admet deux points d'équilibres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df(x, \mu)}{dx} = -2x, \text{ avec } x_e = \sqrt{\mu} \Rightarrow \left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x_e = \sqrt{\mu}} = -2\sqrt{\mu} < 0 \\ \frac{df(x, \mu)}{dx} = -2x, \text{ avec } x_e = -\sqrt{\mu} \Rightarrow \left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x_e = -\sqrt{\mu}} = 2\sqrt{\mu} > 0 \end{array} \right.$$

par suite les points d'équilibres :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_e = \sqrt{\mu} \quad \text{est stable} \\ x_e = -\sqrt{\mu} \quad \text{est instable} \end{array} \right.$$

⊙ Si $\mu < 0$: l'équation (1.6) n'admet pas de solution alors il n'est pas de points d'équilibre.

⊙ Si $\mu = 0$: il y a un seul point d'équilibre $x_e = 0$ est semi stable.

Remarque 1.2.1 Même étude faite lorsque $f(x, \mu) = -\mu - x^2$, $f(x, \mu) = +\mu + x^2$ et $f(x, \mu) = -\mu + x^2$.

Mais dans tous les cas, il y a une transition à $\mu = 0$ entre existence d'aucun point d'équilibre et de deux points d'équilibre dont un est stable et l'autre instable.

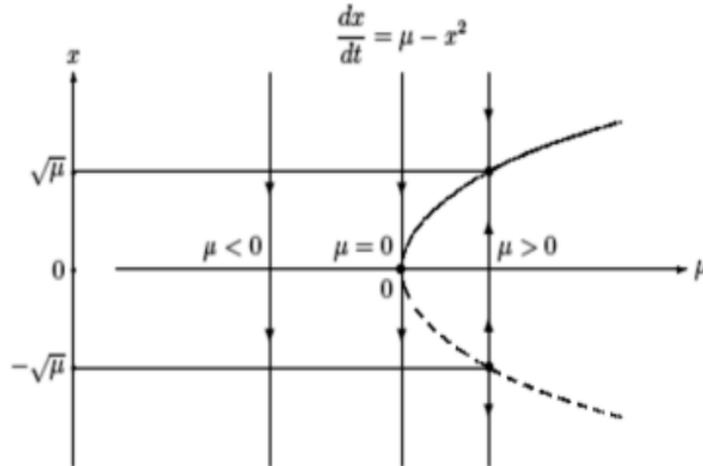


FIG. 1.2 – Diagramme de bifurcation nœud -col

2/ Bifurcation Transcritique

Sur le diagramme de bifurcations cela se traduit par deux branches différentes de points fixes qui se croisent en un point et par le changement de stabilité de deux branches au passage par le point d'intersection. La forme normale d'une bifurcation transcritique est donnée par :

$$f(x, \mu) = \frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 \quad (1.7)$$

alors

$$f(x, \mu) = 0 \iff \mu x - x^2 = 0 \iff x(\mu - x) = 0 \iff \begin{cases} x_e = 0 \\ \text{ou} \\ x_e = \mu \end{cases}$$

L'équation (1.7) admet deux points d'équilibres :

$$\begin{cases} \frac{df(x,\mu)}{dx} = \mu - 2x, \text{ avec } x_e = 0 \Rightarrow \left. \frac{df(x,\mu)}{dx} \right|_{x_e=0} = \mu \\ \frac{df(x,\mu)}{dx} = \mu - 2x, \text{ avec } x_e = \mu \Rightarrow \left. \frac{df(x,\mu)}{dx} \right|_{x_e=\mu} = -\mu \end{cases}$$

- ⊙ Si $\mu < 0$, le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable, $x_e = \mu$ est instable.
- ⊙ Si $\mu > 0$, le point d'équilibre $x_e = 0$ est instable, $x_e = \mu$ est stable.

- ⊙ Si $\mu = 0$, il y a un point d'équilibre $x_e = 0$ est semi stable.

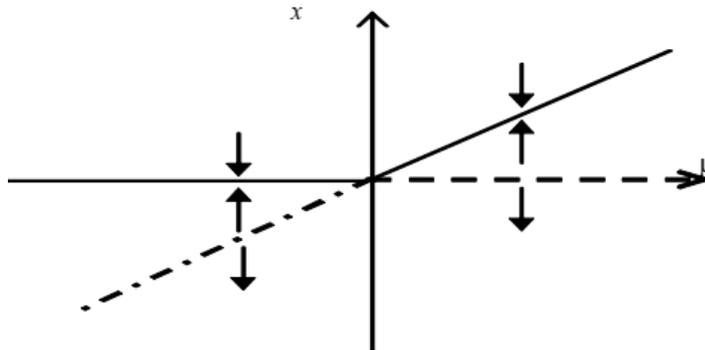


FIG. 1.3 – Diagramme de bifurcation transcritique

3/ Bifurcation Fourche

La forme normale d'une bifurcation fourche est donnée par :

$$f(x, \mu) = \frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 \quad (\text{sur critique}) \quad (1.8)$$

On calcule ses points d'équilibres :

$$\mu x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(\mu - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_e = 0 \\ \text{ou} \\ \mu - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_e = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 = \mu \end{cases}$$

- ⊙ Si $\mu < 0$, alors on a un seul point d'équilibre $x_e = 0$.
- ⊙ Si $\mu > 0$, alors on a trois points d'équilibres :

$$\begin{cases} x_e = 0 \\ x_e = \sqrt{\mu} \\ x_e = -\sqrt{\mu} \end{cases}$$

La stabilité de ces points d'équilibre sont :

$$\begin{cases} \frac{df(x,\mu)}{dx} = \mu - 3x^2 & \text{avec } x_e = 0 \Rightarrow \frac{df(x,\mu)}{dx} \Big|_{x_e=0} = \mu \\ \frac{df(x,\mu)}{dx} = \mu - 3x^2 & \text{avec } x_e = \pm\sqrt{\mu} \Rightarrow \frac{df(x,\mu)}{dx} \Big|_{x_e=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu \end{cases}$$

et donc :

- ⊙ Si $\mu > 0$, le point d'équilibre $x_e = 0$ est instable, $x_e = \pm\sqrt{\mu}$ est stable.
- ⊙ Si $\mu < 0$, le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable.
- ⊙ Si $\mu = 0$, il y a un point d'équilibre $x_e = 0$ est semi stable.

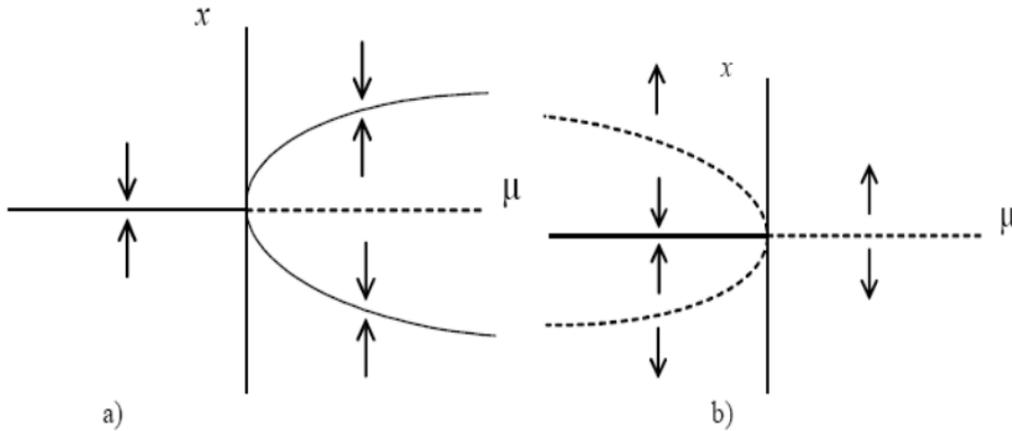


FIG. 1.4 – Diagramme de bifurcation fourche a) sur-critique b) sous-critique

★ Dans le cas d'une bifurcation fourche (sous-critique) l'équation est :

$$f(x, \mu) = \frac{dx}{dt} = \mu x + x^3.$$

4/ Bifurcation de Hopf

La forme normale d'une bifurcation de Hopf est donnée par :

$$\frac{dZ}{dt} = \mu Z - |Z|^2 Z \tag{4}$$

La bifurcation de Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite.

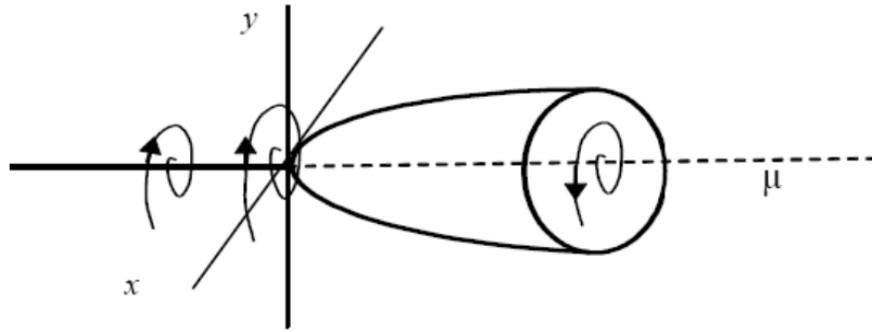


FIG. 1.5 – Diagramme de bifurcation Hopf

1.2.4 Chaos

1) Définition du chaos

On peut dire qu'il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle, mais on pourrait dire que c'est un phénomène qui peut apparaître dans les systèmes dynamiques non linéaires, ou simplement linéaires par morceaux. Ils sont caractérisés par une évolution qui semble aléatoire et un aspect fondamental d'instabilité appelé sensibilité aux conditions initiales. On cherche donc si le système converge vers un état stationnaire à long terme, ou si le comportement à long terme du système dépend des conditions initiales [9].

2) Caractéristiques du chaos

- o Un système chaotique est un système dynamique non linéaire.
- o La sensibilité aux conditions initiales constitue sans aucun doute la caractéristique essentielle du comportement chaotique d'un système (un changement dans les conditions

initiales peut engendrer un changement radical dans l'état final de système), l'évolution est par conséquent imprévisible à long terme.

◦ **Attracteurs** : sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques [11], il en existe quatre types distincts :

◆ L'attracteur "**point fixe**" est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.

◆ L'attracteur "**cycle limite**" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires, c'est donc une solution périodique du système.

◆ L'attracteur "**tore**" représente les mouvements résultants de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodique".

◆ **Les attracteurs étranges** sont bien plus complexes que les autres, on parle d'attracteur étrange lorsque la dimension fractale n'est pas entière. La trajectoire dans l'espace des phases reste confinée dans une région bien définie, après une période transitoire de durée variable.

La figure (1.6) suivante illustre l'attracteur chaotique du système de Lorenz :

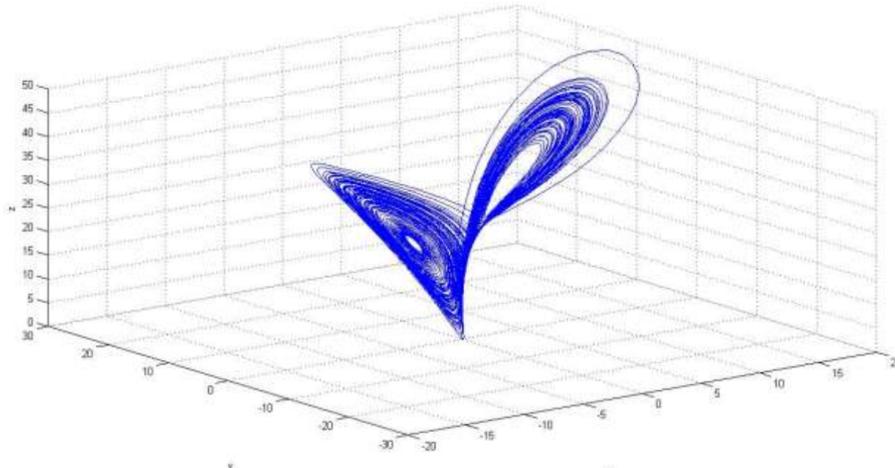


FIG. 1.6 – Attracteur étrange de Lorenz

◦ **Les exposants de Lyapunov** :

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre d'expo-

sants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont généralement indexés du plus grand au plus petit L_1, L_2, L_3, \dots

Une méthode d'approximation des exposants de Lyapunov est l'algorithme de **Wolf**. Cet algorithme permet de calculer les exposantes de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps par rapport à la perturbation introduite parallèlement, et ce au sein d'un attracteur. [\[12\]](#)

1) *Exposants de Lyapunov pour un système unidimensionnel :*

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_t sur x_{t+1} . Choisissons deux conditions initiales très proches.

Soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel L tel qu'après t itérations :

$$|f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)| \approx \varepsilon e^{tL}$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln \left(\frac{|f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)|}{\varepsilon} \right) \approx tL$$

si l'on fait tendre ε vers 0, il vient :

$$L \approx \frac{1}{t} \left| \frac{df(x_0)}{dx_0} \right|.$$

Finalement, en faisant tendre t vers l'infini et en utilisant la règle de la dérivation en chaîne, on obtient :

$$L \approx \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln \left| \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \right|.$$

L est appelé exposant de Lyapunov. Il indique le taux moyen de divergence par itération.

• Si $L \leq 0$, la trajectoire de l'évolution du système peut tendre vers un point fixe et avoir

un comportement périodique ou quasi-périodique.

· Si $L > 0$, le système est chaotique.

2) *Exposants de Lyapunov pour un système multidimensionnel :*

Pour un système de dimension n on parle de spectre d'exposants de Lyapunov dont le nombre est égal à cette dimension.

La classification des comportements des systèmes dynamiques selon les exposants de Lyapunov est représentée dans le tableau suivant :

TAB. 1.1 – Comportements des systèmes dynamiques en fonction des exposants de Lyapunov

Régime permanent	Attracteur	Exposant de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$
périodique	Courbe fermée (cycle limite)	$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1 = 0$
Quasi-périodique	Tore	$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_{i+1} < 0$ <small>$\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0$</small>
Chaotique	Attracteur chaotique	$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$ <small>$\lambda_1 > 0$</small>
Hyper chaotique	Attracteur chaotique	$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$ <small>$\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$</small>

o **Dimension fractale :**

Cette méthode correspond à une mesure de la dimension de l'attracteur reconstruit du système. Nous pouvons calculer la dimension de l'attracteur du système puis déterminer s'il est construit ou non de manière fractale. Si nous obtenons une valeur positive non entière, alors le système possède un attracteur étrange. Plusieurs dimensions ont été proposé, on peut en citer quelques-unes : la dimension de Kolmogorov, dimension de Corrélacion et dimension de Lyapunov, il y a une légère différence entre chaque dimension, mais elles caractérisent toutes, l'attracteur étrange avec sa dimension fractale et satisfont les propriétés suivantes :

· $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$.

· $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$.

· $d(A \times B) = d(A) + d(B)$.

1.2.5 Système chaotique

1) Système chaotique à temps continu

Pour un système autonome en temps continu, au moins trois variables d'état sont nécessaires pour générer le chaos, c'est à dire $n \geq 3$.

Le système de Lorenz est un système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs de ses paramètres, il s'agit d'un système dynamique non linéaire en temps continu de dimension 3. Le système de Lorenz est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = x(b - z) - y \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases}$$

Le système de Lorenz montre un comportement chaotique pour $a = 10$, $b = 28$, $c = 8/3$.

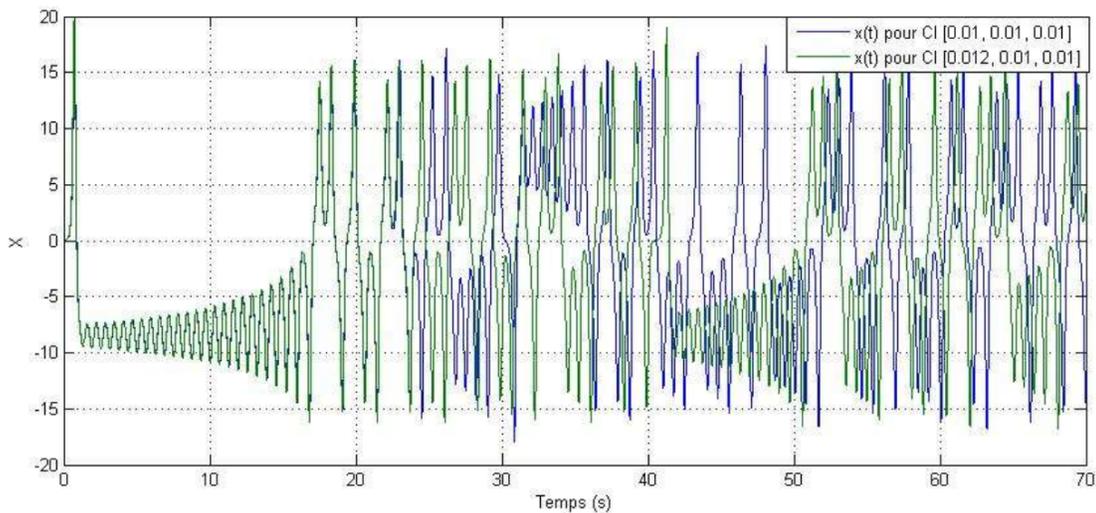


FIG. 1.7 – Illustration de la sensibilité aux conditions initiales pour l'état x du système de Lorenz

Les conditions initiales sont choisies comme ceci : $x(0) = 0.01$, $y(0) = 0.01$, $z(0) = 0.01$ et $x'(0) = 0.012$, $y'(0) = 0.01$ et $z'(0) = 0.01$.

2) Système chaotique à temps discret

Le système de Hénon est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien Michel Hénon, il s'agit d'un système à temps discret qui introduit des itérations dans le plan, ces itérations sont définies par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases}$$

Les valeurs des paramètres proposées par Michel Hénon pour observer le phénomène chaotique sont : $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

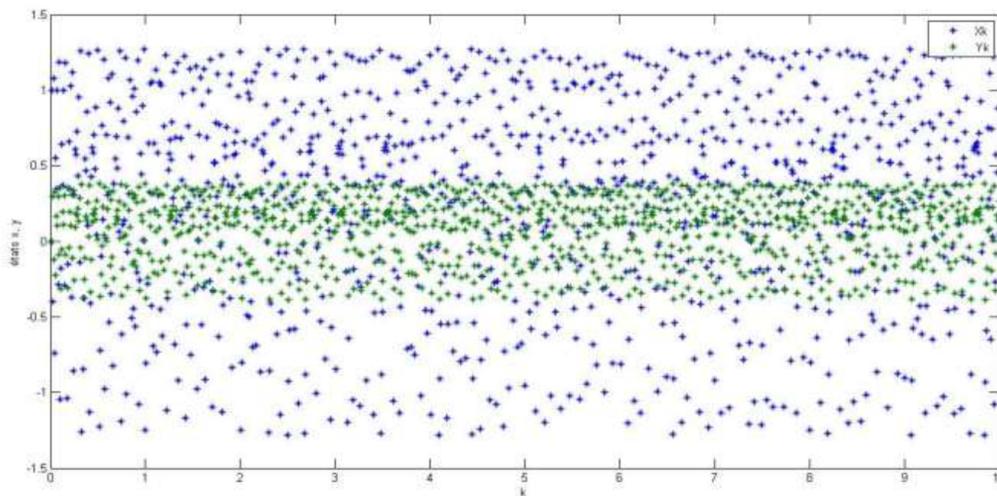


FIG. 1.8 – Etats chaotiques du système de Hénon

Les conditions initiales sont choisies comme ceci : $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$.

Ainsi la figure (1.8) montre l'évolution qui semble aléatoire des états x_k et y_k .

Chapitre 2

Etude du système de circuit électrique

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité du système de circuit électrique et on a fait l'analyse de bifurcation de ce système.

2.1 Introduction du système [1]

En 1970, Chua a prédit un nouvel élément électrique "Mémristeur" qui fut réalisé pour la première fois par le laboratoire HP en 2008.

Chua a prouvé que le comportement des mémristeurs ne pouvait être reproduit par aucun circuit construit en utilisant uniquement les trois autres éléments (résistance, condensateur et inductance). (FIG 2.1)

Abdelouahab, M-S., Lozi, R. et Chua, L.O. introduisent le paradigme de la mémfractance qui est adapté pour les éléments de circuit avec mémoire tels que mémristeurs, méminducteurs, mémcapaciteurs. (FIG 2.2)

Ils ont défini un nouvel élément appelé mémfacteur qui possède des caractéristiques interpolées entre ces quatre éléments de circuit et ils ont prouvé une loi d'Ohm généralisée.

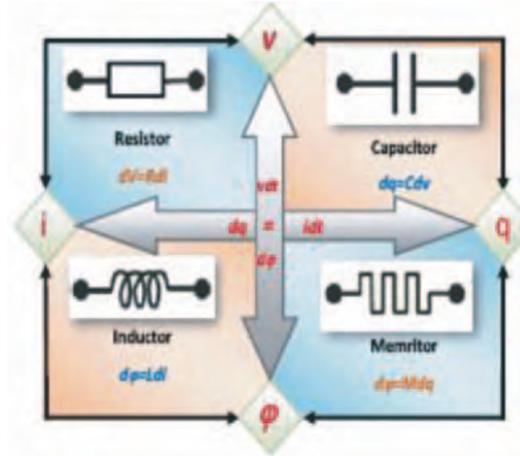


FIG. 2.1 – Quatre éléments de base de circuit

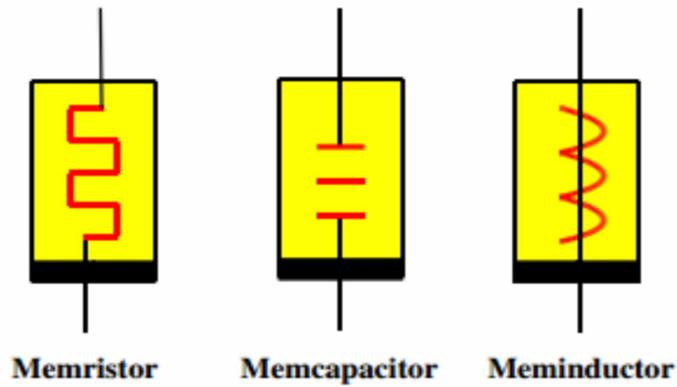


FIG. 2.2 – Les symboles des éléments du circuit

En raison de la non-linéarité de l'élément mémristeur, les circuits basés sur mémristeur peuvent facilement générer un signal chaotique.

En 2010, Muthuswamy et Chua ont proposé un circuit à base de mémristeur comprenant seulement trois éléments : une inductance passive linéaire, un condensateur passif linéaire et un mémristeur actif non linéaire avec une mémristance polynomiale du deuxième degré,

$$M(z(t)) = \beta(z^2(t) - 1)$$

connecté en série comme illustré sur la figure suivante

Le circuit le plus simple proposé dans ce mémoire peut générer un attracteur chaotique

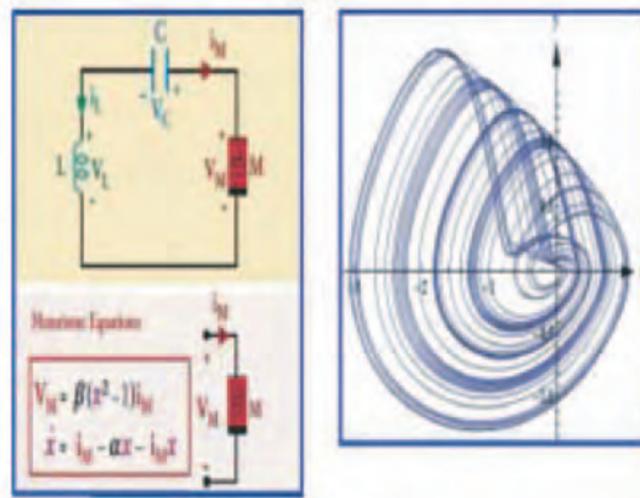


FIG. 2.3 – Schéma du circuit et l'attracteur chaotique à un rouleau

FIG(2.4), en utilisant seulement une mémristance polynômiale du seconde degré

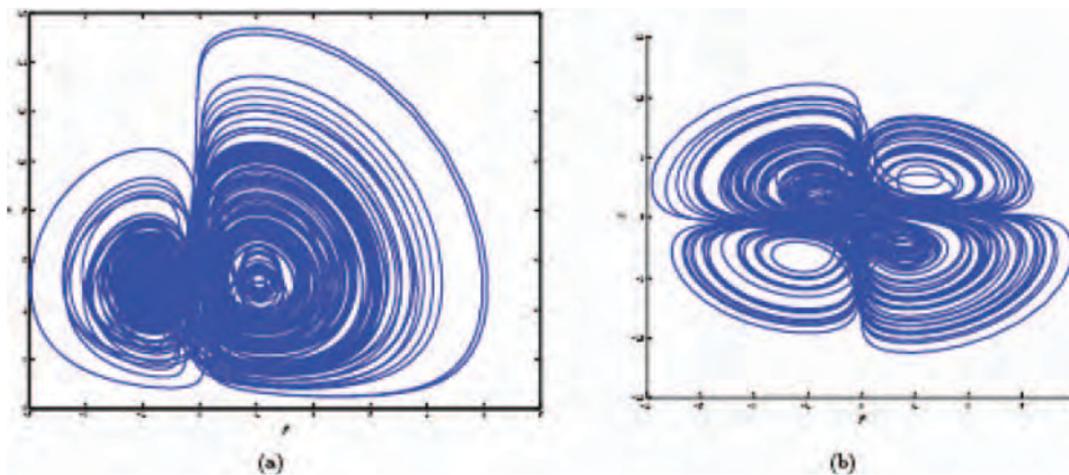


FIG. 2.4 – (a) Attracteur chaotique à double rouleaux de $L = 3H$, $C = 1F$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 10.1$, $\gamma = 0.4$. (b) Attracteur chaotique à quatre rouleaux de $L = 3H$, $C = 1F$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 3$, $\gamma = 0.4$

La dynamique du circuit est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{x} = ay \\ \dot{y} = -b(x + M(z)y) \\ \dot{z} = -y - \alpha z + y^2 z \end{cases}$$

où $x(t) = V(t)$ est la tension aux bornes du condensateur, $y(t) = I_L(t)$ est le courant traversant l'inductance, $z(t)$ désigne la variable d'état interne du mémristeur, $a = 1/C$ est la capacité inverse, $b = 1/L$ est l'inductance inverse et la fonction mémristeur est donnée par

$$M(z(t)) = \gamma z^2(t) - \beta$$

Pour construire le circuit à base de mémristeurs d'ordre fractionnaire, nous remplaçons les éléments électriques (condensateur, inducteur et mémristeur) dans le circuit d'origine par sa version fractionnée (condensateur d'ordre fractionnaire, inductance d'ordre fractionnaire et mémristeur d'ordre fractionnaire) (voir FIG 2.5).

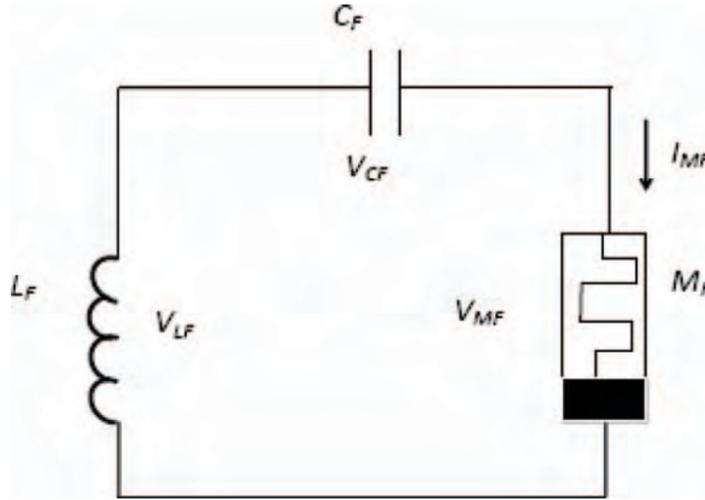


FIG. 2.5 – Exemple de circuit d'ordre fractionnaire

Pour une tension d'entrée générale $V_{FC}(t)$, le courant traversant le condensateur d'ordre fractionnaire est

$$I_{FC}(t) = C D^{q_1} V_{FC}(t),$$

puis

$$D^{q_1} V_{FC}(t) = \frac{1}{C} I_{FC}(t).$$

La constante q_1 est liée aux pertes du condensateur. Il est à noter que les pertes et les dissipations ne sont pas toujours les mêmes. La dissipation signifie la génération de chaleur,

au lieu de cela les pertes représentent l'énergie perdue du processus à l'étude mais pas nécessairement sous forme de chaleur.

Pour un courant général à travers l'inductance d'ordre fractionnaire, la tension est

$$V_{FL}(t) = LD^{q_2} I_{FL}$$

puis

$$D^{q_2} I_{FL} = \frac{1}{L} V_{FL}(t).$$

La constante q_2 est liée à «l'effet de proximité». Lorsqu'un courant alternatif traverse un conducteur électrique, la distribution du courant n'est pas uniforme. L'un des phénomènes électromagnétiques les plus importants, qui affecte considérablement la distribution du courant à l'intérieur de tout conducteur porteur de courant, est l'effet de proximité électromagnétique.

Pour un courant général passant par le mémristeur d'ordre fractionnaire, la tension est

$$\begin{cases} V_{FM} = M(z(t)) i_{FM}(t), \\ D^{q_3} z(t) = i_{FM}(t) - \alpha z(t) + i_{FM}^2(t). \end{cases}$$

En appliquant la loi de tension de Kirchhoff, nous obtenons

$$D^{q_2} I_{FL}(t) = -\frac{1}{L} (V_{FC}(t) + M(z(t)) i_{FL}(t)).$$

En utilisant les notations précédentes de la variable d'état, nous obtenons

$$\begin{cases} D^{q_1} x = ay \\ D^{q_2} y = -b(x + M(z)y) \\ D^{q_3} z = -y - \alpha z + y^2 z \end{cases}$$

2.2 Etude de stabilité du système

On a le système défini comme suivant :

$$\begin{cases} D^q x = ay \\ D^q y = -b(x + M(z)y) \\ D^q z = -y - \alpha z + y^2 z \end{cases}$$

où

$$M(z) = \gamma z^2 - \beta$$

alors on a

$$\begin{cases} D^q x = ay \\ D^q y = -b(x + \gamma z^2 y - \beta y) \\ D^q z = -y - \alpha z + y^2 z. \end{cases}$$

On cherche les points d'équilibre $x_e = (x, y, z)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt} = 0 \\ \frac{d^q y}{dt} = 0 \\ \frac{d^q z}{dt} = 0. \end{cases}$$

On a un seul point d'équilibre $x_e = (0, 0, 0)$ car

$$\begin{cases} ay = 0 & (1) \\ -bx - b\gamma z^2 y - b\beta y = 0 & (2) \\ -y - \alpha z + y^2 z = 0 & (3) \end{cases}$$

alors

$$(1) \Rightarrow y = 0$$

$$(1) \text{ dans } (2) \Rightarrow -bx = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$(1) \text{ dans } (3) \Rightarrow -\alpha z = 0 \Rightarrow z = 0.$$

La matrice jacobienne A est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -b & -b\gamma z^2 + b\beta & -2b\gamma zy \\ 0 & -1 + 2yz & -\alpha + y^2 \end{pmatrix},$$

alors

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -b & b\beta & 0 \\ 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la jacobienne $Df(0)$ sont solutions de l'équation en λ :

$$\det(\lambda I_3 - Df(0)) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -a & 0 \\ b & \lambda - b\beta & 0 \\ 0 & 1 & \lambda + \alpha \end{vmatrix} = 0$$

alors

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - Df(0)) = 0 &\Rightarrow \lambda(\lambda - b\beta)(\lambda + \alpha) + ab(\lambda + \alpha) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda + \alpha)(\lambda(\lambda - b\beta) + ab) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda + \alpha)(\lambda^2 - b\beta\lambda + ab) = 0. \end{aligned}$$

Quand $a = 1, b = 1/3, \alpha = 0.9, \gamma = 0.1$ et $\beta > 0$ on trouve

$$(\lambda + 0.9)\left(\lambda^2 - \frac{\beta}{3}\lambda + \frac{1}{3}\right) = 0$$

donc

$$\lambda + 0.9 = 0 \quad (2.1)$$

ou

$$\lambda^2 - \frac{\beta}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0 \quad (2.2)$$

de (2.1)

$$\lambda + 0.9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -0.9$$

de (2.2)

$$\lambda^2 - \frac{\beta}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0$$

alors

$$\Delta = \frac{\beta^2}{9} - \frac{4}{3}$$

⊗ Si $\Delta > 0$

$$\Delta = \frac{\beta^2}{9} - \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow \beta^2 > 12 \Rightarrow \beta > \sqrt{12}$$

et on a $\beta > 0$ alors : si $\beta \in]\sqrt{12}, +\infty[$, $\Delta > 0$.

Alors

$$\lambda_2 = \frac{\frac{\beta}{3} + \sqrt{\frac{\beta^2}{9} - \frac{4}{3}}}{2} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 12}}{6}$$

$$\lambda_3 = \frac{\frac{\beta}{3} - \sqrt{\frac{\beta^2}{9} - \frac{4}{3}}}{2} = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 12}}{6}$$

et donc : $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 > 0$.

D'où le point d'équilibre est instable.

⊗ Si $\Delta = 0$

$$\Delta = \frac{\beta^2}{9} - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow \beta^2 = 12 \Rightarrow \beta = \sqrt{12}$$

alors

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\beta}{6}$$

et on a $\beta = \sqrt{12}$ donc

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} > 0$$

donc le point d'équilibre est instable.

⊗ **Si** $\Delta < 0$

$$\Delta = \frac{\beta^2}{9} - \frac{4}{3} < 0 \Rightarrow \beta^2 < 12 \Rightarrow \beta < \sqrt{12}$$

on a $\beta > 0$ et alors $0 < \beta < \sqrt{12}$ c'est à dire : si $\beta \in]0, \sqrt{12}[$, $\Delta < 0$ donc

$$\lambda_2 = \frac{\beta + i\sqrt{-(\frac{\beta^2}{9} - \frac{4}{3})}}{6} = \frac{\beta + i\sqrt{12 - \beta^2}}{6}$$

$$\lambda_3 = \frac{\beta - i\sqrt{-(\frac{\beta^2}{9} - \frac{4}{3})}}{6} = \frac{\beta - i\sqrt{12 - \beta^2}}{6}$$

D'où : le point d'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\arg(\lambda_{2,3})| > \frac{\pi}{2}.$$

On a

$$\lambda_{2,3} = \frac{\beta \pm i\sqrt{12 - \beta^2}}{6}$$

$$= \frac{\beta}{6} \pm i\frac{\sqrt{12 - \beta^2}}{6}$$

alors

$$\arg(\lambda_{2,3}) = \arctan\left(\frac{\pm\frac{\sqrt{12-\beta^2}}{6}}{\frac{\beta}{6}}\right) = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{12-\beta^2}}{\beta}\right)$$

On a

$$\begin{aligned}
 |\arg(\lambda_{2,3})| &> q\frac{\pi}{2} \\
 \Rightarrow \left| \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{12-\beta^2}}{\beta}\right) \right| &> q\frac{\pi}{2} \\
 \Rightarrow q\frac{\pi}{2} &< \left| \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{12-\beta^2}}{\beta}\right) \right| \\
 \Rightarrow q &< \frac{2}{\pi} \left| \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{12-\beta^2}}{\beta}\right) \right|.
 \end{aligned}$$

D'où : le point d'équilibre est asymptotiquement stable pour tout q et β satisfaisant

$$q < \frac{2}{\pi} \left| \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{12-\beta^2}}{\beta}\right) \right|$$

et instable pour tout q et β satisfaisant

$$q > \frac{2}{\pi} \left| \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{12-\beta^2}}{\beta}\right) \right|$$

2.3 Analyse de bifurcation

Une condition de bifurcation de Hopf d'ordre fractionnaire est proposée, elle stipule que le système subit une bifurcation de Hopf à travers le point d'équilibre à la valeur β^* de β si :

1. La matrice jacobienne du système a deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{2,3}$ et une valeur propre réelle $\lambda_1 < 0$.

2. $m_{2,3}(q, \beta^*) = 0$ où :

$$\otimes q = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{12-\beta^2}}{\beta}\right)$$

$\otimes \beta^*$ est la solution où le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

$$\otimes m_i(q, \beta) = q\frac{\pi}{2} - |\arg(\lambda_i)| \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

$$3. \left. \frac{\partial m_{2,3}}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta^*} \neq 0.$$

Si on a $\beta \in]0, \sqrt{12}[$, alors la première condition est satisfaite car $\lambda_1 = -0.9 < 0$, $\lambda_{2,3} = \frac{\beta \pm i\sqrt{12-\beta^2}}{6}$ deux complexes conjuguées.

For β^* solution de $m_{2,3}(q, \beta^*) = 0$ on a

$$\left. \frac{\partial m_{2,3}}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta^*} = \left(\frac{1}{1 + \frac{12-(\beta^*)^2}{(\beta^*)^2}} \right) \left(\frac{-24}{2(\beta^*)^2 \sqrt{12 - (\beta^*)^2}} \right) \neq 0.$$

Ensuite, toutes les conditions proposées sont remplies pour chaque solution de $m_{2,3}(q, \beta^*) = 0$.

Par exemple, si $q = 0,92$, alors $\beta^* = 0,4342$ est un point de bifurcation de Hopf.

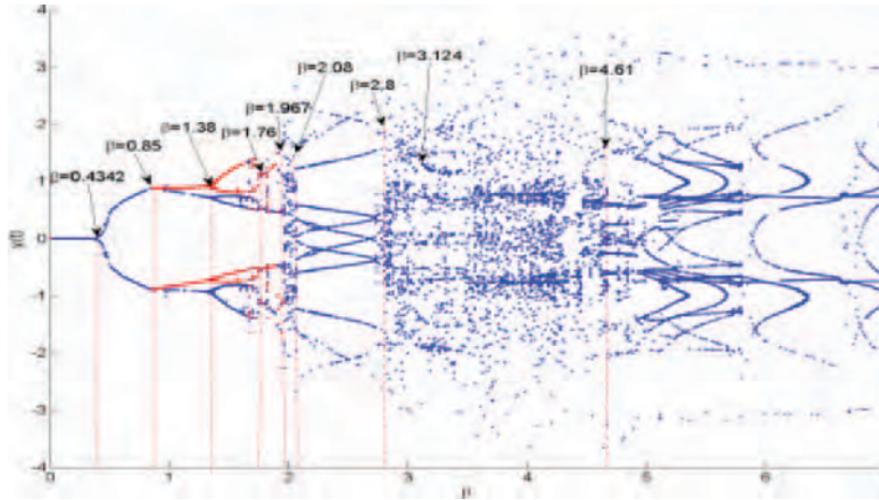


FIG. 2.6 – Bifurcation par rapport au paramètre β pour $q = 0,92$

Si nous considérons l'ordre fractionnaire q comme paramètre de contrôle, nous avons

$$\left. \frac{\partial m_{2,3}}{\partial q} \right|_{q=q^*} = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Par conséquent, toutes les solutions q^* de $m_{2,3}(q^*, \beta) = 0$ avec $\beta \in]0, \sqrt{12}[$ sont des points de bifurcation de Hopf.

Par exemple, si $\beta = 3,3$, on obtient $q^* = 0,1967$ qui est un point de bifurcation de Hopf.

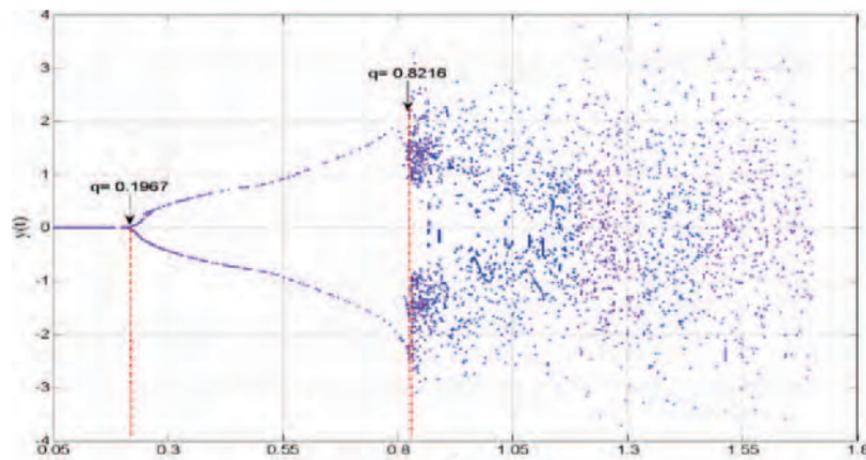


FIG. 2.7 – Bifurcation par rapport à l'ordre fractionnaire q pour $\beta = 3,3$

Conclusion

Le travail développé dans ce mémoire a porté sur l'étude d'un système chaotique d'ordre fractionnaire.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques notions fondamentales des dérivées fractionnaires, les systèmes fractionnaires et leurs stabilités et nous avons donné aussi une brève définition de la théorie du chaos et de la bifurcation, et nous avons cité les différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique.

Au deuxième chapitre, nous avons intéressé à l'étude du système de circuit électrique d'ordre fractionnaire, nous avons étudié leur stabilité; nous avons trouvé les points et les conditions où ce système est stable et où il est instable et nous avons aussi étudié la bifurcation de ce système.

Bibliographie

- [1] Abdelouahab, Mohammed-Salah, and René Lozi. "Hopf bifurcation and chaos in simplest fractional-order memristor-based electrical circuit." *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics* 6.2 (2015) : 105-119.
- [2] Ahmed, E., A. M. A. El-Sayed, and Hala AA El-Saka. "*Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models.*" *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 325.1 (2007) : 542-553.
- [3] Aguila-Camacho, Norelys, Manuel A. Duarte-Mermoud, and Javier A. Gallegos. "*Lyapunov functions for fractional order systems.*" *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 19.9 (2014) : 2951-2957.
- [4] Aziz-Alaoui, M. A. "Synchronization of chaos." (2006) : 213-226.
- [5] Bozóki, Zsolt. "Chaos theory and power spectrum analysis in computerized cardiocography." *European Journal of Obstetrics & Gynecology and Reproductive Biology* 71.2 (1997) : 163-168.
- [6] Caputo, Michele. "*Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II.*" *Geophysical Journal International* 13.5 (1967) : 529-539.
- [7] Chen, Diyi, et al. "*Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks.*" *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 19.12 (2014) : 4105-4121.

- [8] Deng, Weihua, Changpin Li, and Jinhua Lü. "*Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays.*" *Nonlinear Dynamics* 48.4 (2007) : 409-416.
- [9] Goncalves, E. "*Introduction aux systèmes dynamiques et chaos.*" Institution National Polytechnique de Grenoble (2004).
- [10] Juárez, Fernando. "Applying the theory of chaos and a complex model of health to establish relations among financial indicators." *Procedia Computer Science* 3 (2011) : 982-986
- [11] Megherbi, Ouerdia. *Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques.* Diss. Université Mouloud Mammeri, 2013.
- [12] Michaels, Alan Jason. *Digital chaotic communications.* Diss. Georgia Institute of Technology, 2009.
- [13] Tavazoei, Mohammad Saleh, and Mohammad Haeri. "*A note on the stability of fractional order systems.*" *Mathematics and Computers in Simulation* 79.5 (2009) : 1566-1576.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\Gamma(z)$	La fonction Gamma de la variable z
$B(x, y)$	La fonction Bêta de variable x et y
$I_a^{(\alpha)}$	Intégration d'ordre α
$L(X)$	Fonction de Lyapunov
$E[x]$	Partie entière d'un nombre
${}^R D^\alpha f$	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f
${}^C D^\alpha f$	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f
${}^{GL} D^\alpha f$	La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Grünwald-Letnikov
$spec(A)$	Spectre de la matrice A
e^A	Exponentielle de A
$\arg(\lambda)$	Argument de λ
$diag(A)$	diagonale de A

Résumé

Le travail abordé dans ce mémoire concerne l'étude d'un système chaotique d'ordre fractionnaire.

Nous définissons d'abord des notions de base sur les dérivées et intégrales fractionnaires. Ensuite, nous donnons quelques préliminaires sur les systèmes dynamiques et la théorie du chaos, aussi la stabilité des systèmes fractionnaires a été étudié.

Enfin, on a étudié le système de circuit électrique d'ordre fractionnaire: son point d'équilibre, leur stabilité suivant l'ordre fractionnaire et on a étudié leur bifurcation.

Mots clé:

Chaos, système chaotique, calcul fractionnaire, système dynamique, bifurcation.

ملخص

يتعلق العمل الذي تم تناوله في هذه المذكرة بدراسة نظام فوضوي ذو الدرجة الكسرية. نعرف أولاً المفاهيم الأساسية حول المشتقات والتكاملات الكسرية. بعد ذلك، نعطي بعض المعلومات الأولية حول الأنظمة الديناميكية ونظرية الفوضى، كما تمت دراسة استقرار الأنظمة الكسرية. أخيرًا، درسنا نظام الدائرة الكهربائية ذو الدرجة الكسرية: نقطة توازنه، واستقراره وفقًا لدرجته الكسرية ودرسنا تشعبه.

الكلمات المفتاحية:

الفوضى، نظام فوضوي، حساب كسري، نظام ديناميكي، التشعب.

Abstract

The work discussed in this memoir concerns the study of a chaotic fractional order system.

We first define some basic notions about fractional derivatives and integrals. Then, we give some preliminaries on dynamic systems and chaos theory, also the stability of fractional systems is studied.

Finally, we studied the fractional order electrical circuit system: its equilibrium point, their stability according to the fractional order and we studied their bifurcation.

Key words:

Chaos, chaotic system, fractional calculus, dynamic system, bifurcation.