République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

Guettaf Temam Halima Saādia

Titre :

Intégration Numérique et Applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	*Laadjal Baya*	UMKB	Président
Dr.	*Rajah Faouzia*	UMKB	Encadreur
Dr.	*Bouziane Nadjette*	UMKB	Examinateur

Juin 2020

DEDICACE

Je dédie ce travail :

A la source de la tendresse, ma mère

A mon père, qui m'appris que la patience est le Secret du succès.

à tous mes frères et mes sœurs.

J'exprime envers vous une profonde admiration, reconnaissance et attachement inconditionnels.

A toutes mes collègues.

Je dédie aussi mon travail aux personnes les plus chères de mon cœur.

A toutes qui connaît **Guettaf Temam Halima Saādia**.

A la perle des Universités

Mohamed kheider-Biskra-

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie mon DIEU, de m'avoir aidé et donné la volonté pour arriver à ce stade et réaliser ce travail.

Qu'il nous soit permet de remercier tous ceux qui d'une manière ou d'une autre, de prés ou de loin, y ont contribué.

Nos remerciements s'adressent en particulier à :

Madame Rajah Faouzia notre promotrice

pour leurs conseils scientifiques judicieux et leur suivi durant la période de travail.

Je tiens à remercier les membres du Jury qui m'ont fait l'honneur de participer à ma soutenance.

Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce mémoire.

Enfin, je remercie tous employés du département de Mathématiques de L'université Med KHEIDER.

Vous tous, un grand Merci

Table des matières

Table des figures

Introduction

Analytiquement, il est facile de calculer l'intégrale d'une fonction continue $f(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ lorsqu'on connait sa primitive $F(x)$ à l'aide de la formule :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

mais ce n'est pas toujours le cas lorsqu'on ne connait pas la primitive $F(x)$ ou elle est trop compliquée ou bien lorsque nous avons juste des mesures discrètes et aucune formule mathématique qui relie ces mesures *(c'est en grande partie dans les problèmes physiques)* ; alors, il faut parfois se contenter d'obtenir une valeur approchée à l'aide d'une méthode d'intégration numérique.

Dans les méthodes d'intégration, l'intégrale d'une fonction continue dans un intervalle borné $[a, b]$ est remplacée par une somme finie. Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et des coefficients qui interviennent dans la somme approchant l'intégrale sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur.

Alors, dans ce travail, on essaye de développer quelques méthodes numériques de calcul des intégrales : méthodes des Trapèzes, méthode de Simpson ; etc. Comme on a cité précédemment, dans la pratique on doit faire appel à ces méthodes car en général la fonction f est donnée dans une table où est difficile à intégrer. Ces techniques d'intégration consistent à approcher la valeur de l'intégrale à partir de plusieurs valeurs de la fonction à intégrer.

Dans ce mémoire en va voir trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne un rappel sur la forme générale des polynômes et on montre l'existence et l'unicité d'un polynôme d'interpolation. Dans le même chapitre, on propose aussi la méthode de Lagrange pour présenter les formules de Newton-Côtes.

Dans le deuxième chapitre, on va donner les différents types d'intégration numérique (Rectangle, Point Milieu, Trapèze et Simspon) sous ses formes générales ou bien composées qu'on aura remarqué après que ce sont des applications directe de la formule de Newton-Côtes. Parce que ces méthodes sont approchées ; donc, on étudie l'erreur d'intégration numérique et enfin, on va faire une comparaison entre les méthodes proposées afin de trouver la meilleure entre eux.

Dans le dernier chapitre, on donne deux applications sur les méthodes d'intégration numériques ; l'une dans le domaine de *Physique* et l'autre en *Mathématique*.

Chapitre 1

Interpolation et formules de Newton-côtes

Dans ce chapitre, on va donner les formules de Newton-côtes qui sont des intégrales directes du polynôme d'interpolation de Lagrange. Pour faire ça on démontre tout d'abord l'existence et l'unicité d'un polynôme d'interpolation puis, on expose ce type d'interpolation et enfin, on l'intègre.

Définition (1.1) : *Un polynôme de degré inférieur ou égale à n est de la forme générale :*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n,$$

possède exactement n racines qui peuvent être réelles ou complexes conjuguées (on dit que r est une racine de $P_n(x)$ si $P_n(r) = 0$).

Dans la section suivante, on essaye de démontrer l'existence et l'unicité d'un polynôme d'interpolation.

1.1 Matrice de Vandermonde

On cherche l'unique polynôme de degré n passant par les points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, \ldots, n$, on suppose que tous les x_i sont distincts. Le polynôme d'interpolation peut s'écrire :

$$P_n(x) = \sum_{d=0}^{n} a_d x^d = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n;$$

tel que pour tout i : $P_n(x_i) = f(x_i)$. Ce problème ponctuel, on peut l'écrire sous forme d'un système linéaire qui est connu également sous le nom *"système de Vandermonde"* qui prend la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Exemple : On cherche à déterminer le polynôme de degré 1 ; $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ passant par les points $(-2, 1)$ et $(0, 3)$. Les a_i peuvent être déterminés par la résolution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La solution (obtenue par la décomposition LU) est $(3 \;\; 1)^T$. Donc, le polynôme recherché est : $P_1(x) = 3 + x$.

Théorème (1.1) : *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité d'un polynôme P de degré inférieure ou égale à n interpolant f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est que les abscisses d'interpolation soient tous distincts deux à deux.* $\Diamond$

Preuve : Il est naturel de faire notre démonstration en deux étapes :

1. Unicité : On utilise le raisonnement par l'absurde ; c'est-à-dire : on suppose qu'il existe deux polynômes d'interpolation $p(x)$ et $q(x)$ de degré n, tels que :

$$p(x_i) = f(x_i) \text{ et } q(x_i) = f(x_i);\ i = 0, 1, \dots, n.$$

Posant $H(x) = p(x) - q(x)$; le polynôme $H(x)$ est de degré au plus n qui vérifie :

$$H(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0;\ i = 0, 1, \dots, n.$$

On remarque bien que le polynôme H s'annule en $(n+1)$ points distincts ; c'est-à-dire : il admet $(n+1)$ racines, ce qui est impossible. Donc, il est identiquement nul, $H \equiv 0$ d'où $p \equiv q$ (contradiction).

2. Existence : On peut écrire le polynôme P_n sous sa forme canonique : $P_n(x) = \sum\limits_{d=0}^{n} a_d x^d$. Du fait que $P_n(x_i) = f(x_i);\ i = 0, 1, 2, \dots, n$; les coefficients a_d vérifient le système :

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n(x_1) = f(x_1) \\ \quad\vdots \\ P_n(x_n) = f(x_n), \end{cases}$$

ce qui est équivalent au système de Vandermonde :

$$(D)\ \begin{cases} a_0 + a_1 x_0^1 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1^1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \quad\vdots \\ a_0 + a_1 x_n^1 + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

(D) est un système linéaire admet une solution unique parce que le déterminant de la matrice associée au système linéaire est non nul.

En effet, on considère le déterminant de Vandermonde :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>d}^{n}(x_i - x_d).$$

On a : $\Delta = \prod_{i>d}^{n}(x_i - x_d) \neq 0$ car $x_i \neq x_d$; $\forall i$ et d, alors le déterminant de Vandermonde ne sera jamais nul. donc le système (D) admet une et une seule solution $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Alors le polynôme d'interpolation existe et il est unique. ♦

1.2 Interpolation de Lagrange

Dans la deuxième section, on donne les propriétés générales d'un polynôme d'interpolation de Lagrange. Donc, on commence cette section par la définition de ce type des polynômes.

Définition (1.2) : *L'interpolation de Lagrange est une façon simple de construire un polynôme de collocation, Etant donnés $(n+1)$ points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$. On doit construire $(n+1)$ polynômes $L_i(x)$ de degré n et satisfaisant les conditions suivantes :*

$$L_i(x_d) = \delta_{id} = \begin{cases} 1 & si \quad i = d \\ 0 & si \quad i \neq d. \end{cases}$$

Le polynôme $L_i(x)$ à obtenir s'annule en n points $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, il s'écrit alors :

$$L_i(x) = C(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n),$$

où $C = cst$ puisque la factorisation contient déjà n facteurs des premiers degrés.

Pour $x = x_i$, nous avons :

$$L_i(x_i) = C(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n) = 1,$$

c'est-à-dire :

$$C = \frac{1}{\prod\limits_{d=0,d\neq i}^{n}(x_i - x_d)}.$$

Par la substitution directe, on trouve :

$$L_i(x) = \frac{\prod\limits_{d=0,\ d\neq i}^{n}(x - x_d)}{\prod\limits_{d=0,\ d\neq i}^{n}(x_i - x_d)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)},$$

avec $d^\circ L_i(x) = n$. Pour chaque $i = 0, 1, \ldots, n$; $L_i(x)$ est appelé : polynôme de Lagrange associés à ces points.

Passons à présent à la résolution du problème générale qui consiste à former $P_n(x)$ (Ie polynôme d'interpolation de Lagrange) vérifiant les conditions indiquées plus haut, c'est-à-dire : $P_n(x_i) = f(x_i)$, ce polynôme est de la forme :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x).$$

On a bien $d^\circ P_n(x) \leq n$ et pour tout i :

$$P_n(x_d) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x_d) = f(x_d)L_d(x_d) + \sum_{i=0,\ i\neq d}^{n} f(x_i)L_i(x_d) = f(x_d) + 0 = f(x_d),$$

ainsi

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{\prod\limits_{d=0,\ d\neq i}^{n}(x - x_d)}{\prod\limits_{d=0,\ d\neq i}^{n}(x_i - x_d)}.$$

Le polynôme $P_n(x)$ passe donc par tous les points d'interpolation. Puisque ce polynôme est unique, $P_n(x)$ est bien le polynôme recherché. Il reste à construire les fonction $L_i(x)$ suivons une démarche progressive

1.2.1 Polynômes de degré 1

Il s'agit de déterminer le polynôme de degré 1 dont la courbe (une droite) passe par les deux points $(x_{0,}f(x_0))$ et $(x_1,f(x_1))$. On doit donc construire deux polynômes $L_0(x)$ et $L_1(x)$ de degré 1 ; où

$$\begin{aligned} L_0(x_0) &= L_1(x_1) = 1 \\ L_0(x_1) &= L_1(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Le polynôme $L_0(x)$ doit s'annule en $x = x_1$. On pense immédiatement au polynôme $(x-x_1)$ qui s'annule en $x = x_1$, mais qui vaut $(x_0 - x_1)$ en $x = x_0$. Pour s'assurer d'une valeur 1 en $x = x_0$, il suffit d'effectuer la division appropriée afin d'obtenir :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}.$$

Un raisonnement similaire pour $L_1(x)$ donne :

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}.$$

Le polynôme de degré 1 est donc :

$$P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x).$$

L'équation de la droite déterminée par les points $(2, -1)$, $(4, 3)$ est :

$$P_1(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = (-1)\frac{(x-4)}{(2-4)} - 3\frac{(x-2)}{(4-2)} = -x+1.$$

1.2.2 Polynômes de degré 2

Si on cherche le polynôme de degré 2 passant par les trois points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, on doit construire trois fonction $L_i\ (x)$.

Le raisonnement est toujours le même. La fonction $L_0(x)$ s'annule cette fois en $x = x_1$ et $x = x_2$. On doit forcément avoir un coefficient de la forme $(x-x_1)(x-x_2)$ qui vaut$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ en $x = x_0$.

Pour satisfaire la condition $L_0(x_0) = 1$. Il suffit alors de diviser le coefficient par cette valeur et poser :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.$$

Cette fonction bien 1 en x_0 et 0 en x_1 et x_2. De la même manière, on obtient les fonctions $L_1(x)$ et $L_2(x)$ définies par :

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

et

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_1)}.$$

L'équation de la parabole déterminée par les points $(3, 1)$, $(-2, 2)$, $(1, 3)$ est :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= 1\frac{(x+2)(x-1)}{(3+2)(3-1)} + 2\frac{(x-3)(x-1)}{((-2)-3)((-2)-1)} + 3\frac{(x-3)(x+2)}{(1-3)(1+2)} \\ &= -\frac{4}{15}x^2 + \frac{1}{15}x + \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

1.2.3 Polynômes de degré n

On analyse le cas général est de la même façon. La fonction $L_0(x)$ doit s'annuler en $x = x_1$, x_2, x_3, ..., x_n. Il faut donc introduire la fonction $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ qui vaut $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)$ en $x = x_0$. On a alors, après division :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)}.$$

On remarque qu'il y a n facteurs de la forme $(x - x_i)$ dans cette expression et qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré n. Pour la fonction $L_1(x)$, on pose :

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)}.$$

On note l'absence du terme $(x - x_i)$ dans l'expression générale pour la fonction $L_i(x)$:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

Dans cette fois seul le facteur $(x - x_i)$ est absent ; $L_i(x)$ est donc un polynôme de degré n qui vaut 1 en $x = x_i$ et s'annule à tous les autres points d'interpolation, on peut maintenant résumer le situation.

Corollaire (1.2) : *Etant donné ($n + 1$) points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$; pour $i = 0, 1, \ldots, n$, il existe un unique polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égale à n passant par tous ces points :*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x). \quad \diamondsuit$$

1.3 Erreur d'interpolation

Malgré que les valeurs de f et de son polynôme d'interpolation soient les mêmes aux nœuds d'interpolation ; mais elles sont différents en général en tout autre point, il est fondamental d'étudier l'*erreur d'interpolation* sur l'intervalle qui contient les noeuds d'interpolation. Dans la plupart des cas, la formule de l'erreur ne permet pas de la calculer exactement ; elle permet par contre de la majorée.

On peut exprimer l'erreur d'interpolation de la façon suivante : $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$ ou encore $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

On constat immédiatement que l'erreur d'interpolation est nulle aux points de collocation puisque le polynôme passe exactement par ces points. Maintenant, il reste à évaluer cette erreur.

Théorème (1.3) : *f est une fonction de classe $C^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$, tel que : $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Alors : $\forall x \in [a,b]$, $\exists\ \xi \in \left]\min(x_0,x), \max(x,x_n)\right[\subset [a,b]$; tel que :*

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

où

$$\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n). \quad \diamondsuit$$

Preuve : Pour faire cette démonstration , on distingue deux cas :

• Si le point x coïncide avec l'un des nœuds d'interpolation (i.e : $x = x_i$ pour $i = 0,\ldots,n$), alors l'égalité est trivialement vérifiée.

• Supposons maintenant que x est un point fixé de $[a,b]$; tel que : $x \neq x_i$ pour $i = 0,\ldots,n$.

Soit $P_{n+1}(t)$ le polynôme d'interpolation de $f(t)$ aux points $x, x_0, \ldots, x_n$, de sorte que $P_{n+1} \in \wp_{n+1}(\mathbb{R})$. Par construction :

$$f(x) - P_n(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x).$$

Il est clair que le polynôme $P_{n+1} - P_n$ est de degré $\leq n+1$ et s'annule en $(n+1)$ points $x_0, \ldots, x_n$. On a donc :

$$P_{n+1}(t) - P_n(t) = R\prod_{i=0}^{n}(t - x_i), \; R \in \mathbb{R}.$$

Considérons la fonction :

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - P_{n+1}(t) \\ &= f(t) - P_n(t) + P_n(t) - P_{n+1}(t) \\ &= f(t) - P_n(t) - R\prod_{i=0}^{n}(t - x_i). \end{aligned}$$

Cette fonction s'annule en $(n+2)$ points $x, x_0, \ldots, x_n$. Alors, il existe $\xi \in \left]\min\left(x_0, x\right), \max\left(x, x_n\right)\right[\subset [a, b]$; tel que : $h^{(n+1)}(\xi) = 0$. Donc :

$$P_n^{(n+1)} = 0 \text{ et } \left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)^{(n+1)} = (n+1)!.$$

On a par conséquent $h^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - R(n+1)! = 0$, d'où :

$$f(x) - P_n(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x) = R\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \quad \blacklozenge$$

Corollaire (1.4) : *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a :*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|,$$

où

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|. \quad \lozenge$$

1.4 Formules de Newton-Côtes

Pour présenter les formules de Newton-Côtes, on définit tout d'abord les formules de quadrature d'approximation de I par :

$$\tilde{I} = \int_a^b P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i); \text{ avec : } \omega_i = \int_a^b L_i(x)dx$$

pour diverses valeurs de n.

Théorème (1.5) : *On considère une partition $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, où les points x_i sont équidistants, c'est-à-dire : $x_0 = a$, $x_i = a + ih = x_0 + ih$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $x_n = b$ et le pas de la partition est $h = \dfrac{b-a}{n}$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i), \text{ où}$$

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{n\; i!\,(n-i)!}\int_a^b \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n)}{(q-i)}dq, \textit{ pour } i = 0, 1, \ldots, n \textit{ et } q = \frac{x-x_i}{h}. \quad \Diamond$$

Preuve : Si en tenant compte le formule de quadrature, on a **:**

$$\int\limits_{x_0=a}^{x_n=b} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i),$$

où

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \int\limits_{x_0=a}^{x_n=b} L_i(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_n} \frac{\prod\limits_{d=0,\ d\neq i}^{n}(x-x_d)}{\prod\limits_{d=0,\ d\neq i}^{n}(x_i-x_d)}dx \\
&= \int\limits_{x_0=a}^{x_n=b} \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}dx.
\end{aligned}$$

On pose : $q = \dfrac{x-x_0}{h}$, ce qui implique que : $x = x_0 + qh$. On va dériver par rapport à q, alors $dx = hdq$. Avec cette notation, on a :

$$\bullet\ (x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$$
$$= (x_0+qh-x_0)\dots(x_0+qh-(x_0+(i-1)h))$$
$$\times(x_0+qh-(x_0+(i+1)h)\times\dots\times(x_0+qh-(x_0+nh)$$
$$= h^n q(q-1)\dots(q-(i-1))(q-(i+1))\dots(q-n).$$

$$\bullet\ (x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)$$
$$= (x_0+ih-x_0)\dots(x_0+ih-(x_0+(i-1)h))$$
$$\times(x_0+ih-(x_0+(i+1)h)\times\cdots\times(x_0+ih-(x_0+nh))$$
$$= [(ih)(h(i-1)h]\,[(-h)(-2h)\cdots(-(n-i)h]\,.$$

Puisque $h = \dfrac{b-a}{n}$, on pose $\omega_i = (b-a)H_i$, où les H_i sont donnés par :

$$\begin{aligned} H_i &= \int_a^b \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n)}{(-1)^{n-i} i!(n-i)!n\ (q-i)}dq \\ &= \frac{(-1)^{n-i}}{n\ i!(n-i)!}\int_a^b \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n)}{(q-i)}dq. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Chapitre 2

Intégration numérique

Dans ce chapitre, on présente les différents types d'intégration numérique et on remarque après qu'ils sont des applications directes de la formule de Newton-côtes et on va faire aussi une comparaison entre les méthodes afin d'extraire la plus performante.

2.1 Méthode de Rectangle (n=0)

La méthode de rectangle exact pour les polynômes de degré 0; c'est–à-dire : les constants. Comme le degré du polynôme est 0 donc il y a qu'un seul pt $(x_0 = a)$; tel que : $P_0(x) = f(a)$, alors :

$$\tilde{I}_0 = \int_a^b P_0(x)dx = \int_a^b f(a)dx = f(a)\int_a^b dx = f(a)(b-a).$$

Interprétation géométrique :

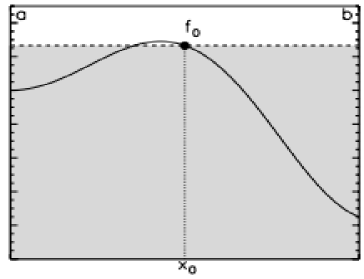


FIG. 2.1 – Méthode de Rectangle

L'erreur peut être estimée en utilisant le développement en série de Taylor ou le théorème des accroissements finis, on trouve alors pour $h = b - a$:

$$\exists\ \xi \in [a,b]\,,\ E_0 = \frac{h^2}{2} f'(\xi);\ \text{ ou encore : } |E_0| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{[a,b]} (|f'|)\,.$$

Pour trouver cette dernière règle, en utilisant le théorème des accroissements finis : $\forall x \in [a,b]\,,\ \exists \xi \in \left]a,b\right[$; tel que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(\xi).$$

En remplaçant dans l'expression de l'intégrale et de l'erreur, on trouve :

$$\begin{aligned} E_0 &= I - \tilde{I} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_0(x)dx \\ &= \int_a^b (f(x) - P_0(x))dx = \int_a^b (f(x) - f(a))dx \\ &= \int_a^b (x-a)f'(\xi)dx = f'(\xi) \int_a^{b-a} xdx \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi) = \frac{h^2}{2} f'(\xi). \end{aligned}$$

L'erreur E_0 n'est pas connue car la valeur de $\xi \in [a,b]$ reste indéterminée. Cependant, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée sur le domaine considéré.

Quelques remarques sur cette erreur :

• Cette méthode d'intégration est exacte pour toutes les fonctions f constantes (dans ce cas $E_0 = 0$ puisque $f' = 0$). D'une façon générale, cette méthode est d'autant plus précise que les variations de f sont faibles (f' petite).

• En plus, l'erreur E_0 est faible si le domaine $[a, b]$ est petit parce que cette erreur décroit en h^2.

Pour exposer la formule de Rectangle généralisée, on doit faire une partition de l'intervalle $[a, b]$. Soit $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$; c'est -à-dire : $x_i = a+ih$; $i = 0, 1, \dots, n$ et $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\
&\simeq (x_1 - x_0)\, f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f(x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\, f(x_n) \\
&= hf(x_1) + hf(x_2) + \cdots + hf(x_n) \\
&= h \sum_{i=1}^{n} f(x_i).
\end{aligned}$$

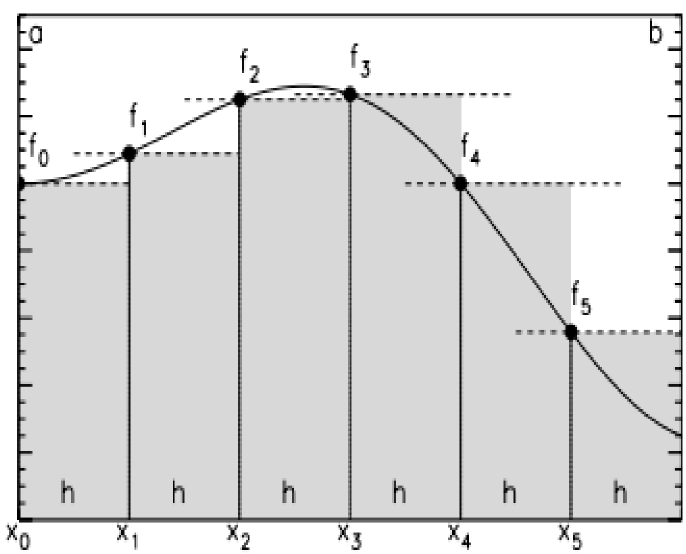


FIG. 2.2 – Méthode des rectangles généralisée ; pour m = 6 intervalles

2.2 Méthode du Point Milieu (n=0)

Cette méthode utilise également le polynôme constant pour approximer la fonction f. Cependant, elle exploite mieux les symétries du problème en choisissant la valeur milieu :

$$P_0(x) = f(\frac{a+b}{2}),$$

L'intégrale approchée ; $\tilde{I}_0 = \int\limits_a^b P_0(x)dx$; se calcule alors :

$$\tilde{I}_0 = f(a)(b-a).$$

Cette méthode nécessite une unique évaluation de la fonction f (en $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$) et correspond donc aussi à ce qu'on peut faire de plus rapide.

L'erreur peut être estimée par l'utilisation du développement en série de Taylor ou le théorème des accroissements finis, on trouve alors pour $h = b - a$:

$$\exists\ \xi \in [a,b]\,,\ E_0' = \frac{h^3}{24} f''(\xi)\,;\ \text{c-à-d}\ \ |E_0'| \leq \frac{h^3}{24} \sup_{[a,b]}(|f''|)\,.$$

Pour calculer cette dernière erreur, on peut utiliser le théorème des accroissements finis au deuxième ordre : $\forall x \in [a,b]\,,\ \exists\ \xi \in \,]a,b[\,$; tel que :

$$f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{f''(\xi)}{2}.$$

En remplaçant dans l'expression de l'intégrale et de l'erreur, on trouve :

$$\begin{aligned} E_0' &= I - \tilde{I} = \int\limits_a^b (f(x) - P_0(x))dx \\ &= \int\limits_a^b (f(x) - f(\frac{a+b}{2})dx = \int\limits_a^b \left[(x - \frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{f''(\xi)}{2} \right] dx \end{aligned}$$

On continue les calculs, on obtient :

$$\begin{aligned} E_0' &= f'(\tfrac{a+b}{2}) \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} x dx + \frac{f''(\xi)}{2} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} x^2 dx = 0 + \frac{f''(\xi)}{3} \left(\frac{b-a}{2} \right)^3 \\ &= \frac{h^3}{3} f''(\xi). \end{aligned}$$

L'erreur E_0' n'est pas connue car ξ est une valeur arbitraire dans l'intervalle $[a,b]$ (reste indéterminée). Donc, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée seconde sur le domaine considéré.

Quelques remarques sur cette erreur :

• Du fait des symétries, cette méthode d'intégration est exacte pour les fonctions f constantes, mais aussi pour les fonctions affines (dans ce cas $E_0' = 0$ puisqu'elles vérifient $f'' = 0$).

• Dans le cas plus général, cette méthode est d'autant plus précise que les variations de f sont faibles (f'' petite).

• En plus, le domaine $[a,b]$ est petit ($h \to 0$), alors l'erreur est faible parce que cette erreur décroit en h^3 ; c'est à dire : elle est plus vite que l'erreur de la méthode précédente. Il est clair que si le domaine $[a,b]$ est petit ($h \to 0$), alors la méthode du point milieu est toujours plus précise que la méthode précédente.

Pour conclure la formule du Point Milieu généralisée, on considère la partition $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, où $x_i = a + ih$; $i = 0, 1, \ldots, n$. On pose $h = \dfrac{b-a}{n}$ le pas de la subdivision de $[a,b]$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &\simeq (x_1 - x_0)\, f(\frac{(x_0 + x_1)}{2}) + (x_2 - x_1)\, f(\frac{(x_1 + x_2)}{2}) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\, f(\frac{(x_n + x_{n-1})}{2}) \\ &= h \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{(x_i + x_{i+1})}{2}) \end{aligned}$$

2.3 Méthode de Trapèze (n=1)

Pour obtenir la méthode de Trapèze, en appliquant la formule de Newton-côtes pour $n = 1$ (en $x_0 = a$, $x_1 = b$) ; tel que : $f(x_0) = f(a)$, $f(x_1) = f(b)$

$$P_1(x) = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - \frac{a + b}{2}).$$

L'intégrale approchée est :

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1 &= \int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_1(x)dx \\
&= (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.
\end{aligned}$$

Pour faire la démonstration, on considère :

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1 &= \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{1} f(x_i)L_i(x)dx \\
&= \int_a^b f(x_0)L_0(x)dx + \int_a^b f(x_1)L_1(x)dx \\
&= f(x_0)\int_a^b L_0(x)dx + f(x_1)\int_a^b L_1(x)dx \\
&= f(x_0)\omega_0 + f(x_1)\omega_1.
\end{aligned}$$

On calcule ω_0, ω_1. On a : $\omega_i = \int_a^b L_i(x)dx$ et en tenant compte que : $x_1 - x_0 = h$ ce qui implique : $-h = x_0 - x_1$:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \int_a^b \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}dx = -\frac{1}{h}\int_a^b (x - x_1)dx \\
&= -\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_1 x\right]_a^b \\
&= -\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - b\left(b - a\right)\right] = -\frac{1}{h}\left(b - a\right)\left[\frac{1}{2}\left(b + a\right) - b\right] \\
&= -\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - b\right) = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a := \frac{1}{2}\left(b - a\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \int_a^b \frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx = \frac{1}{h}\int_a^b (x-x_0)dx \\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_0 x\right]_a^b = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) - x_0\left(b-a\right)\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[(b-a)\left[\frac{1}{2}\left(b+a\right)-a\right]\right] = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - a \\
&= \frac{a-2a}{2} + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\left(b-a\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1 &= f(x_0)\omega_0 + f(x_1)\omega_1 \\
&= \frac{1}{2}(b-a)f(x_0) + \frac{1}{2}(b-a)f(x_1) \\
&= \frac{1}{2}(b-a)f(a) + \frac{1}{2}(b-a)f(b) \\
&= \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)).
\end{aligned}$$

Interprétation géométrique :

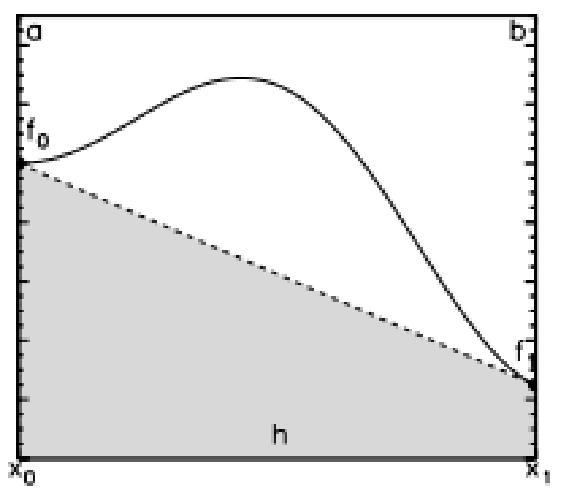


Fig. 2.3 – Méthode de Trapèze

Pour mesurer la performance de cette méthode, on estime son erreur qui a obtenue lorsqu'on utilise le développement de Taylor ou le théorème des accroissements finis. On trouve alors pour $h = b - a$:

$$\exists\ \xi \in [a,b]\,,\ E_1 = \frac{h^3}{12} f''(\xi);\ \text{c-à-d : } |E_1| \leq \frac{h^3}{12} \sup_{[a,b]} (|f''|)\,.$$

L'erreur E_1 n'est pas connue car la valeur de $\xi \in [a,b]$ est inconnue. Alors, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée seconde sur le domaine considéré.

En générale, la précision fournie par un seul Trapèze n'est pas suffisante, à cette raison, on divise alors le segment $[a,b]$ en segments partiels égaux et à chaqu'un on applique la formule de Trapèze pour obtenir la formule de Trapèze généralisée. Soient : $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h, \ldots, x_n = x_0 + nh = b$; avec $h = \dfrac{b-a}{n}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\
&\simeq h\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right) + h\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right) + \cdots + h\left(\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right) \\
&= h\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right],
\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\simeq \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right] \\
&= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] \\
&= \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right].
\end{aligned}$$

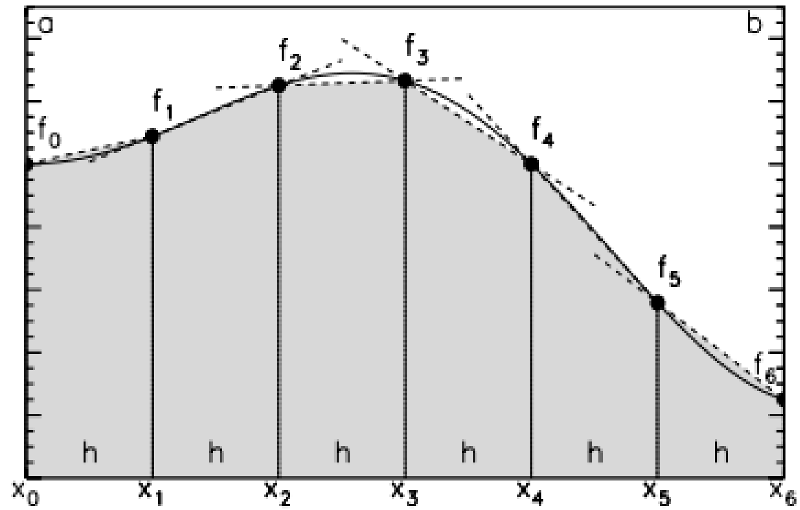


FIG. 2.4 – Méthode des Trapèzes généralisée ; pour m = 6 intervalles

2.4 Méthode de Simpson (n=2)

Cette fois, on applique immédiatement la formule de Newton-côtes pour $n = 2$ (en x_0, x_1 et x_2) (la parabole) ; tel que : $f(x_0) = f(a)$, $f(x_1) = f(\frac{a+b}{2})$, $f(x_2) = f(b)$, $h = \frac{b-a}{2}$.

$$P_2(x) = \frac{2f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{(x_2 - x_0)^2}(x - x_0)^2 + \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)}(x - x_0) + f(x_1).$$

Alors, l'intégrale approchée est :

$$\tilde{I}_2 = \int_a^b P_2(x)dx = (b-a)\frac{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{6}.$$

Cette méthode nécessite trois évaluations de la fonction f (en $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$). Elle est donc trois fois plus lente que les méthodes à un point.

En effet,

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2 &= \int_a^b P_2(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x)dx \\
&= \int_a^b f(x_0)L_0(x)dx + \int_a^b f(x_1)L_1(x)dx + \int_a^b f(x_2)L_2(x)dx \\
&= f(x_0)\int_a^b L_0(x)dx + f(x_1)\int_a^b L_1(x)dx + f(x_2)\int_a^b L_2(x)dx \\
&= f(x_0)\omega_0 + f(x_1)\omega_1 + f(x_2)\omega_2.
\end{aligned}$$

On calcule ω_0, ω_1, ω_2, où $\omega_i = \int_a^b L_i(x)dx$ et $h = \frac{b-a}{2}$, alors :

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \int_a^b L_0(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx \\
&= \frac{1}{2h^2}\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)\,dx.
\end{aligned}$$

Puisque on a : $x_i = x_0 + ih$; c'est-à-dire : $x_1 = x_0 + h$ et $x_2 = x_0 + 2h$, ce qui implique que : $x - x_1 = x - x_0 - h$ et $x - x_2 = x - x_0 - 2h$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{2h^2}\int_a^b (x-x_0-h)(x-x_0-2h)\,dx \\
&= \frac{1}{2h^2}\int_a^b (x-x_0-h)(x-x_0-h-h)\,dx.
\end{aligned}$$

Si on fait le changement de variable : $Y = x - x_0 - h$, on trouve alors $x \to a$, $Y \to -h$, $x \to b$, $Y \to h$ et $dx = dY$:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h} Y(Y-h)\,dY \\
&= \frac{1}{2h^2}\left[\theta Y^3 - \tfrac{1}{2}Y^2 h\right]_{-h}^{h} \\
&= \frac{1}{3}h.
\end{aligned}$$

En se basant sur les mêmes techniques pour calculer ω_1 :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \int_a^b L_1(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx \\
&= -\frac{1}{h^2}\int_a^b (x-x_0)(x-x_2)\,dx \\
&= -\frac{1}{h^2}\int_a^b (x-x_0-h+h)(x-x_0-h-h)\,dx \\
&= -\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h} (Y+h)(Y-h)\,dY = -\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h} (Y^2-h^2)\,dY \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{3}Y^3 - Yh^2\right]_{-h}^{h} = -\frac{1}{h^2}\left(\frac{h^3}{3} - h^3 - \left(-\frac{1}{3}h^3 + h^3\right)\right) \\
&= -\frac{2}{3}h + 2h = \frac{4}{3}h.
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient ω_2 :

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \int_a^b L_2(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx \\
&= \frac{1}{2h^2}\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\,dx \\
&= \frac{1}{2h^2}\int_a^b (x-x_0-h+h)(x-x_0-h)\,dx \\
&= \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h} (Y+h)(Y)\,dY \\
&= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{1}{3}Y^3 - \frac{Y^2}{2}h\right]_{-h}^{h} = \frac{1}{3}h.
\end{aligned}$$

par la substitution directe dans la formule d'intégration, on trouve alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2 &= f(x_0)\omega_0 + f(x_1)\omega_1 + f(x_2)\omega_2 \\
&= \frac{1}{3}hf((x_0) + \frac{4}{3}hf(x_1) + \frac{1}{3}hf((x_2) \\
&= \frac{1}{3}h\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right] \\
&= \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right].
\end{aligned}$$

Interprétation géométrique :

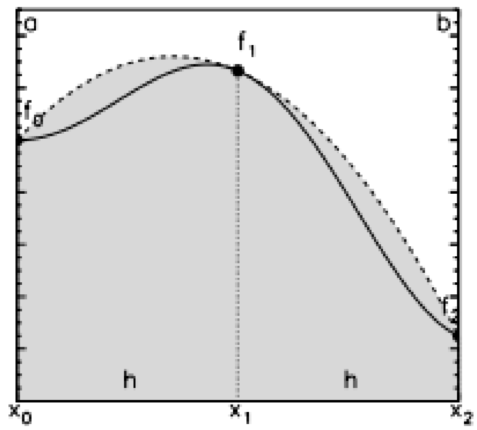


FIG. 2.5 – Méthode de Simpson

On utilise toujours les mêmes arguments (développements en série de Taylor ou bien le théorème des accroissements finis) afin d'estimer l'erreur de cette méthode. Tout d'abord, on pose : $h = \dfrac{b-a}{2}$

$$\exists\ \xi \in [a, b]\ ,\ E_2 = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi);\ \text{c-à-d}\ |E_2| \leq \frac{h^5}{90} \sup_{[a,b]} \left(\left| f^{(4)} \right| \right).$$

Puisque l'erreur E_2 est inconnue à cause de l'indétermination de la valeur de $\xi \in [a, b]$; alors, on majore E_2 par la plus grande valeur de la dérivée quatrième sur l'intervalle $[a, b]$.

Quelques remarques sur cette erreur :

• Cette méthode d'intégration est exacte pour les fonctions f polynomiales d'ordre 3 (car elles vérifient $f^{(4)} = 0$), ce qui inclut en particulier les fonctions constantes, les fonctions affines et les paraboles. Plus généralement, elle est d'autant plus précise que les variations de f sont faibles ($f^{(4)}$ petite).

• On remarque que l'erreur ici est dépend de h^5; c'est-à-dire : l'erreur est faible tant que l'intervalle $[a, b]$ est petit. En conclusion, pour des intervalles $[a, b]$ suffisamment petits, la méthode de Simpson est toujours plus précise que les méthodes précédentes.

Il y a souvent intérêt à décomposer l'intervalle total en intervalles partiels égaux pour appliquer ensuite la méthode à chacun d'eux, on obtient alors la formule de Simpson généralisée. Soient : $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h, \ldots, x_n = x_0 + nh = b$, avec $h = \dfrac{b-a}{n}$; *n est nécessairement pair* ; on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\
&\simeq \frac{h}{3} f(x_0) + f(x_n) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \cdots + f(x_{n-1})\right) \\
&+2\left(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + \cdots + f(x_{n-2})\right),
\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{b} f(x)dx &\simeq \frac{(b-a)}{3n} f(a) + f(b) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \cdots + f(x_{n-1})\right) \\
&+2\left(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + \cdots + f(x_{n-2})\right).
\end{aligned}$$

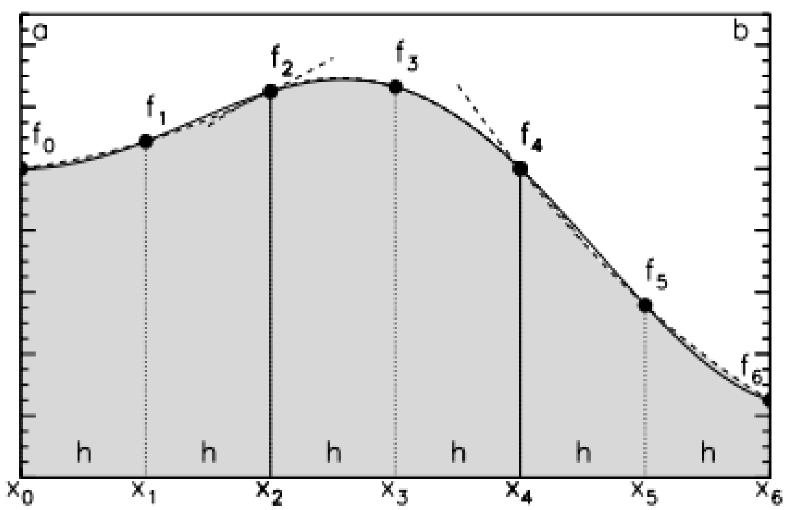


FIG. 2.6 – Méthode de Simpson généralisée ; pour m = 3 intervalles

2.5 Méthodes d'intégration pour n≥3

Dans le cas où $n = 3$ on a également la Méthode de Newton. Pour obtenir cette formule, en appliquant la formule de Newton-côtes pour $n = 3$ en $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ et $x_3 = x_0 + 3h = b$; avec $h = \dfrac{b-a}{n}$. L'approximation d'ordre 3 de la fonctionnelle est :

$$I_3 = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

on trouve :

$$\tilde{I}_3 = \int_a^b P_3(x)dx = \frac{3}{8}h\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right];$$

ou encore :

$$\tilde{I}_3 = \frac{(b-a)}{8}\left[f(a) + 3f(c) + 3f(d) + f(b)\right], \text{ où } c = \frac{2a+b}{3} \text{ et } d = \frac{a+2b}{3}.$$

Par une application directe de la formule de Newton-côtes, on trouve immédiatement :

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_3 &= \int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_i(x)dx = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx \\
&= f(x_0)\int_a^b L_0(x)dx + f(x_1)\int_a^b L_1(x)dx + f(x_2)\int_a^b L_2(x)dx + f(x_3)\int_a^b L_3(x)dx \\
&= f(x_0)\omega_0 + f(x_1)\omega_1 + f(x_2)\omega_2 + f(x_3)\omega_3.
\end{aligned}$$

On calcule ω_0, ω_1 , ω_2, ω_3, où $\omega_i = \displaystyle\int_a^b L_i(x)dx$ et $h = \dfrac{b-a}{3}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_3 &= f(x_0)\omega_0 + f(x_1)\omega_1 + f(x_2)\omega_2 + f(x_3)\omega_3 \\
&= \frac{3}{8}hf(x_0) + \frac{9}{8}hf(x_1) + \frac{9}{8}hf(x_2) + \frac{3}{8}hf(x_3) \\
&= \frac{(b-a)}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right],
\end{aligned}$$

finalement, on trouve :

$$\tilde{I}_3 = \frac{(b-a)}{8}\left[f(a) + 3f(c) + 3f(d) + f(b)\right].$$

Plus généralement, les formules d'intégration qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{x_0}^{x_3} L_i(x) f(x_0 + ih)dx.$$

sont obtenues par la formule de Newton-côtes qu'on a vu dans le chapitre précèdent.

2.6 Erreur d'intégration

on a vu précédemment quelques méthodes d'intégration numériques qui donnent des valeurs approchées de $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Donc, naturellement il existe une erreur entre la valeur exacte et la valeur approchée. Dans cette section, on essaye d'estimer cette erreur d'intégration.

Définition (2.1) : *x est un réel de $[a,b]$, on note $x \longrightarrow (x-t)_+$ la fonction qui vaut $(x-t)$ si ce réel est positif et 0 sinon et $R\left((x-t)_+^n\right) = R\left(x \to (x-t)_+^n\right)$ l'erreur de quadrature liée à sa puissance $n^{iéme}$. Le noyau de Péano de la méthode de quadrature est la fonction*

$$K_n(t) = R\left((x-t)_+^n\right).$$

Théorème (2.1) : On considère *une méthode d'intégration de degré de précision n et $f \in C^{n+1}([a,b])$, alors :*

$$R(f) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^b K_n(t) f^{(n+1)}(t)dt. \quad \Diamond$$

Preuve : Avec le développement de Taylor avec le reste intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \int_a^x \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\ &= P_n(x) + \int_a^b \tfrac{1}{n!}(x-t)_+^n f^{(n+1)}(t)dt, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = P_n(x) + \int_a^x \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \Leftrightarrow f(x) = P_n(x) + H(x).$$

Puisque $P_n(x)$ est de degré n, alors $R(P_n) = 0$.

$$\begin{aligned} R(f) &= R\left(\int_a^b \frac{1}{n!}(x-t)_+^n f^{(n+1)}(t)dt\right) \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b \frac{1}{n!}(x-t)_+^n f^{(n+1)}(t)dt\right] dx - \sum_{i=0}^{n} A_i \int_a^b \frac{1}{n!}(x_i-t)_+^n f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b \frac{1}{n!}(x-t)_+^n f^{(n+1)}(t)dx\right] dt - \int_a^b \sum_{i=0}^{n} A_i \frac{1}{n!}(x_i-t)_+^n f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \int_a^b (x-t)_+^n dx\right] dt - \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \sum_{i=0}^{n} A_i (x_i-t)_+^n dt \\ &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \left(\int_a^b (x-t)_+^n dx - \sum_{i=0}^{n} A_i (x_i-t)_+^n\right) \\ &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} R(x-t)_+^n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t) K_n(t)dt. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Corollaire (2.2) : *Si $f \in C^{n+1}([a,b])$ et $K_n(t)$ de signe constant, alors :*

1. $R(f) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \displaystyle\int_a^b K_n(t)dt\,;\ \xi \in [a,b]\,.$

2. $\int\limits_a^b K_n(t)dt = \frac{1}{n+1}R(x^{n+1})$.

3. $R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}R(x^{n+1})$. $\diamondsuit$

Preuve : Pour démontrer la première partie, on distingue deux cas :

1. si $K_n(t) \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)K_n(t)dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_a^b K_n(t)dt\,;\, \xi \in [a,b]\,. \end{aligned}$$

et le cas où $K_n(t) \leq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)K_n(t)dt = \frac{-1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(-K_n(t))dt \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_a^b (-K_n(t))dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_a^b K_n(t)dt. \end{aligned}$$

2. On a : $f(x) = x^{n+1}$, alors $f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}R(x^{n+1}) &= \frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_a^b K_n(t)dt \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{n!}\int\limits_a^b K_n(t)dt \\ &= \int\limits_a^b K_n(t)dt. \end{aligned}$$

3. de 1 et 2, il est facile de démontrer 3 de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
R(f) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_a^b K_n(t)dt \ \textit{(de 1)} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \times \frac{1}{n+1} R(x^{n+1}) \ \textit{(de 2)} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} R(x^{n+1}). \quad \blacklozenge
\end{aligned}$$

2.7 Comparaison entre les méthodes d'intégration

Dans cette section, on va faire une comparaison entre les méthodes proposées précédemment ; *méthode de Rectangle, méthode de Trapèzes, méthode de Simpson, méthode de Newton* ; pour trouver la plus performante entre eux.

Pour faire cette comparaison, on veut approximer l'intégrale :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

qui a comme valeur exacte :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) = 0,69314718.$$

Maintenant, on approxime cette valeur, en utilisant :

1. La méthode de Rectangle, on a : $a = 1$, $b = 2$ et $h = b - a = 2 - 1 = 1$

$$\tilde{I}_0 = f(a)(b-a) = f(1)(2-1) = 1 * 1 = 1; \ f(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

On calcule l'erreur :

$$E_0 = \left| I - \tilde{I}_0 \right| = |0,69314718 - 1| = 0,306852819.$$

2. La méthode de Trapèzes : $a = 1$, $b = 2$ et $h = b - a = 2 - 1 = 1$

$$\tilde{I}_1 = \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) = \frac{1}{2}(2-1)(f(1)+f(2)) = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = 0,75.$$

On calcule l'erreur :

$$E_1 = \left| I - \tilde{I}_1 \right| = |0,69314718 - 0,75| = 0,056852819.$$

3. La méthode de Simpson, on a : $a = 1$, $b = 2$ et $h = \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2 &= \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right] \\
&= \frac{(2-1)}{6}\left[f(1) + 4f(\frac{1+2}{2}) + f(2)\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[1 + 4 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right] = 0,694444444.
\end{aligned}$$

L'erreur de calcul est :

$$E_2 = \left| I - \tilde{I}_2 \right| = |0,69314718 - 0,694444444| = 0,001297263.$$

4. La méthode de Newton, on a : $a = 1$, $b = 2$ et $h = \dfrac{b-a}{3} = \dfrac{2-1}{3} = \dfrac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_3 &= \frac{(b-a)}{8}\left[f(a) + 3f(c) + 3f(d) + f(b)\right] \\
&= \frac{(2-1)}{8}\left[f(1) + 3f(\frac{4}{3}) + 3f(\frac{5}{3}) + f(2)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[1 + 3 \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right] = 0,69375.
\end{aligned}$$

L'erreur de Newton est :

$$E_3 = \left| I - \tilde{I}_3 \right| = |0,69314718 - 0,69375| = 0,000602819.$$

On remarque que: $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq E_3$. Enfin, on peut dire que l'erreur d'intégration tend vers zéro à chaque fois obtenir plus les points d'interpolation ; c'est-à-dire :

$$E = \left| I - \tilde{I}_n \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \, .$$

Chapitre 3

Applications

Dans le dernier chapitre, on essaye de donner des applications simples en physique et en mathématiques pour démontrer l'importance de l'intégration numérique.

3.1 Travail, force et énergie

Dans cette section, on donne quelques notions de base sur l'énergie, la force et le travail afin de présenter la première application en physique.

Définition (3.1) : *L'énergie en physique est la capacité d'effectuer un travail spécifique, puis interprète le travail comme ce qui résulte de la force lorsqu'elle affecte un objet en mouvement.*

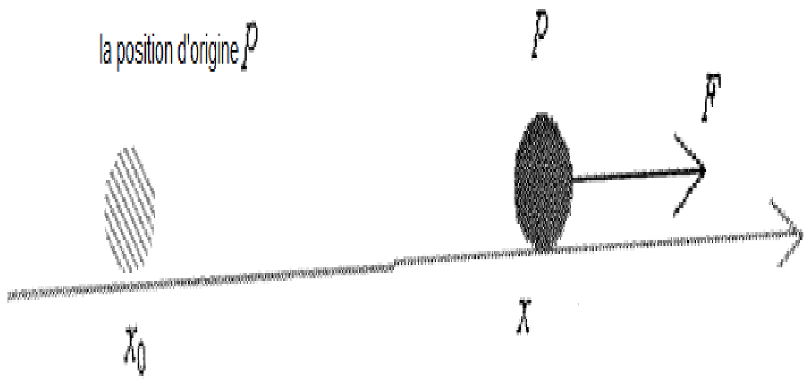
Définition (3.2) : *La force en physique est définie comme un effet qui affecte des objets provoquant un changement dans l'état, la direction, la position ou le mouvement du corps.*

Définition (3.3) : *Le travail en physique est la quantité d'énergie pour déplacer un corps avec une certaine force sur une distance.*

Dans ce qui suit, on suppose la force constance f Affecte une particule P dans une direction parallèle à l'axe des x.

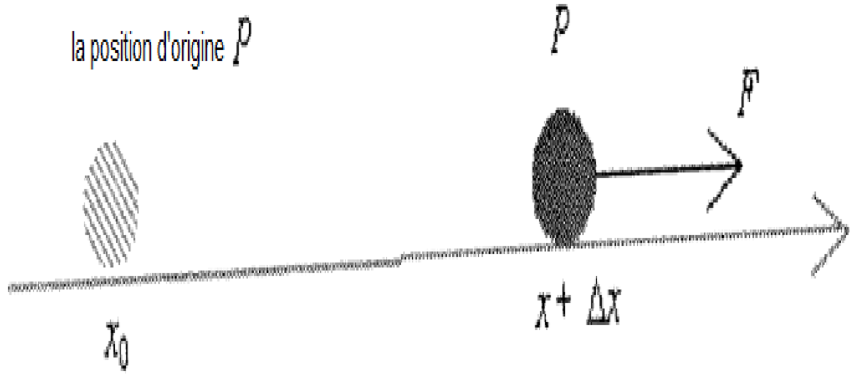
Si la position de la particule P à x_0 se déplace par une force constante f vers une autre position x ; le travail effectué sur la particule P à cause de cette force f est :

$$W = f\left(x - x_0\right).$$



Maintenant, on essaye d'étudier le travail effectué par la force f qu'elle est possible d'être non fixé dans la direction de l'axe des x. Pour aboutir à ce but, on suppose que la particule se déplace de sa position d'origine x; en raison de la force instable f ; elle arrive à la position $x + \Delta x$ et le travail effectué avec cette force est passé de W à ΔW ; où ΔW est le travail effectué par la force f du mouvement des particules de x à $x + \Delta x$; en plus la force f peut être changer pendant le mouvement ; mais ce changement doit être très petit. Lorsque x est très petit, alors :

$$\begin{aligned} \Delta W &\backsimeq f\Delta x \\ \tfrac{\Delta w}{\Delta x} &\backsimeq f. \end{aligned}$$



Lorsque x tend vers zéro ($\Delta x \to 0$) et $n = 2$ (en x_0, x_1 et x_2) ; tel que : $f(x_1) = f(a)$, $f(x_1) = f(\frac{a+b}{2})$, $f(x_2) = f(b)$ et $h = \frac{b-a}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} \tfrac{dw}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta W}{\Delta x} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc, on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} dW &= f(x)dx \\ \textstyle\int_a^b dW &= \textstyle\int_a^b f(x)dx \backsimeq \int_a^b P_2(x)dx \\ &= \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]. \end{aligned}$$

Dans le cas où $W = 0$, on a la position d'origine.

On définit une force agissant sur une particule P par :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

La question qui se pose ici est : Quel travail est fait avec cette force pour déplacer cette particule de $x_0 = 1$ à $x_2 = 3$?

En effet, la particule vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} dW &= f(x)dx \\ \int_a^b dW &= \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{x}dx \\ &\backsimeq \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]. \end{aligned}$$

Par une application directe de l'un des méthodes d'intégration numérique, on trouve :

$$\begin{aligned} W &\backsimeq \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right] \\ &= \frac{(3-1)}{6}\left[f(1) + 4f(\frac{3+1}{2}) + f(3)\right] \\ &= \frac{2}{6}\left[1 + 4\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

3.2 Equation intégrale

Dans cette section, on propose une équation intégral qu'elle est difficile à résoudre analytiquement ; c'est-à-dire, il est impossible de trouver la solution exacte de cette équation. Donc, on souhaite déterminer une approximation v de la solution u de l'équation intégrale de la forme :

$$u\left(x\right) = \int_a^b K(x,t)u(x)dt + f(x);\ \ x \in \left[a,b\right],$$

où a et b sont données ainsi que les fonctions K et f ; K est appelée noyau. On propose ici une équation très connue en électrostatique :

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(x-t)^2}u(t)dt + 1.$$

Le calcul approché de l'intégrale se fait par une méthode des Trapèzes. on donne un entier n pour construire une subdivision régulière de $[a,b]$ avec un pas $h = \dfrac{(b-a)}{n}$ et $x_i = a + (i-1)\,h$; pour $i = 1$ à $n+1$. L'application directe du Trapèze donne l'intégrale approché suivant :

$$\int_a^b \varphi(t) \backsimeq \frac{h}{2}\left(\varphi(x_1) + 2\sum_{j=2}^{n} \varphi(x_j) + \varphi(x_{n+1})\right).$$

On transforme également ce problème en un problème ponctuel, si bien que pour chaque i l'équation du problème approché s'écrit :

$$v_i = \frac{h}{2}\left(K\left(x_i, x_1\right) v_1 + 2\sum_{j=2}^{n} K\left(x_i, x_j\right) v_j + K\left(x_i, x_{n+1}\right) v_{n+1}\right) + f(x_i),$$

où v_j est l'approximation de $u(x_j)$, ce qui conduit au problème approché :

$$\left(I - \frac{h}{2}A_n\right) V = F.$$

Il est clair que cette dernière équation est une forme matricielle du problème approché, où I est la matrice identité de $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, $F = (f(x_1), f(x_1), \ldots, f(x_{n+1}))^T$

$$A_n = \begin{pmatrix} K\left(x_1, x_1\right) & 2K\left(x_1, x_2\right) & \cdots & 2K\left(x_1, x_n\right) & K\left(x_1, x_{n+1}\right) \\ K\left(x_2, x_1\right) & 2K\left(x_2, x_2\right) & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ K\left(x_{n+1}, x_1\right) & 2K\left(x_{n+1}, x_2\right) & \cdots & 2K\left(x_{n+1}, x_n\right) & K\left(x_{n+1}, x_{n+1}\right) \end{pmatrix}$$

et $V = (v_1, v_2, \ldots, v_{N+1})^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ est l'inconnu cherché qu'on peut le déterminer facilement par l'application directe de l'une des méthodes de résolution d'un système linéaire.

Conclusion

Dans ce mémoire, on propose un type d'équation *(équation intégrale)* qu'on a remarqué qu'elle est difficile à résoudre exactement. Non seulement ce type d'équation mais dans plusieurs domaines scientifiques, il est impossible de calculer analytiquement l'intégrale d'une fonction très compliquée ou elle ne connait qu'en un nombre fini de points dans un intervalle donné $[a, b]$ (données expérimentaux).

Donc, l'intégration numérique est une méthode facile et rapide qui nous permet d'estimer l'intégrale d'une fonction approchée à la base du polynôme d'interpolation de Lagrange avec certaine erreur lorsque le calcule analytique est long et rébarbatif et lorsque l'intégration n'est pas fournie sous la forme d'une fonction mais de tableaux de mesures ; cas d'ailleurs le plus fréquent dans la vraie vie.

Bibliographie

[1] Ahmed Abd Al ali et Mohamed Ramadan. *Différentiation et Intégration ; Partie 1, troisième édition.*

[2] Alaa Chateauneuf. *Comprendre les éléments finis, Structures, Principes, formulations et exercices corrigés.*

[3] André Fortin. *Analyse numérique pour ingénieurs, troisième édition.*

[4] Derradji Salah. *Analyse Numérique I, office des publications universitaires.*

[5] Jean-Louis Merriem. *Analyse numérique avec Matlab. Dunod, paris 2007.*

[6] Marie-Hélène Meurisse. *Méthodes Numériques, Algorithmes Numériques, Fondements théoriques et Analyse pratique. Cours, exercices et applications avec Matlab.*

[7] Mustapha Lakrib. *Analyse numérique, cours et exercices résolus,* ellipses en février 2017.

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

- $p(x)$, $q(x)$, $H(x)$: *Polynômes.*
- $P_n(x)$: *Polynôme d'interpolation de Lagrange.*
- $Li(x)$: *Polynôme de la base de Lagrange.*
- δ_{id} : *Différences divisées d'ordre d.*
- $E_n(x)$: *Erreur.*
- W_i : *Les poids.*
- I : *Intégrale exacte de f(x).*
- $\tilde{I}$: *Intégrale approchée de f(x).*

Résumé

Dans ce travail, On va étudier quelques applications sur l'intégration numérique sur un domaine scientifique qui permettent de trouver une valeur approximative de l'intégrale d'une fonction compliquée avec certaines erreurs.
On simplifie la fonction compliquée par son polynôme d'interpolation de Lagrange ; puis, on l'intègre pour trouver les formules de Newton-côtes. Par la substitution directe par n=0,1,2,3 dans cette dernière formule, on trouve immédiatement les différentes méthodes de l'intégration numérique.

ملخص

في هذا العمل ، سوف ندرس بعض التطبيقات على التكامل العددي في مجال علمي والتي تسمح بإيجاد قيمة تقريبية لتكامل دالة معقدة مع بعض الأخطاء.

نقوم بتبسيط الدالة المعقدة عن طريق كثير حدود لاغرانج ؛ ثم نقوم بمكاملتها لإيجاد صيغ نيوتن كوتس. بالتعويض المباشر بواسطة 0،1،2،3 = n في هذه الصيغة الأخيرة ، نجد على الفور الطرق المختلفة للتكامل العددي.

Abstract

In this work, we will study some applications to numerical integration in a scientific field that allow to find an approximate value for the integration of a complex function with some errors.

We simplify the complex function by Lagrange polynomial; Then we integrate to find Newton-côtes formulas. By directly substituting by n = 0,1,2,3 in this last formula , We find immediately the different methods of numerical integration.