

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

Fezari Zineb

Titre :

Estimation des paramètres des lois alpha stables

Membres du Comité d'Examen :

| | | |
|------------------------------|------|-----------|
| Dr. TOUBA Sonia | UMKB | Encadreur |
| Dr. CHERFAOUI Mouloud | UMKB | Président |
| Dr. OUANOUGHY Yasmina | UMKB | Examineur |

September 2020

DÉDICACE

À mes chers **parents** qui ont toujours été là pour moi et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.

À mes frères, À mes soeurs.

À ma famille.

À mon mari.

À mon neveu et ses filles et à ma nièce

À mes amies.

Je dédicace ce modeste travail.

REMERCIEMENTS

À près avoir rendu grâce à **Dieu** le tout puissant et le miséricordieux je tiens à remercier ceux qui, de près ou de loin ont participé à la préparation de ce mémoire.

Je tiens à remercier particulièrement l'enseignante **TOUBA sonia** qui n'a cessé de m'apporter soutien et aide technique et morale.

Un remerciement sincère aux membres de jury **CHERFAOUI Mouloud, OUANOUGHY Yasmina** pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.

Je tiens aussi à remercier toutes mes amies et mes collègues. .

Enfin, je me permets également de remercier toute ma famille qui m'a soutenu au long des mes études.

Table des matières

| | |
|---|----------|
| Dédicace | i |
| Remerciements | i |
| Table des matières | i |
| Liste des figures | iv |
| Liste des tableaux | vi |
| Introduction | 1 |
| 1 Les lois stables univariées | 3 |
| 1.1 Quelques définitions | 3 |
| 1.2 Interprétation des paramètres de la fonction caractéristique d'une loi α -stable | 5 |
| 1.3 Variables aléatoires α -stables symétriques | 8 |
| 1.4 Diverses propriétés | 9 |
| 1.4.1 Densité | 9 |
| 1.4.2 Stabilité | 12 |
| 1.4.3 Propriétés arithmétiques | 12 |
| 1.4.4 Queues lourdes | 13 |
| 1.4.5 Calcul des moments | 14 |
| 1.5 Algorithme de simulation | 15 |
| 1.5.1 Première étape | 15 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.5.2 | Deuxième étape | 15 |
| 1.5.3 | Troisième étape | 16 |
| 1.5.4 | Quelques exemples | 17 |
| 1.6 | Statistiques sur les lois symétriques alpha-stables | 17 |
| 1.6.1 | Tests sur la variance | 18 |
| 2 | Estimation des paramètres des loi α-stable | 22 |
| 2.1 | Méthodes fondées sur les quantiles | 22 |
| 2.1.1 | Méthode de fama-Roll | 22 |
| 2.1.2 | Méthode de McCulloch | 23 |
| 2.2 | Méthodes fondées sur la fonction caractéristique | 24 |
| 2.2.1 | Méthode de Press (moment) | 25 |
| 2.2.2 | Méthode de régression | 26 |
| 2.3 | Méthode par moindres carrés | 29 |
| 2.4 | Méthode du maximum de vraisemblance | 30 |
| 2.5 | Comparaison entre les différents estimateurs | 30 |
| | Conclusion | 35 |
| | Bibliographie | 36 |
| | Annexe A : Logiciel <i>R</i> | 38 |
| | Annexe B : Abréviations et Notations | 44 |

Table des figures

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Courbe de la densité pour $\alpha \in \{2, 1.6, 1.4\}; \beta = 0; \sigma = 1; \mu = 0$ | 6 |
| 1.2 | Courbe de la densité pour $\alpha = 1.5; \beta \in \{-1, 0, 1\}; \sigma = 1; \mu = 0$ | 6 |
| 1.3 | Courbe de la densité pour $\alpha = 1.5 \sigma \in \{2, 1, 0.8\}; \beta = 0; \mu = 0$ | 7 |
| 1.4 | Courbe de la densité pour $\alpha = 1.5; \mu \in \{-2, 0, 2\}; \beta = 0; \sigma = 1$ | 8 |
| 1.5 | Histogrammes normalisés de lois $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α calculés sur 5000 réalisations. | 19 |
| 1.6 | Test graphique 1 : variance empirique calculée pas à pas sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de | 20 |
| 1.7 | Test graphique 2 calculé sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de | 21 |
| 2.1 | Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre α dans le cas d'une densité de probabilité unimodale $S_\alpha(1, 1, 0)$ | 31 |
| 2.2 | Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre β dans le cas d'une densité de probabilité unimodale | 32 |
| 2.3 | Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre σ dans le cas d'une densité de probabilité unimodale $S_{1,4}(1, \sigma, 0)$ | 33 |

| | | |
|-----|---|----|
| 2.4 | Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre μ dans le cas d'une densité de probabilité unimodale $S_{1,4}(1, 1, \mu)$ | 34 |
| 2.5 | titre | 38 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Moyenne et variance théorique d'une loi stable | 15 |
| 1.2 | Moyenne et variance empirique calculées sur 5000 réalisation. | 17 |
| 2.1 | Valeurs optimales de K en fonction de n et de alpha | 28 |

Introduction

.....INTRODUCTION

Dans les années 60, Mandelbrot étudie les fluctuations boursières, pour les quelles il était tout-à-fait clair que le modèle gaussien ne convenait pas. Il s'appuie alors sur les lois de Pareto pour mettre en évidence un nouveau modèle de variation des prix, appelé "lois α -stables". Le paramètre α , compris entre 0 et 2, représente l'exposant caractéristique des lois stables et lorsque celui-ci est strictement inférieur à 2, la variance de la loi stable est infinie. Mandelbrot [108] confirme que son modèle décrit de façon réaliste la variation des prix pratiqués sur certaines bourses des valeurs. D'une part elles peuvent rendre compte des queues lourdes et du comportement asymétrique, d'autre part, dépendant de quatre paramètres, les lois stables sont plus flexibles que les lois normales pour ajuster des données empiriques dans les processus d'estimation et de test de modèle. Une autre bonne propriété est que ces lois ont un domaine d'attraction, c'est-à-dire qu'elles sont des limites de sommes de variables aléatoires. Les lois stables ont été généralisées aussi au cas multivarié où elles peuvent être utiles pour exprimer des dépendances très complexes.

Dans les 20 années suivantes, le travail théorique a porté plus précisément sur l'estimation du paramètre α . En effet, c'est le paramètre le plus important car c'est lui qui indique si la variance est infinie ou non, i.e. nous aide à déterminer la forme ou le degré d'épaisseur de la queue de distribution. Il semble donc de pouvoir l'estimer de la manière la plus correcte qui soit. En 1971, Fama et Roll [2] ont utilisé les propriétés relatives aux quantiles. De nouvelles méthodes d'estimation utilisant la forme de la fonction caractéristique vont apparaître dans les années 80; comme celle de Koutrouvelis [4] qui semble être la meilleure méthode selon

plusieurs études faites par autres auteurs.

Dans une première partie, le cas univarié est traité. Les lois sont définies et diverses propriétés sont présentées. Puis, sont abordés le problème du test d'une variance finie ou infinie

Dans une seconde partie, l'estimation des paramètres caractérisant une loi alpha stable via les approches de queue, quantiles, moments, maximum de vraisemblance et de fonction caractéristique. comme celle de TOUBA Sonia

Chapitre 1

Les lois stables univariées

Les distributions stables sont une classe riche des distributions de probabilité qui permettent à l'asymétrie et les queues lourdes et ont nombreuses propriétés mathématiques. Les lois Pareto- stables, appelées aussi lois lévy-stables ou tout simplement lois stables, ont été introduites par Paul Lévy en 1924 dans son étude de la somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cette propriété de stabilité par addition a incité de nombreux chercheurs à utiliser les lois stables pour représenter la loi des rendements financiers. Dans cette partie nous rappelons les définitions d'une distribution stable de quatre manière équivalentes et nous donnons l'interprétation pratique de chaque paramètre de cette distribution. Plusieurs livres sont consacrés à ces lois : Zolotarev [16] qui a étudié les lois alpha-stables dans le contexte univarié ; Samorodnitsky et Taqqu [13] qui ont étudié de manière approfondie beaucoup de propriétés de ces lois dans le cas univarié comme dans le cas multivarié.

1.1 Quelques définitions

Définition 1.1 *Une variable aléatoire X est dite stable si pour tout réels positifs a' et a'' , il existe des réels $a > 0$ et b telle que :*

$$a'X_1 + a''X_2 \stackrel{d}{=} aX + b. \quad (1.1)$$

Où X_1, X_2 , sont des variables aléatoires indépendantes qui ont chacune la même distribution que X si $b = 0$ on dit que X est strictement stable.

Remarque 1.1 *pour tout v.a. stable X , il existe un nombre réel α , $0 < \alpha \leq 2$ tels que les nombres réels positifs α, d et c vérifient,*

$$a^\alpha = c^\alpha + d^\alpha \quad (1.2)$$

La constante α est appelée indice de stabilité ou exposant caractéristique de X . La variable X est alors dite α -stable.

pour généralisée la relation 1.1 avec un nombre finie de copies indépendantes d'une variable α -stable, on peut utiliser la définition suivante qui est équivalente à la première.

Définition 1.2 *On dit que d'une variable aléatoire réelle X qu'elle suit une loi stable si pour tout $n \geq 2$, il existe un réel strictement positif a_n et un réel b_n telle que :*

$$\sum X_i \stackrel{d}{=} a_n X + b_n. \quad (1.3)$$

Où X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes X .

On utilise la relation 1.2 en procédant par récurrence, il est facile de voir que la constante $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ ou α et celui définit dans la relation 1.2.

Une autre définition équivalente aux définitions 1.1 et 1.2.

Définition 1.3 *X a un domaine d'attraction, i.e, il existe une suite de variable aléatoires i.i.d. $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, une suite de nombres réels positifs $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et une suite de nombres réels $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tels que*

$$\frac{1}{a_n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i - b_n \right) \rightarrow X \quad \text{en distribution} \quad (1.4)$$

Définition 1.4 (fonction caractéristique) *on dit que d'une variable aléatoire réelle X qu'elle suit une **loi stable** de paramètres α, β, σ et μ , si sa **fonction caractéristique** est définie par :*

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp [i\mu.t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \cdot (1 - i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))] & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp [i\mu.t - \sigma |t| \cdot (1 + \frac{2}{\pi} i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \ln |t|)] & \text{si } \alpha = 1, \end{cases} \quad (1.5)$$

avec $\alpha \in]0, 2], \beta \in [-1, 1], \sigma \geq 0, \mu \in \mathbb{R}$.

Où

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

une variable aléatoire X qu'elle suit une loi stable de paramètres α, β, σ et μ , sera notée $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$.

1.2 Interprétation des paramètres de la fonction caractéristique d'une loi α -stable

loi stable est caractérisée par quatre paramètres, ce qui signifie que les lois stables sont paramétriques. il est important de connaître la signification de chaque paramètre ainsi que son influence sur l'allure de courbe de la densité.

1) α : L'exposant caractéristique, ou indice de stabilité, ($0 < \alpha \leq 2$). Il détermine la vitesse de décroissance de la queue de distribution de la queue de distribution.

donnée dans la figure 1.1

- Plus α est petit, plus les queues de la distribution sont épaisses. Autrement dit, plus α est petit, plus on constate l'existence de très grandes fluctuations. Une distribution X gaussienne a la valeur maximum α de soit $\alpha = 2$.

- Quand α est proche de 2, la probabilité d'observer des valeurs de la variable aléatoire loin de la position centrale est faible.

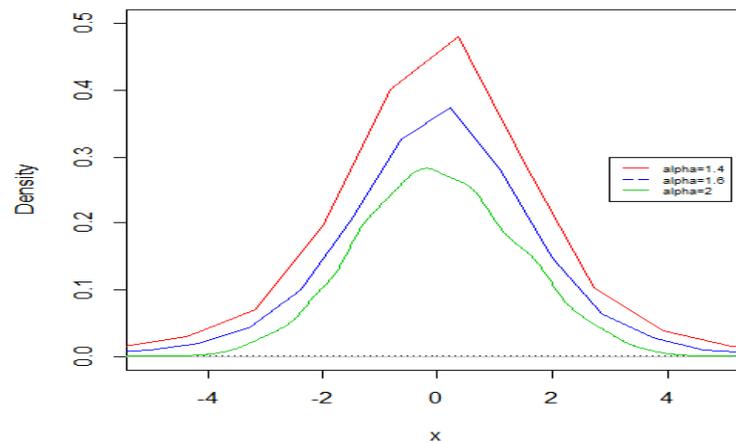


FIG. 1.1 – Courbe de la densité pour $\alpha \in \{2, 1.6, 1.4\}$; $\beta = 0$; $\sigma = 1$; $\mu = 0$

- Remarquant que, le paramètre α est petit, plus la courbe de la densité est pointue et a des queues de distribution épaisse.

2) β : Paramètre d'asymétrie, ou paramètre de biais, ($-1 < \beta < 1$). Il mesure la tendance centrale de la distribution

donnée dans la figure 1.2

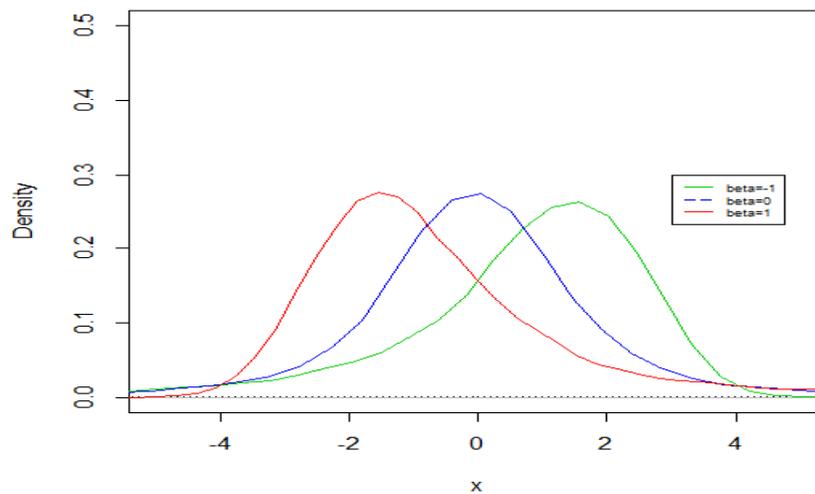


FIG. 1.2 – Courbe de la densité pour $\alpha = 1.5$; $\beta \in \{-1, 0, 1\}$; $\sigma = 1$; $\mu = 0$

- Lorsque β est positif (resp. négatif), le mode est à gauche (resp. à droite) de la moyenne. Autrement dit, Lorsque β est positif (resp. négatif), la queue de distribution est plus épaisse à droite (resp. à gauche).

- Si β est égal à -1 (resp. 1) la distribution est totalement asymétrique à gauche (resp.droite).
- Lorsque β vaut zéro alors la distribution est symétrique.

3) σ : Paramètre d'échelle, ou paramètre de dispersion, $\sigma \geq 0$.

donnée dans la figure 1.3

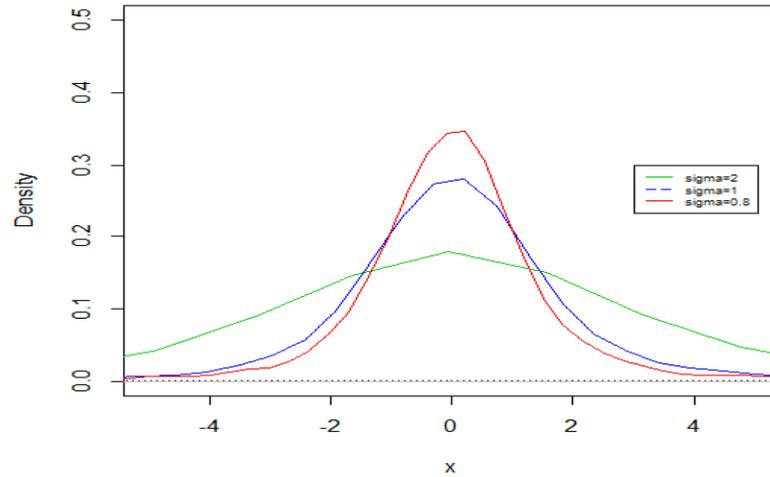


FIG. 1.3 – Courbe de la densité pour $\alpha = 1.5$ $\sigma \in \{2, 1, 0.8\}$; $\beta = 0$; $\mu = 0$

- Plus σ est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre σ de cintrer plus ou moins le corps de la distribution.

4) μ : Paramètre de localisation, ou paramètre de position, ($\mu \in \mathbb{R}$). Il mesure la tendance centrale de la distribution.

la caractéristique la plus importante de ces lois est leur indice de stabilité α , puisque ce paramètre la vitesse de décroissance des queues de distributions.

donnée dans la figure 1.4

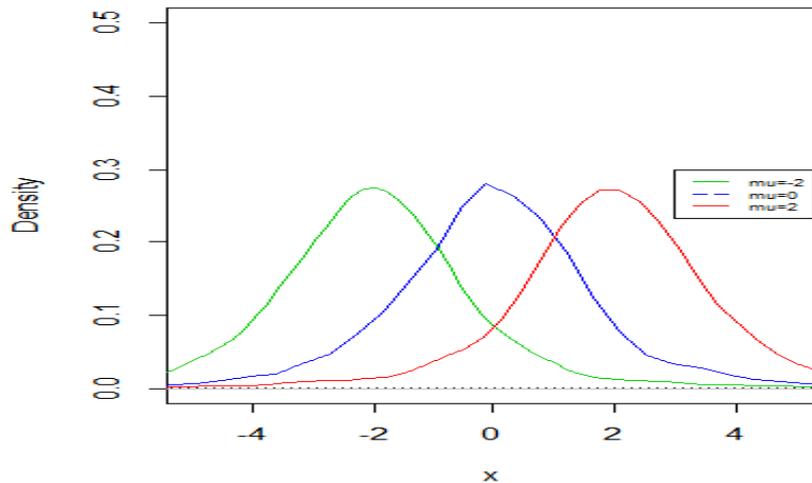


FIG. 1.4 – Courbe de la densité pour $\alpha = 1.5; \mu \in \{-2, 0, 2\}; \beta = 0; \sigma = 1$

- Lorsque μ est positif (resp. négatif), la courbe décal vers la droite (resp. vers la gauche).
- Si $\beta = 0$ alors μ est la médiane.

1.3 Variables aléatoires α -stables symétriques

Proposition 1.1 *si $\beta = 0$, la loi est symétrique par rapport a paramètre μ . Si de plus $\mu = 0$ la loi est dite symétrique α -stables, c'est-à-dire $X \sim S_\alpha(0, \sigma, 0)$.*

Corollaire 1.1 *Une variable aléatoire X est symétrique α -stables et on note $S_\alpha S$, si et seulement si sa fonction caractéristique est donnée par :*

$$\varphi_X(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha) \quad t \in \mathbb{R}, \alpha \in]0, 2]$$

Dans le cas $\sigma = 1$ alors la variable aléatoire est dite $S_\alpha S$ standard.

Exemple 1.1 *là aussi, certaines des lois connues appartiennent à cette classe :*

- La loi cauchy généralisée de densité $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x - m)^2}$ est une loi $S_1(0, \sigma, m)$.
- La loi normale $N(m, \sigma^2)$ est une loi $S_2(\beta, \frac{\sigma^2}{2}, m)$ (et réciproquement une loi $S_2(\beta, \sigma, \mu)$).
- La loi de poisson $P(\lambda)$ n'est pas stable.

preuve.soient X_1 et X_2 deux variable aléatoire réelles suivant une loi de poisson.

supposons que X_1 et X_2 sont stables, alors il existe $C > 0$ et D avec :

$$X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} CX_1 + D$$

par égalité des moyennes et des variances, nous pouvons voir que

$$\begin{cases} 2\lambda = C\lambda + D \\ 2\lambda = C^2\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} D = (2 - \sqrt{2})\lambda, \\ C = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ce qui entraîne une contradiction car $(X_1 + X_2)$ a ses valeurs uniquement dans \mathbb{N} alors que $\sqrt{2}X_1 + (2 - \sqrt{2})\lambda$ n'est pas que des valeurs dans \mathbb{N} .

1.4 Diverses propriétés

dans cette partie, quelques propriétés des lois α -stables seront présentées; en particulier, celles du calcul des moments et de la simulation,...

1.4.1 Densité

Pour la plupart des lois cinnues, nous avons une forme explicite de la densité (normale,Cauchy,gamma,...).

la loi α -stable, nous

n'avons que la forme explicite de la fonction caractéristique.A l'aide de la transformée inverse de la fonction caractéristique, est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx)\varphi_X(t)dt. \tag{1.6}$$

Nous pouvons obtenir f sous la forme d'une intégrale

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha) \cos [xt + \beta t^\alpha \omega(t, \alpha)] dt, \quad (1.7)$$

$$\text{Où } \omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan(\pi\alpha) & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln |t| & \alpha = 1 \end{cases}$$

Proposition 1.2 (*Propriété de réflexion*) : Pour toute α et β ; nous avons

$$S_\alpha(1; -\beta; 0) \stackrel{d}{=} -S_\alpha(1; \beta; 0)$$

C'est que

$$f_X(-x/\alpha, \beta) = f_X(x/\alpha, -\beta) \text{ et } F_X(-x/\alpha, \beta) = 1 - F_X(x/\alpha, -\beta)$$

où f_X et F_X sont la fonction de densité et la fonction de répartition respectivement d'une v.a $X \sim S_\alpha(1; \beta; 0)$.

Zolotarev [15] a démontré que F_X et f_X peuvent s'écrire respectivement pour $\alpha \neq 1$ et $x > 0$, comme suivant :

$$F_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \beta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} \exp(-V_\alpha(x, \theta)) d\theta & \text{si } \alpha < 1, \\ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \exp(-V_\alpha(x, \theta)) d\theta & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

et

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi(1-\alpha)} x^{1/(1-\alpha)} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} a(\theta) \exp(-x^{1/(1-\alpha)} a(\theta)) d\theta & \text{si } \alpha < 1, \\ -\frac{\alpha}{\pi(1-\alpha)} x^{1/(1-\alpha)} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} a(\theta) \exp(-x^{1/(1-\alpha)} a(\theta)) d\theta & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

où

$$a(\theta) := \left(\frac{\sin(\alpha\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1 - |1 - \alpha|))}{\cos \theta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \frac{\cos((\alpha - 1)\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1 - |1 - \alpha|))}{\cos \theta},$$

et

$$V_\alpha = x^{\alpha/(1-\alpha)} a(\theta).$$

qui peut s'écrire plus simplement $\forall \alpha \neq 1$, en rappelant que $\omega = -\frac{\pi}{2} \beta \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}$

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\pi|1-\alpha|} x^{1/(1-\alpha)} \int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} a(\theta) \exp(-x^{1/(1-\alpha)} a(\theta)) d\theta, \quad \alpha > 1,$$

Les seules trois distributions stables qui ont des formes explicites de la fonction de densité sont :

1. La distribution gaussienne $S_2(0, \sigma, \mu)$ où

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{2\sigma}\right)^2\right)$$

2. La distribution de Cauchy $S_1(0, \sigma, \mu)$ où

$$f(x) = \frac{2\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + 4\sigma^2)}$$

3. La distribution de Lévy $S_{\frac{1}{2}}(1, \sigma, \mu)$ où

$$f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (x-\mu)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right) 1_{] \mu, \infty[}(x)$$

L'absence des formules de forme explicites des fonctions de densité pour la plus parts des lois α -stables et les fonctions de distributions ont des conséquences négatives. Généralement, il y a deux approches à ce problème, la transformé de Fourier (fft, "fast Fourier transform") doit être appliqué à la fonction caractéristique voir, Mittnik, Doganoglu et Chenyao, [8] ou bien l'intégration directe numérique qui a été utilisé par Nolan, [10],[9].

Proposition 1.3 (propriétés de la densité)

1. La densité de probabilité d'une distribution α -stable est une fonction bornée.
2. La densité de probabilité d'une distribution α -stable est la classe C^∞ .

1.4.2 Stabilité

Proposition 1.4 *Pour $\alpha \neq 1$, on a l'équivalence suivante :*

X suit une loi $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu) \iff Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$.

preuve de proposition : Tout d'abord, remarquons que

$$\varphi_{mX+p}(t) = E[e^{it(mX+p)}] = e^{itp} \varphi_X(mt).$$

condition nécessaire : prenons $m = \frac{1}{\sigma}$ et $p = -\frac{\mu}{\sigma}$. On a alors :

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(-\frac{i\mu t}{\sigma}\right) \varphi_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(-\frac{i\mu t}{\sigma}\right) \exp\left\{\frac{i\mu t}{\sigma} - \sigma^\alpha \left|\frac{t}{\sigma}\right|^\alpha \left[1 - i\beta \cdot \text{sign}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \cdot \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right]\right\},$$

où $\text{sign}\left(\frac{t}{\sigma}\right) = \text{sign}(t)$ car $\sigma^\alpha > 0$.

Donc :

$$\varphi_Y(t) = \exp\left\{-|t|^\alpha \left[1 - i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right]\right\}.$$

qui est bien la forme de la fonction caractéristique d'une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$.

condition suffisante : la démonstration est similaire à la condition nécessaire en prenant $m = \sigma$ et $p = \mu$.

Pour la simulation, il suffit de générer des lois $S_\alpha(\beta, 1, 0)$ et par changement de variables, nous pouvons obtenir des lois $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$

1.4.3 Propriétés arithmétiques

Proposition 1.5 *Les variables aléatoires stables ont les propriétés suivantes :*

1) soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes avec $X_i \sim S_\alpha(\beta_i, \sigma_i, \mu_i)$ pour $i = \{1, 2\}$.

alors

$(X_1 + X_2) \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ où

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} ; \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} ; \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Notons que si $\beta_1 = \beta_2$ alors $\beta = \beta_1 = \beta_2$.

cette propriété d'additivité est très intéressante en finance, car deux titres ayant les mêmes valeurs des paramètres α mais les autres paramètres seront modifiés.

2) si X_1, X_2 suivent une loi α -stable $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$, $A \in \mathbb{R}^+$ et $B \in \mathbb{R}^+$ et $C \in \mathbb{R}$ alors $AX_1 + BX_2 + C \stackrel{d}{=} S_\alpha\left(\beta, \sigma(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \mu(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + C\right)$.

3) si $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$X + a \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu + a).$$

4) si $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ et a une constante réelle non nul,

$$\text{alors} \begin{cases} aX \sim S_\alpha(|a|\sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ aX \sim S_\alpha\left(|a|\sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\ln|a|)\beta\sigma\right) & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

5) pour $0 < \alpha < 2$ $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, 0) \iff -X \sim S_\alpha(\beta, -\sigma, 0)$.

6) soit X une variable aléatoire de loi $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ avec $\alpha \in]1, 2]$ alors $E(X) = \mu$

1.4.4 Queues lourdes

Proposition 1.6 soit X une variable aléatoire suit une loi $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ on a deux résultats suivants :

$$\begin{cases} t^\alpha p(X > t) \rightarrow \sigma^\alpha C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \text{ quand } t \rightarrow \infty \\ t^\alpha p(X < -t) \rightarrow \sigma^\alpha C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \text{ quand } t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.8)$$

Où C_α est une constante donnée par :

$$C_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x dx \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

la démonstration est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu (1994, pages 16-18).

Remarque 1.2 *L'égalité précédente nous fait penser à la caractérisation des lois pareto.*

En effet, une V.A.R. suit une loi du type pareto si :

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} h(x),$$

où $h(x)$ est une fonction à variation lente, c'est -à-dire pour tout $t > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1$.

Mandelbrot (1962) a montré que pour les lois α -stable, nous avons

$$p(X \geq x) = x^{-\alpha} [f_1(\alpha) + f_2(\alpha) x^{-\alpha} + o(x^{-2\alpha})].$$

par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on s'aperçoit que les lois stable sont asymptotiquement parétiennes.

1.4.5 Calcul des moments

Proposition 1.7 *si $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ alors :*

- 1) Si $\alpha = 2$, $\forall p$, $E|X|^p < +\infty$,
- 2) Si $0 < \alpha < 2$, $\begin{cases} \forall 0 \leq p < \alpha, E|X|^p < +\infty, \\ \forall p \geq \alpha, E|X|^p = +\infty, \end{cases}$

Remarque 1.3 *1) Dès que α est strictement inférieur à 2, la variance d'une loi α -stable est infinie.*

2) Dès que α est strictement inférieur à 1, c'est la moyenne qui devient infinie.

3) Si α est plus grand que 1, la moyenne d'une loi α -stable est μ .

soit $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$

Toutes les lois stables non-gaussiennes ont une variance infinie ou. L'existence d'une variance finie pour la loi normale est simplement liée à, une plus grande décroissance de queue par rapport aux autres lois stables.

| | $0 < \alpha \leq 1$ | $0 < \alpha < 2$ | $\alpha = 2$ |
|----------|---------------------|------------------|--------------|
| $E(X)$ | ∞ | μ | μ |
| $Var(X)$ | ∞ | ∞ | $2\sigma^2$ |

TAB. 1.1 – Moyenne et variance théorique d’une loi stable

1.5 Algorithme de simulation

pour simuler les lois stables, il existe un algorithme développé par Chambers et al. (1976). Celui-ci permet de générer une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$. Pour obtenir une loi $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$, il suffit de faire un changement de variables.

1.5.1 Première étape

Elle consiste à générer une loi uniforme Φ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et une loi W exponentielle de paramètre 1. Pour cela, il faut d’abord générer 2 v.a.r. uniformes sur $]0, 1[$ (notées U_1 et U_2). puis en utilisant le changement de variables suivant

$$\begin{cases} \Phi = \pi U_1 - \frac{\pi}{2}, \\ W = -\log(1 - U_2). \end{cases}$$

1.5.2 Deuxième étape

Elle consiste à calculer différentes quantités (fonction de Φ et de W).

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 - \alpha, \\ a = \tan \frac{\Phi}{2}, \\ b = \tan \frac{\varepsilon \Phi}{2}, \\ z = \frac{\cos(\varepsilon \Phi) - \tan(\alpha \phi_0) \sin(\varepsilon \Phi)}{W \cos(\Phi)}, \\ d = \frac{z^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} - 1}{\varepsilon}, \\ \tau = -\varepsilon \tan(\alpha \phi_0), \\ B = \frac{b}{\frac{\varepsilon \Phi}{2}}. \end{cases}$$

1.5.3 Troisième étape

Elle consiste à générer une loi Y stable $S_\alpha(\beta, 1, 0)$. pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante.

Proposition 1.8 *soit Φ une loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et W une loi exponentielle de paramètre 1, si on pose*

- pour $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ \frac{2(a-b)(1+ab) - \Phi\tau B[b(1-a^2) - 2a]}{(1-a^2)(1+b^2)} (1+\varepsilon d) + \tau \left(d + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\} \\ &= \frac{\sin \alpha (\Phi - \phi_0)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \end{aligned}$$

où

$$\phi_0 = -\frac{\pi\beta}{2} \frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha},$$

- pour $\alpha = 1$

$$Y = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{1}{2}\pi + \beta\Phi \right) \tan \Phi - \beta \log \left(\frac{\frac{1}{2}\pi W \cos \Phi}{\frac{1}{2}\pi + \beta\Phi} \right) \right),$$

alors la v.a.r Y suit une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$

Exemple 1.2 *Dans le cas d'une loi $S\alpha S$ (c'est -à-dire $\beta = 0$), nous avons*

$$Y = \frac{\sin(\alpha\Phi)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\Phi)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

plus particulièrement, dans le cas où α est égale à 2, nous avons

$$Y = \frac{\sin(2\Phi)}{\sqrt{\cos \Phi}} \left(\frac{\cos \Phi}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{W} \sin \Phi.$$

Enfin, dans le cas où α est égale à 1 et β égal à 0, nous avons

$$Y = \tan \Phi,$$

formule connue, qui permet de simuler une loi de Cauchy.

Remarque 1.4 *le cas $\alpha = 1$ se résout de manière similaire.*

1.5.4 Quelques exemples

Nous avons simulé 5000 réalisations de lois $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α . La table 1.2 présente les histogrammes faits à partir de ces simulations. Pour le cas α égale à 2, on peut reconnaître l'histogramme de la figure 1.5 d'une loi normale de moyenne 0 et de variance 2. Le tableau suivant représente la moyenne et la variance empirique des 5000 réalisations.

Ces résultats confirment l'équation sur le calcul des moments. En effet, lorsque α décroît vers 1, la variance explose et lorsque α devient plus petit que 1, c'est la moyenne qui commence à exploser.

| α | 2 | 1,7 | 1,5 | 1,2 | 1 | 0,9 |
|----------|------|------|-------|--------|---------|-------------|
| moyenne | 0,02 | 0,02 | 0,03 | 0,01 | -0,33 | 27,58 |
| variance | 2,02 | 6,70 | 36,96 | 150,97 | 2071,94 | 3214.206,71 |

TAB. 1.2 – Moyenne et variance empirique calculées sur 5000 réalisations.

1.6 Statistiques sur les lois symétriques alpha-stables

Dans cette partie, nous allons nous attarder sur les différentes manières de tester et d'estimer les paramètres d'une loi symétrique alpha-stable ($S\alpha S$) dont je rappelle la forme de la fonction caractéristique : $\varphi_X(t) = \exp\{-\sigma|t|^\alpha\}$. Que ce soit pour les problèmes de test de variance ou d'estimation des paramètres, nous supposons pour la suite que nous avons la suite d'observations (x_1, \dots, x_n) de la V.A.R. X définie juste avant par sa fonction caractéristique.

1.6.1 Tests sur la variance

Nous allons voir deux façons de tester si on est en présence d'une loi à variance infinie ou non (ces deux tests graphiques sont aussi valables pour n'importe quelle loi stable, symétrique ou non).

a) Test graphique 1

Ce premier test est très simple et se décompose en 2 étapes :

- calculer la variance empirique $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ (où $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$) pour différentes valeurs de n ,
- tracer le graphique (n, S_n^2) .

Intuitivement, lorsque n augmente et lorsque la variance est finie, le tracé doit converger.

Au contraire, si on est en présence d'une loi à variance infinie, le tracé diverge.

b) Test graphique 2

Ce deuxième test est basé sur le fait que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha P(|X| > t) = \sigma C(\alpha)$. Donc en $+\infty$, $\frac{d \log P(|X| > t)}{d \log t}$

est équivalent à α . Là aussi, 2 étapes sont nécessaires :

- fixer t et calculer la quantité $g(t) = \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{|X_i| > t} \right)$,
- tracer le graphique $(\log t, g(t))$ et voir si la pente devient finie à partir d'une certaine valeur de t .

c) Quelques exemples

Pour cela, nous avons repris les simulations de la section précédente. Les graphiques de la figure (1.6) représentent le test graphique 1. Ceux de la figure (1.7) représentent le test graphique 2. On peut remarquer que seul le cas égal à 2 fait converger la variance. Pour tous les

autres cas, il y a divergence.

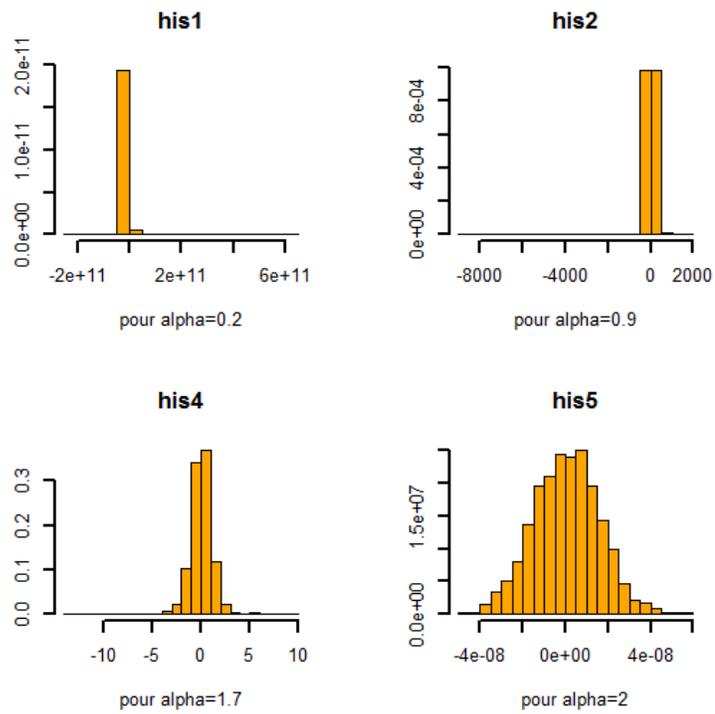


FIG. 1.5 – Histogrammes normalisés de lois $S_{\alpha S}$ pour différentes valeurs de α calculés sur 5000 réalisations.

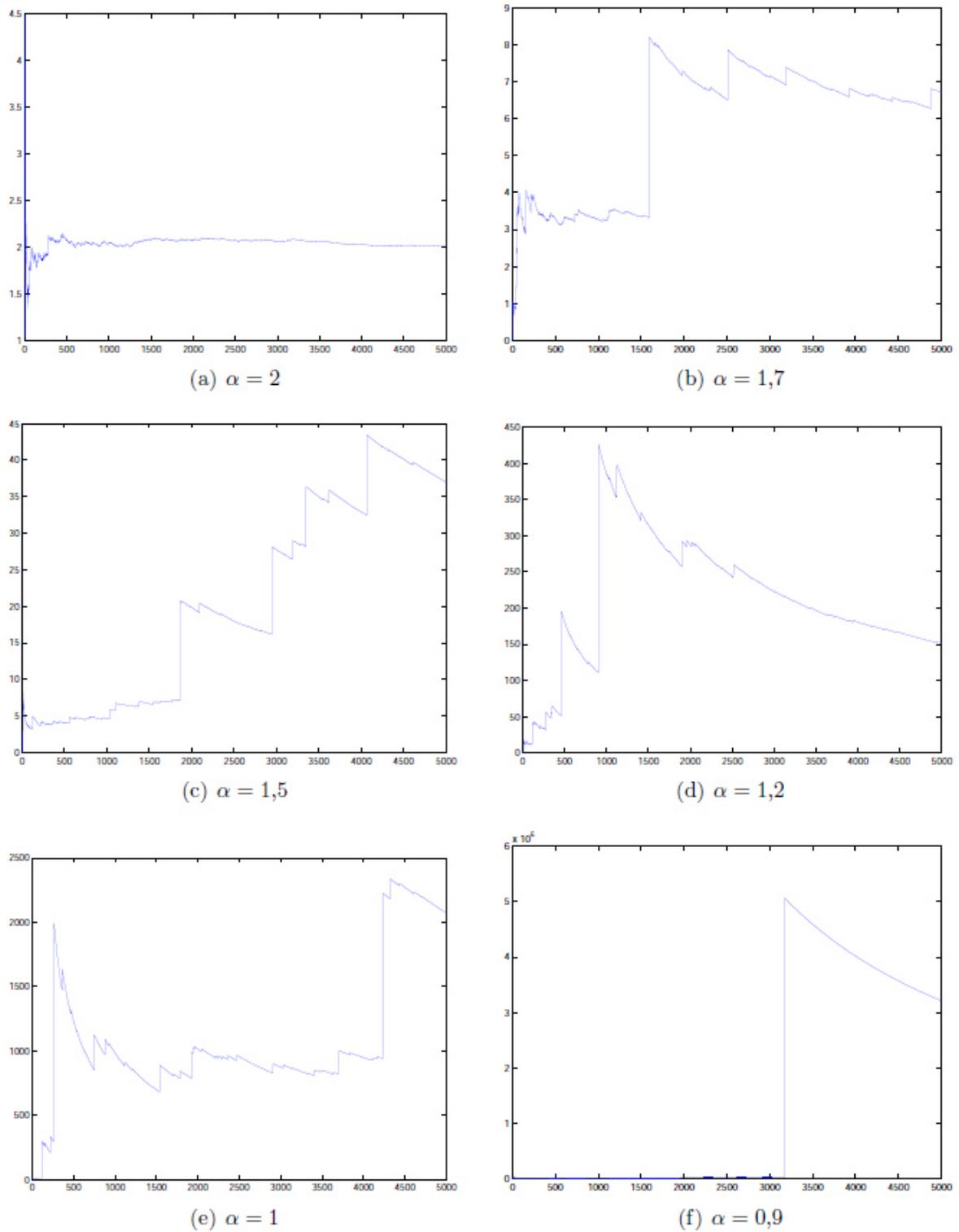
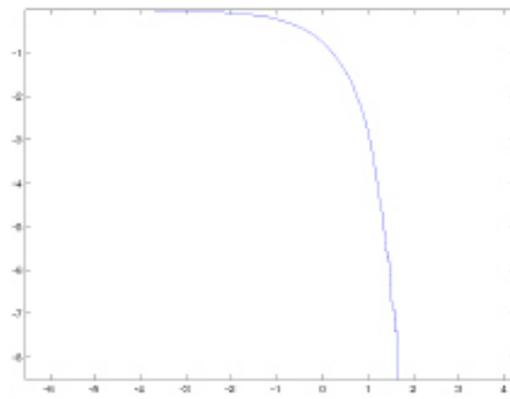
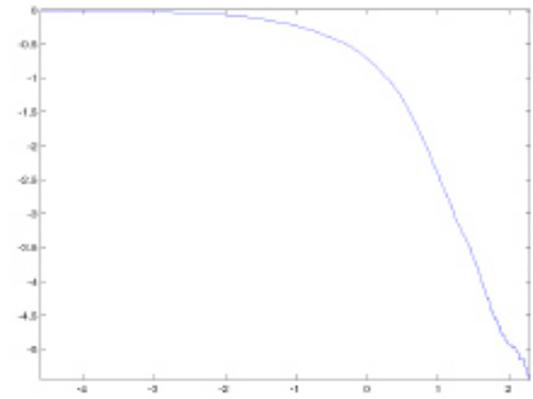


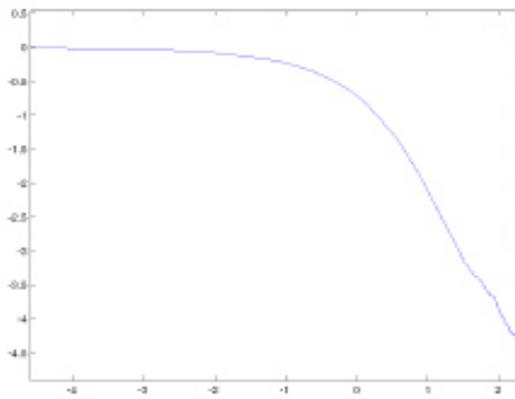
FIG. 1.6 – Test graphique 1 : variance empirique calculée pas à pas sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α .



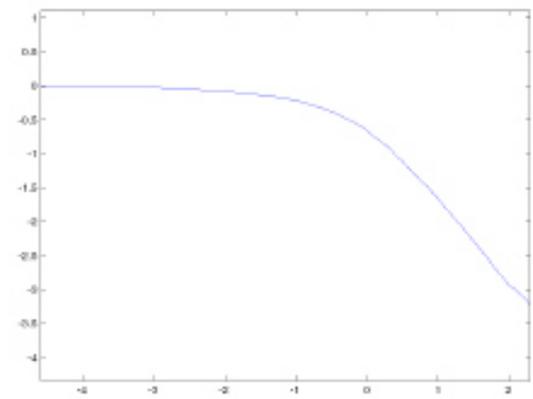
(a) $\alpha = 2$



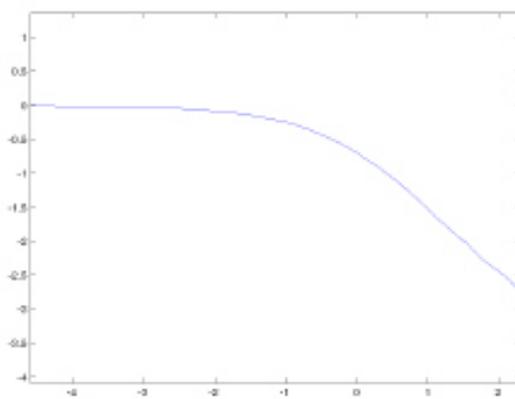
(b) $\alpha = 1,7$



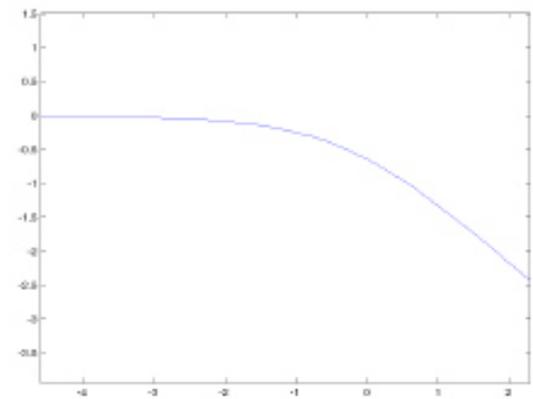
(c) $\alpha = 1,5$



(d) $\alpha = 1,2$



(e) $\alpha = 1$



(f) $\alpha = 0,9$

FIG. 1.7 – Test graphique 2 calculé sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α .

Chapitre 2

Estimation des paramètres des loi α -stable

Une loi α -stable est caractérisée par quatre paramètres d'où on peut les estimer, mais le vrai inconvénient dans cette estimation est l'absence d'une forme explicite de la fonction de densité (pdf). Cependant, un grand nombre des procédures numériques ont été proposé par plusieurs approches (Maximum de vraisemblance, régression utilisant la fonction caractéristique, la méthode des quantiles (McCulloch) et la méthode des moments), pour

2.1 Méthodes fondées sur les quantiles

Les méthodes présentées dans cette section utilisent les quantiles afin d'estimer les paramètres d'une distribution α -stable.

2.1.1 Méthode de fama-Roll

Fama et Roll [2] ont développé une méthode permettant d'estimer les paramètres les distribution α -stable à partir d'échantillons. Cependant, il existe plusieurs contraintes puisque les distributions doivent être symétriques et $\alpha \in]1, 2]$. La méthode développée s'appuie sur les quantiles des échantillons empiriques. Le f -quantile de la variable aléatoire X est calculé par $P(X \leq x) \geq f$.

Dans un premier temps, on estime la quantité σ :

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0.72} - \hat{x}_{0.28}}{1.654}$$

pour des valeurs de fractiles f élevés (0, 95; 0, 96 ou 0, 97), Fama et Roll proposent de calculer la quantité :

$$\hat{z}_f = \frac{\hat{x}_f - \hat{x}_{1-f}}{2\hat{\sigma}}$$

\hat{z}_f correspond à un estimateur du fractile f d'une distribution α -stable symétrique réduite.

2.1.2 Méthode de McCulloch

McCulloch [7] a proposé un algorithme dérivé de l'estimateur de Fama-Roll. Il a l'avantage de travailler dans le cas non -symétrique mais présente la contrainte $\alpha \in [0.6, 2]$. McCulloch définit :

$$v_\alpha = \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}} \text{ et } v_\beta = \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{0.95} - x_{0.05}}$$

On peu pose

$$v_\alpha = \varphi_1(\alpha, \beta) \text{ et } v_\beta = \varphi_2(\alpha, \beta)$$

À partir de ces valeurs, il est possible d'estimer α et β par :

$$\hat{\alpha} = \phi_1(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta) \text{ et } \hat{\beta} = \phi_2(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta)$$

En effet, pour chaque β , McCulloch a remarqué que la fonction v_α est une fonction strictement décroissante de α ; ce qui permet une estimation de α . De même, pour chaque α , la fonction v_β est une fonction strictement décroissante de β ; ce qui permet d'estimer β .

Ensuite, on définit la foction v_σ par :

$$v_\sigma = \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{\sigma}$$

Il est possible de connaître les variation de v_σ en fonction de $\varphi_3(\alpha, \beta)$. On obtient alors :

$$v_\sigma = \varphi_3(\alpha, \beta); \hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\varphi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

Pour paramètre de localisation μ McCulloch est définie v_η comme

$$v_\eta = \frac{\mu - x_{0.5}}{\sigma},$$

où

$$\eta = \begin{cases} \mu + \sigma\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ \mu & \text{pour } \alpha = 1. \end{cases}$$

on pose $v_\eta = \varphi_4(\alpha, \beta)$.

L'estimateur de η est donné par :

$$\hat{\eta} = \hat{x}_{0.5} + \hat{\sigma}\varphi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

L'estimateur de paramètre μ est donné par :

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \hat{\eta} - \hat{\beta}\hat{\sigma} \tan\left(\frac{\pi\hat{\alpha}}{2}\right) & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ \hat{\eta} & \text{pour } \alpha = 1. \end{cases}$$

comme \hat{x}_p est estimateur de x_p est un estimateur consistant de x_p , et que les fonction φ_i sont continues alors les estimateur des paramètre sont consistant.

2.2 Méthodes fondées sur la fonction caractéristique

Pour déterminer les paramètre de la loi α -stable, d'autres méthodes sont fondées sur l'utilisation de la fonction caractéristique empirique :

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(jtx_i)$$

La loi des grands nombres permet de dire que la fonction caractéristique empirique $\hat{\varphi}(t)$ est un estimateur cohérent de φ . Ces méthodes s'appuient sur des transformations de la fonction caractéristique.

2.2.1 Méthode de Press (moment)

Press [11, 12] propose une estimation fondée sur des transformations de la fonction caractéristique. Cette méthode est simple à mettre en oeuvre. Pour tout α :

$$|\varphi(t)| = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha)$$

En passant au logarithme décimal pour $t_1 \neq t_2$:

$$\hat{\alpha} = \frac{\log \frac{\log |\hat{\varphi}(t_1)|}{\log |\hat{\varphi}(t_2)|}}{\log \left| \frac{t_1}{t_2} \right|}$$

et pour $\alpha \neq 1$

$$\log \hat{\gamma} = \frac{\log |t_1| \log(-\log |\hat{\varphi}(t_1)|) - \log |t_2| \log(-\log |\hat{\varphi}(t_2)|)}{\log \left| \frac{t_1}{t_2} \right|}$$

En définissant $u(t) = \Im(\log \varphi(t))$, il est possible de déterminer β et μ :

$$u(t) = \mu t + \sigma^\alpha |t|^\alpha \beta \operatorname{sign}(t) \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

En choisissant deux valeurs $t_3 \neq t_4$, on obtient 2 équations :

$$\frac{u(t_k)}{t_k} = \mu + \beta \left[\sigma^\alpha |t|^{\alpha-1} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \quad (2.1)$$

$$\tan \hat{u}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \sin(tx_i)}{\sum_{i=1}^n \cos(tx_i)} \quad (2.2)$$

À partir des équations (2.1) et (2.2), on résout un système linéaire à deux équations :

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{u}(t_4)}{t_4} - \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3}}{(|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}) \hat{\gamma}^{\hat{\alpha}} \tan(\frac{\hat{\alpha}\pi}{2})}$$

et

$$\hat{\mu} = \frac{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}}$$

Dans le cas où $\alpha = 1$, on obtient :

$$\hat{\sigma} = -\frac{\log |\hat{\varphi}(t_1)|}{|t_1|}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{\frac{2}{\pi} \hat{\sigma} \log \left| \frac{t_4}{t_3} \right|}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\log |t_4| \left| \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} \right| - \log |t_3| \left| \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4} \right|}{\log \left| \frac{t_4}{t_3} \right|}$$

Weron [14] soulève le problème du choix des valeurs t_1, t_2, t_3 et t_4 . Par exemple, Koutrouvelis [4] propose de travailler avec $t_1 = 0.2, t_2 = 0.8, t_3 = 0.1$ et $t_4 = 0.4$. Cependant, Weron remarque que la méthode de Press [11, 12] est efficace dans le cas d'une distribution α -stable symétrique ($\beta = 0$ et $\mu = 0$) avec σ proche de 1 avec $t_1 = 0.2$ et $t_2 = 0.8$.

2.2.2 Méthode de régression

Koutrouvelis (1980)[4] propose une méthode de type régression qui estime les paramètres de loi stable à partir de la fonction caractéristique , on peut en déduire ensemble d'équations

$$|\varphi_X(t)|^2 = \exp(-2\sigma^\alpha |t|^\alpha).$$

$$\ln(-\ln |\varphi_X(t)|^2) = \ln(2\sigma^\alpha) + \alpha \ln |t|.$$

pour $\alpha \neq 1$ les parties réelles et imaginaires de $\varphi_X(t)$ sont données par :

$$\operatorname{Re} \varphi_X(t) = \exp(-|\sigma t|^\alpha) \cos \left[\mu t + |\sigma t|^\alpha \beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right],$$

$$\operatorname{Im} \varphi_X(t) = \exp(-|\sigma t|^\alpha) \sin \left[\mu t + |\sigma t|^\alpha \beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right],$$

D'après les deux dernières équations, on peut déduire sans considération sur la valeur principale de la fonction arctan.

$$\arctan \left(\frac{\operatorname{Im} \varphi_X(t)}{\operatorname{Re} \varphi_X(t)} \right) = \mu t + \beta \sigma^\alpha \tan \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sign}(t) |t|^\alpha$$

Dans le cas symétrique, il y a seulement deux paramètres à fixer α et σ .

Posons

$$y = \ln(-\ln |\varphi_X(t)|^2),$$

$$w = \ln |t|,$$

$$\lambda = \ln(2\sigma^\alpha).$$

Ainsi, estimer α et σ revient à estimer les paramètres α et λ du modèle

$$y_k = \lambda + \alpha w_k + \epsilon_k \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

où $\lambda = \ln(2\sigma^\alpha)$, $w_k = \ln |t_k|$.

$$y_k = \lambda + \alpha w_k + \epsilon_k \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

où ϵ_k est un terme d'erreur.

Si on pose

$$\hat{y}_k = \ln(-\ln |\hat{\varphi}_X(t_k)|^2)$$

$$\text{où } |\hat{\varphi}_X(t_k)|^2 = \frac{1}{n^2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \cos(t_k x_i) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n \sin(t_k x_i) \right]^2 \right\},$$

on peut proposer alors comme modèle, modèle linéaire suivant :

$$Y = \lambda + \alpha w + \epsilon.$$

1. D'après la définition, on sait que la partie imaginaire de la fonction caractéristique est nulle. On peut estimer la fonction caractéristique sans la partie sinus. On a alors :

$$\hat{\varphi}_X(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(t_k x_i)$$

2. Le choix des t_k , ainsi que le choix de K par rapport à n , se fait suivant la méthode décrite par Koutrouvelis (1980), c'est-à-dire

$$\forall k \in [1; K], t_k = \frac{\pi k}{25}$$

et le constante K est choisi suivant le tableau (2.1) ci dessous.

| | | | | | | | | | |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $n \backslash \alpha$ | 1.9 | 1.7 | 1.5 | 1.3 | 1.1 | 0.9 | 0.7 | 0.5 | 0.3 |
| 200 | 9 | 10 | 11 | 22 | 24 | 28 | 30 | 86 | 134 |
| 800 | 9 | 10 | 11 | 16 | 18 | 22 | 24 | 68 | 124 |
| 1600 | 10 | 10 | 11 | 14 | 15 | 18 | 20 | 56 | 118 |

TAB. 2.1 – Valeurs optimales de K en fonction de n et de alpha

a) Estimation du paramètre α

Par régression linéaire, on obtient

$$\hat{\alpha} = \frac{K \sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{k=1}^K \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2 - \left(\sum_{k=1}^K w_k \right)^2}$$

Si on prend $\sum_{k=1}^K w_k = 0$, l'estimation précédente est égale à

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{\sum_{k=1}^K w_k^2}$$

b) Estimation du paramètre σ

De même, par régression linéaire, on obtient

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^K w_k^2 \sum_{k=1}^K \hat{y}_k - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2 - \left(\sum_{k=1}^K w_k \right)^2}$$

On peut prendre $\sum_{k=1}^K w_k = 0$, l'estimation devient alors

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{y}_k$$

Ce qui entraîne que

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{2} \exp(\hat{\lambda}) \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

2.3 Méthode par moindres carrés

L'estimation à partir de la méthode des moindres carrés (Least Squares Estimation en anglais noté LSE) est un algorithme d'optimisation permettant d'approcher des données expérimentales, déterminées par les points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ à partir d'un modèle donné f . Cette méthode a été élaborée indépendamment par Gauss et Legendre. Le but est de minimiser la fonction de coût :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2^2$$

avec

$$F(x) = \begin{bmatrix} f(x, x_1) - y_1 \\ \vdots \\ f(x, x_n) - y_n \end{bmatrix}$$

On parle de régression linéaire lorsque la fonction utilisée est affine. Dans le cas de modèles non-linéaires, les algorithmes tels que la méthode à région de confiance [1] ou la méthode de Levenberg-Marquardt [[5], [6]] permettent d'estimer les valeurs des paramètres.

2.4 Méthode du maximum de vraisemblance

La méthode du maximum de vraisemblance, pour ses bonnes propriétés asymptotiques, est toujours une méthode à considérer. Dans notre problème, l'implantation de cette méthode a plusieurs inconvénients. La difficulté principale est dans le calcul de la vraisemblance, qui doit se faire de façon approchée, avec des méthodes numériques. Ceci implique que le coût calcul est significatif, sans compter l'erreur d'approximation induite par la formule intégrale.

2.5 Comparaison entre les différents estimateurs

Dans cette partie, nous proposons de comparer les différents estimateurs au travers de cas :

– une densité de probabilité unimodale.

nous comparons les performances des estimateurs suivants :

– la méthode des quantiles de McCulloch [7] (Quantile).

– la méthode de la fonction caractéristique de Koutrouvelis [4] (Moment).

– la méthode par maximum de vraisemblance (MLE).

– la méthode des moindres carrés (LSE).

En effet, les autres méthodes sont soit très coûteuses en temps de calcul, ou ont des contraintes de calculs trop fortes (par exemple la méthode de Fama et Roll ne doit pas être utilisée pour $\alpha \leq 1$, la méthode de Press donne un écart-type élevé pour des valeurs de σ n'étant pas égal à 1). Les performances des estimateurs sont évaluées en comparant les

temps de calcul moyens ainsi que la somme des résidus moyens. Nous donnons notamment un intervalle de confiance où la borne inférieure correspond au premier quartile et la borne supérieure au troisième quartile. Les temps de calcul des algorithmes proprement dits ont été déterminés sous Matlab, avec un processeur Intel *Xeon* à $3,47GHz$, sans optimisation particulière. Les temps de calcul sont donnés en unité *CPU*.

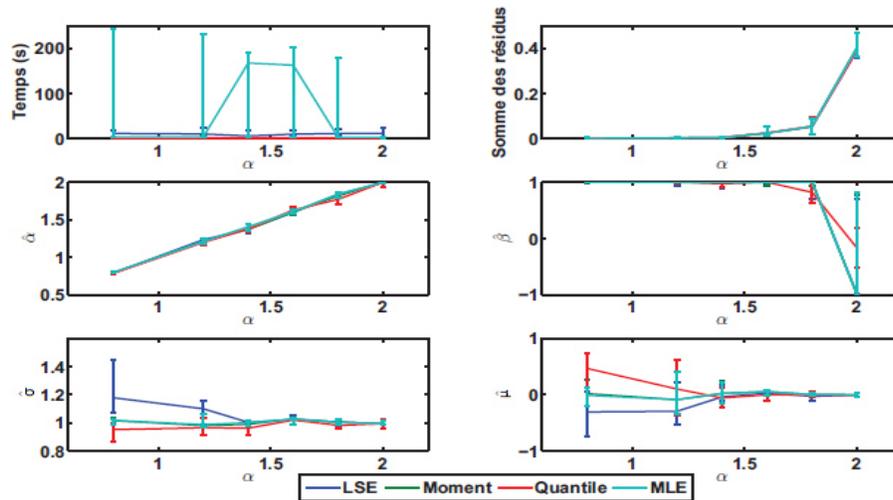


FIG. 2.1 – Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre α dans le cas d’une densité de probabilité unimodale $S_\alpha(1, 1, 0)$.

donnée dans la figure 2.1

Dans un premier temps, nous faisons varier l’exposant caractéristique $\alpha = [0, 8 \ 1, 2 \ 1, 4 \ 1, 6 \ 1, 8 \ 2]$, et en fixant le paramètre d’asymétrie $\beta = 1$, le paramètre de dispersion $\sigma = 1$ et le paramètre de position $\mu = 0$. À paramètre fixé, nous générons une distribution α -stable composée de $n = 1000$ échantillons en estimant chaque paramètre. La procédure d’estimation est répétée 15 fois sur des échantillons indépendants et de même loi. Nous observons sur la Figure 2.1 que le maximum de vraisemblance a le temps de calcul moyen le plus élevé avec une grande dispersion. La méthode de Koutrouvelis et des quantiles ont sensiblement le même temps de calcul qui est de l’ordre de la milliseconde avec une faible dispersion, tandis que la méthode des moindres carrés donne un temps de calcul de l’ordre de la seconde avec une faible dispersion. En termes de minimisation de la somme des résidus, on remarque

que les estimateurs ont le même comportement. On note aussi que la somme des résidus augmente lorsque $\alpha > 1,6$. En termes d'estimation des paramètres, on remarque que les quatre méthodes

donnent des résultats satisfaisants pour le paramètre α . Pour les autres paramètres, les valeurs exactes ne sont pas forcément vérifiées mais les ordres de grandeurs sont respectés. En réalité, une distribution α -stable est caractérisée par quatre paramètres lui permettant d'avoir plus de souplesse en termes d'estimation, en ce sens qu'il y a plus de degrés de liberté pour l'estimation des paramètres.

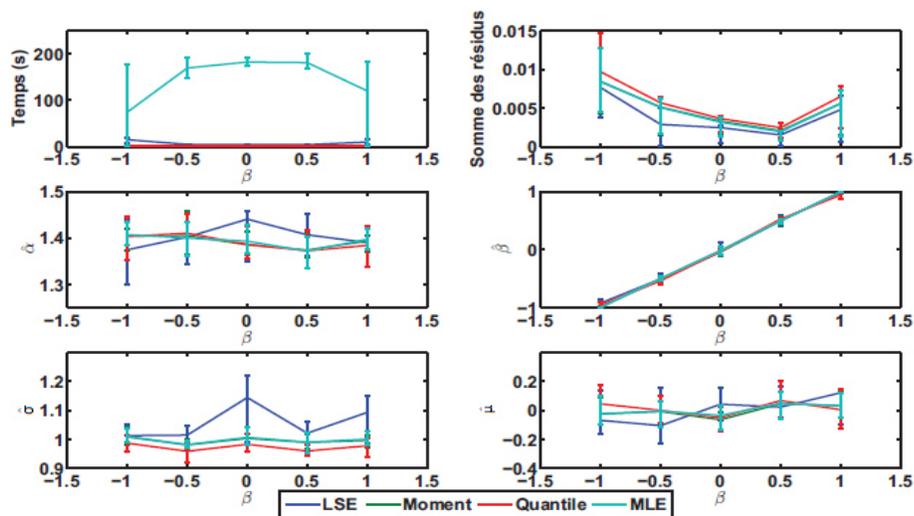


FIG. 2.2 – Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre β dans le cas d'une densité de probabilité unimodale

donnée dans la figure 2.2

Dans un second temps, nous varions le paramètre d'asymétrie $\beta = [-1 \ -0,5 \ 0 \ 0,5 \ 1]$ et nous fixons l'exposant caractéristique $\alpha = 1,4$, le paramètre de dispersion $\sigma = 1$ et le paramètre de position $\mu = 0$. La Figure 2.2 permet d'observer les performances des différents estimateurs en faisant varier le paramètre β . Nous remarquons que le maximum de vraisemblance est plus coûteux en temps de calcul mais reste raisonnable (environ 3 minutes). En terme de minimisation de la somme des résidus, la méthode des moindres carrés est la plus performante. Les estimateurs permettent d'offrir une estimation exacte du paramètre d'asymétrie

β . Cependant, les autres paramètres sont plus ou moins bien estimés.

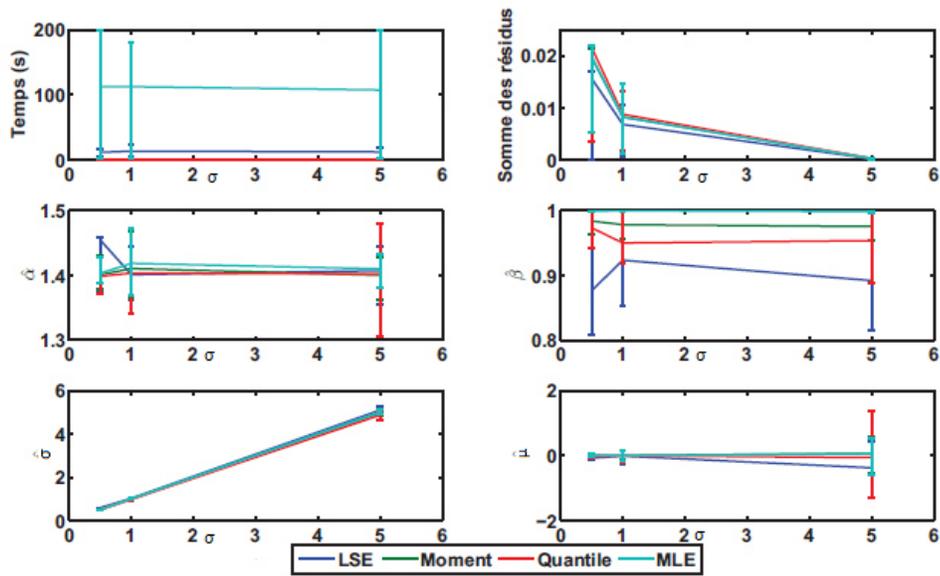


FIG. 2.3 – Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre σ dans le cas d’une densité de probabilité unimodale $S_{1,4}(1, \sigma, 0)$.

donnée dans la figure 2.3

Ensuite, le paramètre de dispersion est étudié en le faisant varier pour des valeurs $\sigma = [0, 5 \ 1 \ 5]$ et en fixant l’exposant caractéristique $\alpha = 1,4$, le paramètre d’asymétrie $\beta = 1$ et le paramètre de position $\mu = 0$. Comme dans les cas précédents, le maximum de vraisemblance est le moins performant en terme de temps de calcul tandis que la méthode des moindres carrés est la plus performante en terme de minimisation de la somme des résidus (Figure 2.3). Pour les quatre méthodes, le paramètre de location σ semble être bien estimé tandis que les ordres de grandeur des autres paramètres sont respectés.

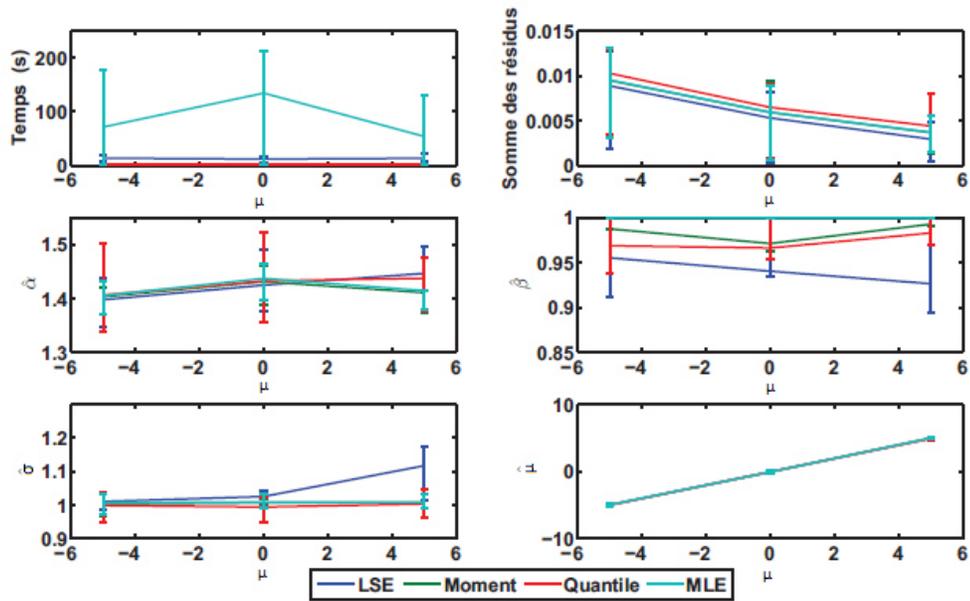


FIG. 2.4 – Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre μ dans le cas d’une densité de probabilité unimodale $S_{1,4}(1, 1, \mu)$.

donnée dans la figure 2.4

Enfin, le paramètre de position est modifié sur une plage de valeurs $\sigma = [-5 \ 0 \ 5]$ tandis que nous fixons l’exposant caractéristique $\alpha = 1.4$, le paramètre d’asymétrie $\beta = 1$ et le paramètre de dispersion $\sigma = 1$. La performance du maximum de vraisemblance est faible en terme de temps de calcul tandis que la méthode des moindres carrés offre la meilleure performance pour la minimisation de la somme des résidus (Figure 2.4).

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une classe particulière de distributions statistiques : les distribution α -stables dans le cas univarié. Dans une première partie nous du premier chapitre , nous avons présenté les différentes définition de loi stable de quatre manière équivalentes nous donnons l'interprétation pratique de chaque paramètre de cette distribution et ses diverses propriétés de ces lois (densité, Propriétés arithmétiques, stabilité, calcul des moments, simulation). Ensuite qui dit que Toutes les lois stables non-gaussiennes ont une variance infinie ou et L'existence d'une variance finie pour la loi normale est simplement liée à une plus grande décroissance de queue par rapport aux autres lois stables. Dans un deuxième chapitre nous présentons ensuite les différentes approches classiques pour estimer les paramètres caractérisant les lois stables, Il existe quatre grandes familles d'estimateurs permettant d'estimer une variable aléatoire α -stable unimodale : la méthode des quantiles, la méthodes utilisant la fonction caractéristique, le maximum de vraisemblance et la méthode des moindres carrés. La méthode par maximum de vraisemblance est très peu utilisée car elle est coûteuse en temps de calcul. La méthode utilisant la fonction caractéristique proposée par Koutrouvelis semble être un meilleur algorithme lorsque l'on prend en compte le temps de calcul et la qualité de l'estimation que celui de la méthode des quantiles proposée par McCulloch. Curieusement, nous n'avons pas retrouvé de méthodes utilisant les moindres carrés dans la littérature. Cette méthode a été programmée et nous constatons qu'elle permet de bien minimiser l'erreur quadratique lorsqu'on la compare aux autres méthodes.

Bibliographie

- [1] Coleman, T.F. et Li, Y. : An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on Optimization*, 6 :pp. 418–445, 1996.
- [2] Fama, E.F. et Roll, R. : Parameter estimates for symmetric stable distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 66(334) :pp. 331–338, 1971.
- [3] *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2) :pp. 431–441, June 1963.
- [4] Koutrouvelis, I.A. : Regression-type estimation of the parameters of stable laws. *Journal of the American Statistical Association*, 75(372) :pp. 918–928, December 1980.
- [5] Levenberg, K. : A method for the solution of certain problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2 :pp. 164–168, 1944.
- [6] Marquardt, D.W. : An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters.
- [7] McCulloch, J.H. : Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 15(4) :pp. 1109–1136, 1986.
- [8] Mittnik Stefan, Doganoglu T. et Chenyao D.,1999.Computing the Probability Density Function of the Stable Paretian Distribution. *Mathematical and Computer Modelling*, 29, N 10-12, p. 235-240.
- [9] Nolan J.P., 1999. An Algorithm for Evaluating Stable Densities in Zolotarev's (M) Parameterization. *Mathematical and Computer Modelling*, 29, N 10-12, p. 229-233.
- [10] Nolan J.P.,*Communications in Statistics-Stochastic Models* 13 (1997) 759.The computer program STABLE can be downloaded from : <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>.

- [11] Press, S.J. : Applied multivariate analysis. Holt, Rinehart and Winston, 1972.
- [12] Press, S.J. : Estimation in univariate and multivariate stable distributions. Journal of the American Statistical Association, 67(340) :pp. 842–846, 1972
- [13] Samorodnitsky G.et Taqqu M. S (1994). Stable non-Gaussian random processes. Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York-London.
- [14] Weron, R. : Performance of the estimators of stable law parameters. Rapport technique HSC/95/01, Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology, 1995.
- [15] Zolotarev, V.M., 1986. One-dimensional Stable Distributions. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.
- [16] Zolotarev, V.M. (1986). One-dimensional stable distributions, Trans. of Math. Monographs, AMS Vol. 65

Annexe A : Logiciel *R*

R est un système, communément appelé langage et logiciel, qui permet de réaliser des analyses statistiques. Plus particulièrement, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les calculs et les représentations graphiques. *R* a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fichiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques appelées paquets. Ces derniers permettent de traiter assez rapidement des sujets aussi variés que les modèles linéaires (simples et généralisés), la régression (linéaire et non linéaire), les séries chronologiques, les tests paramétriques et non paramétriques classiques, les différentes méthodes d'analyse des données,... Plusieurs paquets, tels *ade4*, *FactoMineR*, *MASS*, *multivariate*, *scatterplot3d* et *rgl* entre autres sont destinés à l'analyse des données statistiques multidimensionnelles.



FIG. 2.5 – titre

Il a été initialement créé, en 1996, par *Robert Gentleman* et *Ross Ihaka* du département de statistique de l'Université d'Auckland en Nouvelle Zélande. Depuis 1997, il s'est formé

une équipe "*R Core Team*" qui développe *R*. Il est conçu pour pouvoir être utilisé avec les systèmes d'exploitation *Unix*, *Linux*, *Windows* et *MacOS*.

Un élément clé dans la mission de développement de *R* est le *Comprehensive R Archive Network* (CRAN) qui est un ensemble de sites qui fournit tout ce qui est nécessaire à la distribution de *R*, ses extensions, sa documentation, ses fichiers sources et ses fichiers binaires. Le site maître du CRAN est situé en Autriche à Vienne, on peut y accéder par l'URL : "<http://cran.r-project.org/>". Les autres sites du CRAN, appelés sites miroirs, sont répandus partout dans le monde.

R est un logiciel libre distribué sous les termes de la "GNU Public Licence". Il fait partie intégrante du projet GNU et possède un site officiel à l'adresse "<http://www.R-project.org/>". Il est souvent présenté comme un clone de *S* qui est un langage de haut niveau développé par les *AT&T Bell Laboratories* et plus particulièrement par *Rick Becker*, *John Chambers* et *Allan Wilks*. *S* est utilisable à travers le logiciel *S-Plus* qui est commercialisé par la société *Insightful* (<http://www.splus.com/>).

A.1-Programme pour dessiner les Courbes de la densité.

(Même chose pour les autres paramètres, chaque fois on change la valeur d'un seul paramètre)

```
n<-5000
```

```
x1<-c(1,n)
```

```
x2<-c(1,n)
```

```
x3<-c(1,n)
```

```
beta<-0
```

```
sigma<-1
```

```
mu<
```

```
alpha<-2
```

```
y<-c(1 :n)
```

```
for(i in 1 :n)
```

```
{v<-runif(1,-pi/2,pi/2)
```

```
w<-rexp(1)
```

```
c<-(1/alpha)*atan(beta*tan(pi*alpha/2))
d<-(1+((beta)^2)*(tan(pi*alpha/2))^2)^(1/(2*alpha))
z<-(cos(v-alpha*(v+c))/w)^((1-alpha)/alpha)
x1[i]<-d*sin(alpha*(v+c))/((cos(v))^(1/alpha))*z}
x1<-sigma*x1+mu
s1<-sd(x1)
stab1<-density(x1)
alpha<-1.6
y<-c(1 :n)
for(i in 1 :n)
{v<-runif(1,-pi/2,pi/2)
w<-rexp(1)
c<-(1/alpha)*atan(beta*tan(pi*alpha/2))
d<-(1+((beta)^2)*(tan(pi*alpha/2))^2)^(1/(2*alpha))
z<-(cos(v-alpha*(v+c))/w)^((1-alpha)/alpha)
x2[i]<-d*sin(alpha*(v+c))/((cos(v))^(1/alpha))*z}
x2<-sigma*x2+mu
s2<-sd(x2)
stab2<-density(x2)
alpha<-1.4
y<-c(1 :n)
for(i in 1 :n)
{v<-runif(1,-pi/2,pi/2)
w<-rexp(1)
c<-(1/alpha)*atan(beta*tan(pi*alpha/2))
d<-(1+((beta)^2)*(tan(pi*alpha/2))^2)^(1/(2*alpha))
z<-(cos(v-alpha*(v+c))/w)^((1-alpha)/alpha)
x3[i]<-d*sin(alpha*(v+c))/((cos(v))^(1/alpha))*z}
```

```
x3<-sigma*x3+mu
s3<-sd(x3)
stab3<-density(x3)
plot(density(rnorm(n),bw=300),lty=3,xlim=c(-5,5),ylim=c(0,0.5),main=" ",xlab="x",ylab="Density")
lines(stab1,col=3)
lines(stab2,col=4)
lines(stab3,col=2)
legend(3,0.3,c("alpha=1.4","alpha=1.6","alpha=2"),col=c(2,4,3),lty=c(1,5),cex=0.6)
```

A.2-Programme pour dessiner les Histogrammes normalisés de lois $S_{\alpha S}$ pour différentes valeurs de α calculés.

```
par(mfrow=c(2,2))
n<-1000
x1<-c(1,n)
y1<-c(1,n)
z1<-c(1,n)
t1<-c(1,n)
beta<-0
sigma<-1
mu<-0
alpha<-0.9
y<-c(1,n)
for(i in 1 :n)
{v<-runif(1,-pi/2,pi/2)
w<-rexp(1)
c<-(1/alpha)*atan(beta*tan(pi*alpha/2))
d<-((1+(beta)^2)*(tan(pi*alpha/2))^2)^(1/(2*alpha))
z<-((cos(v-alpha*(v+c))/w)^((1-alpha)/alpha)
x1[i]<-d*sin(alpha*(v+c))/((cos(v))^(1/alpha))*z}
```

```
x<-sigma*x1+mu
y<-density(x)
alpha<-1.2
y<-c(1,n)
for(i in 1 :n)
{v<-runif(1,-pi/2,pi/2)
w<-rexp(1)
c<-(1/alpha)*atan(beta*tan(pi*alpha/2))
d<-((1+(beta)^2)*(tan(pi*alpha/2))^2)^(1/(2*alpha))
z<-((cos(v-alpha*(v+c))/w)^((1-alpha)/alpha))
y1[i]<-d*sin(alpha*(v+c))/((cos(v))^(1/alpha))*z}
x<-sigma*y1+mu
y<-density(x)
alpha<-1.7
y<-c(1,n)
for(i in 1 :n)
{v<-runif(1,-pi/2,pi/2)
w<-rexp(1)
c<-(1/alpha)*atan(beta*tan(pi*alpha/2))
d<-((1+(beta)^2)*(tan(pi*alpha/2))^2)^(1/(2*alpha))
z<-((cos(v-alpha*(v+c))/w)^((1-alpha)/alpha))
z1[i]<-d*sin(alpha*(v+c))/((cos(v))^(1/alpha))*z}
x<-sigma*z1+mu
y<-density(x)
alpha<-2
y<-c(1,n)
for(i in 1 :n)
{v<-runif(1,-pi/2,pi/2)
```

```
w<-rexp(1)
c<-(1/alpha)*atan(beta*tan(pi*alpha/2))
d<-((1+(beta)^2)*(tan(pi*alpha/2))^2)^(1/(2*alpha))
z<-(cos(v-alpha*(v+c))/w)^((1-alpha)/alpha)
t1[i]<-d*sin(alpha*(v+c))/((cos(v))^(1/alpha))*z}
x<-sigma*t1+mu
y<-density(x)
hist(x,probability=T,xlab="pour alpha=0.9",ylab=" ",col="orange",nclass=30,main="his1",lwd=2,lty=)
hist(x,probability=T,xlab="pour alpha=1.2",ylab=" ",col="orange",nclass=30,main="his2",lwd=2,lty=)
hist(x,probability=T,xlab="pour alpha=1.7",ylab=" ",col="orange",nclass=30,main="his3",lwd=2,lty=)
hist(x,probability=T,xlab="pour alpha=2",ylab=" ",col="orange",nclass=30,main="his4",lwd=2,lty=)
```

Annexe B : Abréviations et Notations

| Symbole | Signification |
|-------------------|--|
| exp | exponentiel |
| F | fonction de répartition |
| F_n | fonction de répartition empirique |
| \Im | Partie imaginaire |
| i.e. | en d'autre terme |
| R^+ | ensemble réel positif |
| R | ensemble réel |
| var X | variance de X |
| $\stackrel{d}{=}$ | égale en distribution |
| i.i.d | indépendantes identiquement distribuées |
| v.a. | variable aléatoire |
| v.a.r | variable aléatoire réel |
| $\mathbb{E}[X]$ | espérance mathématique ou moyenne du v.a. X . |
| \simeq | $f(x) \simeq g(x)$; quand $x \rightarrow x_0 : f(x)/g(x) \rightarrow 1$; quand $x \rightarrow x_0$ |

Résumé :

Les lois stables sont une famille de lois qui présentent un grand intérêt dans la modélisation des problèmes dans plusieurs domaines, elles sont utilisées pour modéliser les rendements des actifs. Ces lois sont caractérisées par quatre paramètres dont l'estimation est faite selon plusieurs méthodes. Dans ce mémoire, on étudié les méthodes d'estimation suivant quantiles, moments, maximum de vraisemblance et de fonction caractéristique, et on Compare entre les différents estimateurs.

Mots clés : Estimation des paramètres, Loi α -stable, Modélisation, simulation.

Abstract :

Stable laws are a family of laws that are of great interest in modeling problems in several areas, they are used to model asset returns. These laws are characterized by four parameters, the estimation of which is made according to several methods. In this thesis, we studied the estimation methods according to quantiles, moments, maximum likelihood and characteristic function, and we compare between the different estimators.

Key words : Estimation of parameters, α -stable laws, Modeling, Simulation.

ملخص :

القوانين المستقرة هي عائلة من القوانين التي تمثل اهمية كبيرة في نمذجة المشاكل في العديد من المجالات، فهي تستخدم لنموذج عوائد الأصول. و تتميز هذه القوانين بأربع وسائط يتم تقديرها باستخدام عدة طرق. في هذه المذكرة، يتم دراسة طرق التقدير الآتية، maximum de vraisemblance, quantiles, moments, fonction caractéristique, طرق التقدير
كلمات البحث : تقدير الوسائط, قانون مستقر, محاكاة, نمذجة.