

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Statistique**

Par

**KHINECHE Halima**

Titre :

Matrice de lissage dans le modèle de stock de  
type  $(R, s, S)$

Membres du Comité d'Examen :

Dr. CHINE Amel	UMKB	Présidente
Dr. CHERFAOUI Mouloud	UMKB	Encadreur
Dr. BENBRAIKA Ghazlene	UMKB	Examinatrice

Juin 2020

## DÉDICACE

*A mes très chers parents,*

*A ma adorable soeur,*

*A mes chers frères,*

*A tous mes proches, amis et collègues.*

## REMERCIEMENTS

*Merci "Allah" de m'avoir donnée la santé, le courage et la patience  
pour mener à terme ce projet de fin d'études.*

*Un grand remerciement à mes très chers parents qui m'ont toujours encouragés,  
ils ont toujours aimé me voir réussir. Merci pour tout ce qu'ils m'ont fait.*

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur Dr. CHERFAOUI Mouloud  
Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.*

*Je remercie tous mes enseignants et je tiens à remercier également les membres de jury  
qui me font l'honneur d'évaluer ce travail.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui  
m'ont apportée une aide pour la réalisation de ce travail.*

*Merci à tous*

# Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	v
Liste des tables	vi
Introduction générale	1
<b>1 Estimation à noyau associé d'une densité discrète</b>	<b>4</b>
Introduction . . . . .	4
1.1 Estimation à noyau d'une densité . . . . .	4
1.2 Notion de noyau discret . . . . .	6
1.3 Propriété de l'estimateur à noyau discret . . . . .	6
1.4 Noyaux discrets standards (de premier ordre) . . . . .	8
1.4.1 Le noyau Poissonnien . . . . .	8
1.4.2 Le noyau Binomial . . . . .	9
1.4.3 Le noyau Binomial Négatif . . . . .	10
1.5 Noyaux discrets de deuxième ordre . . . . .	11
1.5.1 Le noyau Dirac . . . . .	11
1.5.2 Le noyau Triangulaire . . . . .	12
1.6 Efficacité d'un noyau discret . . . . .	13
1.7 Choix du paramètre de lissage . . . . .	15

1.7.1	Choix global du paramètre de lissage . . . . .	15
1.7.2	Choix local du paramètre de lissage . . . . .	18
	Conclusion . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Choix du paramètre de lissage local : Matrice de lissage</b>	<b>19</b>
	Introduction . . . . .	19
2.1	Description du modèle $(R, s, S)$ . . . . .	19
2.2	Probabilités de transition . . . . .	21
2.3	Estimation à noyau de la matrice de transition . . . . .	21
2.4	Choix local du paramètre de lissage . . . . .	23
	Conclusion . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Application numérique : Étude comparative</b>	<b>26</b>
	Introduction . . . . .	26
3.1	Présentation de l'application et de ses paramètres . . . . .	26
3.2	Résultats de simulation et leurs discussions . . . . .	28
3.3	Discussion des résultats . . . . .	30
	Conclusion . . . . .	31
	<b>Conclusion générale</b>	<b>32</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>

# Table des figures

2.1	Schéma illustratif du Processus du niveau du stock dans le système (R, s, S). . .	20
-----	---	----

# Liste des tableaux

1.1	Résumé des propriétés de quelques noyaux discrets. . . . .	15
3.1	Caractéristiques de l'estimateur de $Q$ : cas de la distribution de Poisson. . . .	28
3.2	Caractéristiques de l'estimateur de $Q$ : cas de la distribution Binomiale. . . .	29
3.3	Caractéristiques de l'estimateur de $Q$ : cas de la distribution Géométrique. . .	30

# Introduction générale

L'objet principal de la statistique est de faire à partir d'observations d'un phénomène aléatoire, une inférence au sujet de la loi générant ces observations en vue d'analyser le phénomène ou de prévoir un événement futur. Ainsi, pour réduire la complexité du phénomène étudié, nous pouvons utiliser deux approches statistiques à savoir : l'approche paramétrique et l'approche non paramétrique.

L'approche paramétrique consiste à supposer que  $f$  appartient à une famille de densités continues ou discrètes qui peuvent être décrites par un certain nombre de paramètres réels. Cette approche a comme inconvénient principal de nécessiter une connaissance préalable sur la loi de probabilité du phénomène aléatoire qu'on étudie. Pour pallier les insuffisances et les défauts de cette première approche, on fait appel à l'approche non-paramétrique, qui permet d'estimer la densité de probabilité directement à partir de l'information disponible sur l'ensemble d'observations. On dit souvent, dans cette approche, que les données parlent d'elles-mêmes. Nous nous intéressons dans le présent document uniquement à l'estimation d'une densité par la méthode du noyau qui fait partie des approches non-paramétriques.

L'estimation de la densité par la méthode du noyau qui peut être vue comme une extension de la méthode d'estimation par histogramme, est la plus populaire parmi les multiples méthodes d'estimation non paramétriques de la densité. Cette popularité de l'estimateur à noyau peut s'expliquer par au moins trois raisons : la simplicité de sa forme, ses modes de convergence multiples et sa flexibilité qui s'interprète par la liberté de l'utilisateur dans le choix du noyau  $K$  et du paramètre de lissage  $h$ . L'estimateur à noyau a été proposé initialement par Rosenblatt [16] et Parzen [13] pour estimer la fonction de densité  $f$  à support non borné.

Pour estimer une fonction de densité discrète (dite généralement, fonction de masse de probabilité) par l'approche non-paramétrique, l'estimateur empirique appelé aussi estimateur à noyau du type Dirac est souvent utilisé en raison de sa simplicité. Cependant, les résultats fournis par ce noyau sont loin d'être satisfaisants lorsqu'on dispose d'un échantillon de petite ou de moyenne taille. Pour de telles situations, deux autres classes de noyaux discrets, à savoir les noyaux discrets standards (Noyau Binomial, Binomial Négatif et Poisson) et les noyaux triangulaires discrets, ont été proposés par Kokonendji et [9], Senga Kiessè [7] et Kokonendji et Senga Kiessè [8] pour estimer des fonctions discrètes à support discret (par exemple l'ensemble  $\mathbb{N}$ ). Ces derniers ont introduit la notion de l'estimateur à noyau associé, en donnant la définition d'un noyau associé  $K_{x,h}$  de cible  $x$  et de paramètre de lissage  $h$  conçu à partir d'une loi de probabilité discrète.

Dans ce document, nous proposons de considérer un système de gestion de stock de type  $(R, s, S)$  modélisé par une chaîne de Markov sous l'hypothèse que la distribution des demandes est une fonction de masse générale et inconnue. En outre, notre objectif est d'estimer la matrice de transition associée à ce modèle qui est d'une grande importance dans l'analyse transitoire et stationnaire de ce dernier, et qui nous permet également de déduire la totalité du reste de ses mesures de performance. Une telle étude apparaît auparavant dans [1, 2] où des études détaillées sur le problème du choix du paramètre de lissage par les approches classique et par la minimisation de certaines normes matricielles, pour un estimateur à noyau de la matrice de transition de la chaîne de Markov discrète correspondante au modèle de stock de type  $(R, s, S)$ , a été présenté. Cependant, quoique les études réalisées dans [1, 2] montrent l'intérêt de la minimisation des normes matricielles pour la sélection du paramètre de lissage, il reste que les procédures de sélection proposées sont restreintes uniquement dans un cadre théorique non exploitable dans la pratique. En 2019, Messai [12] a proposé une version exploitable dans la pratique pour le choix du paramètre de lissage par la minimisation de la norme matricielle quadratique et cela en utilisant la technique de validation croisée. Mais il est à souligner que dans les travaux [1, 2, 12], les auteurs n'ont considéré que le cas du choix global du paramètre de lissage. Dans ce document nous proposons de compléter ces trois

derniers travaux toute en considérons le cas du choix local du paramètre de lissage. En effet, il serait intéressant d'étudier l'impact de la sélection du paramètre de lissage minimisant un certain critère d'erreur de chaque composante de la matrice  $P$  (choix local) sur la qualité des estimations. Ceci se résume à la sélection de plusieurs paramètres de lissage qui se présentent sous forme d'une matrice qu'on appellera désormais une Matrice de lissage.

Pour répondre à notre objectif nous avons organisé notre mémoire comme suit :

**Le premier chapitre** est consacré à la présentation de l'estimateur à noyau d'une densité discrète. Nous avons commencé par l'introduction de notion du noyau discret et leur construction. Par la suite, nous avons exposé les propriétés fondamentales de convergence et le problème du choix du noyau et du choix du paramètre de lissage dans ce cadre.

**Dans le second chapitre**, après une brève description du modèle de stock de type  $(R, s, S)$  et de sa matrice de transition, nous avons décrit l'estimateur à noyau de la matrice de transition associée à ce modèle ainsi que le problème du choix du paramètre de lissage dans cette situation en particulier le choix de matrice de lissage (choix local).

Notre contribution effective se trouve dans le **troisième chapitre** qui est la partie application. Dans cette partie, l'effet du choix du paramètre de lissage via l'approche locale et l'approche globale sur la qualité de l'estimateur, de la matrice de transition en question, a été analysé numériquement. Plus précisément, le but est de comparer la qualité des estimateurs conçus à l'aide de la matrice de lissage avec ceux conçus à l'aide des paramètres de lissage sélectionnés par des procédures globale qui se basent sur la norme matricielle quadratique.

# Chapitre 1

## Estimation à noyau associé d'une densité discrète

### Introduction

L'objectif du présent chapitre est de mettre en lumière la notion de l'estimation à noyau discret d'une densité discrète. Pour ce faire, dans un premier lieu nous allons introduire la notion et la définition d'un noyau discret et de l'estimateur conçu via ce dernier ainsi que certaines de ces propriétés. Par la suite, notre intérêt portera sur le problème du choix du noyau et du paramètre de lissage dans le cadre de l'estimation à noyau d'une densité discrète.

### 1.1 Estimation à noyau d'une densité

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon *iid* (indépendant identiquement distribué) issu d'une densité de probabilité inconnue  $f$ .

L'estimateur classique de  $f$  en un point (cible)  $x$  obtenu par la méthode du noyau, proposé par Rosenblatt [16] suivi de Parzen [13] est donné sous la forme suivante :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (1.1)$$

où  $h$  représente le paramètre de lissage et  $K$  est un noyau qui vérifie les conditions suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} K(y)dy = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} yK(y)dy = 0, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} y^2 K(y)dy = \sigma_k^2 < \infty. \quad (1.2)$$

L'estimateur à noyau continu (1.1) a été développé principalement pour les densités à supports continus et non bornés. La fonction noyau  $K$  est classiquement symétrique (i.e.  $K(-x) = K(x)$ ), et elle est considérée comme moins importante que le paramètre de lissage  $h$ . Bien qu'un noyau symétrique soit approprié pour ajuster des densités à supports non-bornés, il ne l'est pas pour des densités à supports compacts ou bornés d'un côté et a fortiori à supports discrets.

En effet, lorsqu'on veut estimer des densités à support borné au moins d'un seul côté, l'estimateur à noyau classique devient non consistant, à cause des effets du biais aux bornes. Ce problème est dû à l'utilisation du noyau symétrique qui assigne un poids en dehors du support lorsque le lissage est pris en compte près de la borne. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature pour remédier à cette difficulté. La solution la plus simple est de remplacer le noyau symétrique par un noyau asymétrique, qui n'assigne pas un poids en dehors du support de la densité que l'on veut estimer. Cette idée est due à l'origine aux travaux de Chen [4, 5]. Ainsi, la naissance de la notion des noyaux associés qui englobent, à la fois, les noyaux continus symétriques (dites aussi noyaux classiques) et asymétriques (non classiques) ainsi la forme unifiée de l'expression (1.1) est donnée par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

avec  $h$  est le paramètre de lissage et  $K_{x,h}$  sera dit alors "**noyau associé**" de cible  $x$  et de fenêtre  $h$  qui n'est pas forcément symétrique.

## 1.2 Notion de noyau discret

Les définitions suivantes expliquent la notion du noyau associé et de l'estimateur à noyau associé pour la fonction de densité inconnue  $f$  définie sur le support  $\aleph$ .

**Définition 1.1** Soit  $x \in \aleph$  et  $h > 0$ . On appelle "**noyau discret**"  $K_{x,h}(\cdot)$  toute fonction de masse de probabilité liée à une variable aléatoire discrète  $\mathcal{K}_{x,h}$  de support  $\aleph_x$ , contenant au moins  $x$  et indépendant de  $h$ , vérifiant les quatres conditions suivantes :

$$\bigcup_x \aleph_x \supseteq \aleph, \quad (1.4)$$

$$E(\mathcal{K}_{x,h}) \sim x \text{ lorsque } h \rightarrow 0, \quad (1.5)$$

$$\text{Var}(\mathcal{K}_{x,h}) < +\infty, \quad (1.6)$$

$$\text{Var}(\mathcal{K}_{x,h}) \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0, \quad (1.7)$$

**Définition 1.2** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon iid issu d'une variable aléatoire  $X$  de la fonction de masse de probabilité inconnue  $f$  sur  $\aleph$ . L'estimateur à noyau associé discret de  $f$  est défini par :

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i), \quad x \in \aleph \quad (1.8)$$

où  $h > 0$  est le paramètre de lissage (fenêtre) et  $K_{x,h}$  est dit le noyau associé discret dépendant de  $x$  et  $h$  support  $\aleph_{x,h} = \aleph_x$  (ne dépend pas de  $h$ ).

## 1.3 Propriété de l'estimateur à noyau discret

Dans cette section, nous allons introduire quelques propriétés de l'estimateur à noyau discret, qui ont été établis principalement par Senga Kiessé [7] et Kokonendji et Senga Kiessé [8], ainsi que les conditions qui assurent la convergence de cet estimateur en moyenne, en moyenne quadratique et en moyenne quadratique intégrée.

**Proposition 1.1** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon iid issu d'une variable aléatoire  $X$

de la fonction de masse de probabilité inconnue  $f$  sur  $\mathbb{N}$ . Si  $\hat{f}_h$  l'estimateur à noyau associé discret de  $f$ , alors, pour  $x \in \mathbb{N}$  et  $h > 0$  on a :

$$E\left(\hat{f}_h(x)\right) = E(\mathcal{K}_{x,h}),$$

où  $\mathcal{K}_{x,h}$  est la variable aléatoire de loi  $K_{x,h}$  sur  $\mathbb{N}_x$ . De plus, on a  $\hat{f}_h(x) \in [0, 1]$  pour  $x \in \mathbb{N}$  et

$$\sum_x \hat{f}_h(x) = C,$$

où  $C$  est une constante strictement positive et finie.

Le résultat suivant garantit que l'estimateur à noyau discret est asymptotiquement sans biais en tout point  $x$ .

**Proposition 1.2** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon iid issu d'une variable aléatoire  $X$  de la fonction de masse de probabilité inconnue  $f$  sur  $\mathbb{N}$ . Si  $\hat{f}_h$  l'estimateur à noyau associé discret de  $f$ , alors, pour  $x \in \mathbb{N}$  et  $h > 0$  on a :

$$E\left(\hat{f}_h(x)\right) = \sum_{y \in \mathbb{N} \cap \mathbb{N}_x} f(y)K_{x,h} \rightarrow f(x) \quad \text{quand } h \rightarrow 0 \text{ et } n \rightarrow +\infty$$

**-L'erreur quadratique moyenne (MSE) :**

$$\begin{aligned} MSE(\hat{f}_h(x)) &= E\left[\hat{f}_h(x) - f(x)\right]^2 = Var(\hat{f}_h(x)) + Biais^2(\hat{f}_h(x)), \\ &= \frac{1}{n}f(x)\left[(Pr(\mathcal{K}_{x,h} = x))^2 - f(x)\right] \\ &\quad + \left[f(E(\mathcal{K}_{x,h})) - f(x) + \frac{1}{2}Var(\mathcal{K}_{x,h})f^{(2)}(x)\right]^2 + o\left(\frac{1}{nh} + h^2\right) \quad (1.9) \end{aligned}$$

avec  $f^{(2)}(x)$  est la différence finie d'ordre 2 donnée par :

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} \{f(x+2) - 2f(x) + f(x-2)\} / 4, & \text{si } x \in \mathbb{N} / \{0, 1\}; \\ \{f(3) - 3f(1) + 2f(0)\} / 4, & \text{si } x = 1; \\ \{f(2) - 2f(1) + f(0)\} / 2, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Il est à remarquer que  $E \left[ \hat{f}_h(x) - f(x) \right]^2 \rightarrow 0$  quand  $nh \rightarrow +\infty$  et  $h \rightarrow 0$ .

-L'erreur quadratique moyenne intégrée (*MISE*) :

$$\begin{aligned}
 MISE(\hat{f}_h) &= \sum_{x \in \mathbb{N}} MSE(f(x), \hat{f}_h(x)) \\
 &= \sum_{x \in \mathbb{N}} Var(\hat{f}_h(x)) + \sum_{x \in \mathbb{N}} Biais^2(\hat{f}_h(x)), \\
 &= MISE(n, h, K, f).
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

## 1.4 Noyaux discrets standards (de premier ordre)

Nous présentons dans cette section la première classe des noyaux discrets, dite, classe des **noyaux discrets standards** ou encore **noyaux discrets de premier ordre** proposés par Senga kiessé [7]. La particularité de ce type de noyaux est qu'ils ne vérifient pas la condition (1.7). Nous présentons trois exemples de noyaux discrets standards.

### 1.4.1 Le noyau Poissonnien

Pour un type de noyau Poissonnien  $\mathcal{P}(\lambda)$ , on considère le noyau discret associé  $P_{x,h}$  de loi  $\mathcal{P}(x+h)$  sur  $\mathbb{N}_x = \mathbb{N}$  avec  $x \in \mathbb{N}$  et  $h > 0$ , tel que :

$$P_{x,h}(y) = e^{-(x+h)} \frac{(x+h)^y}{y!}, \quad y \in \mathbb{N}$$

Notons que pour une cible  $x \in \mathbb{N}$  et pour tout  $h > 0$ , le noyau associé  $P_{x,h}$  est de support  $\mathbb{N}$ , dont la moyenne et la variance sont égaux et elles vaux  $(x+h)$ .

**Proposition 1.3** *Soit  $\hat{f}_h(x)$  l'estimateur d'une fonction de masse. Si l'estimateur  $\hat{f}_h(x)$  est construit à l'aide d'un noyau **Poissonnien**, alors l'expression de cet estimateur, et celles de*

son biais ponctuelle et de sa variance ponctuelle sont données respectivement par :

$$\begin{aligned}\hat{f}_h(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( e^{-(x+h)} \frac{(x+h)^{X_i}}{X_i!} \right), \\ \text{Biais}(\hat{f}_h(x)) &= f(x) \{P_{x,h}(x) - 1\} + \sum_{y \in \mathbb{N} - \{x\}} f(y) P_{x,h}(y), \\ \text{Var}(\hat{f}_h(x)) &= \frac{1}{n} \left( f(x) P_{x,h}^2(x) + \sum_{y \in \mathbb{N} - \{x\}} f(y) P_{x,h}^2(y) - \left\{ f(x) + \sum_{y \in \mathbb{N}} [f(y) - f(x)] P_{x,h}(y) \right\}^2 \right),\end{aligned}$$

## 1.4.2 Le noyau Binomial

Pour un type de noyau Binomial  $\mathcal{B}(N, p)$ , on considère le noyau discret associé  $B_{x,h}$  de loi  $\mathcal{B}(x+1, (x+h)/(x+1))$  définie par :

$$B_{x,h}(y) = \frac{(x+1)}{y!(x+1-y)!} \left( \frac{x+h}{x+1} \right)^y \left( \frac{1-h}{1+x} \right)^{x+1-y}, \quad y \in \aleph_x \subseteq \mathbb{N},$$

tel que  $\aleph_x = \{0, 1, \dots, x+1\}$ ,  $x \in \mathbb{N}$ ,  $h \in ]0, 1]$  et  $\bigcup_x \aleph_x = \mathbb{N}$ .

Ce noyau Binomial associé  $B_{x,h}$  est à support  $\aleph_x = \{0, 1, \dots, x+1\}$ , de moyenne  $(x+h)$  et de variance  $(x+h)(1-h)/(x+1)$ .

**Proposition 1.4** *Soit  $\hat{f}_h(x)$  l'estimateur d'une fonction de masse. Si l'estimateur  $\hat{f}_h(x)$  est construit à l'aide d'un noyau **Binomial**, alors l'expression de cet estimateur, et celles de son biais ponctuelle et de sa variance ponctuelle sont données respectivement par :*

$$\begin{aligned}\hat{f}_h(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x+1)}{X_i!(x+1-X_i)!} \left( \frac{x+h}{x+1} \right)^{X_i} \left( \frac{1-h}{1+x} \right)^{x+1-X_i}, \\ \text{Biais}(\hat{f}_h(x)) &= f(x) \{B_{x,h}(x) - 1\} + \sum_{y \in \aleph_x - \{x\}} f(y) B_{x,h}(y), \\ \text{Var}(\hat{f}_h(x)) &= \frac{1}{n} \left( f(x) B_{x,h}^2(x) + \sum_{y \in \aleph_x - \{x\}} f(y) B_{x,h}^2(y) - \left\{ f(x) + \sum_{y \in \aleph_x} [f(y) - f(x)] B_{x,h}(y) \right\}^2 \right).\end{aligned}$$

### 1.4.3 Le noyau Binomial Négatif

Pour un type de noyau Binomial Négatif  $\mathcal{BN}(\lambda, p)$ , on considère le noyau discret associé  $BN_{x,h}$  de loi  $\mathcal{BN}(x+1, (x+1)/(2x+1+h))$  sur  $\mathfrak{N}_x = \mathbb{N}$  avec  $x \in \mathbb{N}$  et  $h > 0$ , tel que :

$$BN_{x,h}(y) = \frac{(x+y)!}{y!x!} \left( \frac{x+h}{2x+1+h} \right)^y \left( \frac{x+1}{2x+1+h} \right)^{x+1}, \quad y \in \mathbb{N}$$

Ce noyau Binomial Négatif associé  $BN_{x,h}$  est à support  $\mathbb{N}$ , de moyenne  $(x+h)$  et de variance  $(x+h)(1+(x+h)/(x+1))$ .

**Proposition 1.5** *Soit  $\hat{f}_h(x)$  l'estimateur d'une fonction de masse. Si l'estimateur  $\hat{f}_h(x)$  est construit à l'aide d'un noyau **Binomial Négatif**, alors l'expression de cet estimateur, et celles de son biais ponctuelle et de sa variance ponctuelle sont données respectivement par :*

$$\begin{aligned} \hat{f}_h(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x+X_i)!}{X_i!x!} \left( \frac{x+h}{2x+1+h} \right)^{X_i} \left( \frac{x+1}{2x+1+h} \right)^{x+1}, \\ \text{Biais}(\hat{f}_h(x)) &= f(x) \{BN_{x,h}(x) - 1\} + \sum_{y \in \mathbb{N} - \{x\}} f(y) BN_{x,h}(y), \\ \text{Var}(\hat{f}_h(x)) &= \frac{1}{n} \left( f(x) BN_{x,h}^2(x) + \sum_{y \in \mathbb{N} - \{x\}} f(y) BN_{x,h}^2(y) - \left\{ f(x) + \sum_{y \in \mathbb{N}} [f(y) - f(x)] BN_{x,h}(y) \right\}^2 \right). \end{aligned}$$

**Remarque 1.1** 1. *Le fait qu'on dispose de l'expression du biais ponctuelle et celle de la variance ponctuelle des estimateurs conçus par les trois noyaux précédents, alors la forme du MSE et du MISE peut être déduite facilement en utilisant (1.9) et (1.11).*

2. *Les estimateurs d'une densité discrète conçus à l'aide des trois noyaux précédents ne converge pas au sens du MSE et du MISE. En effet, pour un  $x$  fixé, la limite du biais de  $\hat{f}_h(x)$  quand  $h \rightarrow 0$  est donnée, respectivement, pour le noyau Poissonnien, Binomial et Binomial Négatif par :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{Biais}(\hat{f}_h(x)) = f(x) \left\{ \frac{x^x e^{-x}}{x!} - 1 \right\} + e^{-x} \sum_{y \in \mathbb{N} - \{x\}} f(y) \frac{x^y}{y!} \neq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{Biais}(\hat{f}_h(x)) = f(x) \left\{ \left( \frac{x}{x+1} \right)^x - 1 \right\} + \frac{x!}{(x+1)^x} \sum_{y \in \mathbb{N}/\{x\}} f(y) \frac{x^y}{y! (x+1-y)} \neq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{Biais}(\hat{f}_h(x)) = f(x) \left\{ \frac{(2x)! x^x (x+1)^{x+1}}{(x!)^2 (2x+1)^{2x+1}} - 1 \right\} + \left( \frac{x+1}{2x+1} \right)^{x+1} \sum_{y \in \mathbb{N}_x/\{x\}} f(y) \frac{(x+y)!}{x! y!} \left( \frac{x}{2x+1} \right)^y \neq 0$$

Pour plus de détails sur ce constat le lecteur peut se référer à [18].

## 1.5 Noyaux discrets de deuxième ordre

Nous présentons ici la deuxième classe des noyaux associés discrets, dite, classe des noyaux associés discrets de **deuxième ordre**. La caractéristique fondamentale des noyaux de cette classe est qu'ils vérifient la totalité des conditions (1.4)–(1.7). Nous présentons deux exemples de noyaux de deuxième ordre, à savoir : le noyau Dirac et le noyau Triangulaire.

### 1.5.1 Le noyau Dirac

Soit le noyau Dirac noté  $D_{x,0}$  lié à la variable aléatoire  $\mathcal{D}_{x,h} = \mathcal{D}_{x,0}$  pour  $x \in \mathbb{N}$  et  $h = 0$  donné par :

$$D_{x,0}(y) = \mathbf{1}_{\{y=x\}} = \begin{cases} 1, & \text{si } y=x; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases},$$

où  $\mathbf{1}_A$  est la fonction indicatrice de  $A$  avec  $\mathbb{N}_x = \{x\}$ ,  $E(\mathcal{D}_{x,0}) = x$  et  $Var(\mathcal{D}_{x,0}) = 0$ .

**Proposition 1.6** *Soit  $\hat{f}_h(x)$  l'estimateur d'une fonction de masse. Si l'estimateur  $\hat{f}_h(x)$  est construit à l'aide d'un noyau **Dirac**, alors l'expression de cet estimateur, et celles de son biais*

ponctuelle, de sa variance ponctuelle et de son *MISE* sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} \hat{f}_0(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i=x\}}, \\ \text{Biais}(\hat{f}_0(x)) &= E(\hat{f}_0(x)) - f(x) = E(D_{x,0}) - f(x) = \sum_{y \in \mathfrak{N}_x} f(y) \Pr(D_{x,0} = y) - f(x) = 0 \\ \text{Var}(\hat{f}_0(x)) &= \frac{1}{n} f(x)(1 - f(x)), \\ \text{MISE}(\hat{f}_0) &= \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{N}} f(x)(1 - f(x)) = \frac{1}{n} \left( 1 - \sum_{x \in \mathbb{N}} f^2(x) \right). \end{aligned}$$

D'après l'expression du *MISE* de l'estimateur à noyau du Dirac il est clair que l'estimateur en question converge en moyenne quadratique intégrée, c'est-à-dire  $\text{MISE}(\hat{f}_0) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  et cela le fait que  $0 \leq \sum_{x \in \mathbb{N}} f^2(x) < 1$  (voir [8, 11]).

## 1.5.2 Le noyau Triangulaire

Les noyaux associés discrets triangulaires ont été proposés par Kokonendji et al. [9] et Kokonendji et Zocchi [11]. Nous donnons d'abord la définition d'une variable aléatoire triangulaire symétrique avant de donner la définition d'un noyau associé discret triangulaire.

**Définition 1.3** Une variable aléatoire discrète  $\mathcal{T}_{a,c}$  est dite triangulaire symétrique de centre  $c \in \mathbb{N}$  et de bras  $a \in \mathbb{N}$ , si pour  $y$  dans son support  $\mathfrak{N}_c = \{c, c \pm 1, \dots, c \pm a\}$  sa probabilité individuelle s'écrit :

$$\Pr(\mathcal{T}_{a,c} = y) = \frac{(a+1) - |y-c|}{(a+1)^2},$$

**Définition 1.4** Soit  $h > 0$  et  $(a, c) \in \mathbb{N}^2$ . Une variable aléatoire discrète  $\mathcal{T}_{a,c,h}$  est dite triangulaire d'ordre  $h$ , de centre  $c \in \mathbb{N}$  et de bras  $a \in \mathbb{N}$ , si pour  $y$  dans son support  $\mathfrak{N}_c = \{c, c \pm 1, \dots, c \pm a\}$  sa fonction de masse de probabilité s'écrit :

$$\Pr(\mathcal{T}_{a,c,h} = y) = \frac{(a+1)^h - |y-c|^h}{P(a,h)},$$

où

$$P(a,h) = (2a+1)(a+1)^h - 2 \sum_{k=0}^a k^h, \quad (1.12)$$

est la constante de normalisation.

**Proposition 1.7** (Senga kiessé [6]) Soit  $\mathcal{T}_{a,c,h}$  la variable aléatoire triangulaire discrète d'ordre  $h > 0$ , de centre  $c \in \mathbb{N}$  et de bras  $a \in \mathbb{N}$ . Alors  $\mathcal{T}_{a,c,h}$  est symétrique autour de sa moyenne  $c = E\{\mathcal{T}_{a,c,h}\}$  et sa variance  $Var\{\mathcal{T}_{a,c,h}\} = Var(a, h)$  ne dépend pas de  $c$  avec :

$$Var(\mathcal{T}_{a,c,h}) = \frac{1}{P(a, h)} \left[ \frac{a(a+1)^{h+1}(2a+1)}{3} \right] - 2 \sum_{k=0}^a k^{h+2},$$

avec  $P(a, h)$  est définie dans (1.12).

**Définition 1.5** Soit  $f$  une fonction de masse de probabilité sur  $\mathbb{N}$ . Soit  $h > 0$  le paramètre de lissage et  $a \in \mathbb{N}$  un entier fixé. Le noyau discret triangulaire  $T_{a,x,h}$  associé à la variable aléatoire  $\mathcal{T}_{a,x,h}$  d'ordre  $h$ , de centre  $x$  et de bras  $a$  définie sur  $\mathbb{N}_x = \{x, x \pm 1, \dots, x \pm a\}$  est donné par :

$$T_{a,x,h}(y) = \Pr(\mathcal{T}_{a,x,h} = y) = \frac{(a+1)^h - |y-x|^h}{P(a, h)}, \quad \forall y \in \mathbb{N}_x,$$

avec  $P(a, h)$  est définie dans (1.12).

Soit  $\hat{f}_h(x)$  l'estimateur à noyau associé discret en utilisant le noyau triangulaire discret, alors l'erreur quadratique moyenne intégrée de cet estimateur est donnée comme suit :

$$MISE(\hat{f}_h) = \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{N}} f(x) \left[ \left\{ \frac{(a+1)^h}{P(a, h)} \right\}^2 - f(x) \right] + \frac{1}{4} \{Var(a, h)\}^2 \sum_{x \in \mathbb{N}} \{f^{(2)}(x)\}^2 + o\left(\frac{1}{n} + h^2\right).$$

avec  $P(a, h)$  est définie dans (1.12).

De plus,  $MISE(\hat{f}_h) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  et  $h > 0$ , et cela le fait que  $\lim_{h \rightarrow 0} (a+1)^h / P(a, h) = 1$ ,  $0 \leq \sum_{x \in \mathbb{N}} f(x)\{1 - f(x)\} < 1$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} Var(a, h) = 0$  et  $\sum_{x \in \mathbb{N}} \{f^{(2)}(x)\}^2$  est finie. Ceci se traduit par la convergence de l'estimateur à noyau triangulaire en moyenne quadratique intégrée.

## 1.6 Efficacité d'un noyau discret

L'objectif de cette section est d'expliquer comment choisir minutieusement un noyau discret dans la pratique. Autrement dit qu'elle est le noyau le plus efficace à utiliser pour la

construction d'un estimateur d'une fonction de masse de probabilités dans la pratique ?

La performance des noyaux discrets peut être mesurée par l'erreur quadratique moyenne intégrée  $MISE$ . Cet indicateur de performance a été adapté par Senga Kiessé [7] pour choisir le noyau discret idéal  $K_{idéal}$  c'est-à-dire :

$$K_{idéal} = \min_K MISE(K).$$

Pour choisir le noyau optimal parmi les noyaux discrets associés de premier ordre, le critère de comparaison  $MISE$  peut se réduire seulement à la comparaison des variances des variables aléatoires  $\mathcal{K}_{x,h}$  des noyaux discrets et cela le fait que l'hypothèse d'égalité des espérances de  $\mathcal{K}_{x,h}$  est vérifiée. Nous donnons plus de précision, on considère  $\mathcal{K}_{x,h}^1$  et  $\mathcal{K}_{x,h}^2$  deux variables aléatoires liées aux noyaux associés discrets  $K_{x,h}^1$  et  $K_{x,h}^2$ , de supports comparables  $\mathbb{N}_x^1$  et  $\mathbb{N}_x^2$  respectivement. Pour comparer leur efficacité dans l'estimation à noyau d'une densité de probabilité discrète  $f$ , nous supposons d'abord qu'ils sont comparables en imposant la condition de comparabilité :

$$E(\mathcal{K}_{x,h}^1) = E(\mathcal{K}_{x,h}^2), \quad (1.13)$$

pour tout  $x \in \mathbb{N}$  et  $h > 0$  petit. L'efficacité relative entre  $K_{x,h}^1$  et  $K_{x,h}^2$  peut être mesurée par le rapport de leur variance seulement [6] :

$$eff(K_{x,h}^1, K_{x,h}^2) = \frac{Var(\mathcal{K}_{x,h}^1)}{Var(\mathcal{K}_{x,h}^2)}, \quad (1.14)$$

pour tout  $x \in \mathbb{N}$  et  $h > 0$  petit. En d'autres termes, si nous avons

$$Var(\mathcal{K}_{x,h}^1) < Var(\mathcal{K}_{x,h}^2),$$

pour tout  $x \in \mathbb{N}$  et  $h > 0$  petit, alors le noyau discret associé  $K_{x,h}^1$  est plus efficace que  $K_{x,h}^2$ . Lorsqu'on s'intéresse à la comparaison de la performance entre un noyau discret de premier ordre et un noyau de deuxième ordre, le critère d'efficacité défini par la relation (1.14) n'est pas envisageable dans ce cas, car l'égalité (1.13) entre la moyenne des variables aléatoires

correspondantes aux noyaux de premier et de deuxième ordre n'est pas vérifiée. L'idée dans cette situation est qu'il faut évaluer et comparer l'ordre des grandeurs des expressions de *MISE* des deux noyaux considérés.

Afin de sélectionner un noyau parmi ceux exposés dans les deux sections précédentes, selon le critère retenu ci-dessus, on peut utiliser leurs propriétés énoncées auparavant et qui sont résumé dans la table suivante :

Type de noyau	$E(\mathcal{K}_{x,h})$	$Var(\mathcal{K}_{x,h})$	$\lim_{h \rightarrow 0} Var(\mathcal{K}_{x,h})$
Poisson	$x + h$	$x + h$	$x$
Binomial	$x + h$	$(x + h) \left(\frac{1-h}{x+1}\right)$	$\frac{x}{x+1}$
Binomial Négatif	$x + h$	$(x + h) \left(1 + \frac{x+h}{x+1}\right)$	$\frac{x(2x+1)}{x+1}$
Dirac	$x$	0	0
Triangulaire	$x$	voir proposition 1.7	0

TABLE 1.1: Résumé des propriétés de quelques noyaux discrets.

## 1.7 Choix du paramètre de lissage

Dans cette section nous présentons quelques méthodes classiques pour le choix local et global du paramètre de lissage dans l'estimation des fonctions de densité discrètes.

### 1.7.1 Choix global du paramètre de lissage

#### 1. Minimisation du MISE

Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un  $n$  échantillons fixé *iid* de densité inconnue  $f$ , alors l'erreur quadratique intégrée (*ISE*) est donné par :

$$ISE = \sum_{x \in \mathbb{N}} (\hat{f}(x) - f(x))^2 = ISE(n, X, h, K, f), \quad (1.15)$$

ainsi (1.15) conduit à choisir une fenêtre adéquate :

$$h^* = \arg \min_h ISE(n, X, h, K, f), \quad (1.16)$$

pour laquelle la mesure est sur un seul échantillon et la fenêtre optimale  $h_{opt}^*$  peut être obtenue, dans le cas de plusieurs échantillons, à travers

$$h_{opt}^* = \arg \min_{h>0} E(ISE(n, X, h, K, f)). \quad (1.17)$$

Ces techniques ont été développées et détaillées par Kokonendji et Senga Kiessé en 2006 [10] et Kokonendji et Senga Kiessé en 2011 [8].

## 2. Validation croisée

Nous proposons ici deux techniques qui se basent sur la méthode de validation croisée. Plus précisément où l'idée est d'estimer la densité  $f$  au point  $x_i$  par la technique de validation croisée dont la forme est donner par :

$$\hat{f}_i(X_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K_{X_i, h}(X_j), \quad (1.18)$$

(a) Validation croisée par les moindres carrées :

Le principe de la méthode dans le cas de variable discrète est le même que celui du cas de variable continue élaboré dans [17, 3]. La méthode consiste à estimer le  $ISE$  par la technique de validation croisée et par la suite de sélectionner le paramètre de lissage qui minimise cet estimateur. La fenêtre optimale, dans ce cas, s'obtient par :

$$\begin{aligned} h_{cv} &= \arg \min_{h>0} CV(h) = \arg \min_{h>0} \left[ \sum_{x \in \mathbb{N}} \left\{ \hat{f}(x) \right\}^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_i(X_i) \right] \\ &= \arg \min_{h>0} \left[ \sum_{x \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x, h}(X_i) \right\}^2 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n K_{X_i, h}(X_j) \right], \end{aligned} \quad (1.19)$$

(b) Validation croisée par le maximum de vraisemblance :

Ce critère consiste à choisir  $h$  qui maximise la fonctionnelle

$$LCV(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( \hat{f}_i(X_i) \right), \quad (1.20)$$

c'est-à-dire, on détermine une fenêtre optimale  $h_{LCV}$  par :

$$h_{LCV} = \arg \max_{h>0} LCV(h). \quad (1.21)$$

### 3. Excès des zéros

Cette technique pour le choix de la fenêtre repose sur une particularité des données de comptage qui n'est autre que l'excès des zéros dans l'échantillon, c'est-à-dire de choisir une fenêtre adaptés  $h_0 = h_0(X, K)$  tel que  $h$  satisfait :

$$\sum_{i=1}^n \Pr(\mathcal{K}_{X_i, h_0} = 0) = n_0, \quad (1.22)$$

où  $n_0 = \text{card}\{X_i = 0\}$  désigne le nombre des zéros dans l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$  à condition que  $n_0 > 0$ . Ci-dessous quelques exemples de  $h_0$  :

– Si le noyau utilisé est Poissonnien alors

$$h_0 = \log \left( \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^n e^{-X_i} \right).$$

– Si le noyau utilisé est Binomial alors le  $h_0$  est la solution de l'équation de

$$n_0 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1-h}{X_i+1} \right)^{X_i+1}.$$

– Si le noyau utilisé est Binomial Négative alors le  $h_0$  est la solution de l'équation

$$n_0 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i+1}{2X_i+1+h} \right)^{X_i+1}.$$

**Remarque 1.2** *Le paramètre de lissage sélectionné par la méthode Excès des zéros n'existe pas toujours. En effet, pour certains noyaux l'équation (1.22) n'admet pas de solution. A titre d'exemple on peut cité le cas du noyau triangulaire (pour plus de détails voir Kokonendji et al. [9] et Senga Kiessé [7]).*

## 1.7.2 Choix local du paramètre de lissage

### 1. Minimisation du MSE

Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un  $n$  échantillons fixé *iid* de densité inconnue  $f$  alors l'erreur quadratique ( $SE$ ) au point  $x$  est donné par :

$$SE(x) = (\hat{f}(x) - f(x))^2 = SE(x, n, X, h, K, f), \quad (1.23)$$

ainsi (1.23) conduit à choisir une fenêtre adéquate :

$$h^*(x) = \arg \min_{h>0} SE(x, n, X, h, K, f), \quad (1.24)$$

pour laquelle la mesure est sur un seul échantillon et la fenêtre optimale  $h_{opt}^*(x)$  peut être obtenue, dans le cas de plusieurs échantillons, à travers

$$h_{opt}^*(x) = \arg \min_{h>0} E(SE(x, n, X, h, K, f)) = \arg \min_{h>0} MSE(x, n, X, h, K, f). \quad (1.25)$$

## Conclusion

Le rôle du paramètre de lissage,  $h > 0$ , dans le cas discret reste semblable au cas continu, où il permet de tenir compte des observations  $X_i$  qui sont proches de la cible  $x \in \mathbb{N}$ . Cependant, la dispersion locale en tout point d'estimation  $x$  se traduit par l'importance du noyau associé discret  $K_{x,h}$  choisit. Ainsi, le choix d'un type de noyau discret s'oriente vers des distributions de  $K_{x,h}$  qui soient moins dispersées autour de  $x \in \mathbb{N}$  pour un paramètre de lissage  $h > 0$  fixé.

# Chapitre 2

## Choix du paramètre de lissage local :

## Matrice de lissage

### Introduction

Dans le présent chapitre, l'objectif principal est l'estimation à noyau d'une matrice de transition inconnue  $P$  associée une chaîne de Markov discrète décrivant un modèle de Gestion du stock de type  $(R, s, S)$ . Plus précisément, notre étude se base principalement sur la sélection de la matrice de lissage optimale dont chaque élément  $h_{ij}$  correspond au paramètre de lissage minimisant l'erreur de l'estimation de la composante  $P_{ij}$  de la matrice de transition  $P$ .

### 2.1 Description du modèle $(R, s, S)$

Considérons un système de stock de type  $(R, s, S)$ . Suivant la signification du modèle  $(R, s, S)$  [15], le niveau de la position de stock est inspecté chaque  $R$  unités de temps et une commande sera lancée si le processus de position du stock à la date  $t_n = nR$  est inférieur au niveau du stock de risque  $s$ . Au début de chaque période le gestionnaire décide s'il doit ou non commander une quantité d'articles et si oui, combien commander. On suppose que le fournisseur est parfaitement fiable et que les commandes arrivent immédiatement. Durant la  $n^{\text{ième}}$  ( $n \geq 1$ ) période, la demande totale est une variable aléatoire discrète  $X_n$ . On suppose

également que les variables aléatoires  $X_n$ ,  $n \geq 1$ , sont *iid*, de loi commune :

$$a_k = f(k) = \Pr(X_1 = k) = \Pr(X = k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

Pour tel problème de gestion de stock, l'état du stock  $L_n$  est inspectée aux dates  $t_n = nR$  ( $n \geq 1$ ). Et si le niveau du stock  $L_n \leq s$ , on passe une commande de manière à ramener le stock au niveau  $S$ , la taille de la commande est égale alors à  $S - L_n$ . Si par contre le niveau du stock est supérieure au seuil de risque  $s$ , on ne passe aucune commande et l'on attend jusqu'au prochain moment d'inspection.

L'état du stock  $L_{n+1}$  à la fin de la période  $n + 1$  est alors donné par :

$$L_{n+1} = \begin{cases} (S - X_{n+1})^+, & \text{si } L_n \leq s \\ (L_n - X_{n+1})^+, & \text{si } L_n > s \end{cases}$$

où  $(A)^+ = \max(A, 0)$ .

La variable aléatoire  $L_{n+1}$  ne dépend que de  $L_n$  et  $X_{n+1}$ , où  $X_{n+1}$  est indépendante de  $n$  et de l'état du système avant  $t_n$ . Donc,  $L$  est une chaîne de Markov homogène, à espace d'état  $E = \{0, 1, \dots, S\}$ .

Enfin, le modèle de stock en question peut être schématisé sous sa forme générale suivant :

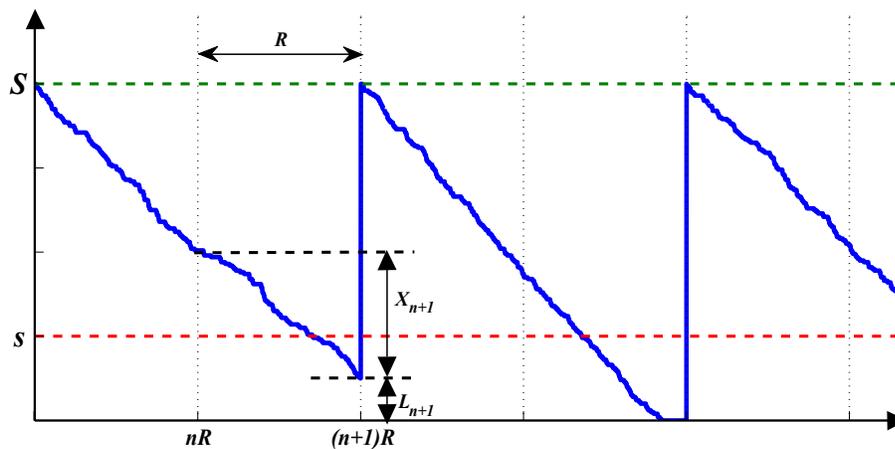


FIGURE 2.1 – Schéma illustratif du Processus du niveau du stock dans le système  $(R, s, S)$ .

Pour plus de détails sur les modèles de stock d'une manière générale et du modèle de stock

de type  $(R, s, S)$  en particulier le lecteur peut se référer à [14].

## 2.2 Probabilités de transition

Supposons que le niveau du stock à la date  $t_n = nR$  et la date  $t_{n+1} = (n+1)R$  est  $L_n = i$  et  $L_{n+1} = j$ , respectivement. Alors les probabilités de transition  $p_{ij} = \Pr(L_{n+1} = j \mid L_n = i)$  de cette chaîne peuvent être résumées comme suit :

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=S}^{+\infty} a_k, & \text{Si } 0 \leq i \leq s \quad \text{et } j = 0; \\ a_{S-j}, & \text{Si } 0 \leq i \leq s \quad \text{et } 1 \leq j \leq S; \\ \sum_{k=i}^{\infty} a_k, & \text{Si } s+1 \leq i \leq S \quad \text{et } j = 0; \\ a_{i-j}, & \text{Si } s+1 \leq i \leq S \quad \text{et } 1 \leq j \leq i; \\ 0, & \text{Si } s+1 \leq i \leq S \quad \text{et } j \geq i+1; \end{cases}$$

avec  $a_k$  est donnée par l'expression (2.1).

## 2.3 Estimation à noyau de la matrice de transition

Supposons maintenant que pour un certain système de gestion de stock de type  $(R, s, S)$  nous ne disposons que d'un échantillon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de taille  $n$  des demandes issue d'une distribution  $f$  générale et inconnue, de ce fait afin d'évaluer les performances de notre système le recours aux méthodes statistiques d'estimation est inévitable. De plus, notre intérêt est l'estimation de la matrice de transition  $P$  associée à ce modèle.

Dans ce document, pour estimer la matrice  $P$  nous proposons d'utiliser la méthode du noyau définie par :

$$\hat{a}_x = \hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i), \quad x \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

Il est clair que la mise en oeuvre de cette technique nécessite de fixer le noyau  $K$  et le paramètre de lissage  $h$ . Pour le choix du noyau  $K$ , le problème à priori est facile, il suffit de sélectionner par exemple, parmi les noyaux exposés dans les sections 1.4 et 1.5. Tandis que

le problème du choix du paramètre de lissage  $h$ , on peut envisager deux manières :

1. Estimation des éléments  $a_k = \Pr(X = k)$  indépendamment de leurs répétition dans la matrice  $P$  i.e. l'estimation de la matrice de transition  $P$  de la chaîne de Markov associée au modèle de stock  $(R, s, S)$  consiste à évaluer la quantité inconnue  $a_k$  par

$$\hat{a}_k = \hat{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{k,h}(X_i), \quad k \in \mathbb{N}$$

et de substituer cet estimateur, dans les  $P_{ij}$  pour obtenir  $\hat{P}$ . Le choix de paramètre du lissage, dans ce cas, se fait par le biais de l'une des techniques citées dans la section 1.7.

2. Prendre en considération la répétition des éléments  $\hat{a}_k$  dans la matrice  $\hat{P}$ , donnée par :

$$\hat{P} = \begin{array}{c|ccc|cc} & 0 & 1 & s & s+1 & S \\ \hline 0 & \sum_S^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \cdots & \hat{a}_0 \\ 1 & \sum_S^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \cdots & \hat{a}_0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \sum_S^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \cdots & \hat{a}_0 \\ \hline s+1 & \sum_{s+1}^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_s & \cdots & \hat{a}_1 & \hat{a}_0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ S & \sum_S^{+\infty} \hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \cdots & \hat{a}_0 \end{array}$$

Dans le but de prendre en consideration les répétition, dans [2] les auteurs ont proposé d'utiliser les normes matricielles qui ont un impact sur la qualité de l'estimateur  $\hat{P}$ . En effet, l'utilisation des normes matricielles permet d'inclure les répétitions des quantités  $\hat{a}_k$  dans l'expression  $\hat{P}$ . Plus exactement, ils ont suggéré choisir le paramètre de lissage optimal selon

l'une des trois expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 h_1^* &= \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_1 = \arg \min_h \left[ \sup_{0 \leq i \leq S} \left( \sum_{j=0}^S \left| \hat{P}_{i,j} - P_{i,j} \right| \right) \right], \\
 h_2^* &= \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_2 = \arg \min_h \left[ \sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \left( \hat{P}_{i,j} - P_{i,j} \right)^2 \right], \\
 h_3^* &= \arg \min_h \left\| \hat{P} - P \right\|_\infty = \arg \min_h \left[ \sup_{0 \leq j \leq S} \left( \sum_{i=0}^S \left| \hat{P}_{i,j} - P_{i,j} \right| \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

En 2019, dans [12] les auteurs ont proposé une version exploitable dans la pratique pour  $h_2^*$  et cela en utilisant la technique de validation croisée. Il est à noter que dans [1, 2, 12] les auteurs ont considéré uniquement le cas du choix global du paramètre de lissage. Dans ce document nous proposons de compléter ces deux derniers travaux en considérant le choix local du paramètre de lissage. Plus précisément, nous proposons de sélectionner le paramètre de lissage minimisant une certaine fonction de coût associée à chaque composante de la matrice  $P$  (choix local), ce qui se résume sous forme d'une matrice qu'on appellera désormais une matrice de lissage. Les détails et les illustrations de la démarche à suivre pour la mise en oeuvre de notre proposition font l'objet de la section suivante.

## 2.4 Choix local du paramètre de lissage

Considérons une chaîne de Markov homogène,  $Y$ , à espace d'état  $E = \{0, 1, \dots, N\}$  et  $P$  la matrice de ses probabilités de transition  $\Pr(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i)$ . Supposons maintenant que nous procédons à l'estimation de la matrice  $P$  par la méthode du noyau de plus notre intérêt et de sélectionner le paramètre de lissage par l'approche locale (choix local du  $h$ ). L'idée du choix local du paramètre de lissage, dans ce cas, est de déterminer le paramètre de lissage minimisant une certaine fonction de coût de chaque élément de la matrice et qui peut être formulé comme suite :

$$h_{i,j}^* = \arg \min_h C \left( \hat{P}_{i,j} - P_{i,j} \right), \quad i, j \in \{0, \dots, N\}$$

avec  $C(A - B)$  est une fonction de coût (distance) entre  $A$  et  $B$ .

Ce qui fait, la qualification de la totalité des paramètres de lissage  $h_{i,j}^*$  peut être résumée et représentée sous forme d'une matrice appelée matrice de lissage, notée  $H^*$ , ayant la forme :

$$H^* = \begin{pmatrix} h_{0,0}^* & h_{0,1}^* & \cdots & h_{0,N}^* \\ h_{1,0}^* & h_{1,1}^* & \cdots & h_{1,N}^* \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{N,0}^* & h_{N,1}^* & \cdots & h_{N,N}^* \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

L'adaptation de la précédente idée à la matrice des probabilités de transition associées au modèle de stock de type  $(R, s, S)$  nous permet d'obtenir la matrice de lissage  $H_{stock}^*$  dont la forme est comme suit :

$$H_{stock}^* = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & \cdots & s & s+1 & \cdots & S \\ \hline 0 & h_{0,0}^* & h_{0,1}^* & \cdots & h_{0,s}^* & h_{0,s+1}^* & \cdots & h_{0,S}^* \\ 1 & h_{0,0}^* & h_{0,1}^* & \cdots & h_{0,s}^* & h_{0,s+1}^* & \cdots & h_{0,S}^* \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s & h_{0,0}^* & h_{0,1}^* & \cdots & h_{0,s}^* & h_{0,s+1}^* & \cdots & h_{0,S}^* \\ \hline s+1 & h_{s+1,0}^* & h_{s+1,1}^* & \cdots & h_{s+1,s}^* & h_{0,S}^* & - & - \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & - \\ S & h_{S,0}^* & h_{S,1}^* & \cdots & h_{S,s}^* & h_{S,s+1}^* & \cdots & h_{0,S}^* \end{array}, \quad (2.5)$$

où la notation "—" signifié que le paramètre de lissage n'existe pas. Ceci le fait que l'élément en question correspond un événement impossible donc on ne procédera pas à l'estimation de cet élément. La particularité de la forme de la matrice des probabilités de transition associée à la chaîne de Markov décrivant le modèle du stock considéré, nous permet de simplifier la notation des éléments de la matrice  $H_{stock}^*$  et de réécrire (2.5) sous la forme suivante :

$$H_{stock}^* = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & \cdots & s & s+1 & \cdots & S \\ \hline 0 & h_{2S-(s+1)}^* & h_{S-1}^* & \cdots & h_{S-s}^* & h_{S-s-1}^* & \cdots & h_0^* \\ 1 & h_{2S-(s+1)}^* & h_{S-1}^* & \cdots & h_{S-s}^* & h_{S-s-1}^* & \cdots & h_0^* \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s & h_{2S-(s+1)}^* & h_{S-1}^* & \cdots & h_{S-s}^* & h_{S-s-1}^* & \cdots & h_0^* \\ \hline s+1 & h_{S+1}^* & h_s^* & \cdots & h_1^* & h_0^* & - & - \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & - \\ S & h_{2S-(s+1)}^* & h_{S-1}^* & \cdots & h_{S-s}^* & h_{S-s-1}^* & \cdots & h_0^* \end{array} \quad (2.6)$$

avec

$$h_i^* = \begin{cases} C(\hat{f}(i) - f(i)), & \text{si } 0 \leq i \leq S - 1; \\ C\left(\sum_{k=(s+1)+(i-S)}^{\infty} \hat{f}(k) - \sum_{k=(s+1)+(i-S)}^{\infty} f(k)\right), & \text{si } S \leq i \leq 2S - (s + 1); \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $C(\cdot)$  est une fonction de coût et  $f_k$  et  $\hat{f}_k$  sont donnés respectivement dans (2.1) et (2.2).

En réalité, on peut faire mieux pour la simplification de la matrice  $H_{stock}^*$ . En effet, à partir de l'expression de la matrice  $H_{stock}^*$  donnée dans (2.6), il est clair qu'on peut la réduire à un vecteur, de  $2S - s$  composantes, défini comme suit :

$$h_{stock}^* = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_{S-1}^*, h_S^*, h_{S+1}^*, \dots, h_{2S-(s+1)}^*)^t, \quad (2.8)$$

avec  $h_i^*$  est donné par (2.7).

## Conclusion

Dans cette partie, nous avons proposé d'estimer, à l'aide de la méthode de noyau, la matrice de transition  $P$  associée à une chaîne de Markov discrète décrivant le modèle de stock de type  $(R, s, S)$ . Nous avons exposé deux principales approches pour la sélection du paramètre de lissage à savoir : l'approche locale et l'approche globale. A cet effet, une question s'impose : quelle est l'approche de sélection du paramètre de lissage qui nous fournit un estimateur de  $P$  plus performant ? La réponse à cette question fera l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Application numérique : Étude comparative

### Introduction

L'objectif du présent chapitre, est d'identifier l'impact du choix de paramètre de lissage par l'approche local et globale ainsi que le choix du noyau sur la qualité de l'estimateur à noyau de la matrice de transition d'une chaîne de Markov associée au modèle de gestion stock de type  $(R, s, S)$ . Pour ce faire, nous allons présenter d'abord les paramètres retenus dans la simulation et les résultats numérique obtenus. Par la suite, avant de conclure une discussion détaillée des résultats sera présentée.

### 3.1 Présentation de l'application et de ses paramètres

Rappelons que notre objectif est d'analyser numériquement l'impact du choix du paramètre de lissage via l'approche globale et l'approche local sur les performances de l'estimateur d'une matrice de transition associée à une chaîne Markov décrivant le modèle de stock de type  $(R, s, S)$ . Afin de répondre à notre objectif, nous avons implémenté un simulateur sous **MATLAB** dont les principales étapes sont comme suit :

**étape 1** Fixer la totalité des paramètres :  $R, s, S, \lambda, f, n, m, K, C(\cdot)$ .

**étape 2** Générer  $m$  échantillon de taille  $n$  de distribution  $f$ .

**étape 3** Estimer  $\hat{h}_{opt}$  en utilisant les expressions (2.3) et (2.8) pour chaque échantillon.

**étape 4** Calculer  $\hat{f}_h$ ,  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$  pour chaque  $\hat{h}_{opt}$  obtenus dans l'**étape 3**.

**étape 5** Calculer  $\bar{Q}$  la moyenne des  $m$  estimateurs  $\hat{Q}$ , leurs variances et déduire leurs  $MSE$ .

Notons que  $\hat{Q}$  représente l'estimateur du niveau moyen du stock,  $Q$ , défini par :

$$\hat{Q} = \sum_{i=0}^S i \hat{\pi}_i,$$

avec  $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_S)$  est l'estimateur du vecteur des probabilités stationnaires du niveau de stock qu'on obtient par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \hat{\pi} * \hat{P} = \hat{\pi}, \\ \sum_{i=0}^S \hat{\pi}_i = 1. \end{cases}$$

Pour l'exécution du programme nous avons fixé les paramètre comme suit :

- Le nombre de réplifications (échantillon)  $m = 100$ ,
- La taille de l'échantillon  $n \in \{50; 100; 250; 500; 1000\}$ ,
- Le noyau  $K \in \{ \text{Poisson} ; \text{Binomial Négatif} ; \text{Triangulaire} \}$ , notés respectivement  $K_{Po}$ ,  $K_{BN}$  et  $K_T$
- le seuil de stock de risque  $s = 2$ , capacité maximale du stock est  $S = 6$  et la période  $R = 1$  avec le taux des demandes  $\lambda R = 2$ .
- La distribution  $f \in \{ \text{Poisson}(\lambda), \text{Géométrique}(\frac{1}{1+\lambda}), \text{Binomiale}(S, \lambda/S) \}$
- Pour la fonction coût  $C(\cdot)$  nous avons opté pour l'erreur quadratique c'est-à-dire le paramètre de lissage optimal sera calculer via l'expression (1.23) pour chaque composante de la matrice.

## 3.2 Résultats de simulation et leurs discussions

Les résultats de simulation obtenus pour les différents paramètres précédents sont rangés dans les tables 3.1–3.3. Pour mieux jugé la qualité des différentes estimations obtenus dans notre étude il est utile de noter que le niveau moyen exacte du stock,  $Q$ , pour les paramètres retenus sont comme suit :

$$Q_{excate} = \begin{cases} 2.9338, & \text{si } f \text{ est une loi Piossonienne;} \\ 2.8527, & \text{si } f \text{ est une loi Binomiale;} \\ 3.2963, & \text{si } f \text{ est une loi Géométrique.} \end{cases}$$

$K$	$n$	$h_2^*$			$H_{stock}^*$		
		$\bar{Q}$	$Var(\times 10^{-4})$	$MSE(\times 10^{-4})$	$\bar{Q}$	$Var(\times 10^{-4})$	$MSE(\times 10^{-4})$
$K_{po}$	50	3.4861	97.1529	3148.0755	3.1253	0.0360	366.8934
	100	3.4716	51.1284	2943.6830	3.1255	0.0308	367.6268
	250	3.4454	16.6366	2634.4912	3.1255	0.0099	367.5998
	500	3.4291	6.0271	2458.9496	3.1255	0.0043	367.4062
	1000	3.4356	3.2739	2521.4885	3.1256	0.0025	368.0485
$K_{BN}$	50	3.1197	119.5004	464.9494	3.1464	0.0590	452.2156
	100	3.1025	48.4333	333.1482	3.1459	0.0197	450.0428
	250	3.0826	11.6355	233.1382	3.1456	0.0054	448.7095
	500	3.0762	3.9398	206.6794	3.1456	0.0026	448.5621
	1000	3.0740	2.0936	198.7738	3.1455	0.0012	448.2973
$K_T$	50	3.8989	281.3891	9594.9564	3.1548	0.8107	489.2493
	100	3.8947	130.3810	9364.1944	3.1538	0.4718	484.4463
	250	3.9505	68.5302	10404.8530	3.1549	0.2350	489.0945
	500	3.9763	27.6070	10896.5500	3.1554	0.1017	491.3131
	1000	3.9905	15.1866	11180.4810	3.1557	0.0465	492.3232

TABLE 3.1: Caractéristiques de l'estimateur de  $Q$  : cas de la distribution de Poisson.

$K$	$n$	$h_2^*$			$H_{stock}^*$		
		$\bar{Q}$	$Var(\times 10^{-4})$	$MSE(\times 10^{-4})$	$\bar{Q}$	$Var(\times 10^{-4})$	$MSE(\times 10^{-4})$
$K_{po}$	50	3.3828	68.0177	2877.9997	3.0179	0.1008	273.0230
	100	3.3659	27.1121	2661.0476	3.0164	0.0527	268.0336
	250	3.3531	10.8210	2515.4282	3.0156	0.0281	265.5134
	500	3.3496	3.4569	2472.9230	3.0151	0.0181	264.0069
	1000	3.3472	1.3539	2447.3122	3.0147	0.0079	262.6018
$K_{BN}$	50	2.9911	79.8242	271.5656	3.0334	0.9780	327.6755
	100	2.9507	21.2941	117.2982	3.0361	0.3734	336.7006
	250	2.9420	4.3454	84.1120	3.0350	0.1721	332.6462
	500	2.9407	1.7525	79.2637	3.0348	0.1013	331.6863
	1000	2.9415	0.8795	79.7337	3.0346	0.0431	331.2000
$K_T$	50	3.9391	216.0303	12018.5780	3.1208	2.2037	721.2976
	100	3.9625	109.3313	12425.8340	3.1225	0.9982	728.9119
	250	3.9830	53.7699	12831.0130	3.1218	0.4693	724.6216
	500	3.9820	23.0140	12776.9800	3.1231	0.2197	731.4682
	1000	3.9881	10.8127	12902.4190	3.1246	0.0820	739.2736

TABLE 3.2: Caractéristiques de l'estimateur de  $Q$  : cas de la distribution Binomiale.

$K$	$n$	$h_2^*$			$H_{stock}^*$		
		$\bar{Q}$	$Var(\times 10^{-4})$	$MSE(\times 10^{-4})$	$\bar{Q}$	$Var(\times 10^{-4})$	$MSE(\times 10^{-4})$
$K_{Po}$	50	3.8324	503.8606	3377.6817	3.3462	13.9701	38.8979
	100	3.8321	265.1039	3135.9941	3.3481	8.4656	35.2843
	250	3.8211	122.9850	2876.7588	3.3465	3.1821	28.3420
	500	3.8259	45.0574	2850.2190	3.3489	1.0142	28.6825
	1000	3.8161	29.7866	2732.1223	3.3471	0.6632	26.5071
$K_{BN}$	50	3.5519	524.8553	1178.3708	3.5220	14.8303	524.3134
	100	3.5536	237.2123	899.1444	3.5227	6.7262	519.2822
	250	3.5336	81.7505	644.6697	3.5211	2.2501	507.7991
	500	3.5492	46.2529	685.6707	3.5232	1.2049	515.8771
	1000	3.5432	20.6120	630.4639	3.5225	0.5472	512.0084
$K_T$	50	4.0729	549.9806	6580.5391	3.3095	54.3769	56.1198
	100	4.1179	227.8526	6978.3366	3.3123	35.7320	38.2978
	250	4.1237	89.5619	6936.0393	3.3044	18.6520	19.3167
	500	4.1484	56.7811	7316.8354	3.3044	10.4705	11.1257
	1000	4.1487	31.8532	7298.0621	3.3071	5.5622	6.7388

TABLE 3.3: Caractéristiques de l'estimateur de  $Q$  : cas de la distribution Géométrique.

### 3.3 Discussion des résultats

Les résultats obtenus montrent que les meilleurs couples (noyau, paramètre du lissage) qui nous donnent estimateurs plus performant, selon la distribution cible considérée et le noyau utilisé, sont :

- Cas  $f$  est une distribution du Poisson ou une distribution Binomiale :

✓ Le couple  $(K_{Po}, H_{stock}^*)$  nous fournit un meilleur estimateur, au sens des critères retenus, du niveau moyen de stock  $Q$  où il nous fournit un estimateur très proche de la valeur exacte (biais minimal) ayant une Variance et un  $MSE$  minimales pour toutes les tailles d'échantillon considérées.

✓ Le couple  $(K_{BN}, h_2^*)$  nous permet de construire un meilleur estimateur au sens du

biais du niveau moyen de stock  $Q$ . Pour concevoir un meilleur estimateur, du niveau moyen de stock  $Q$ , au sens de la variance il est préférable d'utiliser le couple  $(K_{BN}, H_{stock}^*)$ . Tandis que au sens du  $MSE$ , c'est le couple  $(K_{BN}, h_2^*)$ , qui est nettement préférable.

- ✓ Le couple  $(K_T, H_{stock}^*)$  nous donne un meilleur estimateur, au sens des critères retenus, du niveau moyen de stock  $Q$  où il nous fournit un estimateur ayant le plus petit biais, Variance et  $MSE$  pour toutes les tailles d'échantillon considérées.

Enfin, c'est on compare les résultats fournis par les trois noyaux on constate que, c'est le noyau  $K_{BN}$  combiné avec le paramètre de lissage  $h_2^*$  qui nous fournit de bons estimateurs du niveau moyen de stock  $Q$  au sens du  $MSE$ .

- Cas  $f$  est une distribution Géométrique :

L'analyse des résultats obtenus dans le cadre de la distribution Géométrique nous permettent de constater que, d'une part le paramètre  $H_{stock}^*$  nous fournisse de meilleurs estimateurs que ce soit vis-à-vis le biais, la variance ou le  $MSE$  et cela indépendamment du noyau utilisé. D'autre part, l'estimateur du niveau moyen de stock  $Q$  le plus performant est obtenu lorsque nous utilisons le couple  $(K_T, H_{stock}^*)$  pour la construction de l'estimateur à noyau de la distribution  $f$ .

## Conclusion

L'application réalisée dans le présent chapitre nous permet de conclure que la qualité des estimations considérées est intimement liée au noyau utilisé et la procédure de sélection du paramètre de lissage. De plus, quoi que, en générale, c'est le couple  $(K_{BN}, h_2^*)$  qui nous fournit de meilleure estimation au sens des critères retenus mais ça reste qu'une conclusion finale ne peut être faite. Ceci est le fait que dans certaines situations le couple en question peut s'avérer le pire des estimateurs.

## Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons considéré l'estimation à noyau discret d'une matrice des probabilités de transition d'une chaîne de Markov discrète à temps discret, décrivant un modèle de stock de type  $(R, s, S)$ . Plus précisément, on s'est intéressé à une étude récente qui se base sur la sélection de la matrice de lissage dont chaque élément, de cette dernière, correspond au paramètre de lissage minimisant une certaine fonction coût lors de l'estimation à noyau d'une probabilité de transition ayant la même position dans la matrice des probabilités de transition en question.

Au début, nous avons introduit la notion de l'estimateur à noyau d'une densité discrète. Les propriétés statistiques de ces estimateurs et les démarches classiques pour le choix du noyau et du paramètre de lissage ont été présentés. Ensuite, notre intérêt s'est porté sur le modèle du stock de type  $(R, s, S)$  et l'estimateur à noyau de la matrice de transition,  $P$ , associée à la chaîne de Markov le décrivant. En effet, après avoir introduit une brève description du modèle de stock  $(R, s, S)$ , sa matrice de transition ainsi que son estimateur à noyau, nous avons rappelé le principe et la formulation des procédures théorique de sélection du paramètre de lissage existante dans la littérature. Dans cette situation, notre proposition se base principalement sur le choix local d'un paramètre de lissage qu'on a présenté sous forme d'une matrice dont chaque élément  $h_{i,j}$  correspond au paramètre de lissage minimisant l'erreur de l'estimation de la composante  $P_{i,j}$  de la matrice de transition  $P$ .

Le travail s'achève dans la partie application où nous avons exposé les résultats obtenus par des techniques de simulation de Monté Carlo. Nous avons réalisé une étude numérique comparative sur l'impact du choix de paramètre de lissage par l'approche local et globale

sur les performances de l'estimateur de la matrice  $P$ . Le but est de comparer la qualité des estimateurs obtenu par la matrice de lissage et les paramètres de lissage sélectionnés par une procédure de sélection globale du paramètre de lissage et qui se base sur la norme matricielle quadratique proposée dans [1, 2].

Les résultats obtenus dans cette application sur des échantillons de différents tailles ( $n \in \{50; 100; 250; 500; 1000\}$ ) issus de différentes distributions ( $f \in \{ \text{Poisson, Binomiale, Géométrique} \}$ ), nous permet de conclure que lorsque nous considérons la fonction coût quadratique la qualité des estimations est intimement liée au noyau utilisé et la distribution de l'échantillon considéré. Autrement dit, dans le but de construire un estimateur de la matrice des probabilités de transition, associée à la chaîne de Markov décrivant le modèle de stock  $(R, s, S)$ , ayant de bonne propriétés le choix de la procédure de sélection du paramètre de lissage nécessite de fixer d'abord le noyau et d'avoir une connaissance préalable sur la distribution de l'échantillon ce qui n'est pas évident dans le cadre pratique.

Ce dernier problème nous laisse envisager la réalisation de deux points et qui sont primordiales pour compléter le travail abordé dans ce document, à savoir :

- Réaliser des analyses et des simulations extensives afin de cerner les types de distributions pour lesquelles il est préférable d'utiliser la matrice de lissage et celles où il est préférable de d'utiliser les procédures classiques pour la sélection du paramètre de lissage.
- Il serait intéressant de voir ce qui se passe quand il s'agit d'autres fonctions de coût pour le choix de la matrice de lissage.

# Bibliographie

- [1] Afroun, F., Aïssani, D. & Hamadouche, D. (2019) Estimation à noyau discret dans le modèle de stock de type  $(R, s, S)$ . Actes du : Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information COSI'2019, 24 au 26 Juin 2019, UMMTO, Tizi-Ouzou, Algérie (communication orale). Pages : 71-82. ISBN : 978-9947-34-164-3.
- [2] Baoudj, K. (Juin 2018). Estimation à noyaux associés d'une chaîne de Markov discrète. Master Mathématiques Option : Statistiques, Département Mathématiques, Université de Biskra. Encadreur : M. Cherfaoui.
- [3] Bowman, A.W. (1984). An alternative method of cross-validation for the smoothing density estimates. *Biometrika*, **71**, 553–560.
- [4] Chen, S.X. (1999). Beta kernel estimators for density functions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 31(2), 131–145.
- [5] Chen, S.X. (2000). Probability density function estimation using gamma kernels. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 52(3), 471-480.
- [6] Kiessé, T.S. (2007). Distributions triangulaires discrètes et lissage d'une fonction de probabilité discrète. Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- [7] Kiessé, T.S. (2008). Approche non-paramétrique par noyaux associés discrets des données de dénombrement (Doctoral dissertation, Université de Pau et des Pays de l'Adour).
- [8] Kokonendji, C.C., & Kiessé, T.S. (2011). Discrete associated kernels method and extensions. *Statistical Methodology*, 8(6), 497–516.

- [9] Kokonendji, C.C., Kiessé, T.S., & Zocchi, S.S. (2007). Discrete triangular distributions and non-parametric estimation for probability mass function. *Journal of Non parametric Statistics*, 19(6-8), 241–254.
- [10] Kokonendji, C.C., & Kiese, T.S. (2006). Estimateur à noyau discret standard pour une densité de probabilité discrète. HAL Archives-ouvertes, N° 0632. 1–36 (36 pages), HAL Id : hal-00222863, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00222863>.
- [11] Kokonendji, C.C. & Zocchi, S.S (2010). Extensions of discrete triangular distributions and boundary bias in kernel estimation for discrete functions. *Statistics and Probability Letters*, 80 :1655–1662.
- [12] Messai, K. (Juin 2019). Validation croisée dans l’estimation à noyau discret d’une matrice de transition du modèle de stock  $(R, s, S)$ . Master Mathématiques Option : Statistiques, Département Mathématiques, Université de Biskra. Encadreur : M. Cherfaoui
- [13] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *The annals of mathematical statistics*, 33(3), 1065–1076.
- [14] Rabta, B. (2002). Stabilités forte dans un modèle stochastique de gestion des stocks, Thèse de Magister, Université de Bejaïa.
- [15] Rabta, B., & Aïssani, D. (2005). Strong stability in an  $(R, s, S)$  inventory model. *International Journal of Production Economics*, 97(2), 159–171.
- [16] Rosenblatt, M. (1956) Remarks in some non parametric estimates of a density function, *Ann. Math. Statist.*, 27,832–837
- [17] Rudemo, M. (1982) Empirical choice of histogram and kernel density estimators. *Scandinavian Journal of Statistics*. **9**, 65–78.
- [18] Zougab, N. (2013). Approche bayésienne dans l’estimation non paramétrique de la densité de probabilité et la courbe de régression de la moyenne(Doctoral dissertation, Université Abderrahmane Mira de Bejaïa).

## Résumé

Ce travail, porte sur la sélection du paramètre de lissage dans l'estimation d'une matrice des probabilités de transition,  $P$ , associée à la chaîne de Markov discrète décrivant le modèle de stock  $(R, s, S)$ . Plus précisément, nous sommes intéressés au choix local du paramètre de lissage de telle sorte que ce dernier minimise l'erreur d'estimation de chaque élément de  $P$ .

L'étude numérique réalisée sur des échantillons simulés de différentes distributions et ayant de différentes tailles, montre que le choix d'un couple idéal  $(K, h)$  ne peut être systématique. En effet, un couple  $(K, h)$  bien déterminé peut être l'idéal dans une situation et qu'il soit le pire dans une autre situation.

**Mots clés :** Estimation à noyau, Noyaux discrets, Paramètre de lissage global, paramètre de lissage local, Gestion de stock.

## Abstract

This work concerns the selection of the smoothing parameter in the estimation of a transition probabilities matrix,  $P$ , associated with the discrete Markov chain describing the stock model  $(R, s, S)$ . More precisely, we are interested in the local choice of the smoothing parameter in such a way that the latter minimizes the estimation error associated with each element of  $P$ . The numerical study carried out on simulated samples of different distributions and having different sizes shows that the choice of an ideal pair  $(K, h)$  cannot be systematic. Indeed, a well-determined couple  $(K, h)$  can be the ideal in one situation and so that it becomes the worst in another situation.

**Keywords :** Kernel-estimation ; Discrete-kernels, Global smoothing parameter, Local smoothing parameter, Stock management.