République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

CHENINI Manal

Titre :

Loi exponentielle et processus de Poisson homogéne

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	BENELMIR Imen	UMKB	Président
Dr.	DJABER Ibtissem	UMKB	Encadreur
Dr.	OUANOUGHI Yasmina	UMKB	Examinateur

September 2020

Dédicace

À ma petite famille, chers parents et frères.

À chaque personne que j'ai rencontrée dans ma carrière universitaire.

REMERCIEMENTS

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour suivre.

Je tiens ensuite à remercier mes parents pour le soutien inconditionnel.

Je remercie infiniment mon encadreur Madame Djaber Ibtissem pour ses conseils.

Mes remerciments s'étendent également à tous mes enseigants durant les années des études.

Enfin, je remercie mes amis et camarades de promotion pour ces années passées ensemble, dans les meilleures moments comme dans les pires.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Lorsque l'on désire établir un modèle mathématique d'un phénomène réel, il est souvent nécessaire de faire de nombreuses hypothèses simplificatrices pour rendre le modèle tractable du point de vue calculatoire. Une hypothèse simplificatrice souvent émise en pratique est que certaines variables aléatoires suivent une loi exponentielle. Ceci se justifie du fait de la simplicité de calcul liée à la cette loi mais aussi du fait qu'elle constitue souvent une bonne approximation du phénomène réel. La loi exponentielle est la loi de la durée de vie d'un matériel qui ne s'use pas au cours du temps. Un tel matériel possède un taux de destruction (taux de panne) constant dans le temps.

Les processus de Poisson (du nom du mathématicien français Siméon Denis Poisson (1781-1840)) sont bien adaptés pour expliquer des processus d'arrivées. Des exemples de ces processus sont larges : appels téléphoniques à un standard, arrivé d'un client à un guichet, sinistres subis par une compagnie d'assurance, panne sur une machine…

Les processus de Poisson que j'ai étudiés sont des processus temporels, mais il est bon de savoir qu'il existe des processus de Poisson dans d'autres espaces. Les processus de Poisson temporels se divisent en trois types : les processus de Poisson homogènes, les processus de Poisson non homogènes et les processus composés. Nous nous contenterons d'approfondir ceux dits homogènes, c'est-à-dire de paramètre constant.

Le but de notre travail est de présenter le processus de Poisson homogène ainsi que ces propriétés fondamentales, et estimer l'intensité λ par la méthode de maximum de vraisemblance. De plus utilisée le logiciel statistique R pour présenter la notion de trajectoire de ce processus.

Ce mémoire est constitué de deux chapitres,

Dans le premier chapitre, on cible deux importantes notions dans la modélisation. La première est la loi exponentielle qui est la seul loi de probabilité qui possède la propriété d'absence de mémoire, la deuxième est le processus stochastique. On s'intéresse à des processus dit de comptage. La description d'un phénomène par des valeurs discrètes conduit à des processus de comptage dont le plus simple est le processus de Poisson utilisé dans la théorie des files d'attente.

Ensuite le deuxième chapitre consiste à définir de façon rigoureuse le plus connu et le plus simple d'entre eux, appelé ici processus de Poisson homogène, ainsi que d'en chercher les caractéristiques principales. Nous découvrirons que le processus de Poisson possède des liens étroits avec la loi exponentielle.

Nous terminera ce travail avec une conclusion.

Siméon Denis Poisson (21 juin 1781 à Pithiviers - 25 avril 1840 à Sceaux) ,né et mort en France, est un mathématicien, géomètre et physicien français.Renommé pour transformée de Fourier, théorie des probabilité (loi de Poisson).

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

Nous commeçons par rappeler quelques lois de probabilité usuelles qui joueront un rôle important dans la suite.

1.1 Notions sur la loi exponentielle et la loi de Poisson

Un premier loi important dans notre travaille est la **loi de Poisson.**

1.1.1 Loi de Poisson

Cette loi est en général utilisée des évènements rares comme le nombre d'accidents de voiture, Le nombre de clients se présentant à un guichet automatique d'une banque en une heure,.... En fait, la loi de Poisson a été introduite en 1838 par Siméon-Denis Poisson.

Définition 1.1.1 *On dit que la variable aléatoire (v.a) X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si elle prend des valeurs entières non-négatives, avec probabilité*

$$P\left(X = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp\left(-\lambda\right), \qquad k = 0, 1, 2... \ \cdot \tag{1.1}$$

La figure (1.1) *représente la probabilité d'une variable aléatoire de loi de Poisson des paramètres* $0.5, 2, 5, 10$. *Ils ont été obtenus dans le logiciel R par la commande* $rpois$().

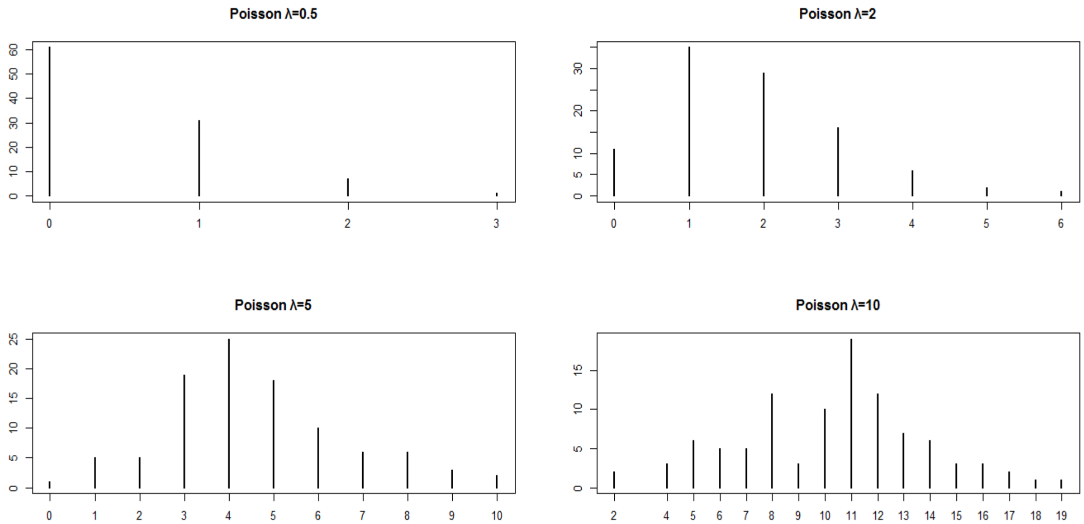


FIG. 1.1 – Probabilite d'une (v.a) de loi de Poisson de paramètre $0.5, 2, 5$ et 10.

Définition 1.1.2 ***La fonction génératrice des moments*** $G(t)$ *de la (v.a)* X *est définie pour toutes les valeurs* t *par*

$$G_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] = \begin{cases} \sum\limits_x \exp(tx) P(X = k), & \text{si } X \text{ est discrét.} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) f(x) dx, & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

On appelle $G_X(t)$ la fonction génératrice des moments car tous les moments de X peuvent être obtenus en différenciant successivement $G_X(t)$. Par exemple,

$$G'_X(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{E}[\exp(tX)] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt}\exp(tX)\right] = \mathbb{E}[X\exp(tX)].$$

Par conséquent,

$$G'_X(0) = \mathbb{E}[X]. \tag{1.2}$$

De même,

$$G_X^{''}(t) = \frac{d}{dt}G_X^{'}(t) = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt}(X\exp(tX))\right] = \mathbb{E}\left[X^2\exp(tX)\right].$$

Et donc

$$G_X^{''}(0) = \mathbb{E}\left[X^2\right]. \tag{1.3}$$

En général,

$$G_X^n(0) = \mathbb{E}[X^n], \quad n \geq 1.$$

Mentionnons quelques propriétés de base de cette loi

Proposition 1.1.1 *1.* ***La fonction génératrice des moments*** *d'une variable aléatoire de Poisson est donnée par*

$$G_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] = \exp[\lambda(\exp(t)-1)]. \tag{1.4}$$

2. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}ar(X) = \lambda.$$

3. Si X et Y sont indépendantes, et suiventdes lois de Poisson de parametre λ et μ respectivement, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Preuve.

1. On a

$$\begin{aligned} G_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(tk) \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \\ &= \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \exp(t))^k}{k!} \\ &= \exp(-\lambda) \exp(\lambda \exp(t)) \\ &= \exp[\lambda(\exp(t) - 1)]. \end{aligned}$$

2. On calcule les dérivées de la fonction génératrice

$$G_X^{'}(t) = \lambda \exp(t) \exp[\lambda(\exp(t) - 1)],$$

$$G_X^{''}(t) = (\lambda \exp(t))^2 \exp[\lambda(\exp(t) - 1)] + \lambda \exp(t) \exp[\lambda(\exp(t) - 1)],$$

En utilisant successivement les formules (1.1) et (1.2), on obtient

$$\mathbb{E}(X) = G_X^{'}(0) = \lambda, \quad \mathbb{E}[X^2] = G_X^{''}(0) = \lambda^2 + \lambda,$$

et

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda.$$

Ainsi, à la fois **l'espérance** et la **variance** de X, égales à λ.

3. Pour démontrer cette proposition le plus rapide, nous utilisons la fonction génératrice de $X + Y$.

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[\exp(t(X+Y))] &= \underset{\text{Par indépendance de } X \text{ et } Y.}{\mathbb{E}[\exp(tX)] \times \mathbb{E}[\exp(tY)]} \\ &= G_X(t) G_Y(t). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= \exp\left[\lambda\left(\exp(t)-1\right)\right]\exp\left[\mu\left(\exp(t)-1\right)\right] \\ &= \exp\left[\left(\lambda+\mu\right)\left(\exp(t)-1\right)\right]. \end{aligned}$$

Qui est la fonction génératrice de la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

On déduit que $X+Y$ a pour loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. ■

La somme de n variables indépendantes de loi de Poisson suit encore une loi de Poisson.

Proposition 1.1.2 *Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables indépendantes de loi respective $\mathcal{P}(\lambda_i)$, alors*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right).$$

Preuve. Soit

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

où $X_1, X_2, ..., X_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sont des *(v.a)* indépendantes ; alors

$$\begin{aligned} G_Z(t) = \mathbb{E}\left[\exp(tZ)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left(tX_i\right)\right] \\ &= \underset{\text{car } X_i \text{ sont indépendantes}}{\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left(tX_i\right)\right]} \qquad (1.6) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\exp\left[\left(\lambda_i\right)\left(\exp(t)-1\right)\right] \\ &= \exp\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\exp(t)-1\right)\right]. \end{aligned}$$

Qui est la fonction génératrice de la loi $\mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$.

On déduit que $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ a pour loi $\mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$. ■

Une deuxième loi importante dans cet section est la **loi exponentielle.**

1.1.2 Loi exponentielle

Définition 1.1.3 *On dit que la (v.a) X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, si elle satisfait*

$$\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}, \quad \textit{pour tout } t \geq 0. \tag{1.7}$$

*Sa **fonction de répartition** est donc*

$$\mathbb{F}_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda t) & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si\ non \end{cases},$$

*et **sa densité***

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda t) & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si\ non \end{cases}.$$

Regardons à nouveau l'effet du paramètre λ sur la distribution de la variable avec les quelques graphiques. La commande à taper dans R est dexp().

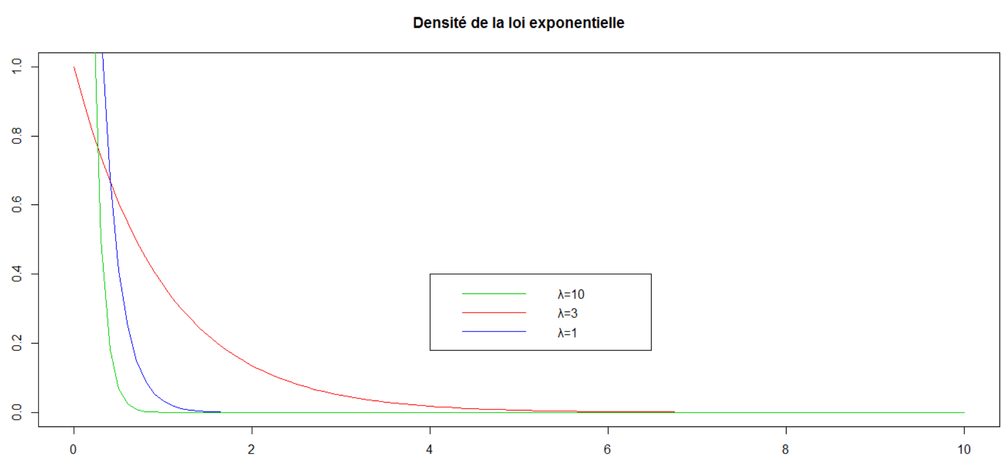


FIG. 1.2 – Densité de loi exponentielle de paramètres $1, 5$ et 10.

Proposition 1.1.3 *1.* ***La fonction génératrice des moments*** *d'une (v.a) exponentielle est donnée par*

$$G_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda. \tag{1.8}$$

2. Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad et \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{1.9}$$

Preuve.

1. On peut calculer facilement la fonction génératrice des moments de la *(v.a)* $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$,

$$\begin{aligned} G_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] &= \int_0^{+\infty} \exp(tx) f(x)\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(tx) \lambda \exp(-\lambda x)\, dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} \exp(-(\lambda - t) x)\, dx. \end{aligned}$$

Pour $t \geq \lambda$, la fonction n'est pas intégrable en l'infini, tandis que pour $t < \lambda$, on a

$$G_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

2. Nous notons par la dérivation précédente que, pour la distribution exponentielle, $G_X(t)$ n'est défini que pour des valeurs de t inférieures à λ.

$$G'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, \quad \text{et} \quad G''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}.$$

On obtient,

$$\mathbb{E}(X) = G_X'(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X^2] = G_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Alors

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

■

La somme de n variables indépendantes de loi exponentielle de même paramètre suit la **loi Gamma** $\Gamma(n, \lambda)$.

Proposition 1.1.4 *Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$, alors*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda),$$

*où $\Gamma(n, \lambda)$ est la **loi Gamma** de paramètre n et λ.*

Ces graphiques ont été obtenus dans R avec la commande dgamma(x,n,λ).

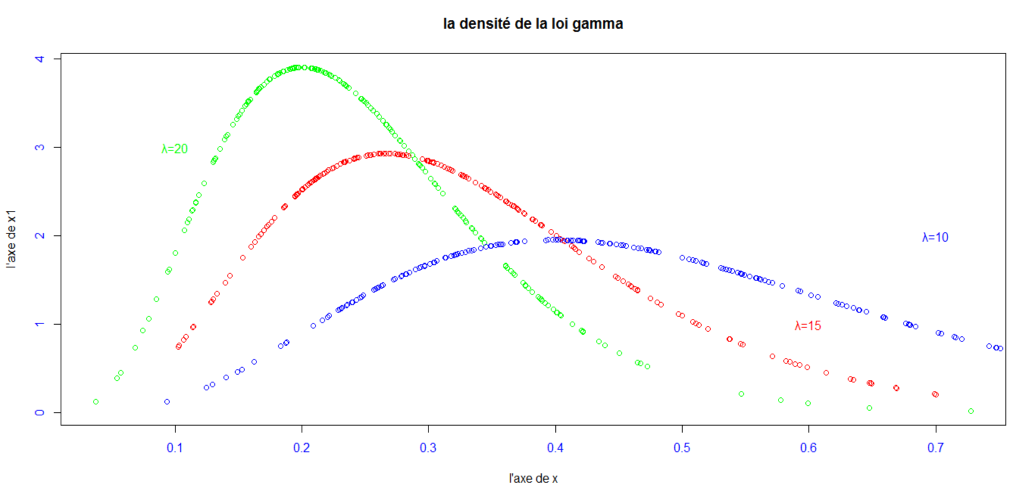


FIG. 1.3 – Densité de loi gamma des paramètres $\lambda = 20, 15, 10$

Proposition 1.1.5 *1. Sa **densité** est donnée par*

$$f(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \exp(-\lambda t) \mathbf{1}_{t \geq 0}(t). \tag{1.10}$$

*2. **L'espérance** et la **variance** d'une variable Y suit la loi Gamma $(\Gamma(n, \lambda))$*

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{\lambda} \quad et \quad \mathbb{V}ar(Y) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

*3. **La fonction génératrice des moments** d'une (v.a) Y de loi Gamma est donnée par*

$$G_Y(t) = \mathbb{E}[\exp(tY)] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, \quad t < \lambda.$$

Rappel : Si X admet comme fonction de densité f_X et Y admet comme fonction de densité f_Y, avec X et Y indépendantes, la fonction de densité de $X + Y$ est le **produit de convolution**

$$\{f_X \star f_Y\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t-u) \, du.$$

Preuve.

1. On va montrer que la fonction de densité de la variable

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

est

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \exp(-\lambda t) \mathbf{1}_{t \geq 0}(t). \tag{1.11}$$

Simple récurrence, en utillisant le rappel, la fonction de densité de $S_1 = X_1$ est bien

$$f_{S_1}(t) = \frac{\lambda^1}{0!} t^0 \exp(-\lambda t) \mathbf{1}_{t \geq 0}(t),$$

et pour $n+1$, $\forall t>0$

$$\begin{aligned}
\left\{f_{S_n} \star f_{X_{n+1}}\right\}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(u)\, f_{X_{n+1}}(t-u)\, du \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} \exp(-\lambda u) \times \lambda \exp(-\lambda(t-u))\, du \\
&= \frac{\lambda^{n+1}\exp(-\lambda t)}{(n-1)!} \int_0^t u^{n-1} du = \frac{\lambda^{n+1}\exp(-\lambda t)\, t^n}{(n)!}.
\end{aligned}$$

2. On note

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

où $X_1, X_2, ..., X_n$ des *(v.a)* indépendantes alors

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \underset{\text{car } X_i \text{ sont indépendant}}{n\mathbb{E}(X_1)} = \frac{n}{\lambda},$$

et

$$\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i) = n\mathbb{V}ar(X_1) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

3. Facilement en utilisant successivement les formules (1.5) et (1.7), on obtient

$$\begin{aligned}
G_Y(t) = \mathbb{E}[\exp(tY)] &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\exp tX_i] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\lambda}{\lambda - t}\right]^i \\
&= \left[\frac{\lambda}{\lambda - t}\right]^n,\ t<\lambda.
\end{aligned}$$

■

Une propriété caractéristique de la loi exponentielle est la propriété dite **d'absence de mémoire.**

Proposition 1.1.6 *Supposons que* $X \sim \mathcal{E}xp\left(\lambda\right)$ *; pour tous* $s, t \geq 0$*, on a*

$$\mathbb{P}\left[X > s + t | X > s\right] = \mathbb{P}\left[X > t\right]. \tag{1.12}$$

Preuve. Par la formule (1.6), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[X > s + t | X > s\right] &= \frac{\mathbb{P}\left[X > s + t, X > s\right]}{\mathbb{P}\left[X > s\right]} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[X > s + t\right]}{\mathbb{P}\left[X > s\right]} \\
&= \frac{\exp\left(-\lambda\left(s + t\right)\right)}{\exp\left(-\lambda s\right)} \\
&= \exp\left(-\lambda t\right) = \mathbb{P}\left[X > t\right].
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.1.1 *Dans la suite, on va utiliser des variables aléatoires de loi exponentielle pour modéliser le temps écouler entre deux occurence d'un évènement.*

1.2 Notions de processus stochastique

Les processus aléatoires ou **stochastiques** ont été conçus pour modéliser l'évolution temporelle de phénomènes aléatoires. Ils sont d'écrits par des familles discret ou continues de variables ou de vecteurs aléatoires $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, ou $\mathbb{T}$ est l'ensemble des temps d'observation des états du processus.

Définition 1.2.1 ***Un processus stochastiques*** *est une famille de (v.a)* $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$*, indexée par l'ensemble* $\mathbb{T}$ *et définie sur un même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeur dans un espace mésurable* $(E, \mathcal{E})$*.*

- $\mathbb{T}$ *est l'**espace des paramètres**, ou **espace des temps dénombrable** ou **continue**, car le paramètre $t \in \mathbb{T}$ est souvent un paramètre temporel.*
- *E est l'espace des valeurs des (v.a) X_t, appelé **espace d'états.***
- *Si $\mathbb{T}$ est dénombrable, on parle de processus stochastique à **temps discret** et si $\mathbb{T}$ est une partie de $\mathbb{R}$, on parle alors de processus stochastique à **temps continue.***
- *De même pour l'espace E ; on parle de processus stochastique discret ou continu.*
- Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.

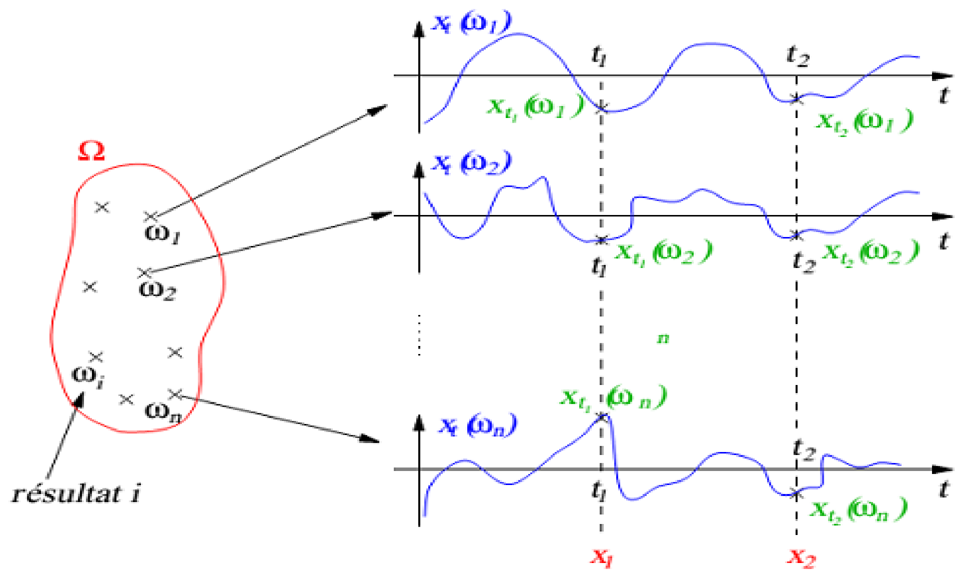


FIG. 1.4 – Processus aléatoire

1.2.1 Propriétés de processus stochastique

Loi de processus

La loi d'un processus stochastique est donnée par ces **lois fini-dimensionnelles**.

Définition 1.2.2 ***Les distributions à dimensions finies** du processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont les distributions de vecteur $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$, $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{T}$ à dimensions finies.*

Alors la famille des lois des variables aléatoires $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *s'appelle la famille des lois fini dimensionnelles ou famille de répartition finie de* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$. *Cette fonction est donnée par*

$$F_{X_{t_1},...,X_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\{X_{t_1} \leq x_n, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\}, \quad pour \quad t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{T}.$$

Dans la suite nous nous intéressons souvent aux deux propriétés suivantes des processus stochastiques.

Définition 1.2.3 *Soit un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *indexé dans un ensemble* $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$. *La (v.a)* $(X_{t_i} - X_{t_j})$ *où* $t_i < t_j$ *est* ***l'accroissement du processus*** *sur l'intervalle* $[t_i, t_j[$.

Définition 1.2.4 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *à* ***accroissements stationnaires*** *si* $\forall h > 0$ *la loi accroissements* $(X_{t+h} - X_t)$ *ne dépend pas de* t.

Définition 1.2.5 *Un processus stochastique est dit à* ***accroissement indépendant*** *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, *pour tout* $t_0 = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n < \infty$, *les variables* $X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*

Définition 1.2.6 *Deux processus stochatisques* $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ *et* $\{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$ *sont dits* ***indépendants*** *si tout événement défini à partir du premier est indépendant de tout événement défini à partir du second, c'est-à-dire si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout ensemble de* n *éléments* $t_1, ..., t_n$ *de* $\mathbb{T}$, *les vecteurs aléatoires* $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *et* $(Y_{t_1}, ..., Y_{t_n})$ *sont indépendants.*

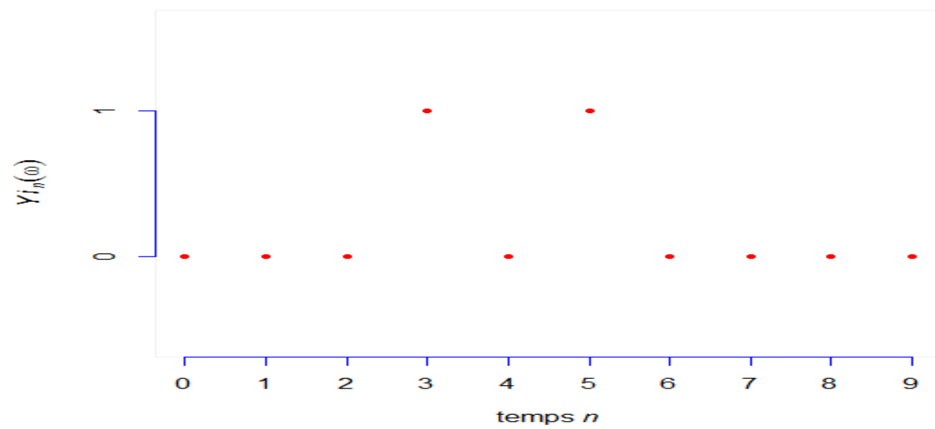
Une notion importante est celle de trajectoire, à mettre en parallèle avec celle de réalisation pour une (v.a).

Définition 1.2.7 *À éventualité* $\omega \in \Omega$ *fixée, la trajectoire ou* ω*-trajectoire du processus* X_t *est la courbe suivante*

$$t \in \mathbb{T} \longmapsto X_t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.1 *On considère un processus de Bernoulli, il s'agit d'une suite d'épreuves indépendantes de Bernoulli* $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *pouvant prendre deux valeurs, par exemple* 0 *et* 1 *avec*

$$\mathbb{P}(Y_m = 1) = p \quad et \quad \mathbb{P}(Y_m = 0) = 1 - p.$$



Continuité des processus

Définition 1.2.8 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est* ***continue en probabilité*** *au point* t *si*

$$P(\,|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) \rightarrow 0 \quad si \quad h \rightarrow 0.$$

Définition 1.2.9 *On dit qu'un processus stochastique est* ***localement continu en probabilité****, si pour tout* $t \geq 0$ *; on a*

$$\lim_{h\rightarrow 0} \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \geq 1) = 0.$$

Définition 1.2.10 *Le processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit continu à droite avec limite à gauche* ***(càdlàg)*** *s'il a des trajectoires continues à droite et ont des limites à gauche presque sûres.*

Quantités importantes

Voici quelques concepts utiles en théorie des processus stochastiques, ce sont les fonctions moyenne, corrélation et covariance.

Définition 1.2.11 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus stochastique.*

♦ *F**onction moyenne** d'un processus stochastique est donné par*

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[X_t].$$

♦ ***Variance*** *d'un processus stochastique X_t est donné par*

$$\mathbb{V}ar(X_t) = \sigma_t^2 = \mathbb{E}[X_t - \mathbb{E}[X_t]]^2.$$

♦ ***Fonction de covariance,***

$$\Gamma(t,s) = \mathbb{C}ov(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_s - \mathbb{E}(X_s)].$$

♦ ***Fonction d'autocorrélation***

$$Corr(X_t, X_s) = \frac{\mathbb{C}ov(X_t, X_s)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X_t)\mathbb{V}ar(X_s)}}.$$

Remarque 1.2.1 *Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est* ***centré****, si $\forall t \in \mathbb{T}$ la (v.a) X_t est intégrable et $\mathbb{E}[X_t] = 0$.*

1.2.2 Processus de comptage

La plupart des phénomènes aléatoires demandent une modélisation et étude au cours du temps, comme les processus de comptage N_t, $t \in \mathbb{R}^+$, tq les :

∘ Appels arrivant dans un standard téléphonique.

∘ Arrivées de clients à un guichet.

∘ Survenue de pannes dans un parc de machines,...

Le type de processus stochastique étudié dans la suite porte le nom de processus de comptage.

Définition 1.2.12 *Un processus stochastiques* $\{N(t), \ t \geq 0\}$ *est appelé* ***processus de comptage*** *si* $N(t)$ *représente le nombre de sauts qui sont arrivés avant l'instant* t*, et supposons que* $N(0) = 0$.

Exemple 1.2.2 *On peut compter le nombre de visiteurs dans un musée qui sont arrivés avant l'instant* t*. Chaque saut correspond à l'arrivée d'un nouveau visiteur.*

Le processus de comptage vérifie les propriétés suivantes

Propriété 1.2.1 *Soit* $(N(t))_{t \geq 0}$ *un processus de comptage. On a*

1. $N(t) \geq 0$,
2. $N(t) \in \mathbb{N}$,
3. *Si* $s < t$*, alors* $N(s) \leq N(t)$,
4. *Pour tout couple* (s,t) $s < t$, $N(t) - N(s)$ *représente le nombre de sauts intervenus dans l'intervalle de temps* $]s,t]$.
5. *Un processus de comptage* $N(t)$ *est à valeurs entières positivrs , et croissante.*
6. *Les trajectoires* $t \longmapsto N_t(\omega)$ *sont continues à droite et limitées à gauche.*

Supposons que des événements se produisent au cours du temps et notons T_n la *(v.a)* "**Temps d'occurrence du n$^{\text{ième}}$ événement**" $\forall n \in \mathbb{N}$.
Le processus $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$, appelé **processus des temps d'occurrence (d'arrivées)**, est continu à temps discret. Par convention, on pose $T_0 = 0$. A partir de ce processus des temps d'occurrence, il est possible de définir le processus de comptage. Un second processus peut être associé au processus des temps d'occurrence ; le processus des temps **d'inter_occurrence (d'inter_arrivées)** $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire S_n est le temps d'attente entre les $(n-1)^{ième}$ et $n^{iéme}$ occurrences, c-à-d

$$S_n = T_n - T_{n-1}.$$

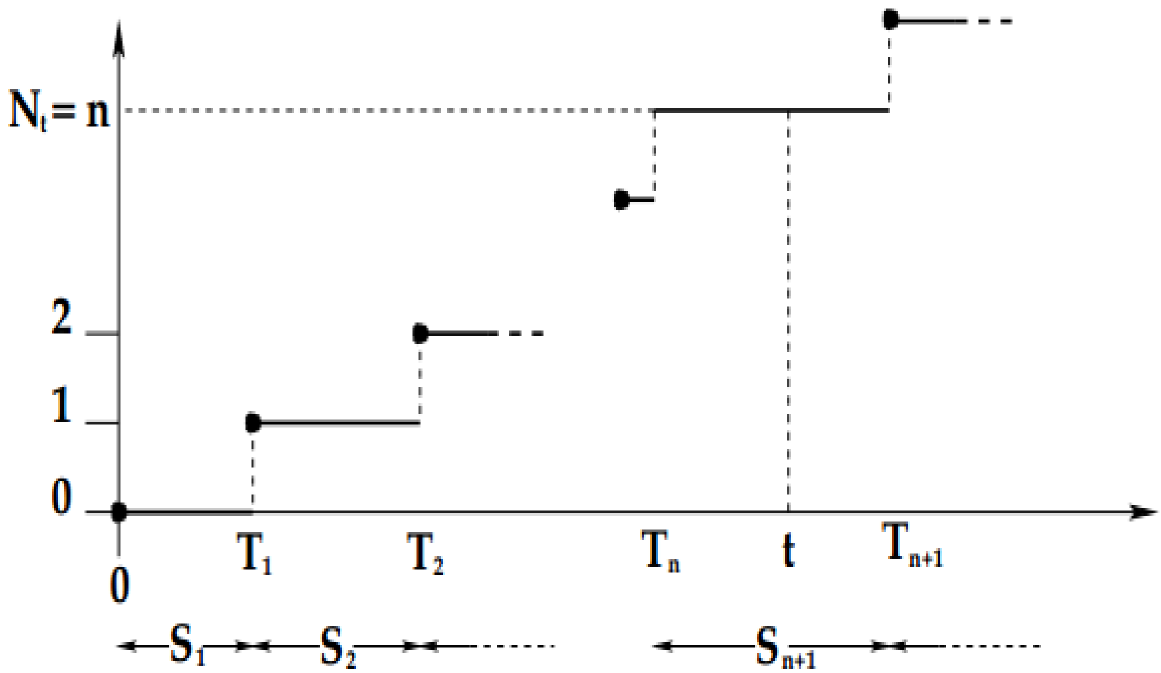


FIG. 1.5 – Processus de comptage

Remarque 1.2.2 *La connaissance du processus $N(t)$ ou des temps d'arrivées sont équivalentes. On vient de voir comment $N(t)$ dépend des T_n ; graphiquement, les T_n sont les instants de saut des trajectoires. On peut aussi noter les égalités d'événements suivantes :*

$$\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\} \quad et \quad \{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}.$$

Chapitre 2

Processus de Poisson homogéne

Le processus de Poisson est un processus de comptage qui modélise la répartition dans le temps d'événements comme l'arrivée d'appels à un central téléphonique, occurrence d'accident dans une ville, panne de machines dans une usine...

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions du processus de Poisson et discutons de plusieurs propriétés ainsi que des relations avec certaines distributions de probabilité bien connues, et estimer l'intensité λ par la méthode de maximum de vraisemblance.

2.1 Définitions de processus de Poisson

Définition 2.1.1 *Un processus de comptage* $\{N_t, t \geq 0\}$ *est un* ***processus de Poisson d'intensité*** λ, $\lambda > 0$, *s'il vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $N(0) = 0$;

(ii) $(N_t)_{t \geq 0}$ **est à accroissements indépendants** ;

(iii) Le nombre d'occurrences dans un intervalle de temps quelconque de longueur t suit la loi de Poisson de paramètre λt, c'est-à-dire,$\forall s, t \geq 0$, on a

$$P\{N_{s+t} - N_s = n\} = \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (n \geq 0).$$

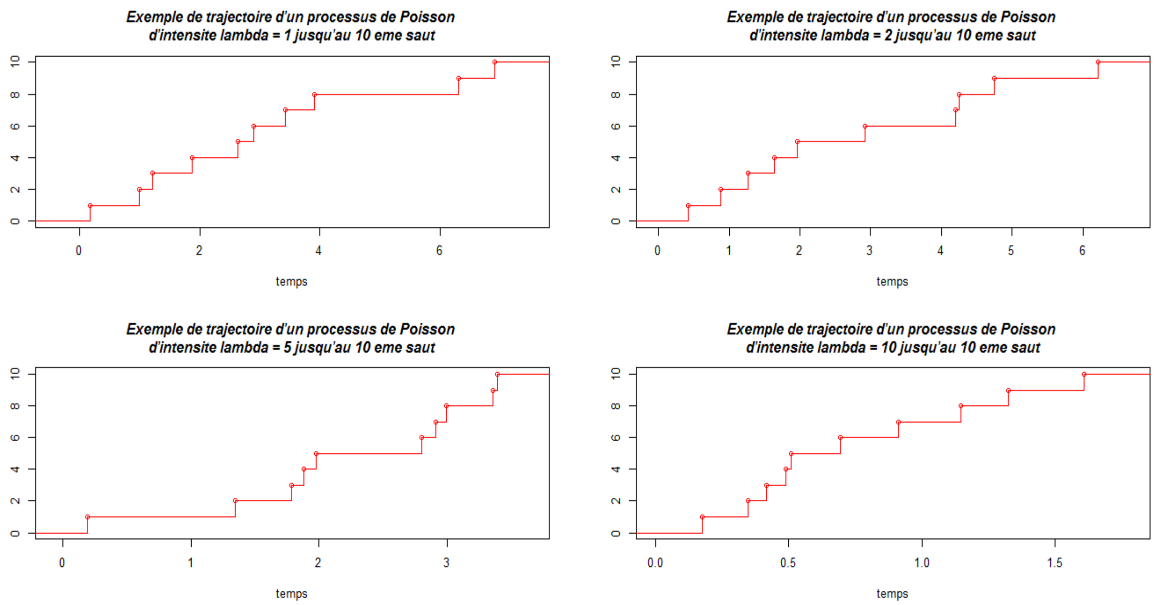


FIG. 2.1 – Trajectoires d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1, 2, 5, 10$.

Une autre façon de définir un processus de Poisson est la suivante.

Définition 2.1.2 *Le processus de comptage* $\{N_t, t \geq 0\}$ *est un* ***processus de Poisson d'intensité*** λ**,** $\lambda > 0$, *si*

(a) $N(0) = 0$;

(b) Le processus est **à accroissements indépendants et stationnaires** ;

(c) $P\{N_h = 1\} = \lambda h + o(h)$, pour $h \to 0$;

(d) $P\{N_h \geq 2\} = o(h)$, pour $h \to 0$.

Rappel : $o(.)$ est une fonction, tell que

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

Théorème 2.1.1 *Les définitions* (2.1.1) *et* (2.1.2) *sont équivalentes.*

Preuve. Soit $\{N_t, t \geq 0\}$, nous montrons que la définition (2.1.1) implique la définition (2.1.2) .

(a) C'est (i).

(b) On sait que le processus est à accoroissements indépendants par (ii), et le processus est à accoroissements stationnaires car on voit bien que seule la longueur de l'intervalle t intervient dans (iii) .

(c) On fait un développement limité pour $h \to 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{N_h = 1\} &= \lambda h \exp(-\lambda h)_{\text{d'aprés } (iii)} \\
&= \lambda h (1 + o(1))_{\text{développement limité de } \exp(-\lambda h) \text{ pour } h \to 0.} \\
&= \lambda h + o(h).
\end{aligned}$$

(d) On a, pour h au voisinage de 0

$$\begin{aligned}
P\{N_h \geq 2\} &= \sum_{k \geq 2} P\{N_h = k\} \\
&= \sum_{k \geq 2} \exp(-\lambda h) \frac{(\lambda h)^k}{k!}_{\text{d'aprés } (iii)} \\
&= \exp(-\lambda h) \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda h)^k}{k!} - 1 - \lambda h \right)_{\text{on somme sur } \mathbb{N} \text{ puis on retire les deux premiers termes.}} \\
&= \exp(-\lambda h)(\exp(-\lambda h) - 1 - \lambda h) \\
&= 1 - \exp(-\lambda h)(1 + \lambda h) \\
&= 1 - (1 - \lambda h + o(h))(1 + \lambda h)_{\text{par D.L}} \\
&= 1 - 1 - \lambda h + \lambda h + o(h) \\
&= o(h).
\end{aligned}$$

Réciproquement, nous montrons que la définition (2.1.2) implique la définition (2.1.1) .

(i) C'est (a).

(ii) C'est (b).

(iii) Pour montrer qu'une *(v.a)* N_t vérifiant la définition (2.1.2) suit une loi de Poisson, nous utiliserons le fait que la transformée de Laplace caractérise la loi.

Tout d'abord, calculons la transformée de Laplace d'une loi de Poisson.

Soit X une *(v.a)* réelle suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda t > 0$. On a alors $\forall u \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(-uX\right)\right] &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp\left(-un\right) \mathbb{P}\left(X = n\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp\left(-un\right) \exp\left(-\lambda t\right) \frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!} \\
&= \exp\left(-\lambda t\right) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left(\lambda t \exp\left(-u\right)\right)^n}{n!} \\
&= \exp\left(-\lambda t\right) \exp\left(\lambda t \exp\left(-u\right)\right) \\
&= \exp\left(\lambda t \left(\exp\left(-u\right) - 1\right)\right).
\end{aligned}$$

Soit N_t vérifiant la définition (2.1.2). Calculons sa transformée de Laplace

fixons $u \geq 0$ et définissons

$$g\left(t\right) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-uN\left(t\right)\right)\right].$$

$\forall h > 0$ on calcule

$$\begin{aligned}
g\left(t+h\right) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-uN\left(t+h\right)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-uN\left(t\right)\right) \exp\left(-u\left(N\left(t+h\right) - N\left(t\right)\right)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-uN\left(t\right)\right)\right] \mathbb{E}\left[\exp\left(-u\left(N\left(t+h\right) - N\left(t\right)\right)\right)\right]_{\text{accroissements indépendants}} \\
&= g\left(t\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-u\left(N\left(h\right) - N\left(0\right)\right)\right)\right]_{\text{accroissements stationnaires}} \\
&= g\left(t\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-uN\left(h\right)\right)\right]_{\text{car } (N(0)=0).}
\end{aligned}$$

D'après (c) et (d), on obtient

$$\begin{aligned} P\{N(h)=0\} &= 1-P\{N(h)\geq 1\} \\ &= 1-[P\{N(h)=1\}+P\{N(h)\geq 2\}] \\ &= 1-\lambda h+o(h). \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(-uN(h))] &= \sum_{n\geq 0}\exp(-un)\,\mathbb{P}(N(h)=n) \\ &= \mathbb{P}(N(h)=0)+\exp(-u)\,\mathbb{P}(N(h)=1) \\ &+ \sum_{n\geq 2}\exp(-un)\,\mathbb{P}(N(h)=n). \end{aligned}$$

Or

$$\forall n\geq 2,\quad \mathbb{P}\{N(h)\geq 2\}=\sum_{k\geq 2}\mathbb{P}(N(h)=k)\geq \mathbb{P}(N(h)=n).$$

D'où on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(-uN(h))] &\leq 1-\lambda h+o(h)+\exp(-u(\lambda h+o(h))) \\ &+ \left(\sum_{n\geq 0}\exp(-un)\right)P\{N(h)\geq 2\} \\ &= 1-\lambda h+o(h)+\exp(-u(\lambda h+o(h))) \\ &+ \left(\sum_{n\geq 0}\exp(-un)\right)o(h) \\ &= 1-\lambda h(1-\exp(-u))+o(h). \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$g(t+h)=g(t)\left[1-\lambda h(1-\exp(-u))+o(h)\right].$$

Impliquant que, $\forall h\in\mathbb{R}^*$

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\lambda g(t)(\exp(-u)-1)+\frac{o(h)}{h},$$

donc la limite existe quand $h \longrightarrow 0$. Ainsi g est dérivable, donc

$$g'(t) = \lambda g(t)(\exp(-u) - 1).$$

En outre,

$$\forall t \geq 0,\ g(t) > 0,\quad \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda(\exp(-u) - 1).$$

C'est à dire en intégrant, et l'utilisation de $g(0) = 1$

$$\log(g(t)) = \lambda t(\exp(-u) - 1).$$

Or

$$g(t) = \exp\{\lambda t(\exp(-u) - 1)\}.$$

Autrement dit, la transformée de Laplace de $N(t)$ évaluée en u est $\{\lambda t(\exp(-u) - 1)\}$. comme il s'agit également de la transformée de Laplace d'une *(v.a)* de Poisson avec la moyenne λt, le résultat découle du fait que la distribution d'une variable aléatoire non négatif est uniquement déterminée par sa transformée de Laplace, d'où (iii). ∎

Exemple 2.1.1 *Le processus de comptage des voitures contrôlées à un guichet d'autoroute, durant un intervalle de temps donné ou l'intensité λ est constante, est un processus de Poisson. Supposons que Ie nombre de voitures franchissant un péage donné est décrit par un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 300$ (voitures par heure). Le nombre aléatoire de véhicuies franchissant Ie péage en une minute est décrit par Ia (v.a) de Poisson $N_{\left(s+\frac{1}{60}\right)} - N_s$ de Ioi*

$$\forall n \geq 0,\quad P\left\{N_{\left(s+\frac{1}{60}\right)} - N_s = n\right\} = \exp\left(-\frac{300}{60}\right)\frac{\left(\frac{300}{60}\right)^n}{n!} = \frac{\exp(-5)(5)^n}{n!}.$$

Graphe d'une réalisation du processus de Poisson d'intensite $\lambda = 5$.

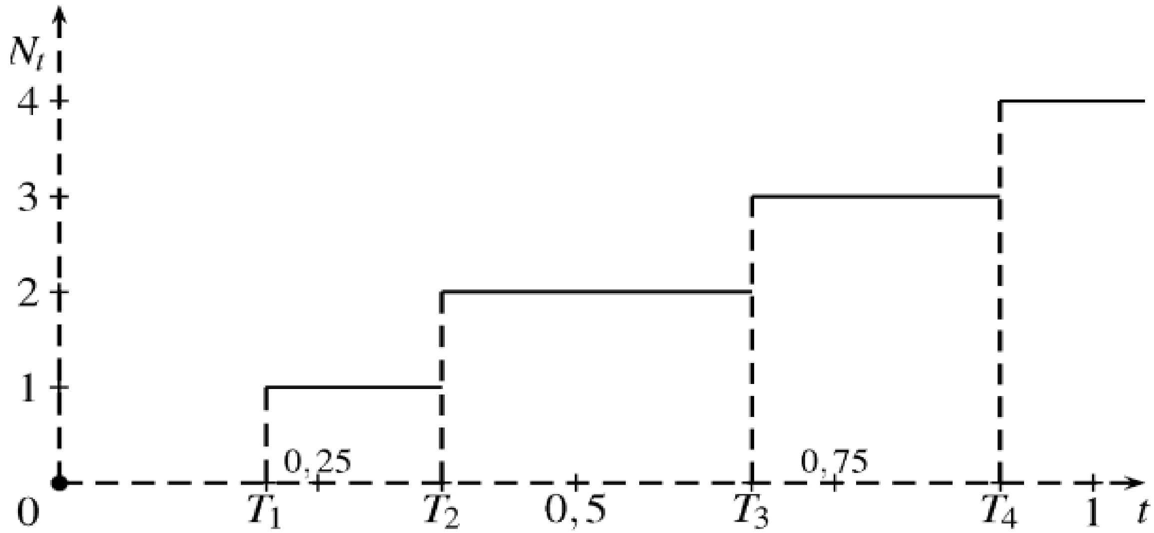


FIG. 2.2 – T_n temps de realisation de Ia $n^{iéme}$ occurrence.

2.2 Distributions des temps arrivées et temps inter-arrivées

Définition 2.2.1 *Le premier événement dans un processus de Poisson* $(N_t)_{t\geq 0}$ *d'intensité* λ *arrive après un temps de loi exponentielle de paramètre* λ*. Le* $n^{i^{ème}}$ *événement arrive après un temps*

$$T_n = S_1 + S_2 + ... + S_n, \quad n \geq 1.$$

Où la suite $S_1, S_2, ..., S_n$*,* $n \geq 1$ *sont des (v.a) indépendantes de loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$*.*

Définition 2.2.2 *Etant donné un processus ponctuel* $(T_n)_{n\geq 0}$*, on définit la suite* $(S_n)_{n\geq 1}$ *des inter-arrivées par*

$$S_n = T_n - T_{n-1}, \quad pour \quad n \geq 1.$$

La (v.a) réelle S_n *représente l'intervalle de temps entre deux arrivée de tops consécutives.*

Lorsque l'on observe un processus, il est naturel de s'intéresser au temps d'attente entre les sauts ; on a alors le résultat fondamental suivante

Théorème 2.2.1 *Soit*

$$T_n = \inf \{t \geq 0, N(t) \geq n\} \quad \textit{et} \quad S_n = T_n - T_{n-1}, \quad \textit{pour} \quad n \geq 1.$$

Alors

1. Les instants d'inter-arrivées $(S_n)_{n\geq 1}$, est une suite des *(v.a)* i.i.d de loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$, $\lambda > 0$. La densité donnée par

$$f_{(S_1,\dots,S_n)}(s_1, \dots, s_n) = \lambda^n \exp(-\lambda s_n) \mathbf{1}_{0<s_1<\dots<s_n}$$

2. $T_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ suit la loi $\Gamma(n, \lambda)$ de densité

$$f_{T_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \exp(-\lambda t) \mathbf{1}_{t\geq 0}(t).$$

Ce résultat justifie la place particulier de la loi exponentielle dans l'étude des modèles de durée.

Preuve.

1. On montre que le vecteur des temps d'arrivée $(T_1, \dots, T_n)$ admet pour densité

$$f_{(T_1,\dots,T_n)}(t_1, \dots, t_n) = \lambda^n \exp(-\lambda t_n) \mathbf{1}_{0<t_1<\dots<t_n}.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Étape1 : changement de variable

Supposons que le vecteur aléatoire $(T_1, \dots, T_n)$ soit à densité, de densité φ.

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue bornée, alors comme $T_1 \leq T_2 \leq ... \leq T_n$, par un changement de variable $t_k = s_1 + ... + s_k$ $(1 \leq k \leq n)$ de jacobien 1 (la matrice jacobienne est triangulaire), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f\left(S_1,...,S_n\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{0<T_1\leq...\leq T_n} f\left(T_1,...,T_n - T_{n-1}\right)\right] \\
&= \int\limits_{0\leq t_1\leq...\leq t_n} f\left(t_1,...,t_n - t_{n-1}\right)\varphi\left(t_1,...,t_n\right) dt_1...dt_n \\
&= \int\limits_{0\leq s_1\leq...\leq s_n} f\left(s_1,...,s_n\right)\varphi\left(s_1,...,s_1+...+s_n\right) ds_1...ds_n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\psi : \left(s_1,...,s_n\right) \to \varphi\left(s_1, s_1+s_2..., s_1+...+s_n\right),$$

est la densité de $\left(S_1,...,S_n\right)$.

Étape2 : calcul de la densité de $(T_1,...,T_n)$

Soit l'évènement

$$A_n = \left\{T_1 \in \left[t_1, t_1+h_1\right[, T_2 \in \left[t_2, t_2+h_2\right[, ..., T_n \in \left[t_n, t_n+h_n\right[\right\},$$

où $0 < t_1 < t_1+h_1 < t_2 < t_2+h_2 < ... < t_n < t_n+h_n$, alors A_n est la réunion des évènements :

– zéro top dans$[0, t_1[$ est exactement un top dans $[t_1, t_1+h_1[$;

– zéro top dans $[t_1+h_1, t_2[$ est exactement un top dans $[t_2, t_2+h_2[$;

– $\vdots$

– zéro top dans $[t_{n-1}+h_{n-1}, t_n[$ est au moins un top dans $[t_n, t_n+h_n[$.

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(t_1 < T_1 < t_1 + h_1, ..., t_n < T_n < t_n + h_n) \\ &= \mathbb{P}(N_{t_1} = 0, N_{t_1+h_1} - N_{t_1} = 1, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}+h_{n-1}} = 0, N_{t_n+h_n} - N_{t_n} \geq 1).\end{aligned}$$

Or, le processus étant à accroissements indépendants, les (v.a) « nombre de tops » dans des intervalles disjoints sont indépendantes de sorte que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(N_{t_1} = 0) \times \mathbb{P}(N_{t_1+h_1} - N_{t_1} = 1) \times \mathbb{P}(N_{t_2} - N_{t_1+h_1} = 0) \\ &\times \mathbb{P}(N_{t_2+h_2} - N_{t_2} = 1) \times ... \times \mathbb{P}\left(N_{t_n} - N_{t_{n-1}+h_{n-1}} = 0\right) \times \mathbb{P}(N_{t_n+h_n} - N_{t_n} \geq 1) \\ &= \exp(-\lambda t_1) \exp(-\lambda h_1) \lambda h_1 \exp(-\lambda (t_2 - (t_1 + h_1))) \exp(-\lambda h_2) \lambda h_2 \dots \\ &\dots \exp(-\lambda (t_n - (t_{n-1} + h_{n-1}))) (1 - \exp(-\lambda h_n)) \\ &= \exp(-\lambda t_n) (1 - \exp(-\lambda h_n)) \lambda^{n-1} h_1 ... h_{n-1}.\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\mathbb{P}(A_n) = \int_{\xi=t_0}^{t_1+h_1} ... \int_{\xi=t_n}^{t_n+h_n} \mathbf{1}_{0<\xi_1 \leq ... \leq \xi_n} \lambda^n \exp(-\lambda \xi_n) \, d\xi_1 ... d\xi_n.$$

Ceci valant pour tous les pavés $[t_1, t_1 + h_1[\times ... \times [t_n, t_n + h_n[$, qui constituent une classe stable par intersection engendrant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ donc $(T_1, ..., T_n)$ a pour densité

$$\mathbf{1}_{0<\xi_1 \leq ... \leq \xi_n} \lambda^n \exp(-\lambda \xi_n).$$

Conclusion : Selon la première étape, la densité de $(S_1, ..., S_n)$ est

$$(s_1, ..., s_n) \to \lambda^n \exp(-\lambda s_1) ... \exp(-\lambda s_n) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}(s_1, ..., s_n).$$

En calculant les densités marginales, on constate immédiatement que

$$f_{(S_1,\dots,S_n)}(s_1,\dots,s_n) = f_{S_1}(s_1)\dots f_{S_n}(s_n)\,;$$

en d'autres termes, $S_1,\dots,S_n$ sont indépendantes.

La loi de T_n est donc $\Gamma(n,\lambda)$ en vertu du la proposition (1.4) dans le 1^{ere} chapiter. ■

Remarque 2.2.1 *Il résulte du précédent théorème que*

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[T_n - T_{n-1}] = \frac{1}{\lambda}.$$

L'intensité λ est encore l'inverse de l'espérance mathématique de l'intervalle de temps séparant deux tops consécutifs.

Une autre définition du processus de Poisson à l'aide des temps inter-arrivées.

Définition 2.2.3 *Considèrons $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de loi exponentielle de paramètre λ. On pose*

$$T_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n, \quad T_0 = 0.$$

Alors le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ définit par

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_n \leq t} = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

est un processus de Poisson d'intensité λ.

2.3 Propriétés des processus de Poisson

Il y a un lien trés étroit entre le processus de Poisson et la loi de Poisson comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *(**Loi de** $\mathbf{N}(\mathbf{t})$) Pour tout $t > 0$, la (v.a) N_t représentant le nombre de sauts intervenus dans l'intervalle de temps $[0, t]$ suit la loi de Poisson de paramètre λt.*

Preuve. Pour montrer que $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, $\forall t > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le lien entre les variables N_t et T_n donne que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_t = n] &= \mathbb{P}[N_t \geq n] - \mathbb{P}[N_t \geq n+1] \\ &= \mathbb{P}[T_n \leq t] - \mathbb{P}[T_{n+1} \leq t]. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_t = n] &= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x)\, dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \exp(-\lambda x)\, dx \\ &= \int_0^t \left[\frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) - \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \exp(-\lambda x) \right] dx \\ &= \int_0^t d\left[\frac{(\lambda x)^n}{n!} \exp(-\lambda x) \right] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t). \end{aligned}$$

■

Voici l'expression des fonctions **moyenne** et **covariance** du processus.

Proposition 2.3.2 *Soit un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$, d'intensité λ, $\forall t, s \geq 0$*

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{V}ar[N_t] = \lambda t \quad et \quad \mathbb{C}ov[N_t, N_s] = \lambda \min(s, t).$$

Preuve. Le résultat de **l'espérance** et **variance** est immédiat car $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

Pour le reste du calcul, la relation suivante est nécessaire

$$N_t N_s = \frac{(N_t)^2 + (N_s)^2 - (N_t - N_s)^2}{2}, \quad \forall s < t \qquad (\bigstar)$$

Prenons alors $s < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\left[N_t, N_t\right] &= \mathbb{E}\left[\left(N_t - \mathbb{E}\left(N_t\right)\right)\left(N_s - \mathbb{E}\left(N_s\right)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(N_t - \lambda t\right)\left(N_s - \lambda s\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[N_t N_s\right] - \lambda t \mathbb{E}\left(N_s\right) - \lambda s \mathbb{E}\left(N_t\right) + \lambda^2 ts && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[(N_t)^2\right] + \mathbb{E}\left[(N_s)^2\right] - \mathbb{E}\left[(N_t - N_s)^2\right]}{2} - \lambda^2 ts && \text{en utilisant } (\bigstar) \\
&= \frac{\mathbb{V}ar\left[N_t\right] + \left(\mathbb{E}\left[(N_t)\right]\right)^2 + \mathbb{V}ar\left[N_s\right] + \left(\mathbb{E}\left[(N_s)\right]\right)^2}{2} \\
&- \frac{\mathbb{V}ar\left[N_t - N_s\right] - \mathbb{E}\left[(N_t - N_s)^2\right]}{2} - \lambda^2 ts \\
&= \frac{\lambda t + (\lambda t)^2 + \lambda s + (\lambda s)^2 - \lambda\left(t - s\right) - \lambda^2\left(t - s\right)^2}{2} - \lambda^2 ts && \text{par stationnarite} \\
&= \lambda s = \lambda \min\left(s, t\right).
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.1 *Ce paramètre λ est appelé **l'intensité** du processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$. Il est égal au nombre moyen d'événements qui se produisent pendant un intervalle de temps de longueur unité,*

$$\mathbb{E}[N_{t+1} - N_t] = \lambda$$

Proposition 2.3.3 *Un processus de Poisson est **localement continu** en probabilité, c'est-à-dire, $\forall t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left\{N_{t+h} - N_t \geq 1\right\} \text{ tend vers } 0 \text{ avec } h \to 0.$$

Preuve. Puisque un processus de Poisson est à accoroissements stationnaire, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t \geq 1\} &= \mathbb{P}\{N_h - N_0 \geq 1\} \\
&= \mathbb{P}\{N_h \geq 1\} \quad {\scriptstyle \text{car} N(0)=0} \\
&= 1 - \mathbb{P}\{N_h = 0\} \\
&= 1 - \exp(-\lambda h) \to 0 \quad {\scriptstyle \text{lorsque } h \to 0.}
\end{aligned}$$

■

2.3.1 Somme de deux processus de Poisson indépendants

On considère deux processus de Poisson indépendants et on cherche la loi de la somme de ces deux processus.

Proposition 2.3.4 *Soient deux processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t)_{t\geq 0}$ indépendants d'intensité respective $\lambda_1$et λ_2. Alors le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ défini par*

$$X_t = N_t + M_t, \quad \textit{pour} \quad t \geq 0,$$

est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.

Remarque 2.3.2 *Le résultat se généralise à la somme de n processus de Poisson.*

Preuve. Soit le processus

$$X_t = N_t + M_t.$$

On a $X(0) = 0$. Par ailleurs, si $t, s > 0$, alors

$$X(t+s) - X(s) = (N(t+s) - N(s)) + (M(t+s) - M(s)).$$

N est un processus de Poisson, par conséquent $N(t+s) - N(s)$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_1 t)$ et indépendant de $N(s)$. De même $M(t+s) - M(s)$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_2 t)$ et indépendant de

$M(s)$. Les processus N et M étant indépendants, on obtient que $X(t+s) - X(s)$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 t + \lambda_2 t)$ et est indépendant de $X(s) = N(s) + M(s)$. ■

2.3.2 Décmposition d'un processus de Poisson

On va maintenant voir que si on décompose un processus de Poisson selon des classes, on obtient alors plusieurs processus de Poisson.

Proposition 2.3.5 *Soit $(X(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ permettant de comptabiliser une population divisée en deux classes. La proportion d'individus dans la première classe est égale à p et la proportion d'individus dans la seconde classes est $(1-p)$. Les processus $(N(t))_{t\geq 0}$ et $(M(t))_{t\geq 0}$ obtenu en séparant les sauts par rapport à chaque classe sont des processus de Poisson indépendants d'intensité respective $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.*

Remarque 2.3.3 *Cette proposition se généralise facilement lorsque qu'on découpe la population en k sous groupes qui sont distribués selon les proportions $p_1, p_2, ..., p_k$ $\left(\sum_{i=1}^{k} p_i = 1\right)$.*

Exemple 2.3.1 *Comme exemple, on peut considérer le nombre de catastrophe naturelle survenu en une année dans une région quelconque, qui se réalise selon un processus de Poisson. Puis de le décomposer en deux études :*
celle des catastrophes causé par l'homme et celle des catastrophes naturelles, qui se réalisent selon deux autres Processus. Ou bien de considérer le nombre de secousse sismique, d'inondations et d'orages et qui se réalisent, chacun selon un processus de Poisson différent, et de les ramener à l'étude des catastrophes naturelles.

2.4 Lois conditionnelles des instants d'arrivées

Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson avec intensité λ.

2.4.1 Processus de Poisson et loi uniforme

Proposition 2.4.1 *(**La loi de** $(\mathbf{T}_1, ..., \mathbf{T}_n)$ **sachant que** $\mathbf{N}(\mathbf{t}) = \mathbf{n}$) Conditionnellement à l'évènement $\{N_t, t \geq 0\}$, le $n-uple$ $(T_1, ..., T_n)$ a même loi de probabilité que le $n-uple$ ordonné correspondant à n (v.a) i.i.d., de loi uniforme sur $[0, t]$.*

Preuve. Pour $n = 1$, on fixons t et calculons la loi conditionnelle T_1 sachant que $N(t) = 1$, alors pour $0 \leq x \leq t$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[T_1 \leq x \mid N(t)=1\right] &= \mathbb{P}\left[N_x \geq 1 \mid N(t)=1\right] \\
&= \mathbb{P}\left[N_x = 1 \mid N(t)=1\right] \quad \text{par l'identité } \{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}, (t>0, n \geq 0) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[N_x = 1 \cap N(t)=1\right]}{\mathbb{P}\left[N(t)=1\right]} = \frac{\mathbb{P}\left[N_x = 1 \cap N(t) - N_x=0\right]}{\mathbb{P}\left[N(t)=1\right]} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[N_x = 1\right]\mathbb{P}\left[N(t) - N_x=0\right]}{\mathbb{P}\left[N(t)=1\right]} \\
& \quad \frac{\exp(-\lambda x)\lambda x \exp(-\lambda(t-x))}{\exp(-\lambda t)\lambda t} = \frac{x}{t}.
\end{aligned}$$

Donc la loi conditionnelle de T_1 sachant que $N(t) = 1$ est loi uniforme sur $[0, t]$.

Maintenant, calculons la fonction de répartition conjointe de $(T_1, ..., T_n)$ au point $(x_1, ..., x_n)$. Soient $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < t$ une suite strictement croissante et $h_1, h_2, ..., h_n$ des nombres strictement positifs suffisamment petits pour que $x_1 \leq x_1 + h_1 < x_2 \leq x_2 + h_2 < ... < x_{n-1} \leq x_{n-1} + h_{n-1} < x_n \leq x_n + h_n < t$.où

$$A_n = \{T_1 \in [x_1, x_1 + h_1], T_2 \in [x_2, x_2 + h_2], ..., T_n \in [x_n, x_n + h_n]\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{A_n \mid N(t)=n\right\} &= \frac{\mathbb{P}\left\{A_n \cap N(t)=n\right\}}{\mathbb{P}\left\{N(t)=n\right\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left\{T_1 \in [x_1, x_1+h_1], ..., T_n \in [x_n, x_n+h_n] \cap N(t)=n\right\}}{\mathbb{P}\left\{N(t)=n\right\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left\{\text{un seul top dans } [x_i, x_i+h_i] \ \ (i=1,...,n)\,; 0 \text{ ailleurs}\right\}}{\mathbb{P}\left\{N(t)=n\right\}} \\
&= \frac{\exp(-\lambda h_1)\lambda h_1 \cdots \exp(-\lambda h_n)\lambda h_n \exp(-\lambda(t-h_1-\cdots-h_n))}{\exp(-\lambda t)\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}} \\
&= n!\frac{1}{t^n} h_1 \cdots h_n.
\end{aligned}$$

En divisant par $h_1, ..., h_n$ et en faisant tender successivement $h_1, ..., h_n$ vers 0,on trouve la densité correspondante

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} n!\dfrac{1}{t^n} & \text{si } 0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < t \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

■

Ce résultat est utile en pratique car il fournit un moyen simple de simuler des trajectoires d'un processus de Poisson ; en effet, il suffit de simuler une réalisation n d'une loi de Poisson de paramètre λt, puis ensuite de simuler n réalisation d'une loi uniforme sur $[0, t]$; on ordonne alors ces variables dans l'ordre croissant, ce qui donne les instants de saut du processus.

Remarque 2.4.1 *Une autre moyens de simuler un processus de Poisson est de donnée la suite des temps d'arrivées (tirage indépendants selon la loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$ des temps entre deux arrivées successives).*

2.4.2 Processus de Poisson et loi binomiale

Proposition 2.4.2 *Pour $s \leq t$, la loi conditionnelle de N_s sachant $[N_t = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{s}{t}\right)$.*

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[N_s = k \mid N_t = n\right] &= \frac{\mathbb{P}\left[N_s = k \cap N_t = n\right]}{\mathbb{P}\left[N_t = n\right]} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[\left[N_s = k\right] \cap \left[N_t - N_s = n - k\right]\right]}{\mathbb{P}\left[N_t = n\right]} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[N_s = k\right] \mathbb{P}\left[N_t - N_s = n - k\right]}{\mathbb{P}\left[N_t = n\right]} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[N_s = k\right] \mathbb{P}\left[N_{t-s} = n - k\right]}{\mathbb{P}\left[N_t = n\right]} \\
&= \frac{\exp\left(-\lambda s\right) \frac{\left(\lambda s\right)^k}{k!} \exp\left(-\lambda\left(t - s\right)\right) \frac{\left(\lambda\left(t - s\right)\right)^{n-k}}{(n-k)!}}{\exp\left(-\lambda t\right) \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}} \\
&= C_n^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

■

Proposition 2.4.3 *Si $\left(N_t^{(1)}\right)_{t \geq 0}$ et $\left(N_t^{(2)}\right)_{t \geq 0}$ sont deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ et μ, alors la loi conditionnelle de $N_t^{(1)}$ sachant $\left[N_t^{(1)} + N_t^{(2)} = n\right]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\left(N_t^{(1)}=k\right) \mid \left(N_t^{(1)}+N_t^{(2)}=n\right)\right] &= \frac{\mathbb{P}\left[\left(N_t^{(1)}=k\right)\cap\left(N_t^{(2)}=n-k\right)\right]}{\mathbb{P}\left[N_t^{(1)}+N_t^{(2)}=n\right]} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[N_t^{(1)}=k\right]\mathbb{P}\left[N_t^{(2)}=n-k\right]}{\mathbb{P}\left[N_t^{(1)}+N_t^{(2)}=n\right]} \\
&= \frac{\exp\left(-\lambda t\right)\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}\exp\left(-\mu t\right)\dfrac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!}}{\exp\left(-\left(\lambda+\mu\right)t\right)\dfrac{\left(\left(\lambda+\mu\right)t\right)^n}{n!}} \\
&= C_n^k\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}.
\end{aligned}$$

■

2.4.3 Exemple

Exemple 2.4.1 *Les admissions à l'urgence d'un hôpital se font selon un processus de Poisson (ici, l'événement est l'arrivée d'un patient). Nous savons qu'en moyenne un patient se présente l'urgence à toutes les* 12 *minutes.*

Modélisons cette situation :

Nous commençons l'observation du processus disons au début du quart de travail de 7 *heures du matin, aujourd'hui. Le temps sera exprimé en heures.*

- $N(t)$ *= le nombre de patients s'étant présentés à l'urgence au temps t depuis le moment où nous avons commencé l'observation du processus*

Question 1*.*

Quelle est l'intensité du processus de Poisson impliqué dans la modélisation ?

Réponse. *Si, en moyenne, il y a une arrivée de patient toutes les douze minutes, alors il y a, en moyenne, cinq arrivées par heure, c'est-à-dire cinq arrivées par unité de temps. Par conséquent, l'intensité est* $\lambda = 5$.

Question 2.

Si le préposé aux admissions prend 3 minutes pour remplir le dossier d'un patient, quelle est la probabilité qu'il ait le temps de se reposer entre l'arrivée de deux patients sachant qu'il était inoccupé lors de l'arrivée du premier des deux ?

Réponse. *Nous savons que le temps d'attente entre deux arrivées suit une loi exponentielle d'espérance* $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}$. *Or, puisque*

$$3minute = 3 \times \frac{1}{60} = \frac{1}{20} heur$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\begin{array}{l}\textit{le préposé a le temps de se reposer entre} \\ \textit{l'arrivée de deux patients sachant qu'il était} \\ \textit{inoccupé lors de l'arrivée du premier des deux}\end{array}\right] &= \mathbb{P}\left[\underbrace{T_n - T_{n-1}}_{Loi\ \mathcal{E}xp(0,2)} > \frac{1}{20}\right] \\ &= \exp\left(-5 \times \frac{1}{20}\right) \\ &= 0.7788.\end{aligned}$$

Question 3

Supposons que le préposé aux admissions commence sa journée de travail à 7 heures du matin, qu'il la termine à 15 heures et qu'il va dîner de midi à 13 heures. Quelles sont l'espérance et la variance du temps que le préposé passe, au cours de la journée, à remplir des demandes d'admission ?

Réponse. *Soit* X *: le nombre de patients qui se présente à l'urgence.*

$$X = \underbrace{(N(5) - N(0))}_{Loi\ \mathcal{P}(5\times 5)} + \underbrace{(N(8) - N(6))}_{Loi\ \mathcal{P}(5\times 2)},$$

et

$$Y = 3X.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[3X]=3\mathbb{E}[X] &= 3\mathbb{E}[(N(5)-N(0))+(N(8)-N(6))] \\ &= 3[\mathbb{E}[(N(5)-N(0))]+\mathbb{E}[(N(8)-N(6))]] \\ &= 3(25+10)=105,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar[Y]=\mathbb{V}ar[3X]=9\mathbb{V}ar[X] &= 9\mathbb{V}ar[(N(5)-N(0))+(N(8)-N(6))] \\ &= 9[\mathbb{V}ar[(N(5)-N(0))]+\mathbb{V}ar[(N(8)-N(6))]] \\ &= 9(25+10)=315,\end{aligned}$$

Question 4

Le second hôpital de la région ferme son urgence pour la journée. Notre hôpital doit donc absorber cette clientèle. Sachant que ce second hôpital reçoit, en moyenne, 60 patients entre 7 heures et 15 heures et que ces arrivées se font selon un processus de Poisson, est-ce que le nouveau flot de patients se présentant au premier hôpital est encore un processus de Poisson ? Si oui, quelle est son intensité ? Si non, pourquoi ?

Réponse. *Soient N et M modélise les arrivées des patients dans chacun des deux hôpitaux sont indépendants. Alors le nouveau flot de patients $W = N + M$, se modélise aussi à laide d'un processus de Poisson.*

L'intensité de N est $\lambda_1 = 5$, celle de M est $\lambda_2 = 7,5$ (il y a 60 patients en 8 heurs alors en moyenne 7,5 patients par heur). Alors l'intensité de W est $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 12,5$.

Si les deux processus N et M ne sont pas indépendants, alors il est possible que la somme de ces deux processus ne soit plus un processus de Poisson.

2.5 Comportement asymptotique et estimation

2.5.1 Comportement asymptotique

Au niveau du comportement asymptotique de N_t nous avons les deux résultats suivantes

Proposition 2.5.1 *Lorsque t tend vers l'infini, on a les convergences suivantes :*

$$\frac{N_t}{t} \overset{p.s}{\to} \lambda, \quad et \quad \sqrt{\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{N_t}{t} - \lambda\right) \overset{loi}{\to} \mathcal{N}\left(0, 1\right).$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que

$$N_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \left[N_i - N_{i-1}\right],$$

est la somme de n (v.a) indépendantes, de même loi de Poisson de paramètre λ (donc intégrable). Il résulte donc de la loi forte des grands nombres que

$$\frac{N_n}{n} \overset{p.s}{\to} \lambda \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Or, avec la notation $[t]$ est la partie entière de t,

$$\frac{N_t}{t} = \frac{N_{[t]}}{[t]} \times \frac{[t]}{t} \times \frac{N_t - N_{[t]}}{t}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\sup_{n<t<n+1} \frac{N_t - N_n}{n} \to 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Or si

$$\xi_n \overset{def}{=} \sup_{n<t<n+1} N_t - N_n = N_{n+1} - N_n,$$

les $\{\xi_n\}$ sont *i.i.d.* et intégrables. Donc

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \to \lambda \quad p.s,$$

D'où

$$\frac{\xi_n}{n} \to 0 \quad p.s.$$

On raisonne comme dans la preuve précédente.

$$\frac{N_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} \to Z \text{ en loi, quand } n \to \infty,$$

d'après le théorème de la limite centrale, et

$$\frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda[t]}} \leq \frac{\xi_{[t]}}{\sqrt{\lambda[t]}},$$

qui tend en probabilité vers zéro quand $t \to \infty$ puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\frac{\xi_n}{\sqrt{\lambda n}} > \epsilon) &= \mathbb{P}(\xi_n > \epsilon\sqrt{\lambda n}) \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 > \epsilon\sqrt{\lambda n}) \\ &\to 0, \text{ quand } n \to \infty. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda[t]}} \to 0 \quad \text{en probabilité} \quad \text{quand} \quad t \to \infty.$$

Finalement :

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} = \frac{N_{[t]} - \lambda[t]}{\sqrt{\lambda[t]}} \times \sqrt{\frac{[t]}{t}} + \frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda t}} \times \sqrt{\frac{[t]}{t}} + \sqrt{\lambda}\frac{[t] - t}{\sqrt{t}},$$

et on sait que si $X_n \to X$ en loi, $Y_n \to 0$ en probabilité, alors $X_n + Y_n \to X$ en loi. ■

2.5.2 Estimation de l'intensité d'un processus de Poisson par maximum de vraisemblance

Soit $(N_t)_{t\geq 0}$un processus de Poisson homogène, dont l'intensité $\lambda > 0$ est donc la seul paramètre du modèle. En pratique, λ est inconnue et afin de connaitre notre modèle, on doit donner une valeur pour λ. La question qui se pose est : comment estimer λ.

Considérons d'abord le cas où le processus est observé jusqu'à l'instant t. L'idée est que lorsqu'on observe $N_t = n$, les temps de sauts $T_1, ..., T_n$ détermine complétement la trajectoire du processus sur $[0, t]$. Nous définirons donc la vraisemblance en calculant la loi de $(T_1, ..., T_n, N_t)$. Ceci peut être fait en utilisant la Proposition (2.3.1). En effet, la loi de $(T_1, ..., T_n)$ sachant que $N_t = n$ a pour densité

$$f : (x_1, ..., x_n) \mapsto \frac{n!}{t^n}\mathbf{1}_{0<x_1<x_2<...<x_n\leq t}.$$

La fonction de vraisemblance sera alors définie pour une observation $(x_1, ..., x_n, n)$ par

$$\begin{aligned} L(x_1, ..., x_n, n; \lambda) &= f(x_1, ..., x_n)\,\mathbb{P}\{N_t = n\} \\ &= \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n!}\frac{n!}{t^n}, (0 < x_1 < x_2 < ... < x_n \leq t) \\ &= \lambda^n \exp(-\lambda t). \end{aligned}$$

La valeur de λ qui maximise la vraisemblance est $\frac{n}{t}$.

En effet

$$\log L = n \log \lambda - \lambda t.$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\log L = \frac{n}{\lambda} - t = 0.$$

D'ou

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t}.$$

Ainsi l'estimation par le maximum de vraisemblance est donné par $\frac{n}{t}$ et l'estimateur correspondant est obtenu en remplaçant n par N_t :

$$\hat{\lambda} = \frac{N_t}{t}.$$

On a vu que cet estimateur était consistant et asymptotiquement gaussien.

Proposition 2.5.2 *L'estimateur $\hat{\lambda}$ est non biaisé, exhaustif et complet.*

Preuve. En effet,

$$\mathbb{E}\left[\hat{\lambda}\right] = \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[N_t\right] = \frac{1}{t}\lambda t = \lambda.$$

Comme la vraisemblance $L(x_1, ..., x_n, \lambda)$ est de la forme $\lambda^n \exp(-\lambda t)$, l'estimateur est bien exhaustif.

Enfin, comme N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt et que la loi de Poisson est complète, l'estimateur $\hat{\lambda}$ est complet. ■

Remarque 2.5.1 *Puisque $\hat{\lambda}$ est non-biaisé, exhaustif, complet, c'est l'unique estimateur non-biaisé de variance minimum de λ.*

Si on dispose des temps d'occurrences $(T_i = t_i)_{i=1,2,...,n}$ il existe un estimateur de $\frac{1}{\lambda}$, égale à $\frac{T_n}{n}$, qui a des qualités équivalentes à l'estimateur de λ précédemment défini.

Dans cette situation, la vraisemblance est donnée par

$$L(t; \lambda) = \lambda^n \exp(-\lambda t),$$

par suite,

$$\log L = n \log \lambda - \lambda t,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L = \frac{n}{\lambda} - t = 0.$$

D'ou

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{t}{n}.$$

Ainsi l'estimation par le maximum de vraisemblance est donné par $\frac{t}{n}$ et l'estimateur correspondant est $\frac{T_n}{n}$.

Conclusion

Le processus de Poisson est un outil élémentaire dans l'étude des phénomènes aléatoires dans le temps. Il permet d'étudier le nombre d'occurrences d'un phénomène dans une période déterminée, il permet même de décomposer l'étude d'un phénomène en l'étude de phénomènes plus particuliers, ou le contraire, de rassembler l'étude de plusieurs phénomènes en l'étude d'un phénomène plus générale.

Dans notre travaille, nous avons étudié le processus de Poisson homogène ainsi que ses relations avec certaines loi de probabilités bien connues, ses propriétés fondamentales, et estimer l'intensité λ par la méthode de maximum de vraisemblance.

Bibliographie

[1] Arzelier, D. Signaux aléatoires, Introduction et rappels de probabilités. Web_Page http ://www.Laas.fr/∼arzelier.

[2] Breton, J. CH. (2013). Processus stochastique. Université de Rennes 1.

[3] Caumel, Y. (2011). Probabilites et processus stochastique. Edition Springer.

[4] Foata, D. & Fuchs, A. (2004). Processus stochastique : Processus de Poisson, chaîne de Markov et martingales. Edition Dunod.

[5] Francois, O. Vecteur aléatoires chaînes de markov. Notes de cours.

[6] Goffard, P. O. (2018). Processus de poisson. Université de Lyon 1.

[7] Lebarbier, E. & Robin, S. (2007). Processus de Poisson processus de Naissances et Mort.

[8] Lefebver, M. (2005). Processus stochstique appliqués. Edition Springer.

[9] Lessard, S. (2014). Processus stochstiques : cours et exercices corrigés. Edition Ellipses.

[10] Roos, S. M. (2010). Introduction to probability models. Academic press.

[11] Ruwet, CH. (2006-2007). Processus de poisson. Université de Liège. Mémoire.

[12] Saporta, G. (2006). Probabilités, Analyses des données et statistique. Editions TECHNIP.

Annexe A : Logiciel *R*

Le langage **R** est un logiciel dans lequel de nombreuses techniques statistiques, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les représentations graphiques et les calculs. Dans ce mémoire on va donner les représentations graphiques des quelques lois des probabilités et on va simuler quelques processus stochastiques.

Loi des probabilités

Loi exponentielle

> curve(dexp(x,rate=1),from=0,to=10,xlab="",ylab="",main="Densité de la loi exponentielle",col=2)

> curve(dexp(x,rate=5),from=0,to=10,add=T,col=4)

> curve(dexp(x,rate=10),from=0,to=10,add=T,col=3)

> legend(x=4,y=0.4,legend=c("λ=10","λ=5","λ=1"),col=c(2,4,3),lty=1)

Loi de Poisson

> par(mfrow=c(2,2))

> plot(table(rpois(100,0.5)),type="h",lwd=2,xlab="",ylab="",main="Poisson λ=0.5")

> plot(table(rpois(100,2)),type="h",lwd=2,xlab="",ylab="",main="Poisson λ=2")

> plot(table(rpois(100,5)),type="h",lwd=2,xlab="",ylab="",main="Poisson λ=5")

> plot(table(rpois(100,10)),type="h",lwd=2,xlab="",ylab="",main="Poisson λ=10").

Loi gamma

> x<-rgamma(200,5,20)

```
> x1<-dgamma(x,5,20)
> plot(x,x1,type='p',main='la densité de la loi gamma',xlab="l'axe de x",ylab="l'axe de
x1",col='green',col.axis='blue',col.lab='black')
> text(0.1,3,"λ=20",col="green")
> x2<-rgamma(200,5,15)
> x3<-dgamma(x2,5,15)
> x4<-rgamma(200,5,10)
> x5<-dgamma(x4,5,10)
> points(x2,x3,type='p',col="red")
> text(0.6,1,"λ=15",col="red")
> points(x4,x5,type='p',col="blue")
> points(x4,x5,type='p',col="blue")
> text(0.7,2,"λ=10",col="blue")
```

Processus stochastiques

Processus de Brenoulli

Le processus Y_m défini par se sumule de la façon suivante :

```
>proba<-0.2 #probabilite de succés
>N<-10 #nombre d'instants
>Yi<-rbinom(N,1,proba) # valeurs du processus (Bernoulli)
>plot(0 :(N-1), Yi, type="p", col=2, xlab=expression(paste("temps", italic(n))),
ylab=expression(italic(Yi[n](omega))),
ylim=c(-0.6,1.6), xaxt="n", yaxt="n", pch=20, axes=FALSE)
>box(col="gray95")
>axis(1,0 :(N-1),col=4)
>axis(2,0 :1,col=4)
```

Processus de Poisson

La simulation du processus de Poisson se fait de la façon suivante :

```
>par(mfrow=c(2,2)) # diviser la fonêtre graphique en 2 lignes et 2 colonnes
>NSaut <- function(n,lambda){cumsum(rexp(n,lambda))}
>n=10
>lambda=1
>t <- NSaut(n,lambda)
>y<- seq(0,n,by=1)
>F<- stepfun(t,y).# renvoie une fonction en escalier
>plot(F, ann=FALSE, col="2")
>title(main=paste("Exemple de trajectoire d'un processus de Poisson",
"\nd'intensite lambda =",lambda,"jusqu'au", n,"eme saut",sep=" "),col.main="black",
font.main=4) # désingner le titre de ce graphe
>title(xlab="temps")
```

Et les autres trajectoires sont le même code de **R**, mais nous avons changés le lambda=2, 5 et 10.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

v.a	Variable aléatoire.
$\mathbb{P}$	Probabilité.
$\mathcal{P}(\lambda)$	Loi de Poisson de paramètre λ.
G_X	Fonction génératrice des moments.
exp	Fonction exponentielle
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique ou moyenne du v.a. X
$\mathbb{V}ar\,[X]$	Variance mathématique de X.
$(X_1, ..., X_n)$	Echantillon de taillle n de X.
$\mathcal{E}xp\,(\lambda)$	Loi exponentielle de paramètre λ.
$\mathbb{F}_X$	Fonction de répartition de X.
f_X	Densité de probabilité.
$\Gamma\,(n, \lambda)$	Loi Gamma de paramètre n et λ.
$\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$	Processus stochastique.
$\mathbb{T}$	L'espace des paramètres.
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(E, \mathcal{E})$	Un espace mésurable.

$\mathbb{C}ov$	Fonction de covariance.
$Corr$	Fonction d'autocorrélation.
N_t	Processus de comptage.
T_n	Temps d'occurrence de $n^{iéme}$ événement .
S_n	Temps d'attente entre les $(n-1)^{iéme}$ et $n^{iéme}$ occurrences.
C-à-d	C'est à dire.
$\mathbf{1}_A$	Fonction indicatrice de l'ensemble A.
i.i.d	Indépendantes identiquement distribuées
$\mathcal{B}(n,p)$	Loi binomiale de paramètre n et p.
$\overset{p.s}{\rightarrow}$	Convergence presque sûre.
L	Fonction vraisemblance.
log	Fonction logarithme.
Càdlàg	Continue à droite avec limite à gauche.