République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option :**Probabilités**

Par

BOUKHENTEF Isra

Titre :

Filtrage stochastique non Linéaire et Application

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**LABED Boubakeur**	UMKB	Encadreur
Dr.	**MANSOURI Badereddine**	UMKB	Président
Dr.	**BEROUIS Nassima**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

À mes très **chers parent**, pour leurs sacrifices et leurs soutiens durant mes études ;

À mes chers **frères** et **sœurs** ;

À **mes amis** ;

À ceux qui **m'aiment**.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord et avant tout, de remercie Dieu de m'avoir aidé et de m'avoir donné la patience et la force pour terminer ce modeste travail. La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

J'adresse toute ma reconnaissance à mon encadreur **Dr.LABED Boubakeur**, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Et pour tout le temps qu'il m'avait consacré pendant la rédaction de ce mémoire.

Je suis honorée que **Dr.MANSOURI Badereddine** ait accepté d'être le président de jury de mon mémoire. Je suis également très reconnaissant envers **Dr.BEROUIS Nassima** d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je remercie énormément ma chère amie **AMMARI Madjida** pour sa grande aide et sa présence avec moi quand j'ai besoin d'elle tout au long de ma démarche.

Je garde le meilleur pour la fin, je remercie tout particulièrement **mes parents** de m'avoir soutenu, encouragé et d'avoir toujours été présents quand il fallait.

Table des matières

Introduction

Le filtrage est un outil de base pour résoudre le problème de la majorité des systèmes dynamiques qui sont le plus souvent sujets à des perturbations aléatoires. L'objectif de cet outil est de déterminer une bonne approximation de l'état du système au vu des données observées qui apparaissent comme des valeurs d'un processus lié à l'état du système et entaché par un bruit d'observation. Représenter un schéma récursif consistant à chaque itération d'une prédiction (estimation a priori) de l'état du système suivi d'une mise à jour de l'estimation de l'état (estimation a posteriori). Cette procédure est reproduite chaque fois que l'on introduit une nouvelle observation.

Le problème du filtrage peut être présenté soit en temps discret soit en temps continu, aussi on peut le modéliser en deux cas. Le cas général (filtrage non linéaire) et le cas particulier (filtrage linéaire). Dans notre modeste recherche nous nous sommes intéressés par le cas général en temps continu.

L'étude du filtrage non linéaire a été initié par Stratonovich (1960) et Kushner (1967). Il permet de trouver une solution qui satisfait une équation aux dérivées partielles stochastique.

Ce mémoire comporte trois chapitres. On commence par rappeler dans le premier chapitre les principaux résultats sur la théorie des processus stochastiques et la notion de prédicteur linéaire, suivi par le chapitre 2 qui est divisé en deux parties. Dans la première partie nous définissons une petite entrée sur la théorie de filtrage dans le cas linéaire qui inclut les plus importantes définitions dont nous avons besoin. Dans la deuxième partie on introduit la théorie de filtrage non linéaire (le cas intéressant) qui aborde la position de problème et le changement de mesure qui est basée sur le théorème de Girsanov, avec la distribution conditionnelle non normalisée et les équations aux dérivées partielles stochastiques linéaires (équation de Zakai) ou non linéaires (équation de Kushner). Dans le chapitre 3 on donne un exemple comme une application.

Chapitre 1

Généralités

Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, ayant pour but d'exposer les notions de base qu'on va utiliser dans la suite de ce mémoire pour un développement excellent de la théorie du filtrage non linéaire.

1.1 Rappels et définitions

Ces résultats ont été puisé dans différentes références de base sur le théoré du calcul stochastique telles que [5],[8] et [10].

1.1.1 *Généralités sur les processus stochastiques*

On prendra $\mathbb{T} = [0, T]\,, T > 0$.

Définition 1.1.1 *Soit $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}_+$, toute famille $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ de variable aléatoire avec :*

$$X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

est appelé **un processus stochastique** avec indice l'ensemble $\mathbb{T}$.

Remarque 1.1.1 *Un processus stochastique peut être vu comme :*

1. Une famille de variable aléatoire indexée par le temps :

   pour $t \in \mathbb{T}$

$$X : \omega \in (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow X_t(\omega) \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

2. Une fonction de deux variables :

$$X : (\omega, t) \in (\Omega \times \mathbb{T}) \longrightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}.$$

– Pour $t \in \mathbb{T}$ fixé, X_t est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

– Pour $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \longrightarrow X_t(\omega)$ est appelée **trajectoire**.

Définition 1.1.2 *On dit qu'un processus aléatoire $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est d'ordre n avec $n \geq 1$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$:*

$$E\left(|X_t|^n\right) < +\infty.$$

Définition 1.1.3 *Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{T})$ un processus stochastique, on a :*

1. Si X est d'ordre 1, la fonction :

$$m : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R},$$

   est appelé une **fonction moyenne** de X définie par :

$$m(t) = E(X_t), \forall t \in \mathbb{T}.$$

   On dit que X est **centré** si :

$$m(t) = 0.$$

2. Si X est d'ordre 2, l'application :

$$\Gamma : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

est appelé **fonction de covariance** (ou d'autocovariance) du X, qui associe à chaque couple (s,t) de $\mathbb{T}^2$ la covariance des variables X_s et X_t :

$$\Gamma(s,t) = E(X_t.X_s) - m(t).m(s).$$

Définition 1.1.4 ***(Égalités des processus)*** *Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ deux processus stochastiques dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ils sont dits :*

1. X et Y sont des **indistinguables** si est seulement si :

$$P(X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T}) = 1.$$

2. Stochastiqument équivalents au sens large (ou **égaux en loi**) si :

$$P\left((X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \in B\right) = P\left((Y_{t_1}, ..., Y_{t_n}) \in B\right).$$

$\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 < t_3 < .... < t_n \in \mathbb{T}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. X et Y sont **modifications** l'un de l'autre si :

$$P(X_t = Y_t) = 1, \forall t \in \mathbb{T}.$$

Exemple 1.1.1 *Soit Z une variable aléatoire positive et continue, on définit deux processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ par :*

$$\begin{cases} X_t = 0, \\ Y_t = \mathbf{1}_{\{Z=t\}}. \end{cases}, \forall t \in \mathbb{T}.$$

Soit $t \in \mathbb{T}$, on sait que :

$$P(X_t \neq Y_t) = P(Z = t) = 0.$$

D'où X est une modification de Y, mais

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 0.$$

Alors X et Y ne sont pas indistinguables.

Définition 1.1.5 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, une famille croissante (au sens de l'inclusion) de sous-tribu de $\mathcal{F}$ est appelé une filtration et on la note par $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si :*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \textit{pour } s < t \quad \textit{et} \quad s, t \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.1.6 *On dit qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est* ***adapté*** *à la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (ou $\mathbb{F}$-adapté) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in \mathbb{T}$.*

Définition 1.1.7 *Supposons $\mathbb{T}$ muni d'une tribu ξ.*

1. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dite **mesurable** si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ est mesurable sur $\mathbb{T} \times \Omega$ muni de la tribu produit $\xi \otimes \mathcal{F}$.

2. Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est **progressivement mesurable** ou progressif par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$, l'application $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $(\boldsymbol{E},\mathcal{E})$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

3. Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un processus à **trajectoires continues (**ou simplement processus continu**)** si $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : t \longmapsto X_t(\omega) \textit{ est continue}\}) = 1$.

4. Un processus est dit **càdlàg** si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.

5. Un processus est dit **càglàd** si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.

1.1.2 *Mouvement Brownien*

Définition 1.1.8 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, un mouvement Brownien (standard) $B = (B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ défini sur cet espace est un processus stochastique continu qui vérifie :*

1. $P(B_0 = 0) = 1$.
2. $\forall n$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, *les variables* $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ *sont indépendants.*
3. $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance* $(t-s)$.

Définition 1.1.9 *Un mouvement Brownien est l'intégrale indéfini du bruit blanc :*

$$B(t) = \int_0^t \varepsilon_t ds.$$

1.1.3 *Variation d'un processus stochastique*

Définition 1.1.10 ***(Fonctions à variation finie)*** *Soit R une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue à droite avec limite à gauche. Une partition ℓ_t de l'intervalle $[0,t]$ est une suite de points $(t_i)_{i=0,\ldots,n}$ tels que $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t$. Pour tout $t > 0$, on définit*

$$V(R)_t = \sup_{\ell_t} \sum_{t_i \in \ell_t} \left|R_{t_{i+1}} - R_{t_i}\right|.$$

La fonction $t \longmapsto V(R)_t$ s'appelle ***la variation (totale)*** *de R.*

La fonction R est ***à variation finie*** *si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $V(R)_t$ est finie.*

Définition 1.1.11 ***(Processus à variation finie)*** *Un processus adapté $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est* ***à variation finie*** *si P-presque toutes les trajectoires $t \longmapsto X_t(\omega)$ sont à variation finie au sens de la définition précédente.*

Définition 1.1.12 ***(la variation quadratique d'un processus stochastique)*** *Soit $(\ell_n)_{n\geq 0} = (t_k^n)_{k=0,\ldots,k(n)}$ une suite de subdivisions de $[0,t]$, vérifiant $|\ell_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ où $|\ell_n| = \sup\limits_{i=0,\ldots,k(n)} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right|$, et soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus continu.*

Posons

$$U_t^{\ell_n}(X) = \sum_{i=1}^{k(n)} \left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right)^2 .$$

On dit que le processus X admet une variation quadratique finie sur $[0,t]$, si : $\lim_{n\to+\infty} U_t^{\ell_n}(X)$ *existe en probabilité.*

Dans ce cas, on note par :

$$\langle X \rangle_t = \langle X, X \rangle_t = \lim_{n\to+\infty} U_t^{\ell_n}(X) .$$

Le processus $(\langle X, X \rangle_t)_{t\in\mathbb{T}}$ s'appelle ***la variation quadratique*** *de X.*

1.2 Temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration .

Définition 1.2.1 *Un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt τ est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que :*

$$\forall t \in \mathbb{T} \ , \ \{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega / \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t .$$

Soit τ un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.

Définition 1.2.2 *On appelle* ***tribu des événements antérieurs*** *à τ, et on note $\mathcal{F}_\tau$, la tribu définie par :*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ , \forall t \in \mathbb{T}\} \quad \text{où} \ \ \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{F}_t\right) .$$

Exemple 1.2.1 ***(Un temps d'arrêt constant)***

On a $\forall s \in \mathbb{R}_+$, $\tau = s$ sur Ω . τ est un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt, en effet :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \{\tau \leq t\} = \Omega & \text{si} \;\; s \leq t, \\ \{\tau \leq t\} = \phi & \text{si} \;\; s > t. \end{cases}$$

Alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

1.3 Martingales

1.3.1 *Rappels : Espérance Conditionnelle*

Définition 1.3.1 *Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$; L'espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{G}$ noté par $E(X\,|\mathcal{G}\,)$ est une variable aléatoire vérifiant :*

1. $\mathcal{G}$-mesurable.
2. $\int_A E(X\,|\mathcal{G}\,)dP = \int_A XdP \quad , \forall A \in \mathcal{G}$.

Propriété 1.3.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et X, Y deux variables aléatoires :*

a) <u>Linéarité</u> : a,b deux constantes $E\left(aX + bY\,|\mathcal{G}\right) = aE\left(X\,|\mathcal{G}\right) + bE\left(Y\,|\mathcal{G}\right)$.

b) <u>Croissance</u> : si $X \leq Y$, alors $E\left(X\,|\mathcal{G}\right) \leq E\left(Y\,|\mathcal{G}\right)$.

c) $E\left(E\left(X\,|\mathcal{G}\right)\right) = E\left(X\right)$.

d) Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $E\left(Y.X\,|\mathcal{G}\right) = Y.E\left(X\,|\mathcal{G}\right)$.

e) Si X est indépendant de $\mathcal{G}$, alors $E\left(X\,|\mathcal{G}\right) = E\left(X\right)$.

f) Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux sous-tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors :

$$E\left(X\,|\mathcal{H}\right) = E\left(E\left(X\,|\mathcal{G}\right)|\mathcal{H}\right) = E\left(E\left(X\,|\mathcal{H}\right)|\mathcal{G}\right).$$

1.3.2 *Martingales à temps continu*

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.3.2 *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ adapté par rapport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t \in \boldsymbol{L}^1$ est appelé :*

– *Une **martingale** si :*

$$\forall s \leq t, \quad E\left(X_t \left| \mathcal{F}_s\right.\right) = X_s.$$

– *Une **sur-martingale** si :*

$$\forall s \leq t, \quad E\left(X_t \left| \mathcal{F}_s\right.\right) \leq X_s.$$

– *Une **sous-martingale** si :*

$$\forall s \leq t, \quad E\left(X_t \left| \mathcal{F}_s\right.\right) \geq X_s.$$

Définition 1.3.3 *Une martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ est dite :*

– **Uniformément intégrable** si :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t E\left[\left|X_t\right| 1_{|X_t|>n}\right] = 0.$$

– **Fermée par un variable aléatoire** $X_\infty \in \boldsymbol{L}^1$, si pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = E\left[X_\infty \left| \mathcal{F}_t\right.\right].$$

– De **carré intégrable** si pour tout $t \geq 0$,

$$E\left(\left|X_t\right|^2\right) < +\infty.$$

Définition 1.3.4 ***(Martingale locale)*** *Un processus $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrête $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers $+\infty$ tel que pour tout*

$n \in \mathbb{N}$, le processus arrête M^{T_n} soit une martingale nulle en 0.

Définition 1.3.5 ***(Semi-martingale)*** *Une semi-martingale est un processus réel, adapté et càdlàg que se décompose en une somme d'une martingale locale et d'un processus réel, càdlàge et a variation finie.*

ie : une semi-martingale est un processus de la forme :

$$X = M + Z,$$

où :

– M est une martingale locale.

– Z un processus réel cadlage et a variation finie.

Exemple 1.3.1 *Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard et $\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.*

1. $(B_t)_{t\geq 0}$ est une $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingale.
2. $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est une $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingale.
3. Pour tout $\alpha \neq 0$, $\left(\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t\right)\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.

1.4 Intégrale stochastique d'Itô

Les résultats suivants sont détaillés dans [11, p.(25,...,30)],[7, p.(42,..,45)].

1.4.1 *Définition et Propriétés*

Définition 1.4.1 *Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On introduit ∇ comme classe des fonctions (ou processus stochastique)*

$$f : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

satisfaisant :

1. f est $\mathcal{B}_{[0,T]} \otimes \mathcal{F}-$mesurable.
2. f est $\mathcal{F}_t-$adapté.
3. $\forall t \in [0,T]\,,\ f(t,.) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $E\left[\int_0^T f(t)^2 dt\right] < +\infty.$

Définition 1.4.2 ***(L'intégrale d'Itô)*** *Soit $f \in \nabla$, alors l'intégrale d'Itô de f est définie par :*

$$\int_0^T f(s)dW(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \phi_n(s)dW(s) \quad \textit{(limite en } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)\textit{)}. \tag{1}$$

Où $\{\phi_n\}$ est une séquence de fonctions élémentaires dans ∇, telle que :

$$E\left[\int_0^T (f(s) - \phi_n(s))^2 dt\right] \longrightarrow 0 \quad \textit{quand} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{2}$$

Propriété 1.4.1 *Chaque processus $f \in \nabla$ son intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :*

1. L'intégrale stochastique sur ∇ est linéaire et $\mathcal{F}_t-$mesurable.
2. L'intégrale stochastique est centrée (ie :$E\left\{\int_0^T f(t)dW(t)\right\} = 0$) et satisfait **l'isométrie d'Itô**

$$E\left\{\left(\int_0^T f(t)dW(t)\right)^2\right\} = E\left\{\int_0^T (f(t))^2 dt\right\}. \tag{3}$$

3. L'intégrale d'Itô d'un processus $f \in \nabla$ est une martingale continue et satisfait :

$$P\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^T f(s)dW(s)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2} E\left\{\int_0^T [\varphi(t)]^2\, dt\right\}, \forall \varepsilon > 0. \tag{4}$$

1.4.2 *Formule d'Itô*

Définition 1.4.3 ***(Processus d'Itô)*** *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit processus d'Itô et possède la différentielle stochastique :*

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{5}$$

Si pour tout t

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s. \tag{6}$$

Où b est un processus adapté et σ un processus appartenant à $L^2_{loc}(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Remarque 1.4.1 *Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.*

Dans ce qui suit, X est un processus d'Itô.

Théorème 1.4.1 ***(Intégration par parties)*** *Tout fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ son intégration par parties est représentée par :*

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f\,'(s) B_s ds. \tag{7}$$

Théorème 1.4.2 *(**Première forme**) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f\,'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f\,''(X_s)\sigma_s^2 ds. \tag{8}$$

Théorème 1.4.3 ***(Deuxième forme)*** *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t{}'(s, X_s) ds + \int_0^t f_x'(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\sigma_s^2 ds. \tag{9}$$

et on note

$$df(t,X_t) = {f_t}'(t,X_t)dt + {f_x}'(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,X_t)d\left\langle X\right\rangle_t . \tag{10}$$

1.4.3 *Théorème de représentation des martingales*

Comme un résultat de toute martingale est l'intégrale stochastique d'Itô d'un processus unique de la classe $\mathcal{C}$. On représente le théorème suivant.

Théorème 1.4.4 ***(De représentation des martingales)*** *Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}} \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ une martingale et $B(t)$ un mouvement brownien. Alors il existe un unique processus $f \in \mathcal{C}\left[0,T\right]$ tel que :*

$$X(t) = E(X_0) + \int_0^t f(s)dB(s),\ \forall t \in \left[0,T\right]. \tag{11}$$

Remarque 1.4.2 *Ce résultat représente une réciproque de la propriété 1.4.1 (numéro 3) de l'intégrale stochastique d'Itô.*

1.5 Équations différentielles stochastiques

Sur la base de ce qui a été Indiqué dans [7, chapter4]

1.5.1 *Équations différentielles stochastiques*

Définition 1.5.1 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s. \tag{12}$$

Ou sous forme condensée :

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{13}$$

L'inconnue est le processus X. Le problème est de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution.

Théorème 1.5.1 ***(Théorème d'existence)*** *On suppose que :*

1. Les fonctions b et σ sont continues.
2. $\exists$ K tel que $\forall t \in [0, \mathbb{T}]$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$:
   - $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y|$.
   - $|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2)$.
3. La condition initiale X_0 est indépendante de $(B_t, t \geq 0)$ et est de carré intégrable.

   Alors il existe une unique solution de (1.1) à trajectoires continues pour $t \leq \mathbb{T}$. De plus cette solution vérifie :

$$E(\sup_{0 \leq t \leq \mathbb{T}} |X_t|^2) < \infty.$$

1.5.2 *Équations aux dérivées partielles*

On se donne deux fonctions b et σ de $[0, \mathbb{T}] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant les hypothèses du théorème 1.5.1 concernant l'existence de solution d'équations différentielles stochastiques. Soit A l'opérateur défini sur les fonctions de $C^{1,2}$ par :

$$Af(t,x) = {f_t}'(t,x) + {f_x}'(t,x)b(t,x) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,x)\sigma^2(t,x). \tag{14}$$

Soit $({X_u}^{x,t}, u \geq t)$ le processus d'Ito défini par :

$${X_u}^{x,t} = {X_t}^{x,t} + \int_t^u b(s, {X_s}^{x,t})ds + \int_t^u \sigma(s, {X_s}^{x,t})dB_s, u \geq t. \tag{15}$$

Avec une condition initiale en t : ${X_t}^{x,t} = x$. On remarque que $Af(t,x) = {f_t}'(t,x) + \mathcal{L}$ $f(t,x)$. Où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal de X.

1.6 Théorème de Girsanov

Le théorème de Girsanov est **un élément du calcul stochastique** qui n'a pas d'analogue dans le calcul standard. J'ai utilisé [3, p.51], [4] pour composer les résultats suivant.

Définition 1.6.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, on dit que une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est **absolument continue** par rapport à P et on note $Q \ll P$ si :*

$$\forall A \in \mathcal{F} : \qquad P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0.$$

*On dit que P et Q sont **équivalentes** si :*

$$Q \ll P \quad et \quad P \ll Q.$$

Avant d'introduire notre théorème, nous devons d'abord étudier les deux résultats suivants.

Lemme 1.6.1 *Supposons que $Q \ll P$. Le processus du rapport de vraisemblance*

$$L_t(\omega) \triangleq \frac{dQ_t}{dP_t}(\omega).$$

est une vraie martingale par rapport à la mesure de référence P.

Lemme 1.6.2 *Soit P une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ équipé de la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Alors X_t est un $Q-$martingale si et seulement si le processus produit $(X_t L_t)$ est un $P-$martingale.*

Théorème 1.6.1 ***(Cameron-Martin-Girsanov)*** *Soit Q une mesure de probabilité tel que $Q \ll P$ et soit M une martingale locale continue, et L la martingale exponentielle* *associée ; telle que :*

$$L_t = K_t \exp\left(- \int_0^t H_s dM_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 d \left\langle M \right\rangle_S \right). \tag{16}$$

Où $K_t \geq 0$ est une $P-$martingale continue avec $E_P(K_0) = 1$ et $[M, K]_t = 0$ pour tous t, et le processus

$$\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{L_s} d \left\langle M, L \right\rangle_s. \tag{17}$$

Dans le cas où $K_t \equiv 1$ pour tous t, le changement de mesure est minimal, dans le sens que chaque $P-$martingale X_t tel que $[X, M] = 0$ est aussi une $Q-$martingale.

1.7 Prédicteur linéaire

Dans cette partie de ce chapitre, nous rappellerons des résultats sur le problème de prédiction.

Lemme 1.7.1 *On définit dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ la variable aléatoire X de carré intégrable et la sous $\delta-$algèbre $\mathcal{H}$ de $\mathcal{F}$. Le meilleur estimateur de $E(X)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est l'espérance conditionelle $E\left(X \left| \mathcal{H} \right.\right)$ parmi les variables aléatoires de carré intégrables et qui sont $\mathcal{H}-$mesurable.*

Lemme 1.7.2 *Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ une $\delta-$algèbre et $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une variable aléatoire $\mathcal{F}-$mesurable. On écrira :*

$$\mathcal{M} = \left\{ Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P); Y \text{ est } \mathcal{H}-mesurable \right\}.$$

et on désigne par $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $\mathcal{M}$. Telle que :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(X) = E\left(X \left| \mathcal{H} \right.\right) = E^{\mathcal{H}}(X).$$

Définition 1.7.1 *Soient la variable aléatoire* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et la suite fini de variables aléatoires* $Y = (Y_t : t \in \{0, 1, 2, ..., T\})$ *sachant que* $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

On appelle meilleur prédicteur linéaire de X en terme de Y la variable $\hat{X} \in \mathcal{G}^Y(\mathcal{G}^Y$ le sous-espace d'Hilbert généré par $Y)$ telle que :

$$\left\| X - \hat{X} \right\| = \min_{V \in \mathcal{G}^Y} \| X - V \| .$$

Corollaire 1.7.1 *Un prédicteur linéaire d'une variable* X *en terme de* Y *tel que* $Y = (Y_s, 0 \leq s \leq t)$,$\forall t \in \{0, 1, 2, ..., T\}$ *satisfait :*

$$\hat{X} = \mathcal{P}_{\mathcal{G}_t^Y}(X) = E^{\mathcal{F}_t^Y}(X).$$

Où $\mathcal{F}_t^Y$ *est la* δ*-algèbre engendrée par* Y*.*

Chapitre 2

Filtrage stochastique non linéaire

Dans certains cas, le filtrage stochastique consiste à trouver le meilleur estimateur d'un certain processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ qui ne peut pas être mesuré directement appeler **le processus d'état(ou de signal)**. En utilisant les informations d'un **processus des observations** $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$. Par conséquent, ce sont les processus stochastiques associés dans chaque filtrage stochastique.

L'objectif de ce chapitre est de définir le filtrage stochastique linéaire et traiter-l'objet principal de ce mémoire qui est le filtrage stochastique non linéaire, dans le cas unidimensionnel et continu. Pour atteindre cet objectif de l'étude, nous avons utilisé [12, p.84,..,97], [13, p.54,55],[6] et [4],[2].

2.1 Filtrage stochastique linéaire

Le problème du filtrage linéaire a été résolu par **Kalman-Bucy (1961)** et représenté par **un modèle d'espace d'étas** qui est **un système d'équations** (d'état et d'observation respectivement) :

$$\begin{cases} dX_t = A(t)X_t dt + B(t)dW_t \ , \\ dY_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t \ . \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec X_0 et $Y_0 = 0$ des conditions initiales, on suppose que $(V_t)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ sont deux mouvements browniens indépendants où W_t est indépendant de V_t et X_0 et que A, B, G et D sont bornés sur des intervalles bornés.

2.1.1 ***Processus d'innovation***

Avant d'introduire le processus d'innovation, nous établirons une représentation utile des fonctions dans l'espace $\mathcal{L}(Y,T)$.

Si $f \in L^2\left[0,t\right]$, on note que

$$E\left[\left(\int_0^t f(s)dY_s\right)^2\right] = E\left[\left(\int_0^t f(s)G(s)X_s ds\right)^2\right] + E\left[\left(\int_0^t f(s)D(s)dV_s\right)^2\right]$$
$$+\,2E\left[\left(\int_0^t f(s)G(s)X_s ds\right)\left(\int_0^t f(s)D(s)dV_s\right)\right].$$

Puisque

$E\left[\left(\int_0^t f(s)G(s)X_s ds\right)^2\right] \leq Z_1 . \int_0^t f(s)^2 ds.$ (Par l'inégalité de Cauchy-schwartz).

$E\left[\left(\int_0^t f(s)D(s)dV_s\right)^2\right] = \int_0^t f(s)^2 D(s)^2 ds.$ (Par l'isométrie d'Itô).

Et $\{X_t\}, \{V_t\}$ sont indépendants, nous concluons que

$$Z_0 \int_0^t f^{\,2}(s)ds \leq E\left[\left(\int_0^t f(s)dY_s\right)^2\right] \leq Z_2 \int_0^t f^{\,2}(s)ds.$$

Pour certaines constantes $Z_0; Z_1; Z_2$ ne dépendant pas de f. Nous pouvons maintenant déduire le résultat suivant.

Lemme 2.1.1 $\mathcal{L}(Y,t) = \left\{c_0 + \int_0^t f(s)dY_s \,;\, f \in L^2\left[0,t\right] \;, c_0 \in \mathbb{R}\right\}.$

Définition 2.1.1 *Le processus* $(\mathcal{N}_t, t \geq 0)$ *est appelé* ***processus d'innovation*** *et est défini par :*

$$\mathcal{N}_t = Y_t - \int_0^t G(s)\hat{X}_s ds. \tag{2.2}$$

Avec

$$G(s)\hat{X}_s = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(Y,s)}(G(s)X_s). \tag{2.3}$$

i.e.

$$d\mathcal{N}_t = G(t)(X_t - \hat{X}_t)dt + D(t)dV_t. \tag{2.4}$$

2.1.2 *Filtre de Kalman-Bucy*

Le filtre est considéré pour le problème du filtrage linéaire continu, représentant un schéma récursif qui permet de calculer l'estimateur linéaire optimale de l'état X_t.

Théorème 2.1.1 ***(Filtre de Kalman-Bucy-1961)*** *La solution $\hat{X}_t$ du modèle d'état 2.1 satisfait le système d'équation différentielle stochastique suivante :*

$$\begin{aligned} d\hat{X}_t &= \left(A(t) - \frac{G^2(t)J(t)}{D^2(t)} \right) \hat{X}_t dt + \frac{G(t)J(t)}{D^2(t)} dY_t, \\ \hat{X}_0 &= E(X_0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Avec

$$J(t) = E\left[(X_t - \hat{X}_t)^2 \right].$$

Qui satisfait l'équation déterministe de ***Riccati (****voir 3) :*

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= 2A(t)J(t) - \frac{G^2(t)}{D^2(t)} J^2(t) + B^2(t), \\ J(0) &= E\left[(X_0 - E(X_0))^2 \right]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Exemple 2.1.1 ***(Des observations bruitées d'un processus constant)*** *Considérons le cas simple :*

$$\begin{aligned} dX_t &= 0, \; i.e \; X_t = X_0 \quad ; E(X_0) = 0, \; E(X_0^2) = a^2, \\ dY_t &= X_t dt + m dV_t, \qquad\qquad Y_0 = 0. \end{aligned}$$

D'après le théorème précédant l'équation de Riccati est de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{dJ(t)}{dt} &= -\frac{1}{m^2}J^2(t),\\ J(0) &= a^2.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{dJ(t)}{J^2(t)} = -\frac{1}{m^2}dt.$$

La solution de cette équation différentielle non linéaire du premier ordre est :

$$J(t) = \frac{a^2m^2}{m^2+a^2t}, t \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}d\hat{X}_t &= -\frac{a^2}{m^2+a^2t}\hat{X}_t dt + \frac{a^2}{m^2+a^2t}dY_t,\\ \hat{X}_0 &= \mathbb{E}(X_0) = 0.\end{aligned}$$

C'est une équation différentielle stochastique linéaire du premier ordre, la formule d'Itô permet d'écrire :

$$\hat{X}_t = \exp\left\{-\int_0^t \frac{a^2}{m^2+a^2s}ds\right\}\left(\hat{X}_0 + \int_0^t \exp\left(\int_0^s \frac{a^2}{m^2+a^2u}du\right)\right)\frac{a^2}{m^2+a^2s}dY_S.$$

Alors

$$d\left(\hat{X}_t \exp\left\{\int_0^t \frac{a^2}{m^2+a^2s}ds\right\}\right) = \exp\left(\int_0^{+\infty} \frac{a^2}{m^2+a^2t}dt\right)\frac{a^2}{m^2+a^2t}dY_t.$$

Donc

$$\hat{X}_t = \frac{a^2}{m^2+a^2t}Y_t \Rightarrow \hat{X}_t = \frac{1}{\frac{m^2}{a^2}+t}Y_t, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

2.2 Filtrage stochastique non linéaire

2.2.1 *Position du problème*

Soit l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, avec tous les processus sont $\mathcal{F}_t-$ *adapté* considérons le problème du filtrage non linéaire associé au modèle d'espace d'état suivant :

$$dX_t = b(t, Y, X_t)dt + f(t, Y, X_t)dV_t + g(t, Y, X_t)dW_t, \tag{2.7}$$

$$dY_t = h(t, Y, X_t)dt + dW_t. \tag{2.8}$$

Où le processus d'état $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique 2.7 et le processus des observations $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$définit la solution de l'équation2.8. V et W deux mouvements browniens indépendants définis sur cet espace, et les coefficients b, f, g et h sont des applications continues à valeurs réelles satisfaisant chacune la propriété de **Lipschitz** :

$$\mid b(t, y, x_1) - b(t, y, x_2) \mid + \mid f(t, y, x_1) - f(t, y, x_2) \mid + \tag{2.9}$$

$$\mid g(t, y, x_1) - g(t, y, x_2) \mid\leq M_1 \mid x_1 - x_2 \mid . \tag{2.10}$$

$$\mid h(t, y, x_1) - h(t, y, x_2) \mid\leq M_2 \mid x_1 - x_2 \mid . \tag{2.11}$$

Avec $M_1 > 0, M_2 > 0, t > 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Et la condition de **croissance linéaire** :

$$\mid b(t, y, x) \mid^2 + \mid f(t, y, x) \mid^2 + \mid g(t, y, x) \mid^2\leq M_1^2(1+ \mid x \mid^2). \tag{2.12}$$

$$\mid h(t, y, x) \mid^2\leq M_2^2(1+ \mid x \mid^2). \tag{2.13}$$

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$.

Les conditions 2.9,2.11,2.12 et 2.13 sont supposés pour assurer l'existence et l'unicité des équations différentielles stochastiques 2.7 et 2.8. De plus les conditions 2.11 et 2.13 sur le processus $h_t = h(t, Y, X_t)$, nous supposons que

$$E_P\left(\int_0^t h(s, Y, X_s)^2 ds\right) < \infty.$$

Nous désignions par $\mathcal{F}_t^Y$ la σ algèbre engendrée par toutes les variables aléatoires

$$(Y_u, 0 \leq u \leq t).$$

Il est clair que le processus Y qui est une fonction de X, est corrompu par le bruit $(W_t)_{t\geq 0}$. La théorie du filtrage consisté à filtrer le bruit de l'observation Y c'est-à-dire à déterminer la distribution conditionnelle de X_t sachant $\mathcal{F}_t^Y$:

$$\pi_t(dx) \triangleq P(X_t \in dx \mid \mathcal{F}_t^Y).$$

En général

$$\pi_t(\phi) \triangleq E_P(\phi(X_t) \mid \mathcal{F}_t^Y) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\pi_t(dx) \ , \ \phi \in C_b^2.$$

On cherche à exprimer $\pi_t(\phi)$ comme solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique par rapport à Y_t, il s'agit d'appliquer la formule de Girsanov 1.6 pour trouver une forme explicite de $\pi_t(\phi)$ en terme de $(Y_u, 0 \leq u \leq t)$. Dans ce cas, le filtre π_t est généralement connu pour satisfaire une certaine mesure d'équation différentielle stochastique appelée l'équation différentielle stochastique de **Fujisaki-Kallianpur-Kunita** qui est également bien connu comme équation de **Kushner-Stratonovich** :

$$\pi_t(\phi) = \pi_0(\phi) + \int_0^t \pi_s(L_{s,Y}\phi)ds + \int_0^t \left\{\pi_s(L_{s,Y}^1\phi) - \pi_s(h(s,Y,.))\pi_s(\phi)\right\}(dY_s - \pi_s(h(s,Y,.))ds).$$

Pour certains opérateurs différentiels $L_{s,Y}$ et $L_{s,Y}^1$.

2.2.2 *Changement de mesure*

Maintenant, nous écrivons l'équation 2.8 comme

$$dW_t = dY_t - h(t, Y, X_t)dt,$$

et le remplacer dans 2.7 ce qui donne

$$dX_t = \{b(t, Y, X_t) - h(t, Y, X_t)\}\, dt + f(t, Y, X_t)dV_t + g(t, Y, X_t)dY_t.$$

Nous voulons que le processus d'observation Y_t soit un mouvement brownien sous une nouvelle mesure de probabilité Q. Pour réaliser cela, le théorème sera utilisé est le théorème de **Cameron-Martin-Girsanov** 1.6.1.

En général, si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une $\{\mathcal{F}_t\}$ −martingale continue sous la mesure P, et si $(H_t)_{t\geq 0}$ est un processus $\{\mathcal{F}_t\}$ −adapté tel que pour tous $0 \leq t < \infty$

$$\int_0^t H_s^2 d\left\langle M\right\rangle_s < \infty \qquad P - p.s, \tag{2.14}$$

puis par le changement de dérive

$$\tilde{M}_t = M_t + \int_0^t H_s d\left\langle M\right\rangle_s, \tag{2.15}$$

tel que le processus $\tilde{M}_t$ est une martingale par rapport à la nouvelle mesure de probabilité Q, et $Q_t \ll P_t$ pour tous $0 \leq t < \infty$.

Remarque 2.2.1 *On note par P_t et Q_t les restrictions de P et Q, respectivement, à la $\sigma-$algèbre $\mathcal{F}_t$. Par conséquent, la notation $Q \ll P$ signifie que $Q_t \ll P_t$ pour tous $0 \leq t < \infty$.*

Remarque 2.2.2 *On note que :*

$$\frac{dQ_t}{dP_t} = \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{dP|_{\mathcal{F}_t}},$$

est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

Dans notre cas, puisque h est borné, il s'ensuit que le changement de mesure à la forme :

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t h(s,Y,X_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t h(s,Y,X_s)^2 ds\right),$$

qui satisfait l'équation différentielle stochastique :

$$L_t = \frac{dQ_t}{dP_t}\ ,\ L_t^{-1} = \frac{dP_t}{dQ_t},$$

ainsi nous définissons

$$Z_t = L_t^{-1} = \exp\left(\int_0^t h(s,Y,X_s)dY_s - \frac{1}{2}\int_0^t h(s,Y,X_s)^2 ds\right).$$

Où Q considéré comme une mesure de référence telle que $P \ll Q$. De plus, le processus Z_t est la solution de l'équation :

$$dZ_t = Z_t h(t,Y,X_t)dY_t.$$

Le théorème suivant donne une formule pour l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire en cas de changement de mesure.

Théorème 2.2.1 ***(La formule de Bayes)*** *Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$ et $\mathcal{G}$ le sous $\sigma-$algèbre de $\mathcal{F}$. Si Q est une seconde mesure de probabilité avec $Z = \frac{dP}{dQ}$ et $P \ll Q$. Alors :*

$$E_P(X \mid G) = \frac{E_Q(XZ \mid \mathcal{G})}{E_Q(Z \mid \mathcal{G})}. \tag{2.16}$$

Où E_Q et E_P sont les espérances sous les mesures Q et P respectivement.

Preuve. C'est clair que le membre de droite de 2.16 est mesurable en $\mathcal{G}$. Soit $A \in \mathcal{G}$. Puis

$$\begin{aligned}\int_A \frac{E_Q(XZ \mid \mathcal{G})}{E_Q(Z \mid \mathcal{G})} dP &= \int_A \frac{E_Q(XZ \mid \mathcal{G})}{E_Q(Z \mid \mathcal{G})} Z dQ \\ &= \int_A \frac{E_Q(XZ \mid \mathcal{G})}{E_Q(Z \mid \mathcal{G})} E_Q(Z \mid \mathcal{G}) dQ \\ &= \int_A E_Q(XZ \mid \mathcal{G}) dQ = \int_A XZdQ = \int_A XdP,\end{aligned}$$

qui vérifient l'identité. ■

2.2.3 *Distribution conditionnelle non normalisée*

Définissons la distribution conditionnelle non normalisée $\sigma_t(dx)$ de X via

$$\sigma_t(dx) \triangleq E_Q(Z_t \mathbf{1}(X_t \in dx) \left| \mathcal{F}_t^Y \right.),$$

et pour une fonction mesurable bornée ϕ avec des dérivés bornés

$$\sigma_t(\phi) \triangleq E_Q(\phi(X_t) Z_t \left| \mathcal{F}_t^Y \right.) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \sigma_t(dx).$$

Théorème 2.2.2 ***(La formule de Striebel-Kallianpur)*** *Pour toute fonction $\phi \in C_b^2$, on a*

$$\pi_t(\phi) = \frac{\sigma_t(\phi)}{\sigma_t(1)} = \frac{E_Q(\phi(X_t) Z_t \left| \mathcal{F}_t^Y \right.)}{E_Q(Z_t \left| \mathcal{F}_t^Y \right.)}.$$

Où $\pi_t(\phi) = E_P(\phi(X_t) \left| \mathcal{F}_t^Y \right.)$.

Preuve. Ce résultat découle directement de la formule de Bayes 2.2.1, en remplaçant dans celle-ci X, Z et $\mathcal{G}$ par $\phi(X_t)$, Z_t et $\mathcal{F}_t^Y$ respectivement.

On pose pour toute fonction $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$:

$$\sigma_t(\phi) = E_Q(\phi(X_t) Z_t \left| \mathcal{F}_t^Y \right.).$$

Appelée **la distribution conditionnelle non-normalisée** et liée au filtre optimal π_t par la formule de **Striebel-Kallianpur**

$$\pi_t(\phi) = \frac{\sigma_t(\phi)}{\sigma_t(1)}.$$

Notons au passage que le processus (Z_t) satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dZ_t = Z_t h(X_t) dY_t.$$

■

Corollaire 2.2.1 *$\sigma_t(1)$ est la dérivée de **Radon-Nikodym** (Annexe B) de la restriction de Q_t par rapport à la restriction de P_t sur $\mathcal{F}_t^Y$:*

$$\sigma_t(1) = E_Q(Z_t \left| \mathcal{F}_t^Y \right.) = \frac{dP_t \left| \mathcal{F}_t^Y \right.}{dQ_t \left| \mathcal{F}_t^Y \right.}.$$

Preuve. Remarquons d'abord que le sous σ-algèbre $\mathcal{F}_t^Y$ est contenue dans le sous σ-algèbre engendrée par $\mathcal{F}_t^{V,W}$. Par suite, pour tout $A \in \mathcal{F}_t^Y$, on a d'une part

$$P_t(A) = \int 1_A dP_t = E_Q(1_A Z_t),$$

et d'autre part

$$E_Q(1_A \sigma_t(1)) = E_Q(1_A E_Q(Z_t \left| \mathcal{F}_t^Y \right.)) = P_t(A),$$

d'où l'on tire que

$$\sigma_t(1) = \frac{dP_t \mid \mathcal{F}_t^Y}{dQ_t \mid \mathcal{F}_t^Y}.$$

■

2.2.4 *Équation de Zakai*

Nous souhaitons obtenir une équation différentielle stochastique qui est satisfaite par la distribution conditionnelle non normalisée σ_t. Au début, le prochain lemme sera nécessaire.

Lemme 2.2.1 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien avec la propriété martingale dans la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et évidemment aussi par rapport à la plus petite filtration $\mathcal{F}_t^B \subseteq \mathcal{F}_t$, engendrée par lui-même.*

Soit $H(t,w)$ un processus $\mathcal{F}_t-$adapté et qui ne soit pas nécessairement $\mathcal{F}_t^B-$adapté, sachant que :

$$\int_0^t E_P(H_s^2)ds < \infty,$$

alors

$$E_P\left(\int_0^t H_s dB_s \left| \mathcal{F}_t^B \right.\right) = \int_0^t E_P(H_s \left| \mathcal{F}_s^B \right.) dB_s.$$

De plus, si M_t est une F_t-martingale avec $\langle M, B\rangle_s = 0$ pour chaque s dans $[0,t]$, alors :

$$E_P(M_t - M_0 \left| \mathcal{F}_t^B \right.) = 0.$$

Preuve. Soit $A \in \mathcal{F}_t^B$. Par le théorème de représentation d'Ito-Clark, nous avons

$$\mathbf{1}_A = P(A) + \int_0^t K_s dB_s,$$

pour certains $K \in L^2([0,t] \times \Omega)$ adaptés à $(\mathcal{F}_t^B)$.

$$\begin{aligned}
E_P\left(\mathbf{1}_A \int_0^t H_s dB_s\right) &= P(A)E_P\left(\int_0^t H_s dB_s\right) + E_P\left(\int_0^t K_s dB_s \int_0^t H_s dB_s\right) \\
&= 0 + E_P(\langle K \cdot B, H \cdot B\rangle_t) \\
&= E_P\left(\int_0^t K_s H_s ds\right) = \int_0^t E_P(K_s H_s) ds \\
&= \int_0^t E_P(K_s E_P(H_s \left| \mathcal{F}_s^B \right.)) ds \\
&= E_P\left(\left\langle \int_0^t K_s dB_s, \int_0^t E_P(H_s \left| \mathcal{F}_s^B \right.) dB_s \right\rangle_t\right) \\
&= 0 + E_P\left(\int_0^t K_s dB_s \int_0^t E_P(H_s \left| \mathcal{F}_s^B \right.) dB_s\right) \\
&= E_P\left(\mathbf{1}_A \int_0^t E_p(H_s \left| \mathcal{F}_s^B \right.) dB_s\right).
\end{aligned}$$

On utilise l'isométrie d'Itô et la définition de l'espérance conditionnelle. Pour la deuxième partie du lemme, si $M_0 = 0, \langle M, B\rangle_s = 0$ pour $s \leq t$, et $A \in \mathcal{F}_t^B$ comme avant, alors

$$\begin{aligned}
E_P((M_t - M_0)1_A) &= P(A)E_P(M_t - M_0) + E_P\left((M_t - M_0) \int_0^t K_s dB_s\right) \\
&= 0 + E_P\left(\int_0^t K_s d\langle M, B\rangle_s\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie $E_P(M_t - M_0 \mid \mathcal{F}_t^B) = 0$. ■

Théorème 2.2.3 *Pour toute fonction $\phi \in C_b^2$, la distribution conditionnelle non normalisée $\sigma_t(\phi)$ satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$\sigma_t(\phi) = \sigma_0(\phi) + \int_0^t \sigma_s(L_{s,Y}\phi) ds + \int_0^t \sigma_s(L_{s,Y}^1 \phi) dY_s. \tag{2.17}$$

Où $L_{s,Y}$ et $L^1_{s,Y}$ sont des opérateurs différentiels sur C^2, en fonction du temps et de l'observations passées de Y :

$$L_{s,Y}\phi = \frac{1}{2}(f(s,Y,\cdot)^2 + g(s,Y,\cdot)^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + b(s,Y,\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\phi. \tag{2.18}$$

$$L^1_{s,Y}\phi = h(s,Y,\cdot)\phi + g(s,Y,\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\phi. \tag{2.19}$$

L'équation 2.19 est appelée l'équation de filtrage de Zakai non normalisée.

Preuve. Comme

$$dX_t = b(t,Y,X_t)dt + f(t,Y,X_t)dV_t + g(t,Y,X_t)dW_t,$$

et

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t h(s,Y,X_s)dY_s - \frac{1}{2}\int_0^t h(s,Y,X_s)^2 ds\right).$$

Nous utiliserons la formule d'intégration par parties

$$d(\phi(X_t)Z_t) = Z_t d\phi(X_t) + \phi(X_t)dZ_t + d\left\langle \phi(X_t), Z\right\rangle_t.$$

Pour obtenir

$$\begin{aligned}
d(\phi(X_t)Z_t) &= Z_t\phi'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}Z_t\phi''(X_t)d\left\langle X\right\rangle_t + Z_t\phi(X_t)h(t,Y,X_t)dY_t \\
&+ Z_t\phi'(X_t)g(t,Y,X_t)h(t,Y,X_t)dt \\
&= Z_t\left\{\phi'(X_t)g(t,Y,X_t) + \phi(X_t)h(t,Y,X_t)\right\}dY_t + Z_t\phi'(X_t)f(t,Y,X_t)dV_t \\
&+ Z_t\phi'(X_t)\left\{b(t,Y,X_t) - h(t,Y,X_t)g(t,Y,X_t) + h(t,Y,X_t)g(t,Y,X_t)\right\}dt \\
&+ \frac{1}{2}Z_t\phi''(X_t)\left\{f(t,Y,X_t)^2 + g(t,Y,X_t)^2\right\}dt \\
&= Z_t\left\{\phi'(X_t)g(t,Y,X_t) + \phi(X_t)h(t,Y,X_t)\right\}dY_t + Z_t\phi'(X_t)f(t,Y,X_t)dV_t \\
&+ Z_t\left\{\phi'(X_t)b(t,Y,X_t) + \frac{1}{2}\phi''(X_t)\left(f(t,Y,X_t)^2 + g(t,Y,X_t)^2\right)\right\}dt.
\end{aligned}$$

Nous écrivons cette expression sous forme intégrale pour trouver

$$\begin{aligned}\phi(X_t)Z_t = \phi(X_0) &+ \int_0^t Z_s \left\{\phi'(X_s)g(s,Y,X_s) + \phi(X_s)h(s,Y,X_s)\right\} dY_s \\ &+ \int_0^t Z_s\phi'(X_s)f(s,Y,X_s)dV_s \\ &+ \int_0^t Z_s \left\{\phi'(X_s)b(s,Y,X_s) + \frac{1}{2}\phi''(X_s)\left(f(s,Y,X_s)^2 + g(s,Y,X_s)^2\right)\right\} ds.\end{aligned}$$

On prend maintenant l'espérance conditionnelle sous Q étant donné la $\sigma-$algèbre $\mathcal{F}_t^Y$, donc

$$\begin{aligned}\sigma_t(\phi) &= E_Q(\phi(X_t)Z_t \left|\mathcal{F}_t^Y\right.) \\ &= E_Q(\phi(X_0) \left|\mathcal{F}_t^Y\right.) \\ &+ E_Q\left(\int_0^t Z_s \left\{\phi'(X_s)g(s,Y,X_s) + \phi(X_s)h(s,Y,X_s)\right\} dY_s \left|\mathcal{F}_t^Y\right.\right) \\ &+ E_Q\left(\int_0^t Z_s\phi'(X_s)f(s,Y,X_s)dV_s \left|\mathcal{F}_t^Y\right.\right) \\ &+ E_Q\left(\int_0^t Z_s \left\{\phi'(X_s)b(s,Y,X_s) + \frac{1}{2}\phi''(X_s)\left(f(s,Y,X_s)^2 + g(s,Y,X_s)^2\right)\right\} ds \left|\mathcal{F}_t^Y\right.\right) \\ &= E_Q(\phi(X_0) \left|\mathcal{F}_t^Y\right.) \\ &+ \int_0^t E_Q\left(Z_s \left\{\phi'(X_s)g(s,Y,X_s) + \phi(X_s)h(s,Y,X_s)\right\} \left|\mathcal{F}_s^Y\right.\right) dY_s \\ &+ \int_0^t E_Q\left(Z_s\phi'(X_s)f(s,Y,X_s) \left|\mathcal{F}_s^Y\right.\right) dV_s \\ &+ \int_0^t E_Q\left(Z_s \left\{\phi'(X_s)b(s,Y,X_s) + \frac{1}{2}\phi''(X_s)\left(f(s,Y,X_s)^2 + g(s,Y,X_s)^2\right)\right\} \left|\mathcal{F}_s^Y\right.\right) ds,\end{aligned}$$

qui découle du lemme (2.2.1). ■

Remarque 2.2.3 *Lorsque $\phi(x) \equiv 1$, l'équation 2.17 s'écrira comme*

$$\sigma_t(1) = 1 + \int_0^t \sigma_s(h(s,Y,\cdot))dY_s = 1 + \int_0^t \sigma_t(1)\frac{\sigma_t(h)}{\sigma_t(1)}dY_s,$$

qui est équivalente à

$$\sigma_t(1) = 1 + \int_0^t \sigma_s(1)\pi_s(h(s,Y,\cdot))dY_s. \tag{2.20}$$

L'équation différentielle stochastique 2.20 admet la solution

$$\frac{dP_t \mid \mathcal{F}_t^Y}{dQ_t \mid \mathcal{F}_t^Y} = \sigma_t(1) = \exp\left(\int_0^t \pi_s(h(s,Y,\cdot))dY_s - \frac{1}{2}\int_0^t \pi_s(h(s,Y,\cdot))^2 ds\right). \tag{2.21}$$

2.2.5 *Équation de Kushner-Stratonovich*

En utilisant l'équation de Zakai qui a été obtenue dans la section précédente ; est l'équation différentielle stochastique qui est satisfaite par la distribution conditionnelle non normalisée de X_t, (i.e $\sigma_t(\phi)$), et la formule de Striebel-Kallainpur pour obtenir une équation similaire qui est satisfaite par la distribution conditionnelle normalisée $(\pi_t(\phi), \phi \in C_b^2)$. Rappelons que la loi conditionnelle normalisée est donnée par :

$$\pi_t(\phi) = \frac{\sigma_t(\phi)}{\sigma_t(1)}. \tag{2.22}$$

On commence par définir **le processus d'innovations.**

Définition 2.2.1 *Le processus $I = (I_t)_{t\geq 0}$ diféni par $I_t = Y_t - \int_0^t \pi_s(h(s,Y,\cdot))ds$,$t \geq 0$, est un mouvement brownien sous P adapté à la filtration $\mathcal{F}_t^Y$, cela s'appelle le processus d'innovation.*

Théorème 2.2.4 *(**Kushner-Stratonovich**) La distribution conditionnelle normalisée $\pi_t(\phi)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles stochastique suivante :*

$$\begin{aligned}\pi_t(\phi) &= \pi_0(\phi) + \int_0^t \pi_s(L_{s,Y}\phi)ds \\ &\quad + \int_0^t \left\{\pi_s(L_{s,Y}^1\phi) - \pi_s(h(s,Y,\cdot))\pi_s(\phi)\right\}(dY_s - \pi_s(h(s,Y,\cdot))ds),\end{aligned} \tag{2.23}$$

où I_t est le processus d'innovation.

Preuve. Calculons $\pi_t(\phi) = \sigma_t(\phi)/\sigma_t(1)$ en utilisant l'intégration par parties. En premier, utilisons la formule d'Ito pour les équations 2.17 et 2.20. On a

$$d\sigma_t(\phi) = \sigma_t(L_{t,Y,.}\phi)dt + \sigma_t(L^1_{t,Y,.}\phi)dY_t,$$

et

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{\sigma_t(1)}\right) &= -\frac{1}{\sigma_t(1)^2}\sigma_t(1)\pi_t(h(t,Y,.))dY_t + \frac{1}{\sigma_t(1)^3}\sigma_t(1)^2\pi_t(h(t,Y,.))^2dt \\ &= -\frac{\pi_t(h(t,Y,.))}{\sigma_t(1)}dY_t + \frac{\pi_t(h(t,Y,.))^2}{\sigma_t(1)}dt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} d\pi_t(\phi) &= d\left(\frac{\sigma_t(\phi)}{\sigma_t(1)}\right) \\ &= \frac{d\sigma_t(\phi)}{\sigma_t(1)} + \sigma_t(\phi)d\left(\frac{1}{\sigma_t(1)}\right) + d\left\langle \sigma_t(\phi), \frac{1}{\sigma_t(1)}\right\rangle_t \\ &= \frac{\sigma_t(L_{t,Y,.}\phi)dt + \sigma_t(L^1_{t,Y,.}\phi)dY_t}{\sigma_t(1)} \\ &+ \sigma_t(\phi)\left(-\frac{\pi_t(h(t,Y,.))}{\sigma_t(1)}dY_t + \frac{\pi_t(h(t,Y,.))^2}{\sigma_t(1)}dt\right) \\ &- \pi_t(L^1_{t,Y,.}\phi)\pi_t(h(t,Y,.))dt \\ &= \pi_t(L_{t,Y,.}\phi)dt + \pi_t(L^1_{t,Y,.}\phi)dY_t - \pi_t(\phi)\pi_t(h(t,Y,.))dY_t \\ &+ \pi_t(\phi)\pi_t(h(t,Y,.))^2dt - \pi_t(L^1_{t,Y,.}\phi)\pi_t(h(t,Y,.))dt \\ &= \pi_t(L_{t,Y,.}\phi)dt \\ &+ \left\{\pi_t(L^1_{t,Y,.}\phi) - \pi_t(\phi)\pi_t(h(t,Y,.))\right\}(dY_t - \pi_t(h(t,Y,.))dt). \end{aligned}$$

Enfin, par le théorème de **Girsanov** 1.6 et le rapport 2.22, Y_t est un $Q-$mouvement brownien et $I_t = Y_t - \int_0^t \pi_s(h_s)ds$ est $P-$mouvement brownien, où les deux sont adaptés à $(\mathcal{F}_t^Y)$. ■

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre on donne un exemple bien détaillé sur le thème de ce mémoire.

Exemple 3.0.1 *Considérons le cas gaussien linéaire avec*

$$dX_t = X_t b(t)dt + f(t)dV_t + g(t)dW_t,$$
$$dY_t = X_t h(t)dt + dW_t.$$

Avec $b(s)$,$h(s)$, $f(s)$ *et* $g(s)$ *sont des fonctions déterministes. Rappelons que la distribution conditionnelle de* X_t *sachant* $\mathcal{F}_t^Y$ *est normale de moyenne*

$$\hat{X}_t \triangleq E\left(X_t \middle| \mathcal{F}_t^Y\right) = \pi_t(x), \tag{3.1}$$

et de variance

$$\hat{\sigma}_t^2 \triangleq E\left((X_t - \hat{X}_t)^2 \middle| \mathcal{F}_t^Y\right) = \pi_t(x^2) - \pi(x)^2. \tag{3.2}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, *et pour* $\phi(x) = x^k$ *comme fonction de test, nous écrivons*

$$\pi_t(x^k) \triangleq \pi_t(\phi).$$

Pour $k = 1$ (c'est-à-dire $\phi(x) = x$), on a d'aprés l'équation de ***Kushner-Stratonovich*** *2.23 :*

$$\begin{aligned}\pi_t(x) &= \pi_0(x) + \int_0^t \pi_s(b(s)x)ds + \int_0^t \left\{\pi_s(h(s)x^2 + g(s)) - \pi_s(h(s)x)\pi_s(x)\right\}(dY_s - \pi_s(h(s)x)ds) \\ &= \pi_0(x) + \int_0^t b(s)\pi_s(x)ds + \int_0^t \left\{h(s)(\pi_s(x^2) - \pi_s(x)^2) + g(s)\right\}(dY_s - h(s)\pi_s(x)ds),\end{aligned}$$

qui est équivalente à

$$\hat{X}_t = \hat{X}_0 + \int_0^t b(s)\hat{X}_s ds + \int_0^t \left\{h(s)\hat{\sigma}_t^2 + g(s)\right\}(dY_s - h(s)\hat{X}_s ds). \tag{3.3}$$

Maintenant, nous supposerons que les fonctions $b(s)$, $h(s)$ et $f(s)$ sont constants, en plus en prenant $g = 0$. Cela signifie que nos processus principaux auront une forme de

$$dX_t = bX_t dt + f dV_t,$$

$$dY_t = hX_t dt + dW_t.$$

Puisque la distribution conditionnelle de X_t sachant $\mathcal{F}_t^Y$ est normale, avec la moyenne $\hat{X}_t$ et variance $\hat{\sigma}_t^2$, l'équation du filtre utilisant la fonction de test $\phi(x) = x$ est

$$\pi_t(x) = \pi_0(x) + b\int_0^t \pi_s(x)ds + h\int_0^t \left\{\pi_s(x^2) - \pi_s(x)^2\right\}(dY_s - h\pi_s(x)ds). \tag{3.4}$$

Pour $k = 2$, on obtient le filtre $\pi_t(x^2)$ sous les dernières hypothèses

$$\pi_t(x^2) = \pi_0(x^2) + \int_0^t \left\{f^{\ 2} + 2b\pi_s(x^2)\right\}ds + \int_0^t \left\{h\pi_s(x^3) - h\pi_s(x)\pi_s(x^2)\right\}(dY_s - h\pi_s(x)ds). \tag{3.5}$$

Pour toute variable aléatoire gaussienne $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ le troisième moment peut être exprimé par

$$E(X^3) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2,$$

par analogie, nous pouvons définir

$$\pi_t(x^3) = \pi_t(x)^3 + 3\pi_t(x)\hat{\sigma}_t^2,$$

où

$$\pi_t(x^3) = E(X_t^3 \left| \mathcal{F}_t^Y \right.), \ \ et \ \hat{\sigma}_t^2 = \pi_t(x^2) - \pi_t(x)^2.$$

Donc

$$\pi_t(x^3) = \pi_t(x)^3 + 3\pi_t(x)\pi_t(x^2) - 3\pi_t(x)^3. \tag{3.6}$$

Nous dériverons les équations 3.4 et 3.5 pour obtenir

$$\begin{aligned} d\pi_t(x) &= b\pi_t(x)dt + h\left\{\pi_t(x^2) - \pi_t(x)^2\right\}\left(dY_t - h\pi_t(x)dt\right), \\ d\pi_t(x^2) &= \left\{f^{\ 2} + 2b\pi_t(x^2)\right\}dt + \left\{h\pi_t(x^3) - h\pi_t(x)\pi_t(x^2)\right\}\left(dY_t - h\pi_t(x)dt\right). \end{aligned}$$

Maintenant, nous sommes prêts à calculer

$$\begin{aligned} d\hat{\sigma}_t^2 &= d(\pi_t(x^2) - \pi_t(x)^2) \\ &= d(\pi_t(x^2)) - 2\pi_t(x)d\pi_t(x) - d\left\langle \pi(x)\right\rangle_t \\ &= \left\{f^{\ 2} + 2b\pi_t(x^2)\right\}dt + \left\{h\pi_t(x^3) - h\pi_t(x)\pi_t(x^2)\right\}\left(dY_t - h\pi_t(x)dt\right) \\ &- 2\pi_t(x)\left\{b\pi_t(x)dt + h\left\{\pi_t(x^2) - \pi_t(x)^2\right\}\left(dY_t - h\pi_t(x)dt\right)\right\} \\ &- h^2\left(\pi_t(x^2) - \pi_t(x)^2\right)^2 dt. \end{aligned}$$

D'après 3.6

$$\begin{aligned} d\hat{\sigma}_t^2 &= \left\{f^{\ 2} + 2b\pi_t(x^2)\right\}dt - 2b\pi_t(x)^2dt - h^2(\pi_t(x^2) - \pi_t(x)^2)^2dt \\ &= \left\{f^{\ 2} + 2b(\pi_t(x^2) - \pi_t(x)^2) - h^2(\pi_t(x^2) - \pi_t(x)^2)^2\right\}dt. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Comme $\hat{\sigma}_t^2 = \pi_t(x^2) + \pi_t(x)^2$*, l'équation 3.7 sera transformée en* ***équation de Riccati***

$$\frac{d\hat{\sigma}_t^2}{dt} = f^{\ 2} + 2b\hat{\sigma}_t^2 - h^2(\hat{\sigma}_t^2)^2. \tag{3.8}$$

D'autres termes, la variance conditionnelle $\hat{\sigma}_t^2$*, solution de 3.8, est une déterministe fonction de* t*. Encore une fois, nous rappelons l'équation linéaire de la moyenne conditionnelle*

$$d\pi_t(x) = b\pi_t(x)dt + h\left\{\pi_t(x^2) - \pi_t(x)^2\right\}(dY_t - h\pi_t(x)dt).$$

Ou

$$d\hat{X}_t = b\hat{X}_t dt + h\hat{\sigma}_t^2(dY_t - h\hat{X}_t dt). \tag{3.9}$$

Nous reconnaissons à travers cette dernière relation 3.9, l'équation du ***filtre de Kalman-Bucy*** *dont la solution est donnée par*

$$\hat{X}_t = e^{(b-h)t}\hat{X}_0 + \int_0^t e^{(b-h)(t-s)}h\hat{\sigma}_s^2 dY_s. \tag{3.10}$$

Conclusion

Ce travail de recherche est consacré sur l'étude de la théorie du filtrage stochastique non linéaire dans le cas continu et unidimensionnelle, pour cela, on a commencé par une généralité sur les outils mathématiques nécessaires ensuite on a défini le filtrage stochastique et on a donné une présentation détaillée sur les équations de ce problème . De façon spéciale, nous sommes intéressés à trouver une solution de notre problème à partir de résoudre ses équations. Dans ce cas, le filtre est une solution d'une équation non linéaire aux dérivées partielles stochastiques.

Bibliographie

[1] Ammari,Z.(2017).ED1-Equation différentielle. Université de Rennes

[2] Bain, A. and Crisan D. (2009). Fundamentals of Stochastic Filtering. Springer.

[3] Bain, A. (2007). Stochastic calculus. Cambridge university.

[4] Gasbarra, D. (2010). Lecture notes in stochastic analysis.University of Helsinki.

[5] Hafayed, M.(2018). Cours de probabilité approfondée. Université de Mohamed Khider Biskra.

[6] Jazwinski, A. H.(1970). Stochastic Process and Filtering Theory. Analytical Mecanics Associates. Inc Seabook. Maryland Academic Pres. New York and London.

[7] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique master 2IF EVRY.

[8] Khelfallah, N.(2019). Théorie générale des processus stochastiques.Université de Mohamed Khider Biskra.

[9] Lambert,A.(2013).Théorie de la mesure et intégration.Université Piere et Marie Curie (Paris 6).

[10] Labed, B. (2019). Mouvement brownien et calcul stochastique.Université de Mohamed Khider Biskra.

[11] Lipster R. S., Shirayev A.N.(1977). Statistics Of Random Processes I. General Theory . Springer.

[12] Oksendal, B. (2000). Stochastic Differential Equations. An Introduction With Applications. First Edition,Springer. New York.

[13] Xiong, J. (2008). An Introduction to Stochastic Filtering Theory.University of Tennessee.

Annexe A : Equation différentielle de Riccati

Équation différentielle de Riccati

D'après [1, p.18] on a donné cette petite étude sur l'équation différentielle de Riccati.

Définition : Tout équation de la forme :

$$y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^2(x) = 0,$$

est appelée **l'équation différentielle de Riccati.**

Méthode Résolution

Pour la résolution de cette équation **(EDR),** il faut connaitre une solution particulière on le note par ψ. On pose

$$u(x) = y(x) - \psi(x).$$

On sait que y et ψ sont solutions de l'EDR donc on a :

$$\begin{aligned}
[y(x)-\psi(x)]' + g(x)[y(x)-\psi(x)] + h(x)\left[y^2(x)-\psi^2(x)\right] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)[y(x)-\psi(x)][y(x)+\psi(x)] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[y(x)+\psi(x)] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[y(x)+\psi(x)+\psi(x)-\psi(x)] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[y(x)-\psi(x)+2\psi(x)] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[u(x)+2\psi(x)] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)u(x) + 2h(x)u(x)\psi(x) &= 0 \\
u'(x) + [g(x)+2h(x)\psi(x)]\,u(x) + h(x)u(x)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

On remarque que cette dernière est **une équation de Bernoulli**, sa méthode de résolution a été expliquée en détail dans [1, p.17].

Exemple : On définit l'équation :

$$x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0,$$

qui est une **EDR** dont une solution particulière

$$y_p = \psi = -x^2.$$

Annexe B : Théorème de Radon-Nikodym

Définition : Une mesure sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ est une application

$$\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty] \,,$$

qui satisfait :

i) $\alpha(\varnothing) = 0$.

ii) $\sigma-$additive : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,

$$\alpha(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(A_n).$$

Définition : Soit α et β deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$. On dit que β est absolument continue par rapport à α, et on note $\beta \ll \alpha$, si pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\alpha(A) = 0 \Longrightarrow \beta(A) = 0.$$

Théorème(De Radon-Nikodym) : Soient α et β deux mesures σ-finies sur $(E, \mathcal{A})$ telles que $\beta \ll \alpha$. Alors il existe une fonction mesurable :

$$f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+)),$$

unique à un ensemble α-négligeable prés, telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\beta(A) = \int_E \mathbf{1}_A f \, d\alpha.$$

Preuve. Voir le [9, p.38]. ■

Notations

Les différentes notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliqués ci-dessous :

P	:	la mesure de probabilité.
C^k $(k = 1, 2)$	:	la classe des fonctions $k-$ fois continuement dérivables.
L^1	:	l'espace (des classes d'équivalence) des variables aléatoires intégrables $(E\|X\| < \infty)$.
L^2	:	l'espace (des classes d'équivalence) des variables aléatoires de carré intégrable $(E\|X\|^2 < \infty)$.
$\mathcal{B}(.)$	:	la tribu borélienne sur .
$\sigma(.)$	:	la tribu engendrée par .
$\|.\|$	:	la valeur absolue de .
$\\|.\\|$	:	norme.
$E_*(.)$	:	l'espérance par rapport à la loi $*$.
$C(.)$	:	l'espace des fonctions rélles continues sur.
L^2_{loc}	:	l'ensemble des processus addapté càglàd vérifiant $\mathbb{E}(\int_0^t \theta_s^2(w)ds) < \infty, \forall t \in \mathbb{T}$.
$\mathcal{M}^{2,c}_{loc}$	:	toutes les martingales localement continues et de carré intégrables.
$\mathcal{L}(Z, T\ )$	:	la fermeture en $L^2(\Omega, P)$ de toutes les combinaisons linéaires.
C_b^2	:	la classe des fonctions deux fois continuement différentiables et bornées.

Les abréviations utilisées dans ce mémoire sont :

$P{-}p.s$	:	presque sûrement pour la mesure de probabilité P.
$i.e$	:	c'est à dire.
EDR	:	équation différentielle de Riccati.

Résumé

L'objet de ce travail porte sur le filtrage stochastique non linéaire. Dans quelques cas, un certain processus ne peut être mesurer directement. On peut l’estimer par un autre processus observable associé. De telle estimation du processus s’appelle filtre.

Mots-clés : Filtrage stochastique, Estimation, Processus stochastique, Equation de Zakai, Filtre de Kalman-Bucy, Equation différentielle stochastique, Equation de Kushner-Stratonovich, Théorème de Girsanov.

Abstract

The object of this work concerns nonlinear stochastic filtering. In some cases, a certain process cannot be directly measured. It can be estimated by another associated observable process. Such an estimate of the process is called a filter.

Keywords: Filtrage stochastique, Estimation, Processus stochastique, Equation de Zakai, Filtre de Kalman-Bucy, Equation différentielle stochastique, Equation de Kushner-Stratonovich, Théorème de Girsanov

ملخص

الهدف من هذا العمل يتعلق بالترشيح العشوائي غير الخطي. في بعض الحالات، لا يمكن قياس عملية معينة بشكل مباشر. يمكن تقديره من خلال عملية أخرى يمكن ملاحظتها. مثل هذا التقدير للعملية يسمى مرشح.

الكلمات المفتاحية: ترشيح عشوائي, تقدير, عملية عشوائية, معادلة زكاي, مرشح كلمان-بوسي, معادلة تفاضلية عشوائية, معادلة كوشنر-سترتونوفيتش, مبرهنة غيرسانوف.