

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Arras Saoussen

Titre :

Processus de Lévy

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	Khalfallah Nabil	UMKB	Président
Dr.	Bougherara Saliha	UMKB	Encadreur
Dr.	Zouzou Akila	UMKB	Examineur

Septembre 2020

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

À mes chers parents, qui ont toujours été à là pour moi,
à l'homme, qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences,
à mon adorable mère, qui je dois ma vie et mon succès.

À mon cher frère : Faouzi.

À mes belles sœurs : Bouthaina, Safa et Alaâ Rahman.

À ma chère amie : Mansouri Fouzia,
à mes collègues de la promotion 2020 de la spécialité Mathématiques,
pour leurs soutien moral et leur encouragement.

REMERCIEMENTS

Par ces quelques lignes, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de ce mémoire, en espérant n'avoir oublié personne...

D'abord à remercier **ALLAH** maître des cieux et de terre, qui nous a permis de mener à bien ce travail de nous avoir donné la fois et de nous avoir permis d'en arriver là.

Je remercie très chaleureusement mon encadreur

<<**Dr. BOUGHERARA Saliha**>>

pour ses conseils et ses commentaires fort utiles qui ont fortement enrichi ma formation, et pour son précieux encouragement tout au long de ce travail.

Je suis honoré de pouvoir remercier les membres de mon jury d'avoir évalué ce travail

<<**Pr. KHALFALLAH Nabil**>> et <<**Dr. ZOUZOU Akila**>>.

Je tiens aussi à remercier notre chef du département de mathématique

<<**Dr. HAFAYED Mokhtar**>>,

et les enseignant qui ont participés à notre formation,

et tous les enseignants du département de mathématiques de l'université Mohamed Kheider.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	ii
Table des figures	v
Introduction	1
1 Généralités sur les processus stochastiques	3
1.1 Fonction mesurable	3
1.2 Variables aléatoires	5
1.2.1 Espérance	6
1.3 Processus stochastiques	9
1.3.1 Filtration et Temps d'arrêt	14
1.3.2 Martingales	16
2 Processus de Lévy	19
2.1 Définitions et exemples	19
2.2 Exemples de processus de Lévy	24
2.2.1 Mouvement Brownien (MB)	24

2.2.2 Processus de Poisson	32
Conclusion	41
Bibliographie	42
Annexe A : Abréviations et Notations	43
Annexe B : Rappel	44

Table des figures

1.1 Espérance conditionnelle comme projection orthogonale	8
1.2 Processus stochastique	10
2.1 Mouvement Brownien	24
2.2 Simulation d'un processus de Poisson	33

Introduction

Le processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps d'une manière aléatoire. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique, en biologie (évolution génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux de l'internet, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économique et financier. Dans ce dernier, nous avons utilisés les processus de Lévy.

Le terme “**Processus de Lévy**” honore le travail du Mathématicien Français “**Paul Lévy**”, qui bien que n'étant pas le seul dans sa contribution, il a joué un rôle déterminant en réunissant la compréhension et la caractérisation des processus avec des incréments dépendants stationnaires. Dans 1940s, Lévy lui-même les désignait comme une sous-classe de processus additifs, c'est-à-dire des processus ont des incréments indépendants. Ils comprennent un certain nombre de processus très importants en tant que cas spéciaux, notamment le mouvement Brownien le processus de Poisson, le processus stables et auto-décomposables et les subordinés, les deux premiers sont les plus connus et courants dans la nature et la vie quotidienne, que nous étudierons dans ce qui suit :

- Premièrement, le phénomène naturel et l'objet mathématique le mouvement Brownien est le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide. Il a été observé dès le 18^{ème} siècle, sinon avant. L'objet mathématique est un processus gaussien dont la variance des accroissements est égale au temps écoulé. Le champ d'application du MB est beaucoup plus vaste que l'étude des particules microscopiques en suspension, il

permet de décrire le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), il est utilisé aussi dans la modélisation du bruit thermique dans les circuits électriques, etc.

- Deuxièmement, le processus de Poisson, et il est nommé d'après le mathématicien français "Siméon Denis Poisson", le processus de Poisson est un modèle de comptage d'évènements aléatoires isolés dans le temps, comme des "tops" d'horloge séparés par des durées aléatoires. En langage non mathématique, un processus de Poisson dans le temps est le processus qui est souvent le mieux adapté pour expliquer un processus "d'arrivées", ce dernier mot étant pris au sens large. En effet, une arrivée peut être une panne se produisant sur une machine, un coup de téléphone arrivant à un standard, un client accédant à un guichet... tous ces arrivées ont des sauts de taille 1, mais les arrivées d'avion dans un aéroport, les arrivées de clients aux caisses d'un supermarché son taille du sauts sont des variables i.i.d. d'une loi donnée, ce type des processus constitue les processus de Poisson composées, ces processus sont utilisés pour modéliser des temps d'arrivée aléatoires aussi (comme les processus de Poisson simples), sont constant par morceaux qui saute aux instants de sauts d'un processus de Poisson standard, et c'est ce qui le distingue.

Après cette introduction générale, ce mémoire est organisé comme suit :

- ◁ **Le premier chapitre**, on commence par un rappel des notions de base : la tribu et les variables aléatoires (l'indépendance, l'espérance...). Ainsi, on étudier le processus stochastique avec certaines idées comme la filtration, le temps d'arrêt et les martingales.
- ◁ **Le deuxième chapitre**, après avoir donné les définitions du processus stochastiques on vu le processus de Lévy (l'objectif de ce mémoire) et étudié comme une loi infiniment divisible, piu présenter la Formule de Lévy-Khintchine. En plus, on donne deux exemples : le mouvement Brownien et le processus de Poisson.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

Dans ce premier chapitre on donne des définitions des mesures, puis on donne des notions générales sur les variables aléatoires... Enfin, on rappelle aussi la définition de processus stochastique et leurs concepts comme le temps d'arrêt et les martingales.

1.1 Fonction mesurable

Définition 1.1.1 : (*Tribu*) On appelle tribu (ou σ -algèbre) sur E un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ tel que :

- i) $E \in \mathcal{A}$;
- ii) \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire :

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = E \setminus A \in \mathcal{A};$$

- iii) \mathcal{A} est stable par réunion dénombrable :

$$A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Définition 1.1.2 : *On dit alors que (E, \mathcal{A}) est un espace mesurable, et les éléments de \mathcal{A} sont appelés les ensembles mesurables.*

Exemple 1.1.1 :

1. $\{\phi, E\}$ est une tribu (parfois appelée la tribu grossière).
2. $\mathcal{P}(E)$ est une tribu (parfois appelée la tribu triviale).

Définition 1.1.3 : (*Tribu engendrée*) Soit $\varepsilon \subset \mathcal{P}(E)$ quelconque. L'ensemble de parties :

$$\sigma(\varepsilon) := \bigcap_{\mathcal{A} \text{ tribu } \supseteq \varepsilon} \mathcal{A}$$

est une tribu, c'est la plus petite tribu contenant ε . On l'appelle tribu engendrée par ε .

Exemple 1.1.2 : (*Tribu borélienne*)

1. La tribu engendrée par les intervalles ouverts de \mathbb{R} est appelée tribu borélienne, et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. On définit :

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}.$$

La tribu borélienne $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ de $\bar{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par les intervalles ouverts de \mathbb{R} et les ensembles de la forme $[-\infty, a[$, $]a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.1 : (*Fonction mesurable*) Soit (E_1, \mathcal{A}_1) et (E_2, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables. Une fonction :

$$f : E_1 \longrightarrow E_2$$

est dite mesurable si :

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{A}_1 \quad \text{pour tous } V \in \mathcal{A}_2.$$

Définition 1.1.4 : (*Probabilité*) Soit Ω un ensemble muni d'une tribu \mathcal{A} .

Une probabilité \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{A}) est une application :

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1],$$

vérifiant les propriétés suivantes :

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

ii) (σ -additivité). Si les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de \mathcal{A} deux-à-deux disjoints, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

Définition 1.1.5 : Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est alors appelé un espace de probabilité.

1.2 Variables aléatoires

Définition 1.2.1 : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (E, ε) un espace mesurable. On appelle variable aléatoire de Ω vers E , toute fonction mesurable X de Ω vers E :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow E \\ \omega &\mapsto X(\omega). \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1 :

1. (**Variable aléatoire discrète**) : On jette deux dés distincts et on s'intéresse au plus grand chiffre X obtenu. On a alors :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \max(\omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

avec :

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}.$$

La variable X est à valeurs dans $\{1, 2, \dots, 6\}$.

2. (**Variable aléatoire continue**) : On observe deux bactéries et on s'intéresse à la durée

de vie T de la bactérie qui disparaîtra la première. L'ensemble fondamental est :

$$\Omega = [0, +\infty[\times [0, +\infty[.$$

La variable T s'écrit alors :

$$\begin{aligned} T : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \inf \{ \omega_1, \omega_2 \}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.2 : Un vecteur $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ est gaussien si toute combinaison linéaire :

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i$$

est une variable gaussienne à valeurs réelles.

Définition 1.2.3 : Une variable aléatoire X est indépendante d'une sous-tribu \mathcal{G} si les tribus $\sigma(X)$ et \mathcal{G} sont indépendantes.

Proposition 1.2.1 : Deux variables (X, Y) sont indépendantes si les tribus $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont indépendantes.

1.2.1 Espérance

Définition 1.2.4 : L'espérance d'une variable aléatoire X est notée $\mathbb{E}[X]$. Elle représente la valeur moyenne prise par la variable X .

i) Si X est une variable discrète à valeurs dans $D = \{x_1, \dots, x_n\}$, son espérance est :

$$\mathbb{E}[X] = x_1 \mathbb{P}(X = x_1) + \dots + x_n \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

ii) Si X est une variable discrète à valeurs dans l'ensemble infini $D = \{x_i : i \geq 1\}$, lorsque

la somme est bien définie, son espérance est :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

iii) Si X est une variable continue à densité f , lorsque l'intégrale est bien définie, son espérance est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (1.1)$$

Définition 1.2.5 : La variance d'une variable aléatoire X , notée $\text{Var}(X)$, est définie par :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^2. \quad (1.2)$$

Exemple 1.2.2 : Supposons que la durée de vie T d'une bactérie est modélisée par la loi exponentielle de densité :

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

pour une certaine valeur de λ . Alors :

1. D'après (1.1) sa durée de vie moyenne est :

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda}.$$

2. D'après (1.2) la variance de la durée de vie de la bactérie étudiée est :

$$\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit Y une v.a.réel (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et \mathcal{G} est sous tribu de \mathcal{A} .

Définition 1.2.6 : L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$ de Y quand \mathcal{G} est l'unique variable :

i) \mathcal{G} -mesurable ;

ii) Telle que :

$$\int_A \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

• C'est aussi l'unique variable \mathcal{G} -mesurable telle que :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] Z] = \mathbb{E}[Y Z],$$

pour toute variable Z , \mathcal{G} -mesurable bornée.

• Il en résulte que si Y est de carré intégrable, $\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$ est la projection de Y sur l'espace des variables aléatoires \mathcal{G} -mesurables, de carré intégrable, c'est-à-dire la variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable qui minimise $\mathbb{E}[(Y - Z)^2]$ parmi les v.a. Z , \mathcal{G} -mesurable.

Graphique :

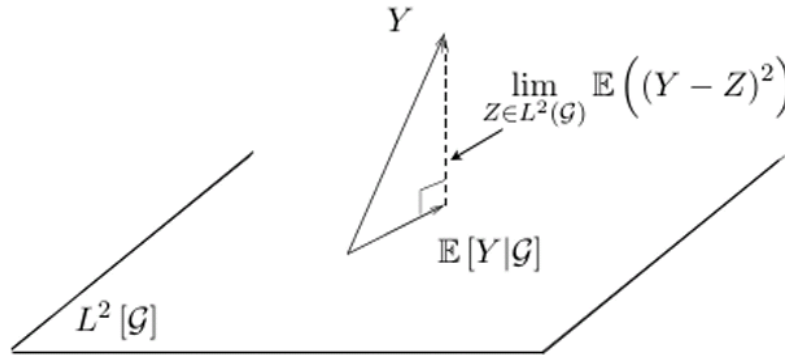


FIG. 1.1 – Espérance conditionnelle comme projection orthogonale

Proposition 1.2.2 : On a les propriétés suivantes :

a) $Y = a$ constante réelle $\Rightarrow \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] = a$.

- b) $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{G}]$ est linéaire.
- c) $Y \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] \geq 0$.
- d) $Y \geq Z \Rightarrow \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[Z | \mathcal{G}]$.
- e) $|\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]| = \mathbb{E}[|Y| | \mathcal{G}]$.
- f) Soient \mathcal{G} et \mathcal{H} deux sous-tribus de \mathcal{A} telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Alors on a :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y | \mathcal{H}] | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y | \mathcal{H}].$$

1.3 Processus stochastiques

On va s'intéresser à des phénomènes dépendant du temps. Ce qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu \mathcal{A}_t , c'est l'information à la date t .

Définition 1.3.1 : (*Processus stochastique*) Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble \mathbb{T} .

- En général $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}_+ et on considère que le processus est indexé par le temps t .
- Si \mathbb{T} est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $\mathbb{T} \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.

Définition 1.3.2 : Un processus dépend de deux paramètres, $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

- i) Pour $t \in \mathbb{T}$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- ii) Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathbb{T} \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus X .

Graphique :

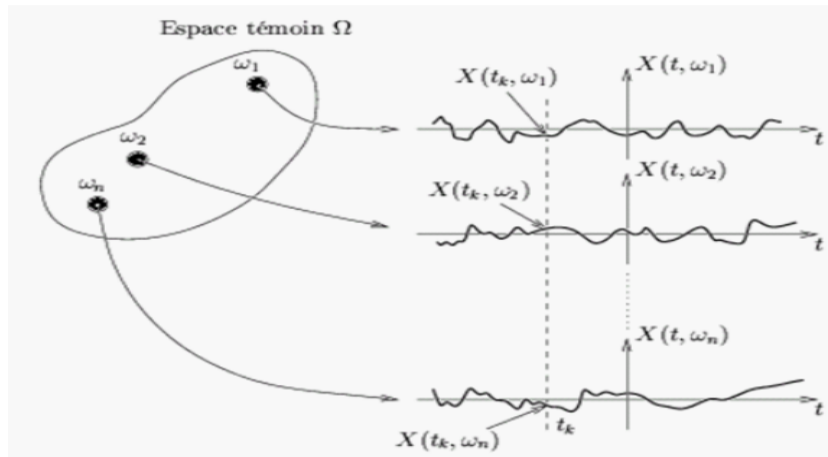


FIG. 1.2 – Processus stochastique

Exemple 1.3.1 : On considère une séquence infinie de tirage (pile ou face) de Bernoulli. Ces tirages sont supposés indépendants. L'ensemble des résultats possibles est :

$$\Omega = \left\{ (\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i = \begin{cases} P \\ F \end{cases} \right\},$$

où

$$\mathbb{P}(P) = p, \quad \mathbb{P}(F) = q = 1 - p, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit des variables aléatoires X_n comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = P \\ 0 & \text{si } \omega = F, \end{cases}$$

donc : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus défini par :

1. X_1, X_2, \dots indépendantes.
2. $\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \mathbb{P}(X_n = 0) = q, p + q = 1.$

Définition 1.3.3 : Un processus X est gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t)_{t \geq 0}$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si :

$$\forall n, \quad \forall t_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \forall a_i, \quad \sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} \quad \text{est une v.a.r. gaussienne.}$$

Définition 1.3.4 : On dit que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est continu (ou à trajectoires continues) si les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω .

Définition 1.3.5 : Un processus est dit càdlàg si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche pour presque tout ω .

Définition 1.3.6 : Un processus est dit càglàd si ses trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limites à droite pour presque tout ω .

Définition 1.3.7 : (**Egalités de processus**)

i) Deux processus X et Y ont même lois s'ils ont même lois fini-dimensionnelles :

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{T}$,

$$X_{t_1}, \dots, X_{t_p} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_{t_1}, \dots, Y_{t_p}.$$

On écrira :

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y.$$

ii) On dira que Y est une version (ou une modification) du processus X si pour tout $t \in \mathbb{T}$,

on a :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

iii) Deux processus X et Y sont dit indistinguables s'il existe $\mathcal{N} \in \mathcal{A}$ négligeable tels que,

pour tout $\omega \notin \mathcal{N}$, on a :

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T},$$

de façon un peu abusive (parce que $\{X_t = Y_t : \forall t \in \mathbb{T}\}$ n'est pas nécessairement un événement), on écrit :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T}) = 1.$$

Proposition 1.3.1 : *Indistinguishable \Rightarrow modification \Rightarrow même lois fini-dimensionnelles.*

Exemple 1.3.2 :

1. Soit $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et pour tout t : $X_t = N$, $Y_t = -N$. Alors $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ ont même lois fini-dimensionnelles tandis que :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = \mathbb{P}(2N = 0) = 0,$$

i.e. X, Y ne sont pas version l'un de l'autre.

2. Soit l'espace de probabilité $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ et $\mathbb{T} = [0, 1]$. Considérons D la diagonale de $[0, 1] \times [0, 1]$ et définissons :

$$X(t, \omega) = 0, \quad \forall(t, \omega), \quad Y(t, \omega) = \mathbf{1}_D(t, \omega).$$

Pour t fixé, on a :

$$X(t, \omega) = 0 \quad \text{et} \quad Y(t, \omega) = \mathbf{1}_{\{t\}}(\omega).$$

On a donc :

$$X(t, \omega) = Y(t, \omega) \quad \text{pour tout} \quad \omega \neq t,$$

c'est à dire presque sûrement : les processus X, Y sont versions l'un de l'autre.

Pourtant,

$$\mathbb{P}(\{\omega : X(t, \omega) = Y(t, \omega), \forall t \in [0, 1]\}) = 0,$$

les processus X et Y ne sont pas indistinguishables.

Corollaire 1.3.1 : *Soit X et Y deux processus stochastiques càdlàg. Si X est une modification de Y , alors X et Y sont indistinguishables.*

Définition 1.3.8 :

i) Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est dit à variation bornée sur $[0, t]$ si :

$$\sup_{t_i} \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leq K,$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

ii) Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est dit à variation finie sur $[0, t]$ si :

$$\sup_{t_i} \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leq \infty,$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

Définition 1.3.9 : Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est appelé processus croissant si de plus ces trajectoires sont croissantes.

Définition 1.3.10 : Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ tel que $X_0 = 0$ est à accroissements indépendants si pour tout suite fini $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables aléatoires :

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

Définition 1.3.11 : Un processus à accroissements indépendants est à accroissements stationnaires si la loi de l'accroissement :

$$X_{t+s} = X_t,$$

ne dépend pas de t , pour tout $t \geq 0$.

Exemple 1.3.3 : ($\mathbb{T} = \mathbb{N}$) Soit $(X_t)_{t \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On considère :

$$S_t = \sum_{i=1}^t X_i,$$

le processus discret des sommes partielles. On parle de marche aléatoire. Alors $(S_t)_{t \geq 1}$ est un processus à accroissements indépendants. Si en plus les variables aléatoires :

$$X_t, \quad \forall t \geq 1$$

sont de même loi (les variables aléatoires sont i.i.d.), le processus est à accroissements indépendants et stationnaires.

Définition 1.3.12 : (*Lois infiniment divisibles*) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d de loi μ_X . On dit que X est infiniment divisible si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des variables aléatoires i.i.d. $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$ telles que :

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}.$$

1.3.1 Filtration et Temps d'arrêt

Définition 1.3.13 : (*Filtration*)

i) Une filtration est une famille croissante de sous tribus de \mathcal{F} , telle que :

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \text{pour tout } s \leq t.$$

ii) On interprète \mathcal{F}_t comme l'information antérieure au temps t , plus le temps croît ($s \leq t$) plus on a des informations ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$).

Définition 1.3.14 : Le quadruple $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ est dit espace de probabilité filtré.

Définition 1.3.15 : Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit adapté si pour tout $t \geq 0$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Définition 1.3.16 : L'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ est dit complet si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

Définition 1.3.17 : On dit qu'un espace de probabilité complet filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ satisfait les hypothèses usuelles si :

i) \mathcal{F}_0 contient tous les ensembles \mathbb{P} -nuls de \mathcal{F} ;

ii) Et on a :

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u, \quad \text{pour tout } 0 \leq t < \infty,$$

c'est-à-dire que la filtration \mathcal{F} est continue à droite.

Proposition 1.3.2 : Si la filtration est complète et si $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus \mathcal{F} -adapté, alors toutes modifications de X est encor \mathcal{F} -adapté.

Définition 1.3.18 :

i) On appelle tribu prévisible et on note \mathcal{P} , la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendré par les processus X de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans \mathbb{R} , adaptés continue à gauche en tout $t > 0$ (càg).

ii) Un processus mesurable de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dit prévisible.

Définition 1.3.19 : (**Temps d'arrêt**) Une variable aléatoire T est un temps d'arrêt si l'évènement :

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{pour tout } 0 \leq t < \infty.$$

Exemple 1.3.4 : Si T est constante presque sûrement, alors c'est un temps d'arrêt.

Proposition 1.3.3 : Si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration continue à droite alors T est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt ssi :

$$\text{pour tout } t \geq 0, \quad \{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Preuve. C'est suffisant car :

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{\varepsilon \geq 0} \{T < t + \varepsilon\} \in \bigcap_{\varepsilon \geq 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t.$$

Et c'est nécessaire car :

$$\{T < t\} = \bigcup_{\varepsilon \geq 0} \{T \leq t - \varepsilon\} \in \mathcal{F}_t,$$

puisque $\{T \leq t - \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t-\varepsilon} \subset \mathcal{F}_t$. ■

1.3.2 Martingales

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable.

Définition 1.3.20 : Un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ adapté par rapport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et tel que pour tout $t \geq 0$, $M_t \in L^1$ est appelé :

i) Une martingale si pour $s \leq t$:

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s.$$

ii) Une sur-martingale si pour $s \leq t$:

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s.$$

iii) Une sous-martingale si pour $s \leq t$:

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s.$$

Exemple 1.3.5 : Si X est un processus à accroissement indépendants avec $X_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$ et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle. Alors :

$$(X_t - \mathbb{E}[X_t]), \quad t \geq 0$$

est une \mathcal{F}_t^X -martingale.

Théorème 1.3.1 : Soit M sur-martingale continue à droite (resp. martingale), et soit S et T deux temps d'arrêt bornés tels que $S < T$. Alors M_S et M_T sont intégrables et :

$$M_S \geq \mathbb{E}[M_T \mid M_S] \quad p.s. \quad (\text{resp. } =)$$

Théorème 1.3.2 : (*Théorème des processus arrêtés*) Si M est une martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale) et T un temps d'arrêt, alors le processus arrêté :

$$M_T = (M_{T \wedge n})_{n \geq 0}$$

est aussi une martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale).

Preuve. Démonstration du théorème de sur-martingales arrêtées on a juste à montrer le théorème pour M sur-martingale puisque M sous-martingale équivaut à $-M$ sur-martingale et M est une martingale ssi c'est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale.

1) M_T est \mathcal{F}_n -mesurable car :

$$M_{T \wedge n}(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(\omega) \mathbf{1}_{T(\omega)=k} + M_n(\omega) \mathbf{1}_{\{T(\omega) \geq n\}}.$$

C'est une somme de variables aléatoires \mathcal{F}_n -mesurables.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{T \wedge n}$ est intégrable car :

$$|M_{T \wedge n}| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |M_k| \right) + |M_n|.$$

3) On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{T \wedge n} \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[M_k \mathbf{1}_{T=k} \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{T \geq n} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{T=k} \mathbb{E}[M_k \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbf{1}_{T \geq n} \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{T=k} M_k + \mathbf{1}_{T \geq n} M_{n-1} = M_{T \wedge n-1}. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.3.4 : (*Décomposition de Doob*) Soit $(X_t)_t$ un processus aléatoire intégrable. Alors il existe une martingale $(M_t)_t$ et un processus \mathcal{F} -prévisible $(V_t)_t$, tels que :

$$M_0 = V_0 = 0,$$

et

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

De plus, cette décomposition est unique.

Définition 1.3.21 : On dit qu'un processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt $(T_t)_t$ telle que :

$$T_t \rightarrow \infty, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

et le processus arrêté M^{T_t} est une martingale pour tout t .

Définition 1.3.22 : Une semi-martingale est un processus

$$X = X_0 + A + M,$$

où A est un processus à variation finie, X_0 est une variable \mathcal{F}_0 -mesurable et M est une martingale locale, ces deux derniers processus étant issus de 0.

Conclusion 1.3.1 : Les processus stochastiques sont des phénomènes réels. D'après ces définitions, on va décrire dans le chapitre suivant un processus à des trajectoires continues et indépendantes stationnaires appelé "**Processus de Lévy**".

Chapitre 2

Processus de Lévy

Dans ce deuxième chapitre, on présente le processus de Lévy avec ses propriétés et donne deux exemples : le mouvement Brownien et le processus de Poisson.

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1 : Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit être un processus de Lévy s'il possède les propriétés suivantes :

- i) Les trajectoires de X sont \mathbb{P} -presque sûrement continue à droite avec limites à gauche ;
- ii) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$;
- iii) Pour $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ est égal en distributions à X_{t-s} ;
- iv) Pour $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $(X_u, u \leq s)$.

Remarque 2.1.1 : La propriété (iv) s'appelle propriété des accroissements indépendants, et la propriété (iii) s'appelle stationnarité.

Lemme 2.1.1 : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy sur \mathbb{R} . Si $\text{Var}(X_1) < \infty$, alors $\text{Var}(X_t) < \infty$ pour tout $t > 0$ et

$$\mathbb{E}[X_t] = t\mathbb{E}[X_1] := t\mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_t) = t\text{Var}(X_1) := t\sigma^2.$$

Preuve. Si on a : $\text{Var}(X_1) < \infty$, alors $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ avec l'identité de Bienaymé, on obtient :

$$\text{Var}(X_m) = \sum_{k=0}^{k=m} \text{Var}(X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=0}^{k=m} \text{Var}(X_{k-k+1}) = m \text{Var}(X_1),$$

et

$$\text{Var}(X_1) = n \text{Var}\left(X_{\frac{1}{n}}\right),$$

d'après la condition (iii). En particulier,

$$\text{Var}(X_m), \text{Var}\left(X_{\frac{1}{n}}\right) < \infty,$$

ceci, et un argument similaire pour l'attente, on montre :

$$\text{Var}(X_q) = q \text{Var}(X_1) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X_q] = q \mathbb{E}[X_1] \quad \text{pour tous } q \in \mathbb{Q}^+.$$

De plus

$$\text{Var}(X_q - X_r) = \text{Var}(X_{q-r}) = (q - r) \text{Var}(X_1) \quad \text{pour tous } r < q \in \mathbb{Q}^+,$$

et cela montre que :

$$X_q - \mathbb{E}[X_q] = X_q - q\mu,$$

converge dans L^2 si $q \rightarrow t$. Puisque $t \mapsto X_t$ est continue en probabilité, nous pouvons identifier la limite et trouver :

$$X_q - q\mu \rightarrow X_t - t\mu.$$

En conséquence,

$$\text{Var}(X_t) = t\sigma^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X_t] = t\mu.$$

■

Proposition 2.1.1 : *Si X est un processus de Lévy, alors X_t est une loi infiniment divisible pour tout $t \geq 0$.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des v.a. (i.i.d.) $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$. On peut écrire :

$$X_t = X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \dots + X_n^{(n)} = \sum_{k=1}^n \left(X_{\frac{k}{n}t} - X_{\frac{k-1}{n}t} \right).$$

Pour conclure, on remarque ensuite que les variables :

$$\left\{ X_{\frac{k}{n}t} - X_{\frac{k-1}{n}t}, 1 \leq k \leq n \right\},$$

sont (i.i.d.) par indépendance et stationnarité des accroissements. ■

Corollaire 2.1.1 : *Soit Y une variable aléatoire infiniment divisible. Il existe alors un processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$, tel que $X_1 \sim Y$.*

Proposition 2.1.2 : *Tout processus de Lévy est continu en probabilité :*

$$\forall t \geq 0, \quad \forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) = 0.$$

Théorème 2.1.1 : *Si X est un processus de Lévy, alors :*

$$\forall u \in \mathbb{R}^d : \quad \phi_{X_t}(u) = e^{t\eta(u)},$$

où η est le symbole de Lévy de X_1 .

Preuve. Pour $u \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$, on définit $\phi_u(t) = \phi_{X_t}(u)$.

Comme X est stochastiquement continu, l'application $t \mapsto \phi_u(t)$ est

continue. De plus, comme X est un PAIS, on a pour $t, s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 \phi_u(t+s) &= \mathbb{E} [e^{i(u, X_{t+s})}] \\
 &= \mathbb{E} [e^{i(u, X_{t+s}-X_t)}] \mathbb{E} [e^{i(u, X_t)}] \\
 &= \mathbb{E} [e^{i(u, X_s-X_0)}] \mathbb{E} [e^{i(u, X_t)}] \\
 &= \phi_u(t)\phi_u(s).
 \end{aligned}$$

Comme ϕ_u est continue, elle est nécessairement de la forme $\phi_u(t) = Ce^{ta}$.

Or $\phi_u(0) = 1$, donc :

$$C = 1 \quad \text{et} \quad \phi_u(1) = \mathbb{E} [e^{i(u, X_1)}] = e^{\eta(u)},$$

donc : $a = \eta(u)$. ■

Théorème 2.1.2 : (*Formule de Lévy-Khintchine*)

(1) Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy, il existe un unique triplet (b, c, F) avec $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ et F mesure positive sur \mathbb{R} vérifiant :

$$F(\{0\}) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) F(dx) < +\infty, \quad (2.1)$$

tel que :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E} [e^{iuX_t}] = e^{t\psi_{b,c,F}(u)},$$

où

$$\psi_{b,c,F}(u) = ibu - \frac{u^2c}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}) F(dx).$$

(2) Inversement, pour tout triplet (b, c, F) avec $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ et F mesure positive sur \mathbb{R} vérifiant (2.1), il existe un processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ tel que :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E} [e^{iuX_t}] = e^{t\psi_{b,c,F}(u)}.$$

Proposition 2.1.3 : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ a processus de Lévy dans \mathbb{R}^d . Puis,

$$\mathbb{E} [e^{i\xi X_t}] = [\mathbb{E} e^{i\xi X_1}]^t, \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Preuve. Voir [10]. ■

Proposition 2.1.4 : Si $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique et s'il existe une suite $(X^n = (X_t^n)_{t \geq 0})_n$ de processus de Lévy telle que :

a) X_t^n converge en probabilité vers X_t pour tout $t \geq 0$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_t^n - X_t| > \varepsilon) = 0,$$

alors X est un processus de Lévy.

Théorème 2.1.3 : Tout processus de Lévy admet une modification càdlàg, qui est encore un processus de Lévy avec les mêmes caractéristiques.

Proposition 2.1.5 : Les processus de Lévy càdlàg, leur filtration naturelle satisfait alors les hypothèses usuelles.

Théorème 2.1.4 : (**Propriété de Markov Forte**) Si X est un processus de Lévy et si T est un temps d'arrêt adapté à la filtration \mathcal{F}^X , alors sur $\{T < +\infty\}$:

(1) Le processus $X^T = (X_{t+T} - X_T, T \geq 0)$ est un processus de Lévy indépendant de la tribu \mathcal{F}_T^X .

(2) Pour tout $t \geq 0$, X_t^T a même loi que X_t .

(3) X^T est à trajectoires càdlàg et est F_{T+t} adapté.

Preuve. Voir [9]. ■

2.2 Exemples de processus de Lévy

2.2.1 Mouvement Brownien (MB)

Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t)_{t \geq 0}$ en référence à **Wiener** ou $(B_t)_{t \geq 0}$ en référence à **Brown**.

On se met dans un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 2.2.1 : On dit que $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien (réel, nul en 0), si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i) Les trajectoires $t \mapsto B_t$ sont p.s. continues sur \mathbb{R}_+ .
- ii) $B_0 = 0$, \mathbb{P} -p.s.
- iii) Pour tout $n \geq 2$, et tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}$ sont indépendantes.
- iv) Pour tous $t \geq s \geq 0$, $B_t - B_s$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, t - s)$.

Graphique :

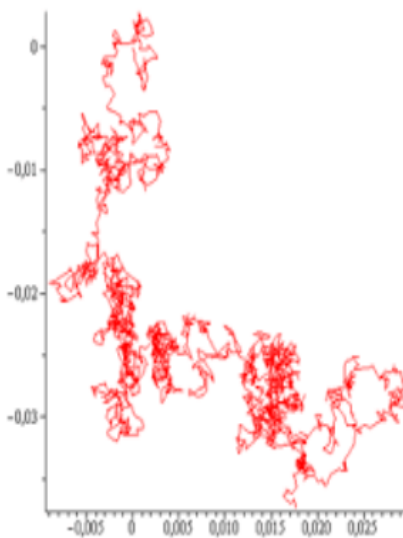


FIG. 2.1 – Mouvement Brownien

Exemple 2.2.1 : Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite.

Pour tout $t \geq 0$, nous posons $X_t = \sqrt{t}Z$. Le processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ a des trajectoires continues et $\forall t \geq 0$, X_t est de loi $\mathcal{N}(0, t)$. Est-ce que X est un mouvement Brownien ? Justifiez votre réponse.

Réponse : Non, puisque pour $0 \leq s \leq t < \infty$:

$$\begin{aligned} \text{Var} [X_t - X_s] &= \text{Var} [\sqrt{t}Z - \sqrt{s}Z] \\ &= (\sqrt{t} - \sqrt{s})^2 \text{Var} [Z] \\ &= t - 2\sqrt{t}\sqrt{s} + s \neq t - s. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1 : (*Propriétés des trajectoires*) Si B un mouvement Brownien, alors presque sûrement, on a :

- a) $t \mapsto B_t(w)$ n'est dérivable en aucun point t .
- b) $t \mapsto B_t(w)$ n'est pas à variation finie en aucun point t .

Théorème 2.2.1 : Soit B un mouvement Brownien. Il existe une modification de B qui a des trajectoires continues p.s.

Proposition 2.2.2 : Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien si et seulement les trajectoires $t \mapsto X_t$ sont p.s. continues et X est un processus gaussien centré de covariance :

$$\mathbb{E} [X_s X_t] = \min\{s, t\} =: s \wedge t, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Preuve.

\Rightarrow) Soient $t \geq s \geq 0$. On a :

$$\mathbb{E} [X_s X_t] = \mathbb{E} [X_s (X_t - X_s)] + \mathbb{E} [X_s^2].$$

L'indépendance entre X_s et $X_t - X_s$, nous dit que :

$$\mathbb{E}[X_s(X_t - X_s)] = 0,$$

tandis que d'après (iii), $\mathbb{E}[X_s^2] = s$. Donc :

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = s.$$

Evidemment, si $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ est quelconque, on a alors par symétrie

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = s \wedge t.$$

⇐) Supposons maintenant que X satisfait les conditions dans la proposition.

Alors : $\mathbb{E}[X_0^2] = 0$, d'où (ii). Soient $t \geq s \geq 0$. La variable aléatoire $X_t - X_s$ suit une loi gaussienne centrée, de variance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] &= \mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - 2\mathbb{E}[X_s X_t] \\ &= t + s - 2s = \\ &= t - s, \end{aligned}$$

d'où iv).

Il reste à prouver iii). Soient $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. On sait que $(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1})$ est un vecteur gaussien. En plus, la matrice de covariances de ce vecteur gaussien est diagonale, car pour $j > i$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})] &= \mathbb{E}[X_{t_j} X_{t_i}] - \mathbb{E}[X_{t_{j-1}} X_{t_i}] - \mathbb{E}[X_{t_j} X_{t_{i-1}}] + \mathbb{E}[X_{t_{j-1}} X_{t_{i-1}}] \\ &= t_i - t_i - t_{i-1} + t_{i-1} = 0. \end{aligned}$$

Alors, les composantes de ce vecteur gaussien sont indépendantes. ■

Proposition 2.2.3 : Si B est un mouvement Brownien, alors les processus suivants sont aussi des mouvements Browniens :

- a) $X_t = -B_t$. (Symétrie).
- b) $s \geq 0$, $X_t = B_{t+s} - B_s$.

Preuve. D'après la définition (2.2.1) on a :

a) Posons : $X_t = -B_t$.

i) $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega) = -B_t(\omega)$ est continue puisque $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

ii) $X_0 = -B_0 = 0$, \mathbb{P} -p.s.

iii) Puisque $X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = B_{t_{k-1}} - B_{t_k}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k$, les variables aléatoires :

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

sont indépendantes, alors $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k$, les variables aléatoires :

$$B_{t_0} - B_{t_1}, B_{t_1} - B_{t_2}, \dots, B_{t_{k-1}} - B_{t_k}$$

sont indépendantes, ce qui implique que :

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

sont indépendantes.

iv) $\forall s, t \geq 0$, tel que $s < t$, $X_t - X_s = (B_s - B_t)$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $t - s$.

b) Posons : $X_t = B_{t+s} - B_s$.

i) $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega) = B_{t+s}(\omega) - B_s(\omega)$ est continue puisque $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

ii) $X_0 = B_{0+s} - B_s = 0$, \mathbb{P} -p.s.

iii) Puisque

$$\begin{aligned} X_{t_k} - X_{t_{k-1}} &= (B_{t_k+s} - B_s) - (B_{t_{k-1}+s} - B_s) \\ &= B_{t_k+s} - B_{t_{k-1}+s}, \end{aligned}$$

et que $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k$, les variables aléatoires :

$$B_{t_1+s} - B_{t_0+s}, B_{t_2+s} - B_{t_1+s}, \dots, B_{t_k+s} - B_{t_{k-1}+s}$$

sont indépendantes, alors $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k$, les variables aléatoires :

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

sont indépendantes.

iv) $\forall u, t \geq 0$, tel que : $u < t$,

$$\begin{aligned} X_t - X_u &= (B_{t+s} - B_s) - (B_{u+s} - B_s) \\ &= B_{t+s} - B_{u+s} \end{aligned}$$

est de distribution normale d'espérance 0 et de variance :

$$(t+s) - (u+s) = t - u.$$

■

Proposition 2.2.4 :

- a) B_t est une martingale.
- b) $B_t^2 - t$ est une martingale.
- c) Pour tout réel α , $\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)$ est une martingale.

Preuve. On a :

- a) B_t est un processus adapté et intégrable, comme il est centré et à accroissements indépendants, alors :

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0.$$

Et

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] - B_s,$$

alors :

$$\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] = B_s.$$

On en déduit le premier point.

- b) Pour démontrer le deuxième, remarquons que :

- **Mesurabilité :** B_t c'est un processus adapté et la fonction qui muni $B_t \mapsto B_t^2 - t$ est continu alors le processus $(B_t^2 - t)$ est adapté.
- **Intégrabilité :** $\forall t \geq 0$:

$$\mathbb{E}[|B_t^2 - t|] \leq \mathbb{E}[B_t^2] + \mathbb{E}|t| = \mathbb{E}[B_t^2] + t = 2 \times t < \infty.$$

La dernière condition est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t^2 - B_s^2) \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] + 2B_s \mathbb{E}[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s], \end{aligned}$$

mais comme $(B_t)_{t \geq 0}$ est une martingale $\mathbb{E}[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s] = 0$, et donc :

$$\mathbb{E}[(B_t^2 - B_s^2) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s].$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du mouvement Brownien permettent de plus d'affirmer que : La dernière égalité est due au fait que B_t suit une loi gaussienne

centrée de variance t .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] \\ &= \mathbb{E}[B_{t-s}^2] \\ &= t - s.\end{aligned}$$

c) On démontre le dernier point remarquons que :

- **Mesurabilité** : B_t c'est un processus adapté et la fonction qui muni :

$$B_t \longmapsto \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)$$

est continu alors le processus $\left(\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right)$ est adapté.

- **Intégrabilité** : $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right|\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right) dx\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2 + (2t\alpha x) - \alpha^2 t^2}{2t}\right) dx\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-(x - (\alpha t))^2}{2t}\right)\right) dx \\ &= 1 < \infty.\end{aligned}$$

Si g est une fonction gaussienne centrée réduit, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(\lambda g)] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\lambda x) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx \\ &= \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).\end{aligned}$$

De plus, si $s < t$,

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t \right) \mid \mathcal{F}_s \right] = \exp \left(\alpha B_s - \frac{\alpha^2}{2} t \right) \mathbb{E} [\exp (\alpha (B_t - B_s)) \mid \mathcal{F}_s].$$

Car X_s est \mathcal{F}_s -mesurable, et comme $B_t - B_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\exp (\alpha (B_t - B_s)) \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} [\exp (\alpha (B_t - B_s))] \\ &= \mathbb{E} [\exp (\alpha B_{t-s})] \\ &= \mathbb{E} [\exp (\alpha g \sqrt{t-s})] \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \alpha^2 (t-s) \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé.

■

Proposition 2.2.5 : Si B_1 et B_2 sont deux Browniens indépendants, alors le produit $B_1 B_2$ est une martingale.

Théorème 2.2.2 : (*Propriété de Markov forte*) Soit B un \mathcal{F}_t -mouvement Brownien, et soit T un temps d'arrêt fini p.s. le processus

$$(\tilde{B}_t := B_{T+t} - B_t, t \geq 0)$$

est un mouvement Brownien indépendant de \mathcal{F}_T .

2.2.2 Processus de Poisson

Nous considérerons dans un premier temps le processus de comptage le plus élémentaire, le processus de Poisson qui est fréquemment utilisé pour modéliser les occurrences d'un évènement pouvant survenir à tout instant avec une probabilité constante et indépendamment des occurrences passées .

Définition 2.2.2 : Un processus $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est appelé processus de comptage s'il prend des valeurs dans \mathbb{N} et s'il vérifie les trois propriétés suivantes :

- i) $0 \leq s \leq t \Rightarrow N_s \leq N_t$;
- ii) N_s a des trajectoires "cadlag", i.e. continues à droite et avec des limites à gauche ;
- iii) $\mathbb{P}(N_s - N_{s-} > 1) = 0$.

Exemple 2.2.2 :

1. Appels téléphoniques à un standard.
2. Prise d'un poisson par un pêcheur.

Définition 2.2.3 : Un processus de comptage est un processus discret à temps continu.

Définition 2.2.4 : Un processus de Poisson de densité $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N_t)_{t \geq 0}$ tel que :

- i) Le processus est à accroissement indépendants $\forall t_0 \leq t_1 < \dots < t_k$ les variables aléatoires :

$$N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_1} - N_{t_0}$$

sont indépendantes.

- ii) Pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$, $N_{s+t} - N_s$ suit la loi de Poisson de paramètre λt .

Graphique :

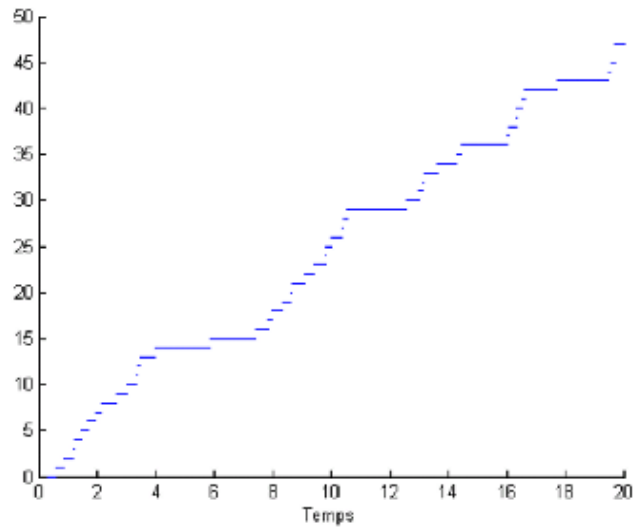


FIG. 2.2 – Simulation d'un processus de Poisson

Exemple 2.2.3 : (*Guichet*) Ici, N_t représente le nombre de clients qui sont arrivés au guichet avant l'instant t . L'hypothèse sur les sauts d'amplitude 1 exprime le fait que les clients arrivent un par un au guichet.

Proposition 2.2.6 : Un processus de Poisson est localement continu :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 1) = 0.$$

Proposition 2.2.7 : Le processus de Poisson N est sans mémoire, c-à-d : sachant le comportement du processus à un instant donné t ne modifie pas les prévisions pour le futur $t + s$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = k \mid N_t = n) &= \frac{\mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = k \text{ et } N_t - N_0 = n)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = k) \mathbb{P}(N_t = n)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\ &= \mathbb{P}(N_s = k) \\ &= e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!}. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.3 : *Le temps d'attente entre deux événements successifs suit une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire que si $T_0 = 0$ et pour tout $n \in \{1, 2, \dots\}$,*

$$T_n := \text{l'instant auquel se produit le } n\text{-ième événement,}$$

alors pour tout entier positif n et pour tout nombre réel positif t :

$$\mathbb{P}(T_n - T_{n-1} \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Preuve. Généralement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n - T_{n-1} \leq t) &= 1 - \mathbb{P}(T_n - T_{n-1} > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(N_{T_{n-1}+t} - N_{T_{n-1}} = 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

■

Exemple 2.2.4 : *Dans le cadre d'une modélisation des arrivées de clients à un guichet, T_n représente l'instant d'arrivée du client n au guichet, et $(T_n - T_{n-1})$ représente le temps qui s'est écoulé entre les arrivées du $(n - 1)$ -ème et du n -ème client au guichet.*

Corollaire 2.2.1 : *Pour tout $n > 0$, la v.a. T_n suit la loi Gamma de paramètres n et λ notée $\Gamma(n, \lambda)$, dont la densité est donnée par :*

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

Preuve. Il suffit de voir que :

$$T_n = \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}),$$

et utiliser le fait que la somme de n v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ suit la $\Gamma(n, \lambda)$. ■

Exercice 2.2.1 : Calculer l'espérance et la variance de T_n .

Solution 2.2.1 : On utilise le fait que les différences $T_i - T_{i-1}$ sont des variables exponentielles indépendantes :

$$\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[T_i - T_{i-1}] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} = \frac{n}{\lambda},$$

et

$$\text{Var}(T_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(T_i - T_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Proposition 2.2.8 : Les temps de sauts de N sont des \mathcal{F} -temps d'arrêt.

Preuve. D'abord :

$$\{T_1 > t\} = \{N_t = 0\} \in \mathcal{F}_t,$$

par définition de la filtration.

Supposons par récurrence que T_{n-1} est un \mathcal{F} -temps d'arrêt, soit $t > 0$,

$$\{T_n > t\} = \{T_{n-1} > t\} \cup \{T_{n-1} \leq t < T_n\} = \{T_{n-1} > t\} \cup \{N_t = n - 1\} \in \mathcal{F}_t.$$

■

Proposition 2.2.9 : Si N est un processus de Poisson alors :

a) La somme :

$$\forall t \geq 0, \quad N_t = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

est presque sûrement finie pour tout $t \geq 0$.

- b) Les trajectoires de N sont constantes par morceaux, avec des sauts de taille 1 seulement.
- c) Les trajectoires sont càdlàg.
- d) $\forall t > 0, \mathbb{P}(N_{t-} = N_t) = 1$.
- e) $\forall t > 0, N_t$ suit une loi de Poisson de paramètre λt :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \quad (2.2)$$

En particulier on a :

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t = \text{Var}(N_t), \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[e^{iuN_t}] = \exp(\lambda t(e^{iu} - 1)).$$

Remarque 2.2.1 : On a :

$$N_1 \sim \mathbb{P}(\lambda), \quad \mathbb{E}[N_1] = \lambda,$$

ce qui signifie que le nombre moyen d'évènements survenant en une unité de temps est égal à λ .

Exercice 2.2.2 : Montrer par récurrence l'expression (2.2).

Solution 2.2.2 : On note : $\mathbb{P}(N_t = n) = p_n(t)$. On a :

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad p'_{n+1}(t) = \lambda \left[e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - p_{n+1}(t) \right],$$

on a donc :

$$p_{n+1}(t) = C_{n+1}(t) e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad p'_{n+1}(t) = e^{-\lambda t} [C'_{n+1}(t) - \lambda C_{n+1}(t)],$$

et, en reportant,

$$e^{-\lambda t} [C'_{n+1}(t) - \lambda C_{n+1}(t)] = e^{-\lambda t} \left[\lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \lambda C_{n+1}(t) \right],$$

d'où

$$C'_{n+1}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!} \Rightarrow C_{n+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} + c_{n+1},$$

et, en utilisant $p_{n+1}(0) = 0$, on obtient finalement :

$$p_{n+1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La propriété étant vérifiée pour $n = 0$ (et $n = 1$), elle est ainsi démontrée pour tout n . Donc :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Proposition 2.2.10 : Les relations suivantes sont triviales à vérifier :

- a) $N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} | T_n \leq t\}$.
- c) $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1})$.
- d) $\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(T_n \leq t)$.
- e) $\mathbb{P}(s < T_n < t) = \mathbb{P}(N_s < n \leq N_t)$.

Propriété 2.2.1 : La somme de deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Proposition 2.2.11 : $(N_t)_{t \geq 0}$ est une sous-martingale, et $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$ est une martingale.

Preuve. Pour tous $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t - \lambda t \mid \mathcal{F}_u, u \leq s] &= \mathbb{E}[N_t - N_s \mid \mathcal{F}_u, u \leq s] + N_s - \lambda t \\ &= \mathbb{E}[N_{t-s}] + N_s - \lambda t = N_s - \lambda s. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.4 : Si X est un processus de Lévy à valeurs réelles, croissant (presque sûrement) et ne faisant que des sauts de taille 1, alors X est un processus de Poisson.

Théorème 2.2.5 : Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson et T un \mathcal{F}^N -temps d'arrêt presque sûrement fini. Alors, le processus $X : t \mapsto N_{t+T} - N_T$ est un processus de Poisson issu de 0 indépendant de \mathcal{F}_T^N .

Processus de Poisson composés

Définition 2.2.5 : Le processus de Poisson composé

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

est une somme des variables aléatoires i.i.d. Y_i , où N_t est un processus de Poisson indépendant.

Exemple 2.2.5 :

1. Arrivées d'avion dans un aéroport : chaque avion transporte un certain nombre de passagers.
2. Arrivées de clients aux caisses d'un supermarché : chaque client dépense une certaine somme d'argent.

Propriété 2.2.2 : On a : $\mathbb{G}_{X_t}(s) = \exp(\lambda t(\mathbb{G}_Y(s) - 1))$, et

$$\mathbb{E}[X_t] = \lambda t \mathbb{E}[Y] \quad \text{et} \quad \text{Var}[X_t] = \lambda t \mathbb{E}[Y^2].$$

Preuve. On a : $\mathbb{G}_{X_t}(s) = \mathbb{E}[\mathbb{E}^{N_t}[s^{X_t}]]$, avec :

$$\mathbb{E}^{[N_t=n]}[s^{X_t}] = \mathbb{E}^{[N_t=n]}[s^{Y_1+Y_2+\dots+Y_n}] = (\mathbb{G}_Y(s))^n,$$

car les Y_i sont indépendantes entre elles et indépendantes de N_t .

Donc : $\mathbb{E}^{N_t} [s^{X_t}] = (\mathbb{G}_Y(s))^{N_t}$, et

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [s^{X_t}] &= \mathbb{E} [\mathbb{E}^{N_t} [s^{X_t}]] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{G}_Y(s)^{N_t}] \\ &= \mathbb{G}_{N_t}(\mathbb{G}_Y(s)) \\ &= \exp(\lambda t (\mathbb{G}_Y(s) - 1)), \end{aligned}$$

car N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt . On a alors :

$$\mathbb{G}'_{X_t}(s) = \lambda t \mathbb{G}'_Y(s) \mathbb{G}_{X_t}(s) \quad \text{et} \quad \mathbb{G}''_{X_t}(s) = \lambda t \mathbb{G}_{X_t}(s) (\mathbb{G}''_Y(s) + \lambda t (\mathbb{G}'_Y(s))^2).$$

En prenant la limite quand s tend vers 1, on obtient :

$$\mathbb{E} [X_t] = \lambda t \mathbb{E} [Y],$$

et

$$\lim_{s \rightarrow 1} \mathbb{G}''_{X_t}(s) = \lambda t ((\text{Var}(Y) - \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2) + \lambda t (\mathbb{E}[Y]^2)) = \text{Var}(X_t) - \mathbb{E}[X_t] + (\mathbb{E}[X_t])^2,$$

d'où

$$\text{Var}(X_t) = \lambda t (\text{Var}(Y) + \mathbb{E}[Y]^2) = \lambda t \mathbb{E}[Y^2].$$

■

Exemple 2.2.6 : *Le nombre d'accidents par jour dans une ville suit un processus de Poisson de paramètre 2 et le nombre de personnes impliquées suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Quelle est la moyenne et la variance du nombre de personnes accidentées durant une semaine ?*

Réponse : $\mathbb{E}[Y] = 2$ et $\text{Var}(Y) = 2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$, d'où $\mathbb{E}[Y]^2 = 6$, et pour $t = 7$,

$$\mathbb{E}[X_t] = 2 \times 7 \times 2 = 28 \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_t) = 2 \times 7 \times 6 = 84.$$

Proposition 2.2.12 : *Un processus de Poisson composé est clairement un processus càdlàg et constant par morceaux.*

Proposition 2.2.13 : *Soit X un processus de Poisson composé. Alors X est à accroissements indépendants et stationnaires.*

Théorème 2.2.6 : *Si X est un processus de Lévy càdlàg à valeurs réelles, presque sûrement à trajectoires constantes par morceaux, alors X est un processus de Poisson composé. La réciproque est trivialement vraie.*

Preuve. Soit $N_t := \{0 \leq s \leq t, X_{s-} \neq X_s\}$. Comme X est à trajectoires constantes par morceaux, N est fini pour tout t fini. C'est donc un processus de comptage. De plus :

$$N_t - N_s := \{s < r \leq t, X_{r-} \neq X_r\} := \{s < r \leq t, X_{r-} - X_s \neq X_r - X_s\}.$$

On en déduit que N a des accroissements indépendants et stationnaires. C'est donc un processus de Poisson. Soit $(T_n)_n$ la suite de ses temps d'arrivées. On définit $Y_n = X_{T_n} - X_{T_n^-}$. Il ne reste plus qu'à montrer que les $(Y_n)_n$ sont i.i.d. Comme X est à trajectoires constantes par morceaux, on a : $Y_n = X_{T_n} - X_{T_{n-1}}$. Or si l'on applique la propriété de Markov forte, il est facile de voir que les $(Y_n)_n$ sont i.i.d. Par exemple, on montre qu'ils ont même loi.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la propriété de Markov forte, le processus $\{X_{t+T_{n-1}} - X_{t+T_{n-1}^-} : t \geq 0\}$ est un processus de Lévy ayant même loi que le processus X , et est indépendant de $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$.

On en déduit :

$$\mathbb{P}(Y_n \in A) = \mathbb{P}(X_{T_n} - X_{T_{n-1}} \in A) = \mathbb{P}(X_{T_1} - X_0 \in A) = \mathbb{P}(Y_1 \in A).$$

L'indépendance se montre de la même façon. ■

Conclusion

Les processus de Lévy sont essentiellement des processus stochastiques avec des incréments stationnaires et dépendants, sont utilisés dans plusieurs domaines de science comme la physique, l'Architecture et bien sûr en Mathématiques financiers, car ils décrivent avec précision les réalités des marchés financiers. Enfin, Le mouvement Brownien et le processus de Poisson sont les deux exemples fondamentaux.

Bibliographie

- [1] Applebaum, D. (2009). Lévy processes and stochastic calculus. Cambridge university press.
- [2] Berglund, N. (2014). Martingales et calcul stochastique.
- [3] Breton, J. C. (2019). Processus stochastique. Université de Rennes 1.
- [4] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at [http : //www. maths. Univery. fr/pages-perso/ Jeanblanc](http://www.maths.univ-evry.fr/pages-perso/Jeanblanc).
- [5] JOURDAIN, B. (2020). Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie.
- [6] Kyprianou, A. E. (2007). An introduction to the theory of Lévy processus.
- [7] Lebarbier, E., & Robin, S. (2007). Processus de Poisson Processus de Naissances et Morts.
- [8] Protter, P. E. (2004). Stochastic integration and differential equations. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [9] Rémi, R. (2010). Processus de Lévy et calcul stochastique. Document de travail, Université Paris-Dauphine.
- [10] Schilling, R. L. (2016). An Introduction to Lévy and Feller Processes. Advanced Courses in Mathematics-CRM Barcelona 2014.
- [11] TOUZI, N. (2009). MARTINGALES EN TEMPS DISCRET ET CHAINES DE MARKOV.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

\mathbb{N}, \mathbb{R}	: Ensemble des nombres naturels réels respectivement.
E	: Ensemble quelconque.
L^1	: Espace des fonctions intégrables.
L^2	: Ensemble des fonctions mesurables de carré intégrables.
i.i.d.	: Indépendante identiquement distribuées..
\wedge, \vee	: Inf, sup respectivement.
inf	: Inférieur.
\mathcal{N}	: La famille de toutes les ensembles négligeable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
lim	: Limite.
p.s.	: Presque sur.
\mathbb{P} -p.s	: Presque sûrement pour la mesure de probabilité \mathbb{P} .
PAIS	: Processus accroissements indépendant stationnaires.
sup	: Supérieur.
Ω	: Une ensemble fondamental.
v.a.	: Variable aléatoire.
$X \sim \mathcal{N}(0, t)$: Variable X suit la loi normale centrée et de variance t .

Annexe B : Rappel

Mesure :

Soit un ensemble muni d'une tribu \mathcal{A} . On dit que μ est une mesure sur (Ω, \mathcal{A}) si :

- i) $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ (elle prend la valeur ∞);
- ii) $\mu(\emptyset) = 0$;
- iii) Si $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ et sont deux à deux disjoints alors :

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- On dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Lois fini-dimensionnelles :

On appelle lois fini-dimensionnelles d'un processus l'ensemble des lois

$$\{ \mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_p}) : t_1, \dots, t_p \in \mathbb{T}, p \in \mathbb{N}^* \}.$$

Càdlàg : continu à gauche et pourvu de limite à droite.

Résumé

Dans cette modeste contribution, nous sommes intéressées au processus de Lévy, le plus utilisé dans la finance.

Au début, nous introduisons les processus stochastiques en général, puis nous nous sommes concentrés sur l'objectif principal i.e. nous avons défini le processus de Lévy et présenté ses propriétés générales, comme qu'il s'agit d'une loi infiniment divisible et avons donné la Formule de Lévy-Khintchine. Enfin, nous avons présenté les plus simples exemples pour l'étude: mouvement Brownien, processus de Poisson.

Mots clés: Processus stochastiques, temps d'arrêt, martingale, processus de Lévy, mouvement Brownien, processus de Poisson.

Abstract

In this modest contribution, we are interested in the Lévy process, the most used in finance.

At first, we introduce stochastic processes in general, and then we focused on the main objective i.e. we have defined the Lévy process and presented its general properties, as it is an infinitely divisible law and have given the Lévy-Khintchine formula. Finally, we presented the simplest examples for the study: Brownian motion, Poisson process.

Key words: Stochastic processes, martingale, stopping time, Lévy process, Brownian motion, Poisson process.

المخلص

في هذه المساهمة المتواضعة، نحن مهتمون بعملية ليفي، الأكثر استخدامًا في التمويل.

بداية، أدخلنا العمليات العشوائية بشكل عام، ثم ركزنا على الهدف الرئيسي، أي أننا عرفنا عملية ليفي و عرضنا خصائصها العامة، على سبيل المثال أنها قانون قابل للقسمه بلا حدود و لقد أعطينا صيغة ليفي-كينتشرين. أخيرا قدمنا أبسط الأمثلة : الحركة البراونية و عملية بواسون.

الكلمات المفتاحية : العمليات العشوائية، زمن التوقف، مارتينجال، عملية ليفي، الحركة البراونية، عملية بواسون.