

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrique  
Filière : Electrotechnique  
Option : Machine Electrique

Réf:.....

**Mémoire de Fin d'Etudes**  
**En vue de l'obtention du diplôme :**

**MASTER**

***Thème***

**Calculs de la densité des courants induits du chauffage  
par induction par la méthode des volumes finis**

**Présenté par :**  
**ZEKKAR ANOUAR**  
**ABBASSI MOHAMED EL HACHEMI**

**Soutenu le : ..... 2020**

**Devant le jury composé de :**

**Mme. KHELILI FATIHA**  
**Mme. BECHA HABIBA**  
**Mme. HADRI HAMIDA**

**MCB**  
**MCB**  
**Pr**

**Président**  
**Encadreur**  
**Examineur**

**Année universitaire : 2019 / 2020**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la recherche scientifique



**Université Mohamed Khider Biskra**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Electrique**  
**Filière : Electrotechnique**  
**Option : Machine Electrique**

**Mémoire de Fin d'Etudes**  
**En vue de l'obtention du diplôme:**

**MASTER**

***Thème***

**Calculs de la densité des courants induits du chauffage par  
induction par la méthode des volumes finis**

**Présenté par :**

**ZEKKAR ANOUAR**  
**ABBASSI MOHAMED ELHACHEMI**

**Avis favorable de l'encadreuse :**

**Mme. BECHA HABIBA** *signature*

**Avis favorable du Présidente du Jury**

**Mme : KHELILI FATIHA**

*Signature*

**Cachet et signature**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrique  
Filière : Electrotechnique  
Option : Machine Electrique

## *Thème :*

**Calculs de la densité des courants induits du chauffage par induction par la méthode des volumes finis**

**Proposé par : ZEKAR ANOUAR  
ABBASSI MOHAMED EL HACHEMI**

**Dirigé par : Mme. BECHA HABIBA**

*DEDICACE*

*Je tiens c'est avec un grand plaisir que je dédie ce modeste travail :*

*A l'être le plus cher de ma vie, ma mère, à celui qui m'a fait de moi un homme, mon père aussi.*

*A mes chers frères et ma sœur.*

*A ma chère encadreuse Dr. BECHA HABIBA.*

*A tous mes amis de promotion de 2<sup>ème</sup> année master ME en électrotechnique tout particulièrement MOUMEN et BADI.*

*A ABBASSI MOHAMED EL HACHEMI, chère ami avant d'être binôme.*

*Toute personne qui occupe une place dans mon cœur.*

*A tous les membres de ma famille et toute personne qui porte les noms ZEKAR et ABBASSI, je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à ma réussite*

*REMERCIEMENT*

*Après avoir rendu grâce à Dieu le Tout Puissant et le Miséricordieux nous tenons à remercier vivement tous ceux qui, de près ou de loin ont participé à la rédaction de ce document. Il s'agit plus particulièrement de :*

*J'exprime mon profonde reconnaissance et gratitude à :  
Tous les professeurs et corps administratif du département de génie électrique de l'Université Mohamed Khider, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée." Nos remerciements s'étendent également à tous nos enseignants durant les années des études.*

*A Madame, Dr : BECHA HABIBA ; pour l'aide qu'elle a fournie et les connaissances qu'il a sues me transmettre, autant encadreuse de ce présent travail.*

*Sans oublier aussi ma famille je voudrais tous les remercier pour leur encouragement envers moi, leurs soutiens moraux ; affectifs et financier*

*LISTE DES TABLEAUX*

<b>CHAPITRE I</b>	<b>PAGES</b>
<b>Tab.I.1</b> Exemples d'application du chauffage par induction suivant la fréquence.....	10
 <b>CHAPITRE IV</b>	
<b>Tab IV.1.</b> La variation de la résistivité électrique de l'acier inoxydable en fonctions de température T.....	47

## *LISTE DES FIGURES*

<b>CHAPITRE I</b>	<b>PAGES</b>
<b>Fig. I.1.</b> Eléments constitutifs d'un dispositif de chauffage par induction.....	04
<b>Fig. I.2.</b> Principe du chauffage par induction.....	05
<b>Fig. I.3.</b> Schéma général d'une installation de chauffage par induction.....	08
<b>CHAPITRE II</b>	<b>PAGES</b>
<b>Fig II.1 .</b> Maillage du domaine d'étude.....	30
<b>Fig II.2 .</b> Discrétisation en volumes finis dans le cas monodimensionnel.....	30
<b>CHAPITRE III</b>	<b>PAGES</b>
<b>Fig. III.1.</b> Maillage du domaine d'étude. ....	32
<b>Fig. III.2.</b> Description d'un volume fini.....	33
<b>Fig. III.3.</b> Organisation du code du calcul électromagnétique.....	39
<b>Fig. III.4.</b> Structure du sous-programme (Introduction des données) Pour la résolution de l'équation électromagnétique.....	40
<b>Fig. III.5.</b> Structure du sous-programme (Procédure de calcul) et de la résolution de l'équation électromagnétique. ....	42-43
<b>Fig. III.6.</b> Les différentes fonctions de visualisation des résultats Electromagnétiques.....	44
<b>CHAPITRE IV</b>	<b>PAGES</b>
<b>Fig. IV.1.</b> Tube creux dans un inducteur de cuivre.....	45
<b>Fig. IV.2.</b> Modèle géométrique du dispositif.....	46
<b>Fig. IV.3.</b> Variation de la résistivité électrique de l'acier inoxydable en fonction de la température.....	47
<b>Fig. IV.4.</b> Modèle géométrique adopté pour l'étude électromagnétique.....	48
<b>Fig. IV.5.</b> Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A Pour $z = 1500\text{mm}$ et pour $T = 298\text{ °K}$ .....	49
<b>Fig.IV.6.</b> Répartition du module du potentiel vecteur magnétique A Dans le plan $(r, z)$ pour $T = 298\text{ °K}$ .....	50

<b>Fig. IV.7.</b> Variation radiale du module de la densité des courants induits	
Dans la charge pour $z = 1500\text{mm}$ et pour $T = 298\text{ °K}$ .....	50
<b>Fig. IV.8.</b> Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A	
Pour $z = 1500\text{mm}$ et pour $T = 1200\text{ °K}$ .....	51
<b>Fig. IV.9.</b> Répartition du module du potentiel vecteur magnétique A	
Dans le plan $(r, z)$ pour $T = 1200\text{ °K}$ .....	51
<b>Fig. IV.10.</b> Variation radiale du module de la densité des courants induits	
Dans la charge pour $z = 1500\text{mm}$ et pour $T = 1200\text{ °K}$ .....	52
<b>Fig. IV.11.</b> Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A	
Pour $z = 1500\text{mm}$ et Pour $T \in [293\text{ °K}-1255\text{ °K}]$ .....	52
<b>Fig. IV.12.</b> Variation radiale du module de la densité des courants induits dans la charge	
Pour $z = 1500\text{mm}$ et pour $T \in [293\text{ °K}-1255\text{ °K}]$ .....	53
<b>Fig. IV.13.</b> Variation radiale du module de la densité des courants induits	
Dans la charge pour $z = 1500\text{mm}$ et pour $T \in [293\text{ °K}-1255]$ .....	54
<b>Fig. IV.14.</b> Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A	
Pour $z = 1500\text{mm}$ et pour $\sigma = 0 (1/(\Omega.m))$ .....	55
<b>Fig. IV.15.</b> Variation radiale du module de la densité des courants induit dans la charge	
Pour $z = 1500\text{mm}$ et pour $\sigma = 0 (1/(\Omega.m))$ .....	56
<b>Fig. IV.16.</b> Répartition du module de la densité des courants induits dans le plan $(r, z)$	
Pour $\sigma = 0 (1/(\Omega.m))$ .....	56



*LISTE DES ABRÉVIATIONS*

- B : Induction magnétique [T],
- H : Champ magnétique [A/m],
- D : Induction électrique [C/m<sup>2</sup>],
- E : Champ électrique [V/m],
- $\mathbf{J}_D$  : densité des courants de déplacement négligeable à basse fréquence [A/m<sup>2</sup>]
- $\mu$  : Perméabilité magnétique [H /m],
- $\rho$  : Densité volumique de charges électriques [C/m<sup>3</sup>],
- $\nu$  : Réflectivité magnétique [m/H]
- $\epsilon$  : Permittivité diélectrique [F/m],
- $\mathbf{v}$  : Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptibles de ce déplacé [m/s],
- $\sigma$  : Conductivité électrique [S/m],
- $\mathbf{J}_{ex}$  : Densité du courant d'excitation (source) [A/m<sup>2</sup>],
- $\sigma.E$  : Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m<sup>2</sup>]
- $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$  : Densité des courants induits par mouvement [A/m<sup>2</sup>].
- $\epsilon_r$  : Permittivité relative du milieu [USI].
- $\epsilon_0$  : Permittivité absolue du vide [F/m],
- $\mu_r$  : Perméabilité magnétique relative du milieu [USI].
- $\mu_0$  : Perméabilité magnétique absolue du vide
- $\mathbf{B}_{re}$  : Vecteur induction magnétique rémanente [T].

$q_{\text{cond}}$ :	Flux de chaleur transmise par conduction (W. ),
T:	Température (K).
K:	Conductivité thermique (W)
$q_{\text{conv}}$ :	Flux de chaleur transmise par convection (W),
h :	Coefficient de transfert par convection (W)
$T_a$ :	Température ambiante (K).
$T_S$ :	Température de la surface (K)
$q_{\text{rad}}$ :	Flux de chaleur transmise par radiation (W)
CS :	Coefficient de transfert de chaleur par radiation (W)
$\sigma_s$ :	Constante de Stefan-Boltzmann (W) ou bien $\beta$
$\epsilon_{\text{emi}}$ :	Emissivité du matériau
$\rho$ :	Masse volumique (Kg/m <sup>3</sup> ) ou bien r.
$P_r$ :	Pression [Pa].
q :	Source des flux de conduction( W / m <sup>2</sup> ) donnée par la loi de fourrier
$P_s$ :	Terme source de chaleur correspondant, soit, au travail des forces appliquées au fluide ou à la dissipation visqueuse, soit à une puissance calorifique par unité volumique induite par effet joule où réaction chimique.
$C_p$ :	Capacité calorifique à pression constante( J/Kg K° )
$v$ :	Vitesse des pièces où des fluides en mouvement, fonction de l'espace[m/s],
$q_r$ :	Pertes radiatives ou chaleur rayonnée

## RESUME

Dans ce mémoire nous présentons un modèle simple destiné à la modélisation des phénomènes électromagnétique. Nous utilisons la méthode des volumes finis, comme une méthode numérique pour le calcul de la densité des courants induits du chauffage par induction.

Mots Clés :

Modélisation, Numérique, Electromagnétisme, Volumes finis, Dispositifs de chauffage par induction

## ملخص

في هذه المذكرة نقدم نموذجاً بسيطاً حول نمذجة الظواهر الكهرومغناطيسية حيث نستخدم طريقة الحجم المحدود كطريقة رقمية لحساب كثافة التيارات المستحثة للتسخين بالحث الكهرومغناطيسي.

الكلمات الدالة:

النمذجة، الرقمية، الكهرومغناطيسية، الأحجام المحدودة، أجهزة التسخين بالحث الكهرومغناطيسي.

## *SOMMAIRE*

<i>TITRE</i>	<i>PAGES</i>
DEDICACE	<b>I</b>
REMERCIEMENT	<b>II</b>
LISTE DES TABLEAUX	<b>III</b>
LISTE DES FIGURES	<b>IV</b>
LISTE DES ABREVIATIONS	<b>V</b>
RESUME	<b>VI</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I. Chauffage Par Induction</b>	<b>4</b>
<b>I.1.Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I.2.Principe du chauffage par induction électromagnétique</b>	<b>5</b>
<b>I.3.Caracteristiques du chauffage par induction</b>	<b>8</b>
<b>I.3.1.L'effet de peau</b>	<b>8</b>
<b>I.3.2.Puissance transmise à la charge</b>	<b>9</b>
<b>I.4.Schema électrique équivalent d'un four à induction</b>	<b>10</b>
<b>I.5.Applications du chauffage par induction</b>	<b>11</b>
<b>I.6.Conclusion</b>	<b>12</b>
<b>Chapitre II. Formulations Mathématiques Des Phénomènes Electromagnétiques</b>	<b>14</b>
<b>II.1.Introduction</b>	<b>15</b>
<b>II.2.Les modèles mathématiques en électromagnétisme</b>	<b>15</b>
<b>II.2.1.Equations générales de MAXWELL</b>	<b>15</b>
<b>II.2.2.Interprétation physique des équations électromagnétique</b>	<b>17</b>
<b>II.2.2.1.Equation de couplage électromagnétique</b>	<b>17</b>
<b>II.2.2.2.Les équations de conservation</b>	<b>20</b>
<b>II.2.2.3.Loi de comportement des matériaux (milieux physiques )</b>	<b>21</b>
<b>II.3.Formulation des équations électromagnétiques</b>	<b>22</b>
<b>II.3.1.Le modèle électrostatique</b>	<b>22</b>
<b>II.3.2.Le modèle électrocinétique</b>	<b>23</b>
<b>II.3.3.Le modèle magnétostatique</b>	<b>23</b>
<b>II.3.3.1.Le modèle magnétostatique scalaire</b>	<b>23</b>
<b>II.3.3.2.Le modèle magnétostatique vectoriel</b>	<b>24</b>
<b>II.3.4.Le modèle magnétodynamique</b>	<b>24</b>
<b>II.4.Formulation de l'équation magnétodynamique</b>	<b>25</b>
<b>II.5.Le modèle cylindrique axisymétrique en électromagnétisme</b>	<b>28</b>
<b>II.6.Differentes techniques de résolution des équations au dérivées partielles</b>	<b>31</b>
<b>II.6.1.Méthode des différences finies (MDF)</b>	<b>31</b>
<b>II.6.2.Méthode des éléments finis (MEF)</b>	<b>32</b>
<b>II.6.3.Méthode des intégrales de frontières (MIF)</b>	<b>32</b>
<b>II.6.4.Méthode des circuits couples (MCC)</b>	<b>32</b>
<b>II.6.5.Méthode des volumes finis (MVF)</b>	<b>33</b>
<b>II.7. Conclusion</b>	<b>34</b>

<b>Chapitre III. Modèles Numériques Et Modèles Mathématico-Numériques Développés</b>	<b>35</b>
<b>III.1.Introduction</b>	<b>36</b>
<b>III.2.Resolution des équations électromagnétique par la méthode des volumes finis</b>	<b>36</b>
<b>III.2.1.Discrétisation de l'équation magnétodynamique linéaire en régime harmonique</b>	<b>37</b>
<b>III.3.Méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques</b>	<b>41</b>
<b>III.3.1.Méthodes directes</b>	<b>41</b>
<b>III.3.2.Méthodes itératives</b>	<b>41</b>
<b>III.3.2.1.Méthode de JACOBI</b>	<b>41</b>
<b>III.3.2.1.Méthode de GAUSS SEIDEL</b>	<b>41</b>
<b>III.3.2.3.Méthode de Relaxation</b>	<b>42</b>
<b>III.4.Présentation des modules du code de calcul pour résolution de l'équation électromagnétique</b>	<b>43</b>
<b>III.4.1.Introduction des données nécessaires a résolution de l'équation électromagnétique</b>	<b>43</b>
<b>III.4.2.Procédure de calcul et de la résolution de l'équation électromagnétique</b>	<b>45</b>
<b>III.4.3.Visualisation des résultats obtenus à partir de la résolution de l'équation électromagnétique</b>	<b>47</b>
<b>III.5.Conclusion</b>	<b>48</b>
<b>Chapitre IV. Applications et Validations</b>	<b>49</b>
<b>IV.1.Introduction</b>	<b>50</b>
<b>IV.2.Application :chauffage par induction d'un tube creux en acier inoxydable (EDF)</b>	<b>50</b>
<b>IV.2.1.Description du dispositif de chauffage EDF</b>	<b>50</b>
<b>IV.2.2.Représentation du modèle géométrique du dispositif de chauffage EDF</b>	<b>51</b>
<b>IV.2.3.Modelés des propriétés physiques</b>	<b>51</b>
<b>IV.2.4.Etude du comportement électromagnétique</b>	<b>53</b>
<b>IV.2.4.1.Définition du modèle géométrique</b>	<b>53</b>
<b>IV.2.4.2.Résultats du problème électromagnétique</b>	<b>53</b>
<b>IV.2.4.3.Interprétation des résultats électromagnétiques</b>	<b>60</b>
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	<b>62</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>65</b>

***INTRODUCTION GENERALE***

## *INTRODUCTION GENERALE*

La fonction du chauffage par induction qui est couramment employé dans la différente activité humaine est de chauffer des matériaux sans contact avec la source d'énergie, La facilité de réglage et de mise en marche automatique, l'absence de combustion et de dégagement de gaz toxiques, la propreté des appareils, sont autant d'avantages du chauffage par induction.

L'homme tente d'améliorer sa vie au quotidien ; le chauffage par induction qui est couramment employé dans les différentes activités humaines.

Le chauffage par induction a acquis une très grande importance dans l'industrie, notamment, dans la métallurgie, l'élaboration des matériaux, l'agro-alimentaire, la chimie,...etc., ainsi que dans le domestique (exemple : cuisson par induction), en raison de ses caractéristiques très attrayantes du point de vue technologique : chauffage rapide et à distance, choix de la zone d'envoi de la puissance suivant la fréquence du générateur ou les caractéristiques physiques de l'élément à chauffer et une pollution moindre de l'environnement.

Le procédé du chauffage par induction est présenté les équations aux dérivées partielles (EDP) qui décrivent les phénomènes électromagnétiques et thermiques. Pour le cas de l'électromagnétisme, ce sont les équations de MAXWELL et les caractéristiques électriques (conductivité électrique) et magnétiques (perméabilité magnétique) des matériaux. Dans notre travail nous avons présenté les équations aux dérivées partielles qui décrivent les phénomènes électromagnétiques et de calculer des courants de FOUCAULT induits dans la charge à chauffer, à partir de la résolution des équations du champ électromagnétique et de calculer aussi la densité de la source thermique comme étant la moyenne de la puissance active dissipée par unité de volume dans la pièce à chauffer, pour différent température, fonction par définition du potentiel vecteur magnétique et de la conductivité électrique.

Le chauffage par induction nécessite le calcul des courants de FOUCAULT induits dans la charge à chauffer, à partir de la résolution des équations du champ électromagnétique.

Le courant induit, par ses effets s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz). L'origine de ce courant induit résulte de la variation d'un flux électromagnétique inducteur au travers d'un circuit fermé appelé induit. Le courant induit crée alors un champ magnétique induit, tel que le flux ainsi induit (c'est-à-dire créé) est opposé au flux inducteur. Michael Faraday découvrit le phénomène d'induction en 1831. Il a établi que la force électromotrice produite le long d'un chemin fermé est proportionnel au taux de changement du flux magnétique.

Pour la résolution d'équation mathématique ; on utilise les méthodes numériques de discrétisation qui consiste à ramener la résolution aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites. Parmi ces méthodes, nous avons sélectionné la méthode des volumes finis. Cette méthode présente, en plus de son adaptation aux problèmes à traiter, une mise en œuvre et une conception simple que celle aux éléments finis.

Notre travail sera présenté de la manière suivante :

Dans un premier chapitre, les dispositifs de chauffage par induction, leurs caractéristiques et diverses applications industrielles sont exposés.

Un deuxième chapitre sera consacré aux formulations mathématiques des phénomènes électromagnétiques, ainsi les différentes méthodes de résolutions des équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes physiques présents dans les dispositifs de chauffage par induction.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les méthodes numériques adoptés pour la résolution des équations des champs électromagnétiques. Il s'agit de la méthode des volumes finis (MVF).

En vue de vérifier l'efficacité du modèle étudié établi, nous proposons dans un quatrième chapitre, l'application puis la validation de ce modèle sur des dispositifs de chauffage par induction à géométrie cylindrique et à symétrie axiale.

Enfin, nous tirons une conclusion générale résumant notre travail et nous proposons quelques suggestions futures.



**Chapitre I :**  
***Chauffage Par Induction***

### **I.1 INTRODUCTION**

L'induction électromagnétique est une technique de chauffage pour les matériaux conducteurs d'électricité (métaux), fréquemment utilisée pour de nombreux procédés thermiques tels que la fusion ou la chauffe des métaux.

L'induction électromagnétique a pour particularité de générer la chaleur directement à l'intérieur du matériau à chauffer. Cette particularité présente de nombreux avantages par rapport aux méthodes de chauffe plus standards, notamment la réduction des temps de chauffe et des rendements élevés, ou encore la possibilité de chauffer de façon très locale. Les hautes densités de puissance mises en jeu permettent d'obtenir des vitesses de chauffe très rapides.

### **I.2. PRINCIPE DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE**

Le chauffage par induction électromagnétique est une technique électrothermique permettant de chauffer des matériaux conducteurs d'électricité, sans contact matériel avec une source électrique. Lorsqu'un conducteur électrique est déplacé dans un champ magnétique statique, un courant électrique s'établit dans cet objet. C'est le phénomène d'induction. De la même manière on induit un courant dans un conducteur fixe placé dans un champ magnétique variable. Un courant alternatif parcourant un bobinage (ou solénoïde) génère en effet un champ magnétique oscillant à la même fréquence dont l'intensité est maximale à l'intérieur de celui-ci (loi d'Ampère). Si une pièce conductrice est placée à l'intérieur d'une bobine, les courants induits par le champ magnétique s'y développent (loi de Lenz) et chauffent la pièce par effet Joule. Un équipement de chauffage par induction comprend essentiellement un ou plusieurs inducteurs de chauffage (avec parfois un concentrateur de champ), une alimentation électrique, un système de refroidissement de l'inducteur et de l'alimentation électrique et un système de contrôle-commande. Les configurations d'inducteurs, les fréquences (de 1 Hz à 5 MHz) et les puissances électriques mises en œuvre sont très variées et dépendent de l'application (chauffage dans la masse ou superficiel, cuisson, fusion...), du matériau et de sa forme (billettes, lopins, cuves...)[1].

Le chauffage par induction peut être schématiquement représenté par un ensemble de trois principaux éléments : l'inducteur, la charge et l'espace environnant (Fig. I.1).[2]

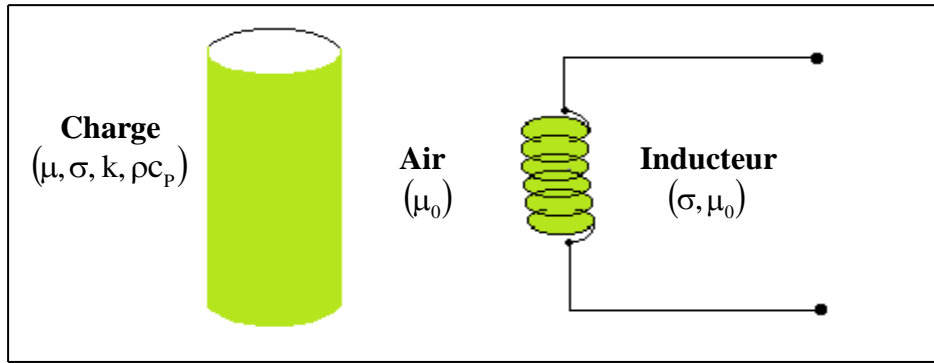


Fig. I.1. Eléments constitutifs d'un dispositif de chauffage par induction.

- $\mu_0$  : perméabilité magnétique absolue du vide,
- $\mu$  : perméabilité magnétique,
- $\sigma$  : conductivité électrique,
- $k$  : conductivité thermique,
- $\rho c_p$ : chaleur spécifique.

Le chauffage par induction entraîne successivement les trois phénomènes physiques suivants.[2]

- Transfert de l'énergie par voie électromagnétique de l'inducteur vers le matériau à chauffer.
- Transformation de cette énergie électrique en chaleur par effet Joule.
- Diffusion par conduction thermique de la chaleur au sein du matériau

Le principe du chauffage par induction électromagnétique est basé sur deux phénomènes physiques :

1-L'induction électromagnétique

2- L'effet joule.

Le chauffage par induction est une application directe de deux lois physiques, la loi de Lenz et l'effet Joule, il s'applique aux matériaux conducteurs. Son principe consiste à placer l'élément à chauffer dans un champ magnétique variable, il se développe des courants de Foucault au sein du matériau qui provoque son échauffement par effet Joule [1].

En effet, Tout corps conducteur de l'électricité s'échauffe par effet Joule quand il est parcouru par un courant électrique. Cet échauffement s'obtient, soit en appliquant aux extrémités du conducteur une différence de potentiel (c'est le chauffage classique par résistance) , soit en plaçant ce

conducteur dans un champ magnétique variable (c'est le chauffage par induction électromagnétique) [3]. [2]

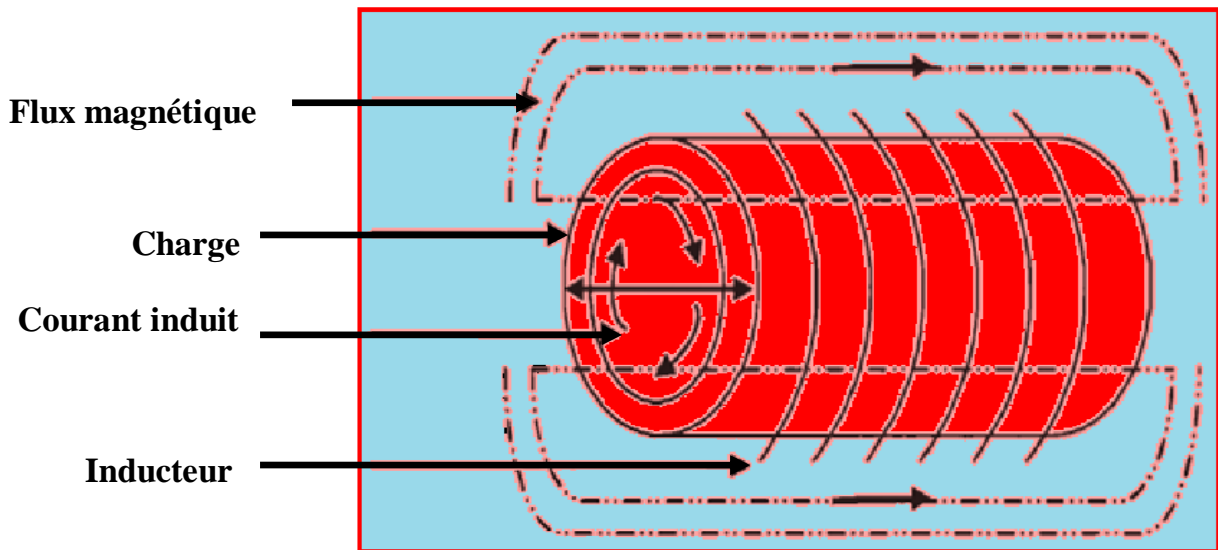


Fig. I.2. Principe du chauffage par induction.

Lorsqu' on applique une différence de potentiel alternatif  $V$  aux bornes d'un solénoïde, le courant alternatif de fréquence  $f$  qui parcourt cette bobine crée à l'intérieur, mais aussi l'extérieur de la bobine, un champ magnétique variable. Si on introduit dans la bobine un corps conducteur de l'électricité, la variation du champ magnétique produit une variation du flux magnétique qui traverse ce corps et, d'après la loi de Lenz, induit une force électromotrice donnant naissance à des courants de Foucault.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_m \quad (\text{I.1})$$

$$\vec{E} = \vec{E} + (\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{I.2})$$

Avec :

$\sigma$  : Conductivité électrique du corps;

$\vec{E}_m$  : Champ électromoteur ;

$\vec{E}$  : Champ électrique ;

$\vec{B}$  : Induction magnétique

La force électromotrice est déterminée par l'expression suivante [3] :

$$e = \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{I.3})$$

$d\Phi$  : Étant la variation de flux d'induction magnétique traversant la pièce à chauffer pendant le temps  $dt$ .

Ces courants de Foucault -ou courants induits- se transforment en chaleur par effet Joule dans le corps qui s'échauffe. La bobine constitue le circuit primaire ou inducteur, le corps présent le circuit secondaire. Les équipements de chauffage par induction sont donc, dans leur principe et en dehors de leurs caractéristiques particulières de construction, assimilables à des transformateurs, munis ou non de circuits magnétiques avec fer, le primaire étant alimenté à la fréquence du réseau (60 Hz) ou à des fréquences plus élevées (moyenne et haute fréquence) [3].

Il faut toutefois rappeler que tout conducteur parcouru par un courant crée un champ magnétique dont l'intensité est proportionnelle à celle du courant. Les applications du chauffage par induction ne se limitent pas au cas d'un corps placé à l'intérieur d'un solénoïde, mais peuvent faire appel à des configurations très variées d'inducteurs (inducteurs plans, inducteurs linéaires, inducteurs tunnels ...) [3] et de positions relatives de la pièce à chauffer par rapport à l' inducteur. L'avantage cependant de l'inducteur en forme de solénoïde vient de ce que le champ magnétique créé par chaque spire s'ajoute à celui créé par les autres spires et que le champ magnétique total est particulièrement intense à l'intérieur de la bobine.

### I.3.CARACTERISTIQUES DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION

Deux grandeurs caractérisent fortement l'efficacité thermique et énergétique de l'induction : l'effet de peau et la puissance transmise à la charge à chauffer.

#### I.3.1 .L'effet de peau

L'effet de peau caractérise la répartition des courants induits dans la pièce à chauffer. Quand une substance conductrice de l'électricité est soumise à un champ magnétique variable, la densité des courants induits dans la substance décroît, à partir de la surface. C'est ces non-uniformités de la densité des courants induits qui est traduite sous l'appellation d'effet de peau, dont la grandeur caractéristique est la profondeur de pénétration du champ magnétique ou épaisseur de peau [4], [5].

Dans le cas d'un conducteur plan, elle est exprimée par :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \mu_r \sigma}} \quad (\text{I.4})$$

Où :

$\delta$  : Epaisseur de peau [m],

$\sigma$  : Conductivité électrique qui varie en fonction de la température [S/m],

$\mu_0$ : Perméabilité magnétique absolue du vide [H/m],

$\mu_r$  : Perméabilité relative du matériau [USI],

$f$  : Fréquence du fonctionnement [Hz].

La profondeur de pénétration dépend donc de :

- La fréquence du champ variable,
- La nature du matériau à chauffer du point de vue perméabilité magnétique ( $\mu$ ), et conductivité électrique ( $\sigma$ ),
- La température de la pièce à chauffer ( $\sigma(T)$ ).

En effet, cette profondeur d'après l'équation (I.4), diminue quand la fréquence ou l'une des propriétés physiques du matériau ( $\mu, \sigma$ ) augmente.

### I.3.2. Puissance transmise à la charge

#### ➤ Cas d'un système physiquement linéaire

La puissance de chauffage induite, dans un conducteur plan, a pour expression [5] :

$$P_C = \rho \frac{H_s^2}{\delta} S \quad (\text{I.5})$$

Où :

$\rho$  : Résistivité électrique de la charge,

$H_s$  : La valeur efficace du champ magnétique à la surface (S) du conducteur.

Si on remplace  $\delta$  par son expression, on trouve

$$P_C = \rho H_s^2 \sqrt{\pi f \mu_o \mu_r \sigma} S \quad (\text{I.6})$$

Cette formule montre que la puissance dépend du carré du champ magnétique, c'est à dire du carré de l'intensité du courant créant ce champ, de la fréquence, de la perméabilité magnétique, et de la conductivité électrique du milieu à chauffer.

#### ➤ Influence des paramètres du matériau

La formule précédente montre que cette puissance augmente avec la résistivité  $\rho$  la perméabilité ( $\mu = \mu_r \mu_o$ ) et de la fréquence  $f$ .

#### ➤ Influence de la fréquence

La fréquence  $f$  joue un rôle primordial d'autant plus que c'est un paramètre à la disposition de l'utilisateur. Nous pouvons ainsi, en choisissant bien la valeur de la fréquence entre 50Hz et 10 MHz, faire varier la profondeur de pénétration. Nous comprenons donc que le choix de la fréquence est essentiel avant toute opération de chauffage inductif [5].

L'augmentation de la fréquence augmente la puissance transmise à la charge. Il faut cependant se rappeler que l'augmentation de la fréquence s'accompagne également

d'une diminution de la profondeur de pénétration, ce qui peut conduire alors à un chauffage trop intense dans une épaisseur trop faible. Cette propriété est utilisée pour des chauffages très rapides lors des traitements thermiques superficiels [5].

➤ **Cas général**

Dans un cas général, la densité volumique de la puissance instantanée dissipée par effet JOULE peut être exprimée, en fonction de la densité des courants induits, par l'expression suivante [5] :

$$p(t) = \frac{1}{\sigma} |J(t)|^2 \tag{I.7}$$

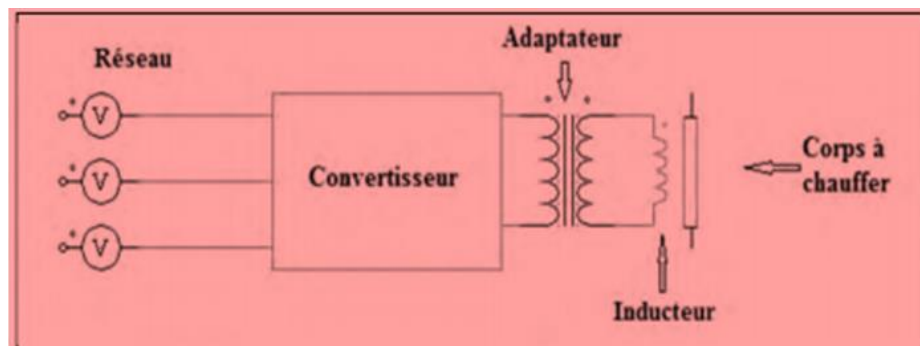
**J** : est la densité instantanée des courants induits.

Ainsi, la puissance totale dissipée par effet JOULE au niveau de la pièce à chauffer sera :

$$P_{tot} = \iiint_V p(t) dV \tag{I.8}$$

**dV** : est l'élément de volume.

**I.4. SCHEMA ELECTRIQUE EQUIVALENT D'UN FOUR A INDUCTION**



**Fig. I.3.** Schéma général d'une installation de chauffage par induction [6].

Les installations de chauffage inductif peuvent inclure un système de refroidissement pour le convertisseur de fréquence et pour l'inducteur, ainsi qu'un système de transport de l'énergie et un système de commande et de mesure adapté [6].

**Source d'alimentation** : L'alimentation électrique peut être de différente nature selon la fréquence d'alimentation de l'installation [7]. Quelques ordres de grandeur sur le chauffage par induction permettent de mieux cerner ses spécificités. Pour les installations à 50Hz La charge est directement connectée au transformateur. Le transformateur peut être réglé pour ajuster le courant à l'impédance de la charge [7]. Convertisseur de fréquence à thyristors

- ✓ Rendement : **90-97%**
- ✓ Plage de fréquence : **100Hz-10kHz**
- ✓ Plage de puissance : jusqu'à **10MW** Convertisseur de fréquence à transistors
- ✓ Rendement : **75-90%**
- ✓ Plage de fréquence : jusqu'à **500kHz**
- ✓ Plage de puissance : jusqu'à **500kW**

### I.5. APPLICATIONS DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION

On trouve principalement des installations de chauffage par induction dans les domaines de la métallurgie et de la mécanique : 45 % pour la fusion, 45 % pour le chauffage avant formage, 10 % pour le traitement thermique et les applications diverses.

Cependant, grâce à l'évolution des technologies de l'électronique et à l'apparition de composants de commutation plus rapides, des applications innovantes sont apparues dans d'autres domaines : chimie (fusion directe de verres et d'oxydes...), grand public (plaque chauffante de cuisine). [8],[9].

On trouve :

#### ➤ **Fusion :**

Les fours les plus répandus sont les fours à creuset à basculement, plutôt utilisés pour la fusion, et les fours à canal, souvent réservés au maintien en température des métaux fondus.

#### ➤ **Réchauffage avant formage et forgeage :**

Le réchauffage par induction est toujours utilisé dans le milieu industriel en à cause de productivité élevée, sa faible consommation d'énergie, sa rapidité de chauffage, etc...[1]

#### ➤ **Traitement thermique superficiel :**

L'induction permet de chauffer la surface de la pièce sans affecter notablement le cœur, puis de durcir par refroidissement (trempe à l'eau ou à l'air) de manière à obtenir une structure hétérogène.

#### ➤ **Industrie chimique :**

L'induction est utilisée comme moyen de chauffage des parois de réacteurs chimiques. On trouve ce type de réacteurs dans la fabrication des résines, des cosmétiques et dans l'industrie pharmaceutique.

#### ➤ **Plasma d'induction :**

Constitué de gaz partiellement ionisé, le plasma peut être assez conducteur pour



entretenir une réaction thermique par induction. [9]

Type de chauffage	Fréquence	Applications
<b>Pénétrant</b>	1Hz à quelques KHz pour les métaux 0.1 à 5 MHz pour les semi conducteurs .	Forge , fusion
<b>Superficiel</b>	10 à 500 KHz pour les métaux	Trempe superficiel, Brasage
<b>Pelliculaire</b>	10 à 1000 KHz pour les métaux	Soudage des tubes, Scellement thermique

**Tableau I.1:** Exemples d'application du chauffage par induction suivant la fréquence.[1]

## **I.6.CONCLUSION**

Dans ce chapitre, nous avons exposé les principes les caractéristiques ainsi les applications du chauffage par induction électromagnétique. On voit que la répartition des courants induits et la puissance dissipée dans la pièce à chauffer ont une grande importance. Les applications du chauffage par induction sont très nombreuses et elles nécessitent des fréquences variées. On peut citer le traitement thermique de surface (séchage et refusions des tôles etc. ...), traitement thermique à cœur (le formage, la fusion et le recuit etc....) et traitement localisé (les problèmes de soudage et de dégazage etc. ...). Bien que le chauffage par induction trouve son emploi le plus courant dans les traitements précédents, le procédé peut être employé pour un bon nombre d'autres problèmes où il est nécessaire de se servir de la chaleur. La fréquence a une influence sur le fonctionnement du chauffage par induction, elle offre la possibilité de contrôler la dissipation de la puissance à l'intérieur du corps à chauffer et de choisir le chauffage le mieux adapté. En effet, dans les applications d'échauffement, la puissance volumique transmise croît quand la fréquence augmente. A la fréquence de distribution d'énergie électrique (50 ou 60 Hz), la puissance

## ***Chapitre I : Chauffage Par Induction***

---

volumique injectée est faible et le chauffage est lent. Dans la plupart des cas, il faut avoir recours à des fréquences plus élevées qui nécessitent l'emploi de convertisseurs spécialement développés à cet effet.

Nous procédons, dans le chapitre suivant, la présentation mathématique des phénomènes électromagnétique régissant le comportement de système de chauffage par induction.

**Chapitre II :**  
***Formulations Mathématiques Des***  
***Phénomènes Electromagnétiques***

## II.1. INTRODUCTION

Le courant induit, par ses effets s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz). L'origine de ce courant induit résulte de la variation d'un flux électromagnétique inducteur au travers d'un circuit fermé appelé induit. Le courant induit crée alors un champ magnétique induit, tel que le flux ainsi induit (c'est-à-dire créé) est opposé au flux inducteur. Michael Faraday découvrit le phénomène d'induction en 1831. Il a établi que la force électromotrice produite le long d'un chemin fermé est proportionnelle au taux de changement du flux magnétique.

Pour le calcul de ce courant induit on doit passer par la modélisation de la physique du chauffage par induction demande à la fois une bonne connaissance des phénomènes électromagnétiques et thermiques qui régissent l'évolution spatio-temporelle d'un tel phénomène.

Le traitement d'un tel problème, fait appel d'environnement. Il s'agit de :

- L'environnement magnétique,
- L'environnement thermique.

Les équations de base de environnements sont :

- Les équations de J. C. MAXWELL,
- L'équation de diffusion de la chaleur.

## II.2. LES MODELES MATHEMATIQUES EN ELECTROMAGNETISME

### II.2.1. équations générales de maxwell

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques est régi par les équations de Maxwell. Celles-ci constituent un système d'équations aux dérivées partielles qui lient les phénomènes magnétiques aux phénomènes électriques unifiant ainsi tous les principes de l'électromagnétisme [10]. Les équations de Maxwell représentent la base de l'électromagnétisme; c'est-à-dire que ces équations permettent de décrire les évolutions spatio-temporelles du champ électrique et du champ

magnétique. Ces équations locales relient le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{H}$  à

leurs sources : densité de charge  $\rho$  et densité de courant électrique  $\vec{J}_c$  [11], [12]. Dans le domaine

des machines électrique, ces équations ont été intégrées de manière très simplifiée.

➤ Equations de MAXWELL :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right. \quad (\text{II.4})$$

➤ Lois constitutives des milieux

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu(\vec{H}) \cdot \vec{H} \quad \text{Où} \quad \vec{H} = v(\vec{B}) \vec{B} \\ \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \end{array} \right. \quad (\text{II.5})$$

Où :

$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  : Densité des courants de déplacement négligeable à basse fréquence [A/m<sup>2</sup>],

$\vec{H}$  : Vecteur champ magnétique [A/m],

$\vec{E}$  : Vecteur champ électrique [V/m],

$\vec{B}$  : Vecteur induction magnétique [T],

$\vec{D}$  : Vecteur induction électrique (vecteur déplacement électrique) [C/m<sup>2</sup>],

$\vec{J}_c$  : Vecteur densité du courant électrique de conduction [A/m<sup>2</sup>],

$\mu$  : Perméabilité magnétique [H /m],

$\rho$  : Densité volumique de charges électriques [C/m<sup>3</sup>],

$\epsilon$  : Permittivité diélectrique [F/m],

$v$  : Réflectivité magnétique [m/H].

A ces équations, doit être associée la loi d'OHM généralisée

$$\vec{J}_c = \vec{J}_{ex} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.7})$$

Où :

$\vec{v}$  : Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptible de se déplacer [m/s],

$\sigma$  : Conductivité électrique [S/m],

$\vec{J}_{ex}$  : Densité du courant d'excitation (source) [A/m<sup>2</sup>],

$\sigma \cdot \vec{E}$  : Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m<sup>2</sup>],

$\sigma(\vec{v} \wedge \vec{B})$  : Densité des courants induits par mouvement [A/m<sup>2</sup>].

## II.2.2. Interprétation physique des équations électromagnétique

### II.2.2.1. Equation de couplage électromagnétique

➤ Loi d'induction de FARADAY

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation exprime le couplage électrique- magnétique en régime dynamique et où la variation temporelle de  $\vec{B}$  détermine le  $\text{rot } \vec{E}$ , mais ceci ne suffit pas pour déterminer complètement  $\vec{E}$ .

• Démonstration :

Quand un conducteur se déplace dans un champ magnétique, en coupant des lignes de flux, une force électromotrice (F.e.m) est induite dans ce conducteur [13], tel que :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Où (C) est une boucle fermée (circuit).

De la même manière, une (F.e.m) est aussi induite, si le flux  $\Phi$  varie dans le temps à travers un circuit fixe, tel que :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{où} \quad \Phi = f(x, y, z, t),$$

$$\text{alors } e = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Où (S) est une surface s'appuyant sur le contour (C).

Dans les deux cas, la force électromotrice induite ( $\epsilon$ ) et le taux de la variation temporelle du flux magnétique ( $\frac{d\Phi}{dt}$ ) sont liés par la loi de FARADAY de la manière suivante :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

D'après le théorème de STOCKES (voir Annexe I), nous avons :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

On obtient :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Ainsi, nous aurons :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

➤ Théorème d'AMPERE

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Cette équation exprime la dépendance du champ magnétique de la densité du courant total (conduction + déplacement).

Cette relation peut être interprétée comme étant le taux de variation spatiale du champ en fonction du taux de mouvement des charges.

• Démonstration :

L'énoncé général du théorème d'AMPERE indique que l'intégrale curviligne de la composante tangentielle du vecteur champ magnétique  $\vec{H}$ , le long d'un contour fermé (C), est égale au courant encerclé par ce contour [13].

Soit :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$$

(S) : est la surface qui s'appuie sur le contour(C),

$\vec{J}$  : est la densité du courant.

Selon le théorème de STOCKES, nous avons :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Donc } \int_C \vec{\text{rot}} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{D'où : } \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}$$

➤ Continuités du courant : densité du courant de déplacement

Le courant total I traversant une surface (S) fermée, est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \int_C \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{dQ}{dt} \\ dQ = \rho \cdot dV \end{array} \right.$$

Où :

dQ : élément de charge,

dV : élément de volume.

$$\text{D'où } I = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot dV)$$

On divise par l'élément de volume  $\Delta V$ , on obtient :

$$\frac{\int_C \vec{J} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot dV) / \Delta V$$

Si  $\Delta V \rightarrow 0$ , le membre de gauche de l'équation tend, par définition, vers  $\text{div } \vec{J}$  (la divergence de la densité du courant; théorème d'OSTROGRADSKI - GREEN), tandis que

celui de la droite tend vers  $- \frac{\partial \rho}{\partial t}$ . Par conséquent :  $\text{div } \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$

c'est l'équation de continuité du courant, pour des champs statiques [13] :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}$$

Cette densité due ou mouvement de charges réelles, (électrons, protons et ions), est appelée densité du courant de conduction ( $J_C$ ).

Si :  $\vec{\text{rot}} \vec{H} = J_C$  reste valable pour les champs dépendants du temps, il vient alors que:[14]

$$\text{div } J_C = \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{H}) \Rightarrow \text{div } J_C = 0$$



Une contradiction avec l'équation de continuité du courant ( $\text{div } \vec{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ) apparaisse c'est pourquoi, MAXWELL, fut amené, à postuler que :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_c + \vec{J}_D$$

Où,  $\vec{J}_D$  est la densité du courant de déplacement définie par :

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

On aura alors :

$$\begin{aligned} \vec{\text{div}} \vec{J}_c &= \vec{\text{div}} (\vec{\text{rot}} \vec{H}) - \vec{\text{div}} \vec{J}_D \\ &= 0 - \vec{\text{div}} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{div}} \vec{D}) \\ &= - \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

### II.2.2.2. Les équations de conservation

➤ Divergence de l'induction magnétique

$$\vec{\text{div}} \vec{B} = 0$$

Cette relation traduit mathématiquement le fait que les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques, et il n'existe pas de charge magnétique; c'est pourquoi les lignes du champ sont toujours fermées sur elles-mêmes. Elles forment des boucles. Ces boucles n'ont ni point de départ, ni point d'arrivée, ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative (champ conservatif).

➤ Théorème de GAUSS  $\vec{\text{div}} \vec{D} = \rho$

Une charge électrique est source d'un champ électrique ; autrement dit, les lignes de champs électriques commencent et se terminent autour des charges électriques [14].

• Démonstration :

L'énoncé général du théorème de GAUSS indique que la charge totale  $Q(V)$  contenue dans un volume  $V$ , limité par la surface fermée  $S(V)$ , est égale au flux du vecteur déplacement

électrique  $\vec{D}$  sortant de la surface  $S(V)$ . C'est à dire :

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_{int}(V) \\ &= \int_V \rho \cdot dV \end{aligned}$$

D'après le théorème d'OSTROGRADSKI – GREEN (voir Annexe I), nous avons :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{D} \cdot dV$$

D'où :

$$\int_V \text{div } \vec{D} \cdot dV = \int_V \rho \cdot dV$$

Ainsi

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

### II.2.2.3. Loi de comportement des matériaux (Milieux physiques)

#### ➤ Induction et champ électriques

Pour tout champ électrique, dans un milieu isotrope, de permittivité  $\epsilon$ , nous avons :

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

Où  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  ;  $\epsilon_0$  : Permittivité absolue du vide [F/m],

$\epsilon_r$  : Permittivité relative du milieu [USI].

Cette équation décrit la relation entre le vecteur induction électrique  $\vec{D}$  et le vecteur champ électrique  $\vec{E}$ . Elle est linéaire si  $\epsilon$  est constante.

Dans le cas des conducteurs non-polarisés, nous avons :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad ; \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9} \text{ [F/m]}$$

La détermination de  $\vec{D}$  de l'équation (II.6) et  $\text{rot } \vec{E}$  de l'équation (II.3) détermine complètement  $\vec{E}$ .

➤ Induction et champ magnétiques

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$  ;  $\mu_0$  : Perméabilité magnétique absolue du vide,

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]},$$

$\mu_r$  : Perméabilité relative du milieu [USI].

Dans le cas d'un aimant permanent, nous avons :

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_{re}$$

$\vec{B}_{re}$  : Vecteur induction magnétique rémanente [T].

L'équation (II.5) détermine la relation entre le champ magnétique et l'induction magnétique. Cette relation donne la courbe d'aimantation  $B = f(H)$ .

Une variation de  $\vec{H}$  conduit à une variation de l'induction  $\vec{B}$ , on trouve par la suite le cycle d'hystérésis dont la forme se diffère d'un matériau à un autre; donc d'un dispositif électrotechnique à un autre.

### II.3. FORMULATION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUES

Les équations qui décrivent le couplage électromagnétique entre les effets magnétiques et électriques peuvent être dans certains cas découplés en donnant naissance à des modèles plus simples qui sont, [15] :

- Modèle électrostatique.
- Modèle magnétostatique
- Modèle électrocinétique
- Modèle magnétodynamique.

Les équations se découpent alors en modèles plus simples.

Par ailleurs, dans le cadre de notre travail, seul le modèle magnétodynamique sera considéré et détaillé, de fait de son adaptation à la modélisation des systèmes de chauffage par induction.

#### II.3.1. Le modèle électrostatique

Dans ce modèle, le champ  $\vec{E}$  est produit par des charges stationnaires qui ne varient pas en terme de répartition, et de valeur avec le temps. Ce modèle est régi par les équations suivantes [16] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad ; \quad \text{car} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \\ \text{div} \vec{D} = \rho \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right.$$

La relation :  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$  permet de définir une fonction auxiliaire U appelée potentiel scalaire électrique, tel que :  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} U$

Ce modèle se ramène alors à l'équation suivante :

$$\text{div} (\epsilon \vec{\text{grad}} U) + \rho = 0$$

### II.3.2. Le modèle électrocinétique

Ce modèle est utilisé dans l'étude de la répartition du courant électrique de conduction dans des conducteurs isolés soumis à des différences de potentiel continues [16].

Il est régi par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \\ \text{div} \vec{J} = 0 \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{array} \right.$$

La relation :  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$  ; implique qu'il existe encore un potentiel électrique scalaire U (tension électrique), tel que :  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} U$

Le modèle se ramène alors à :

$$\text{div} (\sigma \vec{\text{grad}} U) = 0$$

### II.3.3. Le modèle magnétostatique

Dans ce modèle, le terme  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  de l'équation (II.3) est nul. Ceci s'explique par le fait que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps [16].

Dans le cas de ce modèle, deux sortes de formes, peuvent l'exprimer. Il s'agit de :

#### II.3.3.1. Le modèle magnétostatique scalaire

Dans ce cas, les courants électriques sont nuls, il vient alors que les champs ne dépendent pas du temps. D'après les équations (II.1) et (II.2), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{0} \quad \text{courants nuls} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{induction conservative} \end{array} \right.$$

Avec la loi du milieu,  $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_{re}$

$\vec{H}$  dérive d'un potentiel scalaire magnétique  $\Phi$ , d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire, tel que :  $\vec{H} = -\text{grad} \Phi$

Le modèle se ramène alors à l'équation :

$$\text{div} (\mu \text{grad} \Phi) = \text{div} \vec{B}_{re}$$

### II.3.3.2. Le modèle magnétostatique vectoriel

Dans le modèle magnétostatique vectorielle, les courants électriques ne sont pas nuls. Il vient alors que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

Avec la loi du milieu :  $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_{re}$

La relation  $\text{div} \vec{B} = 0$ , permet de définir une fonction vectorielle  $\vec{A}$  appelée potentiel vecteur magnétique [17], tel que :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \tag{II.8}$$

d'où le système d'équations :

$$\vec{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \vec{J} + \text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \vec{B}_{re} \right)$$

### II.3.4. Le modèle magnétodynamique

Dans ce cas, les sources du courant sont dépendantes du temps, ainsi, les champs électrique et magnétique seront alors couplés par la présence des courants induits (ou courants de FOUCAULT).

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  joue un rôle primordial, où la connaissance de  $\vec{A}$  implique la connaissance de toutes les autres grandeurs physiques où :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

En terme d'équations, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \\ \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \end{array} \right.$$

A ces équations, nous ajoutons les lois caractéristiques au milieu

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right.$$

C'est à partir de ces équations de base de ce modèle que nous pouvons déterminer l'équation décrivant l'évolution des phénomènes électromagnétiques dans un dispositif où l'ensemble des champs présents sont en fonction explicite ou implicite de l'espace et du temps.

L'utilisation de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques, des dispositifs du chauffage par induction, des transformateurs, ... etc.

#### **II.4.FORMULATION DE L'EQUATION MAGNETODYNAMIQUE**

➤ Une formulation de potentiel vecteur magnétique : les raisons de ce choix

Pour le calcul numérique, différents choix de variables d'état aboutissant à des formulations différentes sont possibles. Les formulations en potentiels en particulier, sont toute fois mieux adaptées aux éléments finis.

Par ailleurs, dans le cadre du chauffage par induction, les avantages présentés par ce type de formulation sont nombreux :

- Elle permet d'imposer des sources électriques proches des procédés réels (densités de courant – différences de potentiels),
- La réaction d'induit est directement prise en compte,
- La grandeur utile pour le chauffage, a savoir, la densité de puissance induite, est directement liée à la variable d'état, bénéficiant ainsi d'un maximum sur la précision.

En se basant sur les équations de J. C. MAXWELL, on peut formuler l'équation qui décrit l'évolution spatiale- temporelle des phénomènes électromagnétiques.

Nous avons :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Avec :  $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$

On obtient:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{A})$$

$$= -\vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  est un champs conservatif, il dérive donc d'un potentiel scalaire électrique U,

tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} U \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} U\right) \quad \text{(II.9)}$$

A partir de l'équation (II.1) et de l'équation (II.5) nous avons :

$$\vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{B}\right) = \vec{J}$$

A partir des équations (II.7), (II.8), et (II.9) nous avons :

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}} \vec{A}\right) = \vec{J}_{\text{ex}} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma(\vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}} \vec{A}\right) = \vec{J}_{\text{ex}} - \sigma\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} U\right) + \sigma(\vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}} \vec{A}\right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\text{grad}} U - \sigma(\vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{J}_{\text{ex}}$$

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  ne peut pas être défini par la seule condition  $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$  ; on doit fixer sa divergence pour assurer l'unicité de la solution de l'équation aux dérivées partielles (E.D.P).

On ajoute alors la condition  $\text{div} \vec{A} = 0$  ; appelée Jauge de COULOMB [16]. Nous obtenons ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}} \vec{A}\right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\text{grad}} U - \sigma(\vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{J}_{\text{ex}} \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{array} \right. \quad \text{(II.10)}$$

Les termes  $-\sigma \frac{\vec{\partial A}}{\partial t}$  et  $\sigma(\vec{\nabla} \wedge \text{rot } \vec{A})$  représentent les densités des courants induits.

Ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace des phénomènes électromagnétiques, tandis que le terme  $(-\sigma \text{grad } U)$  décrit la densité du courant dépendante des conditions électriques imposées aux extrémités des conducteurs.

U peut être considéré comme nul [16]. Nous observons que la relation (II.10) définissant une équation locale qui devra être systématiquement adaptée à la région à laquelle s'applique.

Enfin, la définition complète du problème magnétodynamique doit prendre en compte les conditions aux limites du type :

-DIRICHLET dans son cas générale :  $A=A_0$

-NEUMANN (homogène) dans son cas particulier :  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$

Dans le cas où la pièce à chauffer est immobile par rapport à l'inducteur et U est considérée uniformément nulle, l'équation (II.10) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \sigma \frac{\vec{\partial A}}{\partial t} = \vec{J}_{\text{ex}} \\ \text{div } \vec{A} = 0 \end{array} \right. ; \quad v = \frac{1}{\mu} : \text{réflectivité magnétique} \quad \text{(II.11)}$$

➤ Cas de dispositifs alimentés en courant harmonique

On suppose que la perméabilité  $\mu$  ne dépend pas de l'induction magnétique; si les courants d'excitation sont de nature alternative, on peut utiliser une représentation de FRESNEL pour modéliser leur variation temporelle.

L'utilisation des nombres complexes permet alors de remplacer le terme :

$$\sigma \frac{\vec{\partial A}}{\partial t} \text{ par } i\omega \sigma \vec{A}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Avec  $i$  : Unité imaginaire ( $i^2 = -1$ ),

$\omega$  : Pulsation des sources [rd/s].



D’ou l’équation (II.11) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) + i \omega \sigma \vec{A} = \vec{J}_{\text{ex}} \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{array} \right.$$

➤ Cas de dispositifs alimentés en courant transitoire

Dans le cas d’une alimentation en courant transitoire, le traitement du système d’équations caractéristiques, nécessite une discrétisation en pas à pas dans le temps (échantillonnage temporel).

Si un algorithme du type EULER explicite est adopté, nous aurons : à chaque pas de temps  $\Delta t_i$  [8] :

$$J_i = \frac{J_i - J_{i-1}}{\Delta t_i}$$

Ainsi :

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{A_i - A_{i-1}}{\Delta t_i}$$

L’expression de la dérivée  $(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$  doit être alors remplacée dans le système d’équation (II.11)

et, les calculs auront être effectués à chaque pas du temps ( $\Delta t_i$ )

## II.5. LE MODELE CYLINDRIQUE AXISYMETRIQUE EN ELECTROMAGNETISME

Une grande partie de problèmes magnétiques peut être traité en bidimensionnel, ce qui est le cas du problème des systèmes sur lesquels nous appliquerons notre modèle de couplage proposé.

Rappelons brièvement l’existence des deux types de systèmes bidimensionnels : ceux infiniment longs alimentés suivant une direction ( $oz$ ), et ceux à symétrie de révolution alimentés selon la direction ( $o\phi$ ).

Dans le premier cas, le champs électrique  $\vec{E}$  n’a qu’une composante suivant la direction infiniment longue ( $oz$ ). Le champ magnétique,  $\vec{B}$  quant à lui, présente deux composantes suivant ( $or$ ) et ( $o\phi$ ) dans le plan perpendiculaire à  $\vec{J}_{\text{ex}}$  (densité des courants sources), impliquant ainsi une composante pour le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  suivant la direction ( $oz$ ).

Dans le deuxième cas, les courants  $\vec{J}_{ex}$ , sont dirigés suivant l'angle  $\varphi$  du système de coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$ , le champ magnétique possède alors deux composantes, l'une suivant la direction  $(or)$ , et l'autre suivant la direction  $(oz)$ , imposant ainsi pour le potentiel une seule composante  $A_\varphi$  (désignée par la suite  $A$ ). Ainsi, les dispositifs de chauffage par induction comportent généralement une symétrie de révolution qui préconise l'utilisation des coordonnées cylindriques axisymétriques. Lorsque les pièces à chauffer présentent une telle symétrie, il arrive fréquemment que le procédé de chauffage consiste à faire tourner la pièce dans un inducteur, de façon à homogénéiser le champ de température sur tout le pourtour :

Dans une telle configuration, l'hypothèse d'une modélisation axisymétrique est séduisante, puisqu'elle suppose que l'inconnue est invariante par rotation et prend donc en compte, implicitement, l'hypothèse d'homogénéité de la température due à la rotation.

Rappelons l'équation magnétodynamique **(II.11)**, dans le cas où la pièce à chauffer serait immobile par rapport à l'inducteur.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_{ex} \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{array} \right.$$

Lorsque le courant est orienté suivant la direction  $(o\varphi)$ , il s'agit de la composante azimuthale ( $A_\varphi$ ) du vecteur  $\vec{A}$ . Dans une telle configuration, les courants sont perpendiculaires au plan d'étude,  $(r, z)$ .

Les différentes grandeurs vectorielles s'écrivent alors de manière suivante :

$$\vec{J}_{ex} : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ J_\varphi & \vec{e}_\varphi \\ 0 & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{E} : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ E_\varphi & \vec{e}_\varphi \\ 0 & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{A} : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ A_\varphi & \vec{e}_\varphi \\ 0 & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{B} : \begin{cases} B_r & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ B_z & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{H} : \begin{cases} H_r & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ H_z & \vec{e}_z \end{cases}$$

Comme le vecteur  $\vec{A}$  est confondu avec sa composante  $A_\varphi$ , sa divergence est donc naturellement nulle (la jauge de COULOMB  $\text{div } \vec{A} = 0$ )

Sachant qu'en coordonnées cylindriques axisymétriques; nous avons :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left( -\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{1}{r} \cdot 0 \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left( -\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left( -\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left( -\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

et

$$\vec{\text{rot}} (\text{vrot } \vec{A}) = \left[ -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\text{v}}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \text{v} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \right] \vec{e}_\varphi$$

Remplaçant la grandeur  $rA_\varphi = rA$  par la grandeur  $A^*$  l'équation électromagnétique(II.11), prenne la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\text{v}}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\text{v}}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial A^*}{\partial t} = -J_{\text{ex}} \quad \text{(II.12)}$$

$A^* = A^*(r, z, t)$  est le potentiel vecteur magnétique modifié.

C'est une équation aux dérivées partielles, décrivant le comportement d'un dispositif cylindrique axisymétrique. Sous l'hypothèse que les matériaux sont linéaires, et que les sources d'alimentation sont sinusoïdales, les formulations magnétodynamiques peuvent être résolues en utilisant la notation complexe, permettant ainsi la prise en compte du terme dérivée  $\frac{\partial A^*}{\partial t}$

et son remplacement par l'expression  $i\omega A^*$ , d'où l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - i \omega \frac{\sigma}{r} A^* = -J_{ex} \\ A^* = r A_{\phi} \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

## II.6. DIFFERENTES TECHNIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Il existe deux grandes catégories de méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles mathématiques caractérisant les problèmes physiques, lorsqu'il s'agit de calculer des effets dont les causes (densité du courant (tension), densité de la puissance dissipée) sont connues à l'avance. Ces méthodes sont :

- Les méthodes analytiques,
- Les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques, s'avèrent d'application très difficiles dès que la complexité de la géométrie s'accroît et que certains matériaux, dans des conditions de fonctionnement optimales, présentent des non-linéarités physiques, donc mathématiques [17], [18].

L'apparition des ordinateurs, de grandes puissances, a mis en valeur l'intérêt des méthodes dites numériques. Celles ci font appel à des techniques de discrétisation

Ces méthodes numériques transforment les équations aux dérivées partielles (EDP) à des systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation de l'inconnue en différenciant points situés aux nœuds du réseau géométrique correspondant à la discrétisation. Parmi ces méthodes, nous citons la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis, la méthode des intégrales de frontières et la méthode des circuits couplés,...etc

### II.6.1. Méthode des différences finies (MDF)

La MDF est basée sur la discrétisation du domaine d'étude et le développement limité en séries de Taylor de la fonction à déterminer en chacun des nœuds du maillage. Ainsi, l'équation différentielle est transformée en équations algébriques en chacun des nœuds. L'écriture de cette transformation pour tous les nœuds du maillage conduit à un système algébrique dont la solution permet d'obtenir la distribution de l'inconnue dans le domaine d'étude. Cette méthode s'adapte mal aux objets de géométrie complexe à cause de la rigidité du maillage. D'autre part, la prise en compte des conditions de symétrie, de passage d'un milieu physique à un autre (fer, air, etc,...) et des non linéarité (saturation) nécessite un traitement spécifique, [19].

- **Avantages** : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul
- **Inconvénients** : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

### **II.6.2.Méthode des éléments finis (MEF)**

La méthode des éléments finis (MEF) est utilisée pour la résolution des équations différentielles dans le domaine des sciences des ingénieurs. Le principe de la méthode consiste à subdiviser le domaine d'étude en régions élémentaires (éléments finis) et à représenter l'inconnue par une approximation polynomiale dans chacune de ces régions, ensuite, l'erreur due à l'approximation doit être minimisée. La MEF est une méthode très puissante pour la résolution des équations différentielles surtout dans les géométries complexes. Sa mise en œuvre par contre, est assez compliquée et demande une place mémoire assez importante, [20], [21].

- **Avantages** : traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.
- **Inconvénient** : complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.

### **II.6.3.Méthode des intégrales de frontières (MIF)**

Lorsqu'on utilise la MDF ou la MEF, on calcule les variables inconnues dans tout le domaine. La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine. Pour ramener le problème sur les frontières, la MIF utilise le théorème d'Ostrogradski - Green. Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure 3D ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude, [22], [23], [24]. Cependant, cette méthode a l'inconvénient de conduire à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls). Ceci augmente le temps utilisateur, donc le coût de calcul.

### **II.6.4.Méthode des circuits couples (MCC)**

La MCC permet de fournir la solution d'une EDP par une expression intégrale du type loi de BIOT et SAVARD.

Dans ce cas, on associe à la forme intégrale de la solution, une subdivision de l'inducteur en spires élémentaires [25], [26].

En appliquant les lois de KIRCHOFF à ces circuits élémentaires, on aboutit à un système d'équations algébriques dont la solution conduit à la distribution des densités du courant.

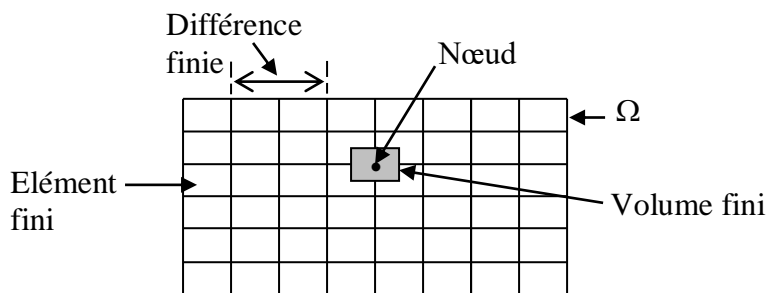
La MCC peut être couplée à une méthode numérique de discrétisation type MEF ou MDF de la charge.

**II.6.5. Méthode des volumes finis (MVF)**

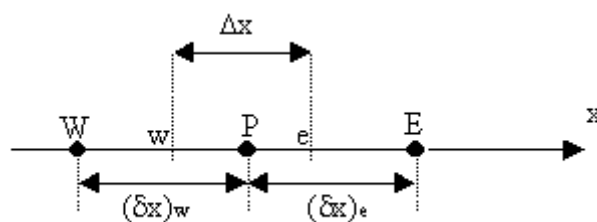
La MVF est une méthode de discrétisation. Elle est utilisée, en particulier en mécanique des fluides où elle est apparue il y a une vingtaine d'années. Depuis, cette méthode a connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation d'autres branches de l'ingénierie scientifique l'électromagnétisme, le thermique, etc....

L'analyse mathématique de la méthode des volumes finis a permis de développer récemment les principes fondamentaux qui en font une méthode de discrétisation performante. L'idée de base de la formulation des volumes finis est facile à comprendre et permet de donner l'interprétation physique des phénomènes, [27].

Le domaine du calcul est subdivisé en un nombre d'éléments finis voir figure (II.1)



**Fig II.1 .** Maillage du domaine d'étude.



**Fig II.2 .** Discrétisation en volumes finis dans le cas monodimensionnel.

L'EDP est intégrée sur chacun des volumes élémentaires.

Chaque élément contient quatre nœuds pour le cas bidimensionnel. Un volume fini entoure chaque nœud. L'équation différentielle est projetée sur une fonction de projection bien déterminée et ensuite elle est intégrée dans chacun des volumes élémentaires.

Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, puissance, exponentielle, etc....) entre deux nœuds consécutifs. La forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'études. L'équation discrétisée de cette façon exprime le principe de conservation pour l'inconnue dans l'élément de volume et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales. Des méthodes itératives telles que la méthode de Gauss Seidel, Jacobi ou Newton Raphson peuvent être appliquées pour la résolution du système d'équations [27].

➤ **Avantages** : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.

➤ **Inconvénient** : peu de résultats théoriques de convergence.

Grâce à un libre choix de la fonction de liaison entre nœuds consécutifs, la procédure conduit à une solution plus précise que celle fournie par la MDF.

## **II.7.CONCLUSION.**

Dans ce chapitre, partant des lois de base caractérisant les phénomènes électromagnétiques et présents dans les dispositifs de chauffage par induction, des modèles mathématiques ont été établis, dans leurs formes générales. Ensuite, et en liaison avec le type d'applications à traiter, le cas cylindrique axisymétrique considéré comme un cas particulier, a été détaillé. Une fois, ces modèles mathématiques établies, nous proposons, ainsi de décrire dans le prochain chapitre, les modèles numériques optés pour la résolution des équations mathématiques finales décrivant l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes physiques présents dans les dispositifs de chauffage par induction.

**Chapitre III :**  
***Modèles Numériques Et Modèles  
Mathématico-Numériques Développés***



### III.1. INTRODUCTION

Nous présentons dans ce chapitre un aperçu sur la méthode des volumes finis, utilisée pour la résolution des deux équations aux dérivées partielles établies au chapitre précédent. Il s'agit de l'équation magnétodynamique linéaire, en régime harmonique. Ceci sera suivi par la définition des conditions aux limites et un exposé sur les difficultés rencontrées lors de définition du domaine d'étude.

Les méthodes de résolutions des systèmes algébriques seront aussi présentées.

### III.2. RESOLUTION DES EQUATIONS ELECTROMAGNETIQUE PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS

La méthode des éléments finis (MEF) est la méthode la plus utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Sa mise en œuvre, par contre, est assez compliquée.

Nous avons donc opté pour la méthode des volumes finis (MVF) qui, selon plusieurs auteurs [26], [27] donne de meilleures convergences pour les équations de conduction avec un terme de vitesse.

De plus, elle est moins difficile à réaliser est simple à concevoir que la méthode des éléments finis (MEF).

La méthode des volumes finis connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation d'autres branches de l'ingénierie scientifique : transfert thermiques, électromagnétisme...etc. L'analyse mathématique de la méthode des volumes finis à récemment permis de développer les principes fondamentaux qui font d'elle une méthode de discrétisation performante.

La méthode des volumes finis peut être vue comme étant une variante de la méthode de collocation par sous-domaines [27]. Le domaine d'étude ( $\Omega$ ) est divisé en un nombre d'éléments. Chaque élément contient quatre nœuds du maillage. Un volume fini entoure chaque nœud du maillage (Figure III.1). L'équation au dérivé partielle (EDP) est intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle...) entre deux nœuds consécutifs.

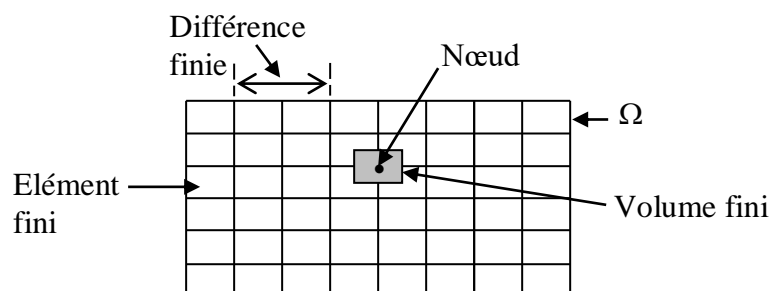


Fig. III.1. Maillage du domaine d'étude.

➤ Description d'un volume fini

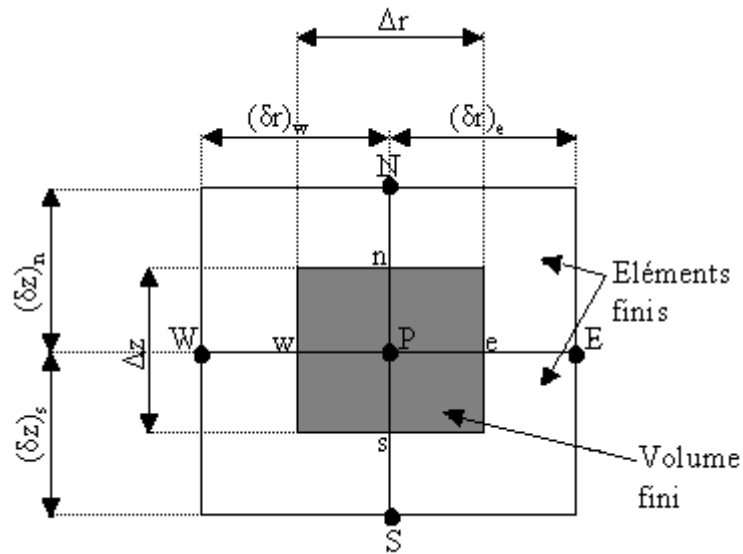


Fig. III.2. Description d'un volume fini.

Chaque nœud principal P est entouré par quatre nœuds voisins : celui du nord N, du sud S, De l'est E et celui de l'ouest W.

Le volume fini est délimité par les points (e : est, w : ouest, n : nord, s : sud) [17].

### III.2.1. Discrétisation de l'équation magnétodynamique linéaire en régime harmonique

Rappelons l'équation magnétodynamique linéaire, en régime harmonique :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - i \omega \frac{\sigma}{r} A^* = -J_{ex}$$

La projection de cette équation aux dérivées partielles sur une base de fonctions de projection  $\beta_i$ , et son intégration sur le volume fini, correspondant au nœud P, donne :

$$\iint_{zr} \beta_i \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) \right] r dr dz = \iint_{zr} \beta_i \left[ i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] r dr dz \quad (III.1)$$

$\beta_i$  Est la fonction de projection choisie égale à  $1/r$

Rappelons que pour la méthode des éléments finis,  $\beta_i = \alpha_i / r$ ,  $\alpha_i$  est la fonction d'interpolation dans le cas de la méthode projective de GALERKINE.

Après substitution de l'expression de  $\beta_i$ , L'équation (III.1), prenne la forme suivante :

$$\iint_{zr} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) \right] dr dz = \iint_{zr} \left[ i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] dr dz \quad (III.2)$$

L'intégrale de la partie gauche de l'équation (III.2) sur le volume fini, délimité par les frontières (e, w, s, n) est :

$$\int_{sw}^{ne} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) dr dz + \int_{sw}^{ne} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) dr dz \quad (III.3)$$

Après intégration nous aurons :

$$\left[ \left( \frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right)_n - \left( \frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right)_s \right] \Delta r + \left[ \left( \frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right)_e - \left( \frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right)_w \right] \Delta z$$

Avec :

$$r_e = r_p + \frac{\Delta r}{2}, \quad r_w = r_p - \frac{\Delta r}{2}, \quad \Delta r = r_e - r_w$$

$$z_n = z_p + \frac{\Delta z}{2}, \quad z_s = z_p - \frac{\Delta z}{2}, \quad \Delta z = z_n - z_s.$$

Un profil linéaire à été choisi exprimant la variation de  $A^*$  entre les nœuds voisins. Le résultat obtenu est constitué uniquement de valeurs nodales. Ainsi, on obtient :

$$\left[ \frac{v_n}{r_n} \frac{(A_n^* - A_p^*)}{(\delta z)_n} - \frac{v_s}{r_s} \frac{(A_p^* - A_s^*)}{(\delta z)_s} \right] \Delta r + \left[ \frac{v_e}{r_e} \frac{(A_e^* - A_p^*)}{(\delta r)_e} - \frac{v_w}{r_w} \frac{(A_p^* - A_w^*)}{(\delta r)_w} \right] \Delta z$$

$$= \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n} A_n^* + \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s} A_s^* + \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e} A_e^* + \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} A_w^* - \left( \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n} + \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s} + \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e} + \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} \right) A_p^*$$

Posons :

$$b_n = \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n}, \quad b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s}, \quad b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e}, \quad b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w}$$

Ainsi, on obtient :

$$\Rightarrow b_e A_e^* + b_w A_w^* + b_n A_n^* + b_s A_s^* - (b_e + b_w + b_n + b_s) A_p^* \quad (III.3)$$

L'intégrale de la partie droite de l'équation (III.2) sur le volume fini, délimité par les frontières (e, w, s, n) est :

$$\int_{sw}^{ne} \left[ i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] dr dz = i \omega \sigma_p (\ln r)_w^e \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z$$

$$= i \omega \sigma_p (\ln r_e - \ln r_w) \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z$$

$$= i \omega \sigma_p \ln \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z$$

$$\begin{aligned}
 &= i\omega \sigma_p \ln \left( \frac{r_p + \frac{\Delta r}{2}}{r_p - \frac{\Delta r}{2}} \right) \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\
 &= i\omega \sigma_p \ln \left( \frac{r_p \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_p}\right)}{r_p \left(1 - \frac{\Delta r}{2r_p}\right)} \right) \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\
 &= i\omega \sigma_p \left[ \ln \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_p}\right) - \ln \left(1 - \frac{\Delta r}{2r_p}\right) \right] \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z
 \end{aligned}$$

or, le développement de la fonction  $\ln(1+x)$  est donnée par :  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots (-1)^n \frac{x^{(n+1)}}{n+1}$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \iint_{sw}^{ne} \left[ i\omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] dr dz &= i\omega \sigma_p \left[ \frac{\Delta r}{2r_p} - \left(-\frac{\Delta r}{2r_p}\right) \right] \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\
 &= i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \tag{III.4}
 \end{aligned}$$

La substitution des deux expressions trouvées (III.3), (III.4) dans l'équation (III.2) donne l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned}
 b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* - (b_e + b_w + b_n + b_s) A_P^* &= i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\
 \Rightarrow \left( b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z \right) A_P^* &= b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* + J_{ex} \Delta r \Delta z
 \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n}, \quad b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s}, \quad b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e}, \quad b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} \\
 b_p &= b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z, \quad d_p = J_{ex} \Delta r \Delta z
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation algébrique finale s'écrit alors sous la forme :

$$b_p A_P^* = b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* + d_p \tag{III.5}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n}, \quad b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s}, \quad b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e}, \quad b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} \\
 b_p &= b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z, \quad d_p = J_{ex} \Delta r \Delta z
 \end{aligned}$$

Si la discrétisation du domaine comporte N nœuds, on est amené à étudier un système de N équations à N inconnues.

La forme matricielle de ce système d'équation s'écrit sous la forme :

$$[M+iL]\{A^*\} = \{F\}$$

Où :

$[M+iL]$  : Matrice coefficients,

$\{A^*\}$  : Vecteur inconnu,

$\{F\}$  : Vecteur source.

#### ❖ Conditions aux limites

Dans l'étude précédente, nous avons établi les équations des nœuds internes. Pour les limites

Du domaine d'étude, il existe deux façons d'introduire les conditions aux limites :

- Condition de DIRICHLET : cette condition impose les valeurs de A aux bords du domaine d'étude. Ces valeurs sont prises nulles par la considération de l'infini physique.
- Condition mixte de DIRICHLET-NEUMANN : elles sont utilisées dans le cas où le système à étudier présente des plans de symétrie. Le problème mixte de DIRICHLET-NEUMANN impose les valeurs de A nulles aux bords infinis du domaine d'étude ( $\Omega$ ) et celles de  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$  au niveau des plans de symétrie (plans de coupes) où n représente la normale au plan de coupe.

#### ❖ Difficultés liées aux conditions aux limites

Ce problème se pose essentiellement lors de la définition du domaine d'étude de l'équation électromagnétique.

Mathématiquement, ce domaine est infini puisque tout point de l'espace subit l'influence d'une distribution de courant située dans celui-ci.

Le fait d'imposer des frontières finies pour fermer ce domaine et d'annuler la valeur du potentiel ou du flux sur celles-ci, peut fortement influencer la résolution.

Le test le plus couramment consiste à faire un premier calcul en annulant la valeur du potentiel A sur les frontières de fermeture (conditions de DIRICHLET), puis d'effectuer un second calcul en annulant la valeur du potentiel vecteur magnétique sur ces frontières (condition de NEUMANN homogène).

Si les résultats de ces deux résolutions sont identiques, le domaine d'étude choisi est bien correct.

**III.3. METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS ALGEBRIQUES**

Pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires, il existe deux grandes catégories de méthodes [27] :

- Les méthodes directes
- Les méthodes itératives

**III.3.1.Méthodes directes**

Ces méthodes conduisent à une solution en un nombre fini d'étapes (éventuellement grand), cependant, comme l'ordinateur représente chaque nombre par un ensemble limite de digits, les méthodes directes sont précis mais demandent beaucoup d'espace mémoire et de temps de calcul.

**III.3.2. Méthodes itératives**

Pour les matrices d'ordre élevé, comportant de nombreux éléments nuls (matrice creuse), on utilise les méthodes itératives qui font passer d'un estimé  $X^{(k)}$  de la solution à un autre estimé  $X^{(k+1)}$  de cette solution, s'il y a convergence, la solution ne pourrait être atteinte qu'après un nombre d'itérations. Parmi ces méthodes, nous citons :

**III.3.2.1. Méthode de JACOBI**

Elle est basée sur la transformation du système  $[A][X] = [B]$  en

$$X_i^{(k+1)} = \left[ b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^k \right] / a_{ii} \quad ; (i \neq j) , i=1, \dots, n \tag{III.6}$$

On estime une valeur arbitraire initiale  $X_i^0$  pour  $(k=0)$ , le calcul sera arrêté

si  $\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \epsilon$  Dans le cas d'une précision absolue et  $\frac{\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right|}{X_i^k} < \epsilon$  Dans le cas d'une

précision relative.

$\epsilon$  : Précision imposée par l'utilisateur.

**III.3.2.2. Méthode de GAUSS SEIDEL**

Cette méthode consiste à transformer le système  $[A][X] = [B]$  en :

$$X_i^{(k+1)} = \left[ b_i - \sum_{j=1}^{(i-1)} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=(i+1)}^n a_{ij} X_j^k \right] / a_{ii} \quad ; i=1, \dots, n \tag{III.7}$$

En donnant aux inconnues  $X_i^k$  des valeurs arbitraires initiales  $X_i^0$  (pour  $k = 0$ )

Le processus sera arrêté si :

$\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \varepsilon$  Dans le cas d'une précision absolue et  $\frac{\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right|}{X_i^k} < \varepsilon$  Dans le cas d'une précision relative.

$\varepsilon$  : Précision imposée par l'utilisateur

### III.3.2.3. Méthode de relaxation

Pour améliorer la rapidité de la convergence, si on est sûr qu'il n'y a pas divergence, dans le cas des méthodes itératives, on utilise un facteur de relaxation  $\alpha$  tel que :

$$X_i^{(k+1)} = X_i^k + \alpha (X_i^{(k+1)} - X_i^k) \quad \text{(III.8)}$$

#### ❖ Conclusion sur les méthodes itératives

Les méthodes itératives sont généralement préférées par rapport aux méthodes dites directes, pour les grands systèmes  $[A][X] = [B]$  à matrice creuse parce qu'elles ne modifient pas la matrice de rigidité  $[A]$  et que dans un grand nombre d'application, cette matrice  $[A]$  est creuse et présente une structure particulière (triangulaire) ce qui lui permet de ne pas être mémorisée explicitement et assure pratiquement la convergence.

Dans les méthodes élémentaires, la méthode de GAUSS-SEIDEL est préférée à celle de JACOBI, parce qu'elle consomme moins de mémoire et converge souvent plus vite.

La méthode de relaxation est généralement beaucoup plus rapide que celle de GAUSS-SEIDEL, même si le facteur optimal  $\alpha$  est réglé expérimentalement selon l'aspect physique du problème à traiter.

Après avoir donné les modèles numériques de calcul, l'étape suivante consiste à les implémenter sous l'environnement MATLAB.

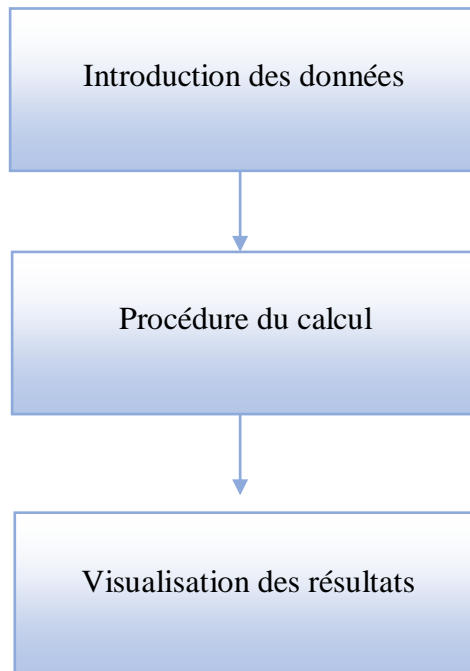
Nous exposerons le code de calcul en décrivant ses fonctions pour l'environnement magnétique.

Les programmes de résolution des équations électromagnétique sont écrits sous l'environnement MATLAB. Cet environnement présente de nombreux avantages tels que le calcul matriciel, l'interface graphique, la technique des matrices creuses qui permet la réduction de l'espace mémoire occupé par les éléments matriciels, donc une réduction du temps de calcul, et celui de l'utilisateur.

### III.4. PRESENTATION DES MODULES DU CODE DE CALCUL POUR RESOLUTION DE L'EQUATION ELECTROMAGNETIQUE.

La figure IV.1 présente l'organisation du code de calcul utilisé pour la résolution de l'équation électromagnétique. Ce code de calcul est constitué des sous-programmes suivants :

- Introduction des données,
- Procédure de calcul,
- Visualisation des résultats.



**Fig. III.3.** Organisation du code du calcul électromagnétique.

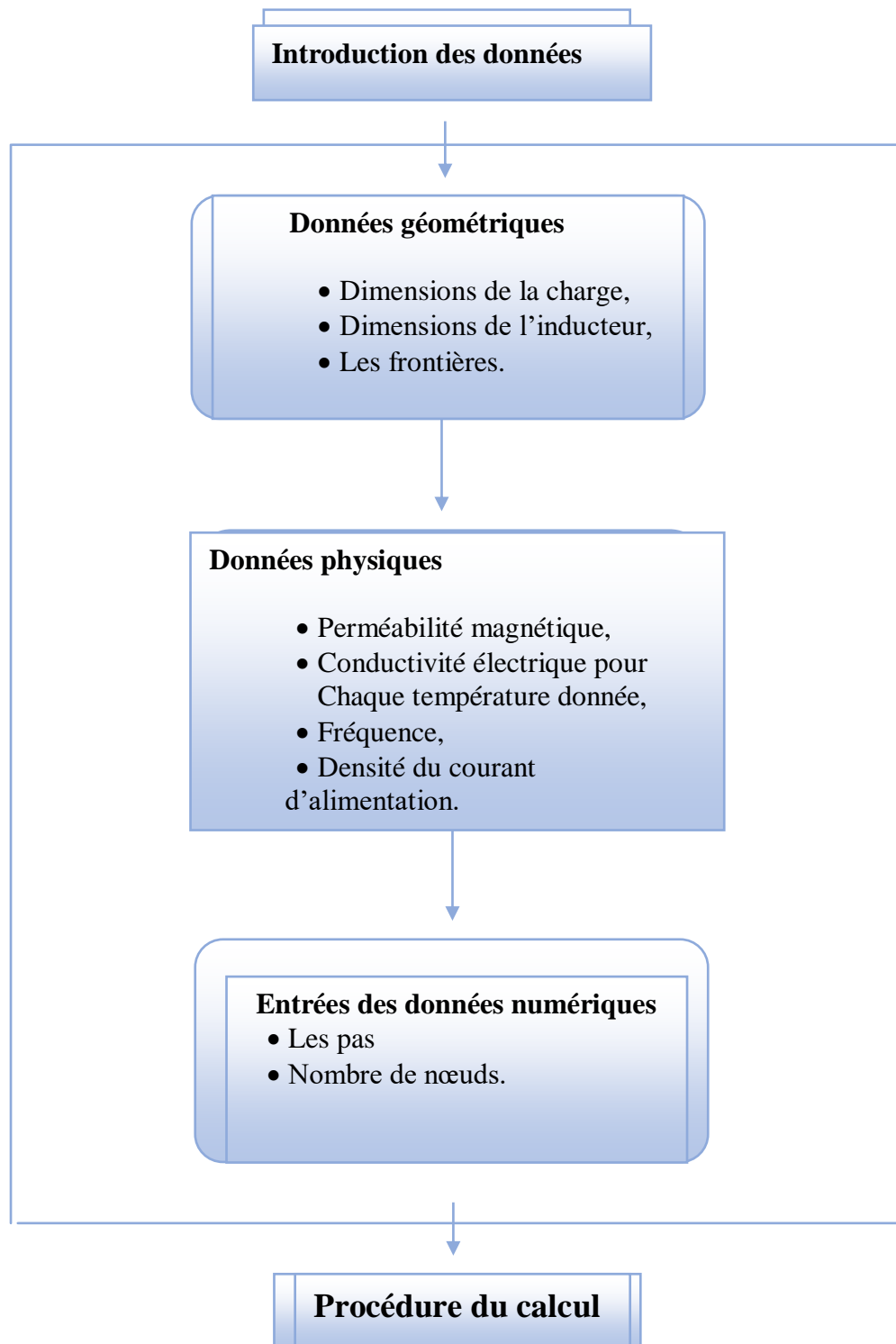
#### III.4.1. Introduction des données nécessaires à résolution de l'équation électromagnétique

Dans ce sous-programme, nous décrivons la géométrie du domaine, en introduisant les dimensions de la charge, de l'inducteur et des frontières du domaine représentant l'infini physique, aussi les propriétés physiques des matériaux, ainsi que la fréquence et la densité du courant d'alimentation.

La fonction suivante est la discrétisation en volume finis.

- La figure III.4 présente la structure du sous-programme (Introduction des données) utilisé pour la résolution d'équation électromagnétique.





**Fig. III.4.** Structure du sous-programme (Introduction des données) Pour la résolution de l'équation électromagnétique.

**III.4.2. Procédure de calcul et de la résolution de l'équation électromagnétique.**

Le modèle algébrique de l'équation magnétodynamique, présenté au troisième chapitre, sous une forme matricielle est donné par :

$$[M+iL]\{A^*\}=\{F\}$$

Où :

$[M+iL]$  : matrice coefficients,

$\{A^*\}$  : Vecteur inconnu,

$\{F\}$  : Vecteur source.

En calculant, les coordonnées des nœuds ainsi que les coefficients de la matrice du système

$[M+iL]$  et les coefficients du vecteur  $\{F\}$  tel que  $[M+iL]\{A^*\}=\{F\}$  à partir du maillage en volume finis et des propriétés physiques en chaque nœud, le modèle algébrique obtenu sera résolu par une méthode itérative, nous avons choisi la méthode de GAUSS-SEIDEL plus la méthode de RELAXATION, la solution est affectée à l'inconnue qui est la valeur du potentiel vecteur magnétique modifié  $A^*$  en chaque nœud, tel que  $A^*=rA=rA_\varphi$ .

Nous avons introduit un coefficient de sous-relaxation au niveau de l'inconnu  $A^*$  .

Tel que :

$$A_{k+1}^* = \alpha A^* + (1-\alpha) A_k^*$$

$\alpha$  : coefficient de sous-relaxation compris entre 0 et 1,

La valeur  $\alpha = 0.5$  à donner, en général, des résultats très satisfaisants.

On déduit  $A = \frac{A^*}{r}$  , r est la coordonnée radiale du nœud.

L'usage d'un coefficient de sous-relaxation dans le calcul des inconnues du système s'est révélé nécessaire pour l'accélération de la convergence [26], [27].

➤ Calcul du courant induit

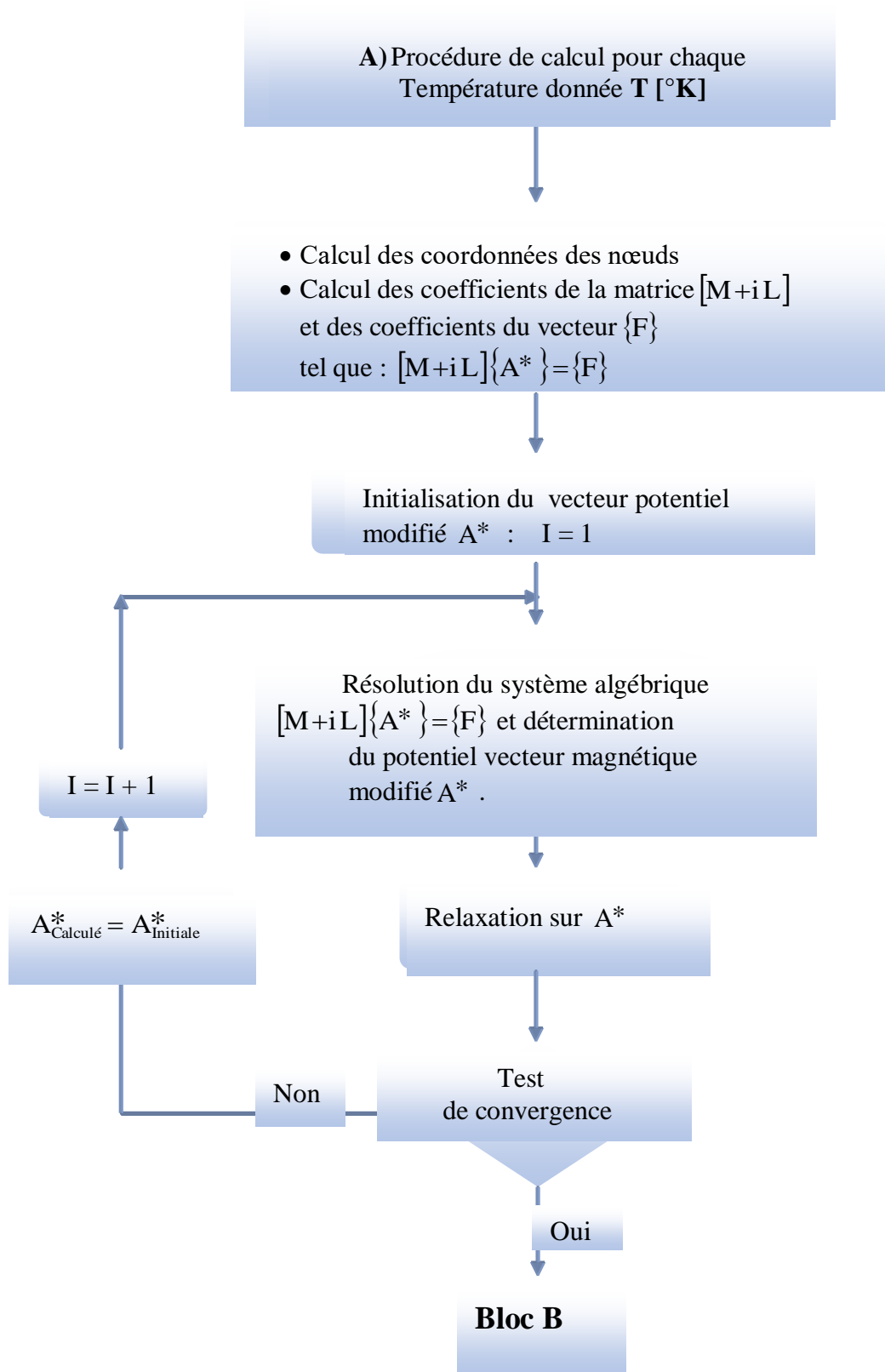
Le courant induit dans la charge est donné par :

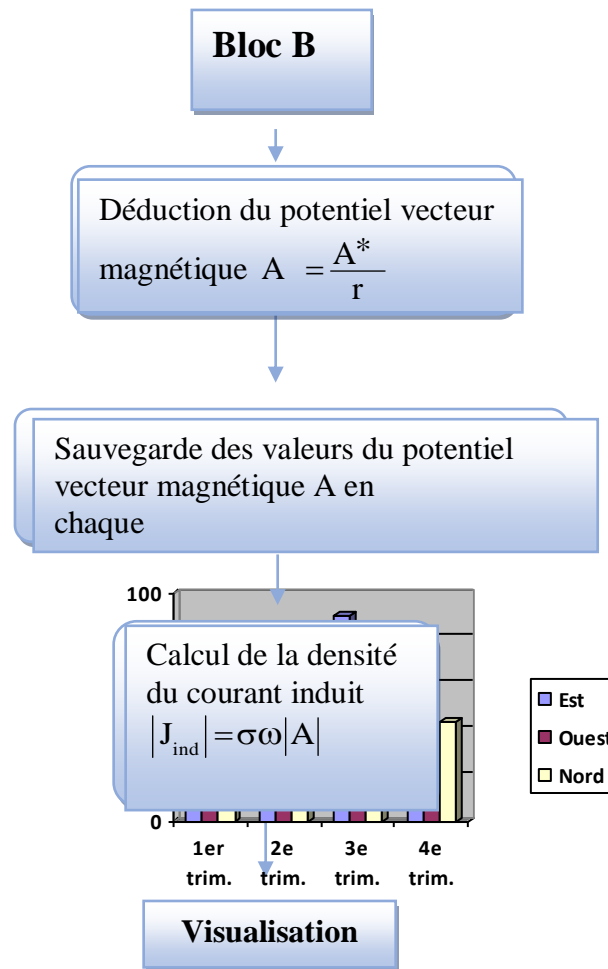
$$\vec{J}_{ind} = -i\sigma(T)\omega\vec{A}$$

Ainsi, le module de la densité du courant induit dans la charge est donné par :

$$|J_{ind}| = \sigma\omega|A| \quad [A/m^2] \quad \text{(III.9)}$$

- La figure III.5 illustre les différentes fonctions de la procédure du calcul et de la résolution De l'équation électromagnétique :



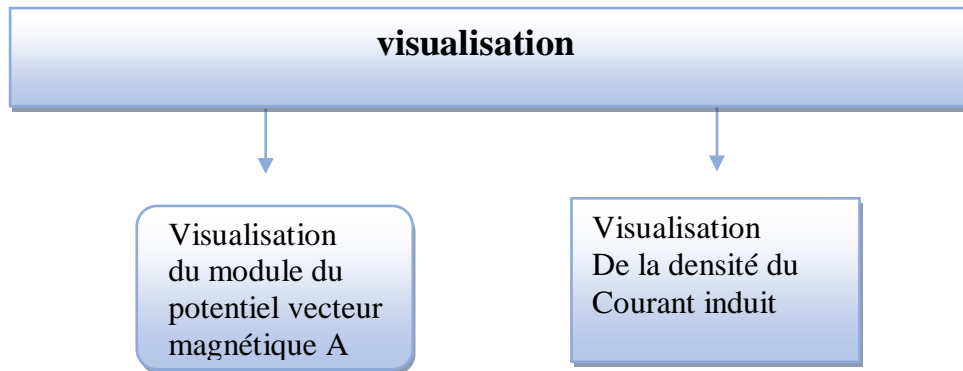


**Fig. III.5.** Structure du sous-programme (Procédure de calcul) et de la résolution de l'équation électromagnétique.

### III.4.3. Visualisation des résultats obtenus à partir de la résolution de l'équation électromagnétique.

Nous présentons les résultats à l'utilisateur, le module du potentiel vecteur magnétique A, la densité du courant induit dans la charge et la densité de la puissance induite dans la charge ainsi que la répartition spatiale du potentiel vecteur magnétique A. Nous affichons aussi la valeur de la puissance totale, ainsi que, la puissance moyenne calculée sur la région de peau, et qui constitue pour chaque valeur de température donnée la source des phénomènes thermiques.

- La figure III.6 montre les différentes fonctions de, visualisation des résultats, obtenus à partir de la résolution de l'équation électromagnétique.



**Fig. III.6.** Les différentes fonctions de visualisation des résultats Electromagnétiques.

### **III.5.CONCLUSION**

La modélisation numérique des systèmes à induction (chauffage) constitue l'outil de base pour la conception de ces systèmes.

Cette modélisation passe par la résolution numérique des équations des champs décrivant les phénomènes physiques.

Dans le cadre de notre travail, pour la résolution des systèmes d'équations algébriques en électromagnétisme établis dans ce chapitre, nous avons choisi la méthode de GAUSS-SEIDEL couplé à la méthode de RELAXATION.

Nous présentons, dans le prochain chapitre, Implémentation sous l'Environnement MATLAB des Modèles Mathématico-Numériques Développés.

**Chapitre IV :**  
***Applications et Validations***

## IV.1. INTRODUCTION

Nous proposons dans le présent chapitre des applications en vue de la validation du modèle d'étude

Nous intéressons à un dispositif de chauffage par induction dont la charge est un tube creux en acier inoxydable, mis en œuvre dans le cadre d'un travail expérimental réalisé sur le site de l'entreprise Electricité de France (EDF) [23].

## IV.2. APPLICATION : CHAUFFAGE PAR INDUCTION D'UN TUBE CREUX EN ACIER INOXYDABLE (EDF).

### IV.2.1. description du dispositif de chauffage EDF

Le système étudié comporte :

- Un inducteur en cuivre

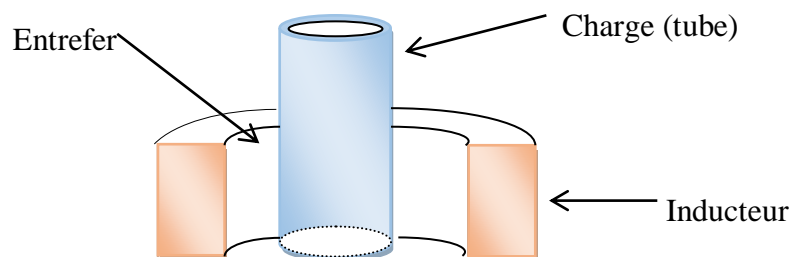
Caractéristiques	→	Dimensions
Diamètre intérieur	→	104 mm
Diamètre extérieur	→	124 mm
Hauteur	→	300 mm
Nombre de spires	→	20

- La pièce à chauffer (charge), de forme cylindrique (tube creux) :

Caractéristiques	→	Dimensions
Diamètre extérieur	→	60 mm
Epaisseur	→	4 mm
Hauteur	→	2700 mm
Diamètre intérieur	→	40 mm

- La **fig.IV.1** donne une illustration tridimensionnelle de notre application. Il s'agit d'un tube creux placé à l'intérieur de l'inducteur en cuivre.

Note : le bobinage est représenté par un conducteur cylindrique creux.



**Fig. IV.1.** Tube creux dans un inducteur de

### IV.2.2. Représentation du modèle géométrique du dispositif de chauffage EDF

En raison de la symétrie axiale du dispositif, seule une représentation bidimensionnelle du système sera considérée. Ainsi le modèle géométrique adopté comprend trois régions surfaciques :

- La pièce à chauffer (charge)
- La source de chaleur (inducteur)
- L'air environnant.

Le schéma ci-dessous présente le dispositif en coupe, dans le plan (r, z).

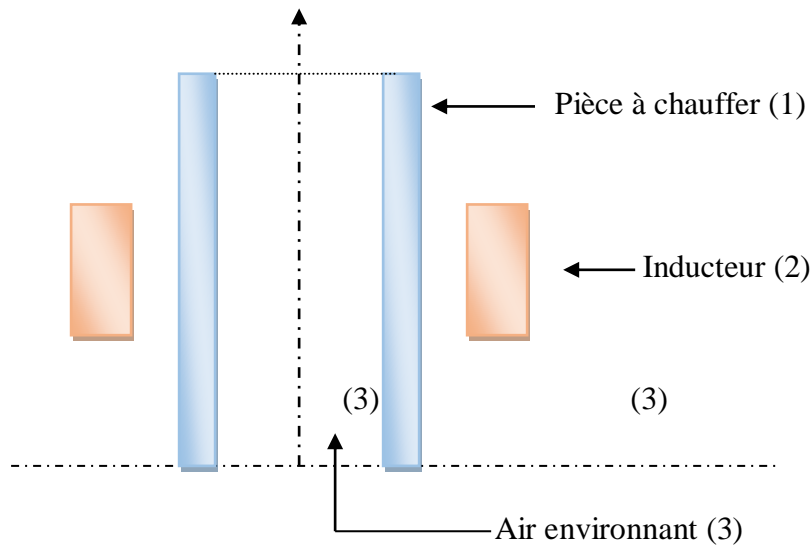


Fig. IV.2. Modèle géométrique du dispositif.

Si le terme d'étude relatif au phénomène électromagnétique comprend les régions 1,2 et 3, celui associé au phénomène thermique ne s'applique qu'à la pièce à chauffer (région 1).

### IV.2.3. Modèles des propriétés physiques

Les modèles de variation de chaque propriété en fonction de la température, désignée par l'inconnue  $T$  sont définis à partir des relevés expérimentaux dont nous disposons sur un échantillon du matériau constituant la pièce à chauffer.

#### ❖ Données électromagnétiques

##### ➤ Perméabilité magnétique relative

Dans le cas particulier d'un matériau amagnétique tel que l'inox,  $\mu_r=1$ . La variation de l'induction  $\vec{B}$  en fonction du champ magnétique  $\vec{H}$  est ici linéaire et  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .



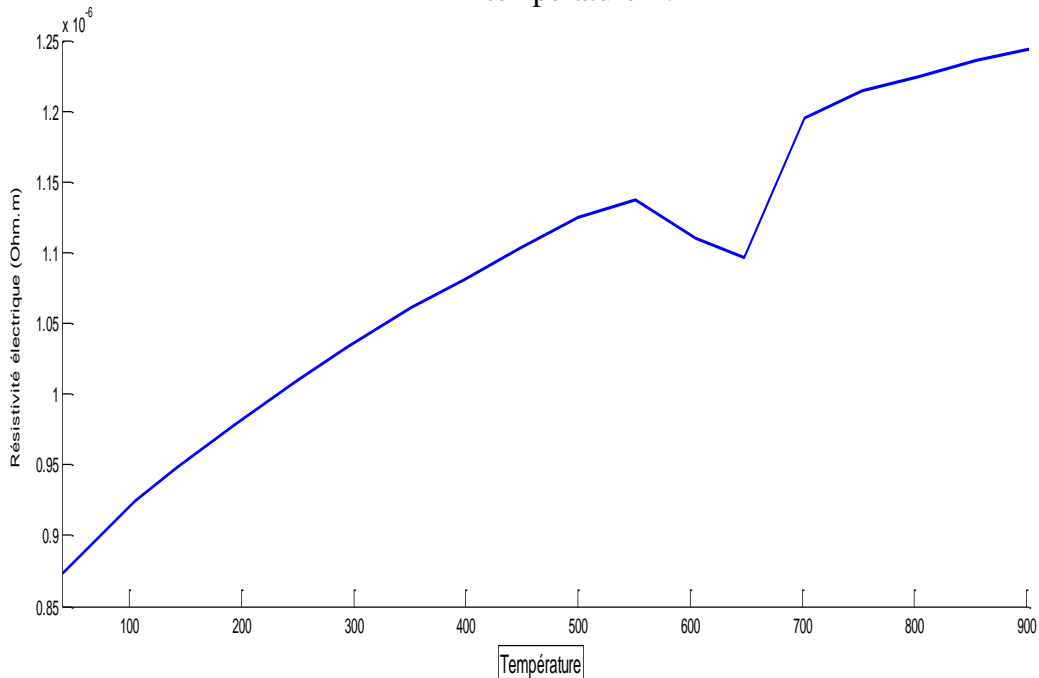
➤ Résistivité électrique

La représentation de la résistivité électrique en fonction de la température est donnée par le tableau (Tab IV.1) et la fig.IV.3.

T (°C)	40	105	142	194	249	294	352	398	449	500
$\rho_0 (\Omega .m) \times 10^{-7}$	8.729	9.237	9.478	9.789	10.09	10.33	10.61	10.81	11.03	11.25

T (°C)	551	605	648	702	753	805	855	902
$\rho_0 (\Omega .m) \times 10^{-7}$	11.37	11.10	10.96	11.95	12.14	12.25	12.36	12.44

**Tab IV.1.** La variation de la résistivité électrique de l'acier inoxydable en fonctions de la température T.



**Fig. IV.3.** Variation de la résistivité électrique de l'acier inoxydable en fonction de la température.

La loi de variation de la résistivité électrique de l'acier inoxydable à été décrite par des expressions analytiques, fonctions de l'inconnue T.

- Pour  $T \leq 551^\circ\text{C}$

$$\rho_0(T) = 8.42 \times 10^{-7} (1 + 9.73 \times 10^{-4} T - 7.76 \times 10^{-7} T^2 + 3.06 \times 10^{-10} T^3)$$

- Pour  $551^\circ\text{C} < T \leq 605^\circ\text{C}$

$$\rho_0(T) = 1.41 \times 10^{-6} (1 - 3.54 \times 10^{-4} T)$$

- Pour  $605^{\circ}\text{C} < T \leq 648^{\circ}\text{C}$   
 $\rho_0(T) = 1.31 \times 10^{-6} (1 - 2,49 \times 10^{-4} T)$
- Pour  $T > 648^{\circ}\text{C}$

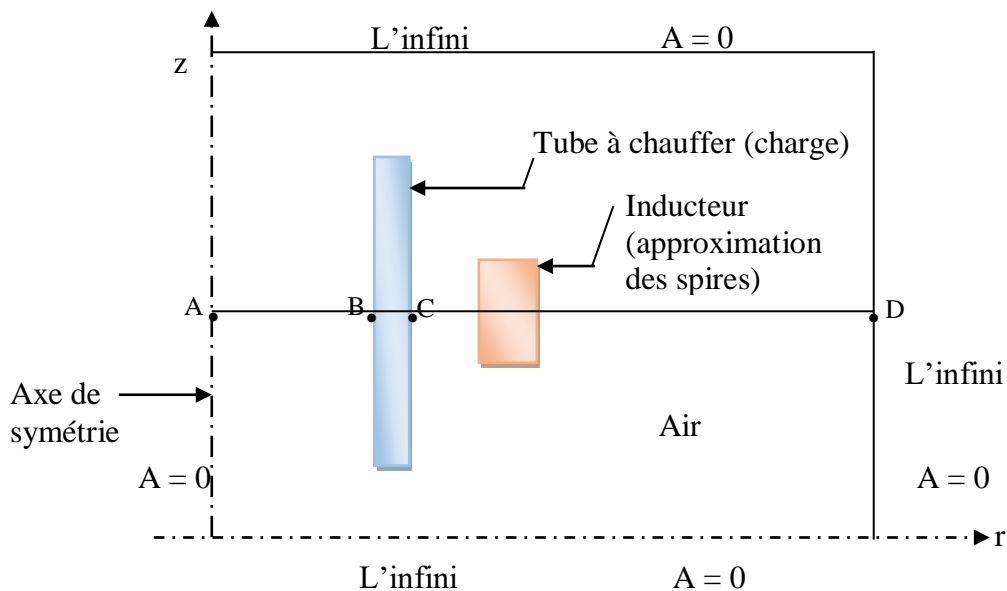
**IV.2.4. Etude du comportement électromagnétique**

**IV.2.4.1. Définition du modèle géométrique**

Le dispositif de chauffage présenté en figure IV.1 comporte un inducteur travaillant à la fréquence  $f=7500\text{Hz}$ , celui-ci est alimenté par un courant d’excitation sinusoïdal d’amplitude  $I_{\text{max}} = 350 \text{ A}$ , soit une densité de  $2.33 \text{ A /mm}^2$ .

Pour la même raison de symétrie physique et géométrique du système, seule la notation du modèle sera considérée (**Fig IV.4**).

Les conditions aux limites sont représentées sur la figure VI.6.



**Fig. IV.4.** Modèle géométrique adopté pour l’étude électromagnétique.

- **Exploitation**  
 En accord avec le raisonnement exposé au chapitre (III), on relève pour différentes température T, la variation, la distribution du potentiel vecteur A et son enveloppe dans l’espace le long du chemin (AD), (**fig.IV.4**), la densité de courant induit.

Note : la coordonnée axiale égale  $z = 1500 \text{ mm}$ .

**IV.2.4.2. Résultats du problème électromagnétiques**

Pour différentes valeurs discrètes de la température T allant de  $293 \text{ }^{\circ}\text{K}$  jusqu’à  $1255^{\circ}\text{K}$ , pour une fréquence de fonctionnement  $f = 7500 \text{ Hz}$ , pour une densité du courant d’excitation

$J_{ex} = 2.33 \text{ A/mm}^2$ , et pour  $z = 1500\text{mm}$ , les résultats du problème électromagnétiques sont déterminés.

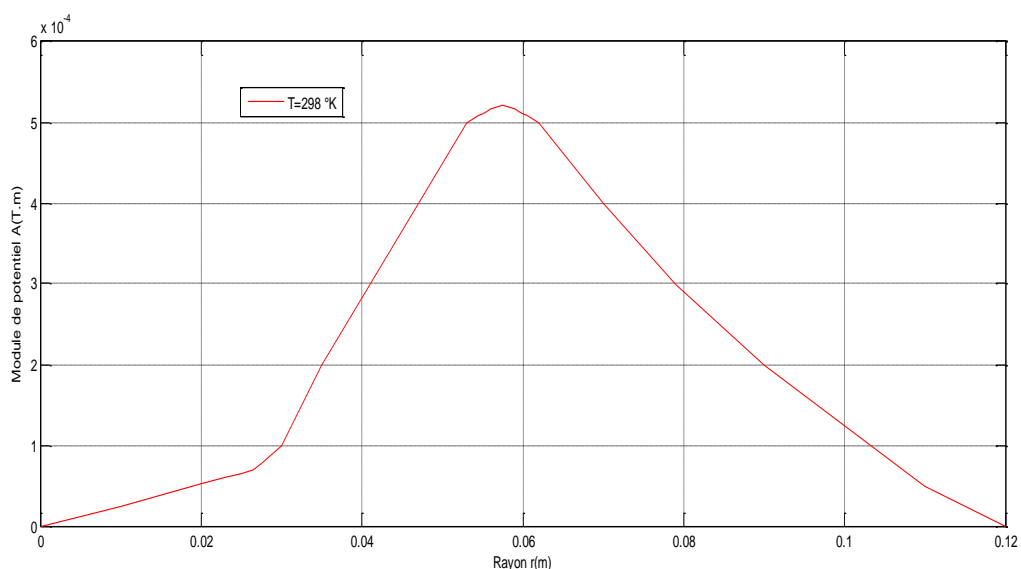
Il s'agit de :

- La variation radiale, et la répartition dans le plan  $(r, z)$ , du module du potentiel vecteur magnétique  $A$ ,
- La variation radiale, et la répartition dans le plan  $(r, z)$ , du module de la densité des courants induits dans la charge,

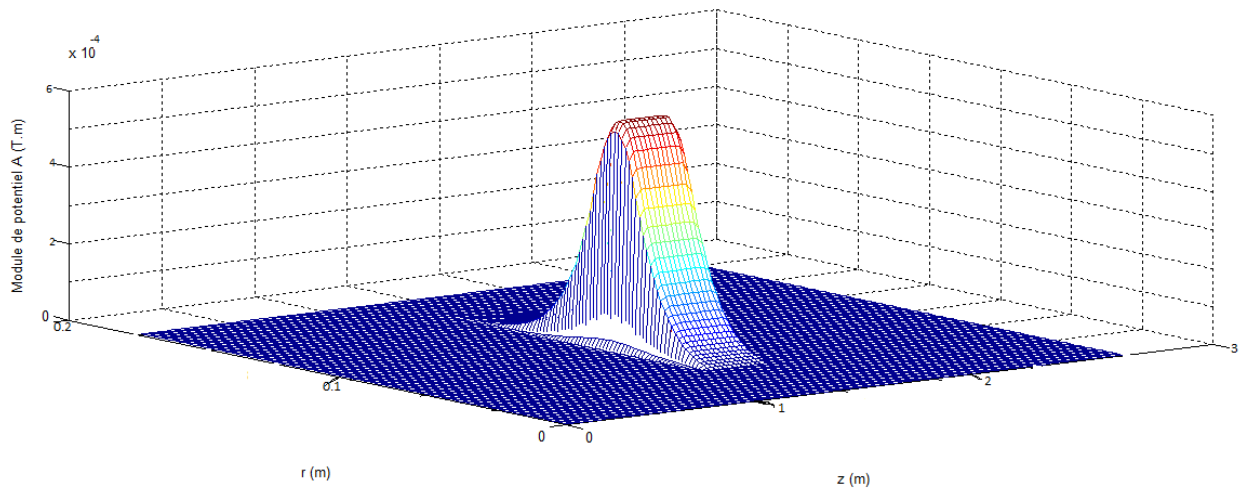
Pour bien éclaircir, et examiner pour discuter les différences entre les valeurs de ces courbes, nous avons choisi de les regrouper. Ainsi, Pour différentes valeurs discrètes de la température  $T$  allant de  $293 \text{ °K}$  jusqu'à  $1255 \text{ °K}$ , et pour une distance axiale  $z = 1500 \text{ mm}$ , la variation radiale du module : du potentiel vecteur magnétique  $A$ , de la densité des courants induits.

Soit :

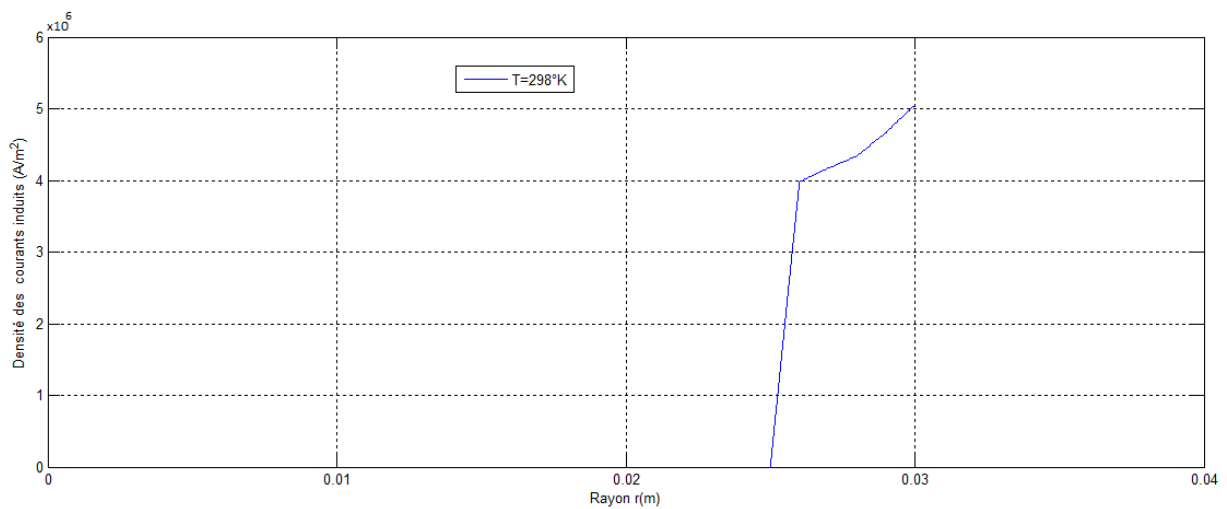
- La figure IV.5, et IV.8 présentent respectivement, La variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique  $A$  pour  $T_2 = 298 \text{ °K}$ , et pour  $T_{15} = 1200 \text{ °K}$ .
- La figure IV.6, et IV.9 présentent respectivement, la répartition du module du potentiel vecteur magnétique  $A$  dans le plan  $(r, z)$  pour  $T_2 = 298 \text{ °K}$ , et pour  $T_{15} = 1200 \text{ °K}$ .
- La Figure IV.7, et IV.10 présentent respectivement, La variation radiale du module de la densité des courants induits dans la charge pour  $T_2 = 298 \text{ °K}$ , et pour  $T_{15} = 1200 \text{ °K}$ .
- La figure IV.11, IV.12, et IV.13 (Zoom) présentent respectivement, La variation radiale du module : du potentiel vecteur magnétique  $A$ , de la densité des courants induits, dans la charge pour différentes valeurs discrètes de la température  $T$  allant de  $293 \text{ °K}$  jusqu'à  $1255 \text{ °K}$ .



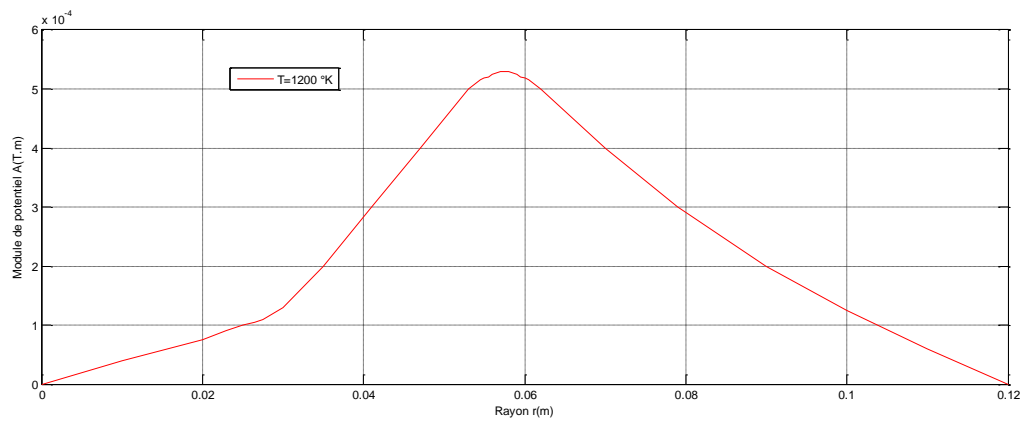
**Fig. IV.5.** Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique  $A$   
Pour  $z = 1500\text{mm}$  et pour  $T = 298 \text{ °K}$ .



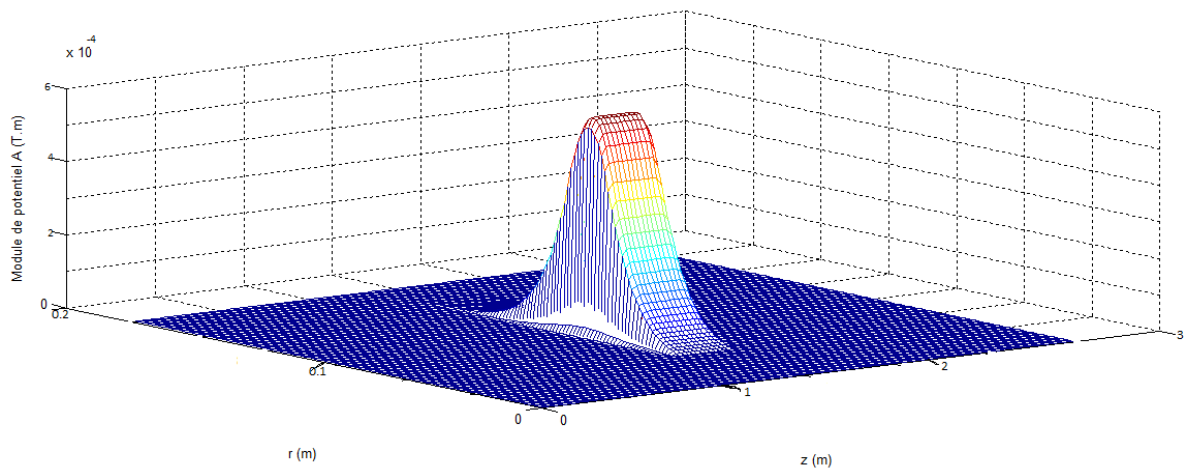
**Fig.IV.6.** Répartition du module du potentiel vecteur magnétique A Dans le plan  $(r, z)$  pour  $T = 298$  °K.



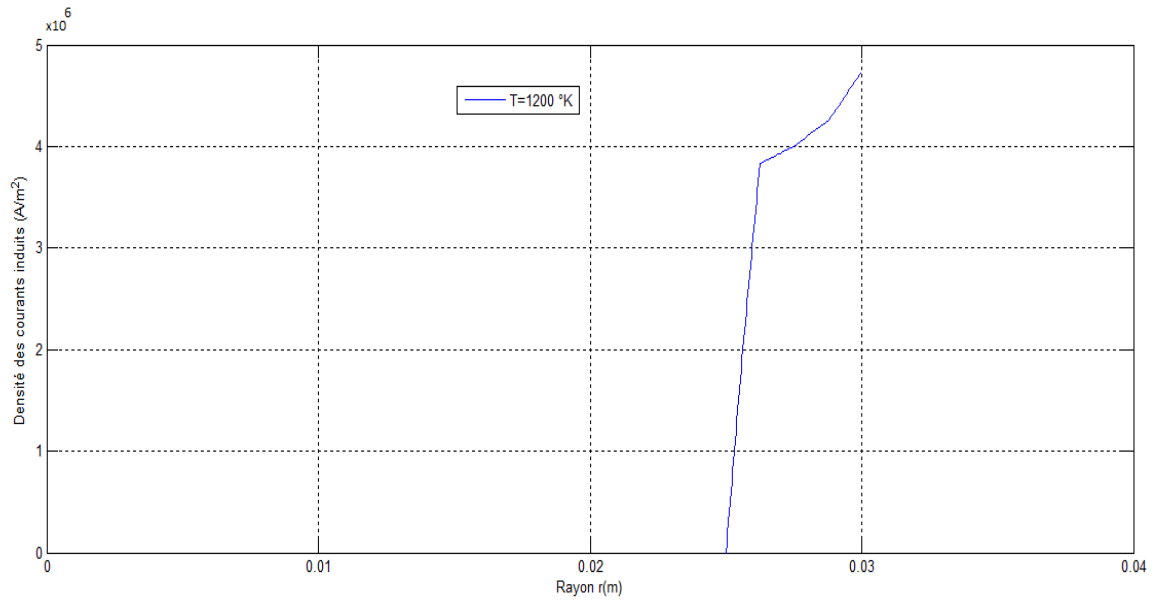
**Fig. IV.7.** Variation radiale du module de la densité des courants induits Dans la charge pour  $z = 1500$ mm et pour  $T = 298$  °K.



**Fig. IV.8.** Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A  
Pour  $z = 1500\text{mm}$  et pour  $T = 1200\text{ °K}$ .

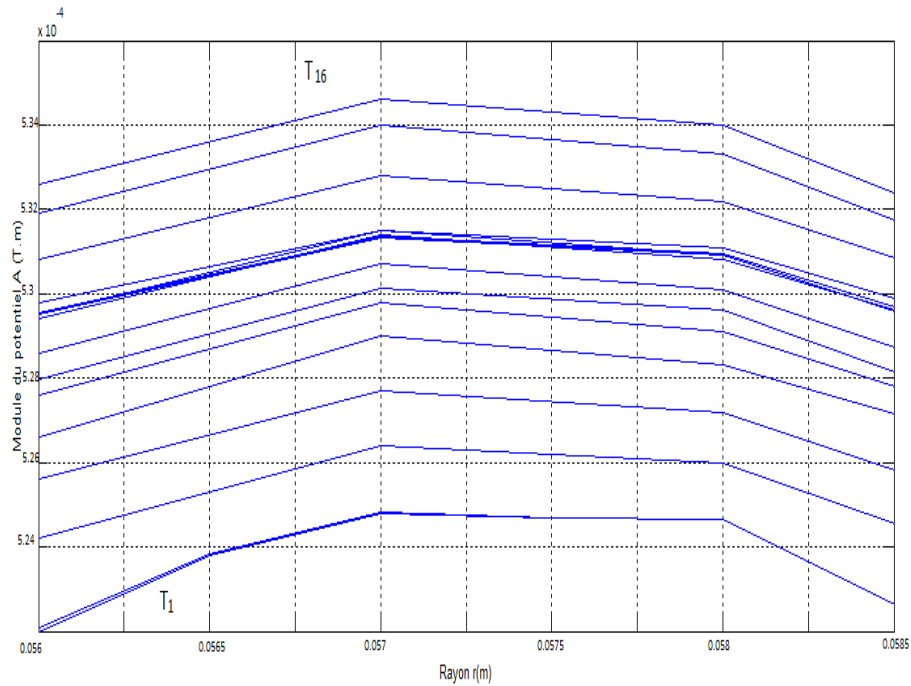


**Fig. IV.9.** Répartition du module du potentiel vecteur magnétique A  
Dans le plan (r, z) pour  $T = 1200\text{ °K}$ .



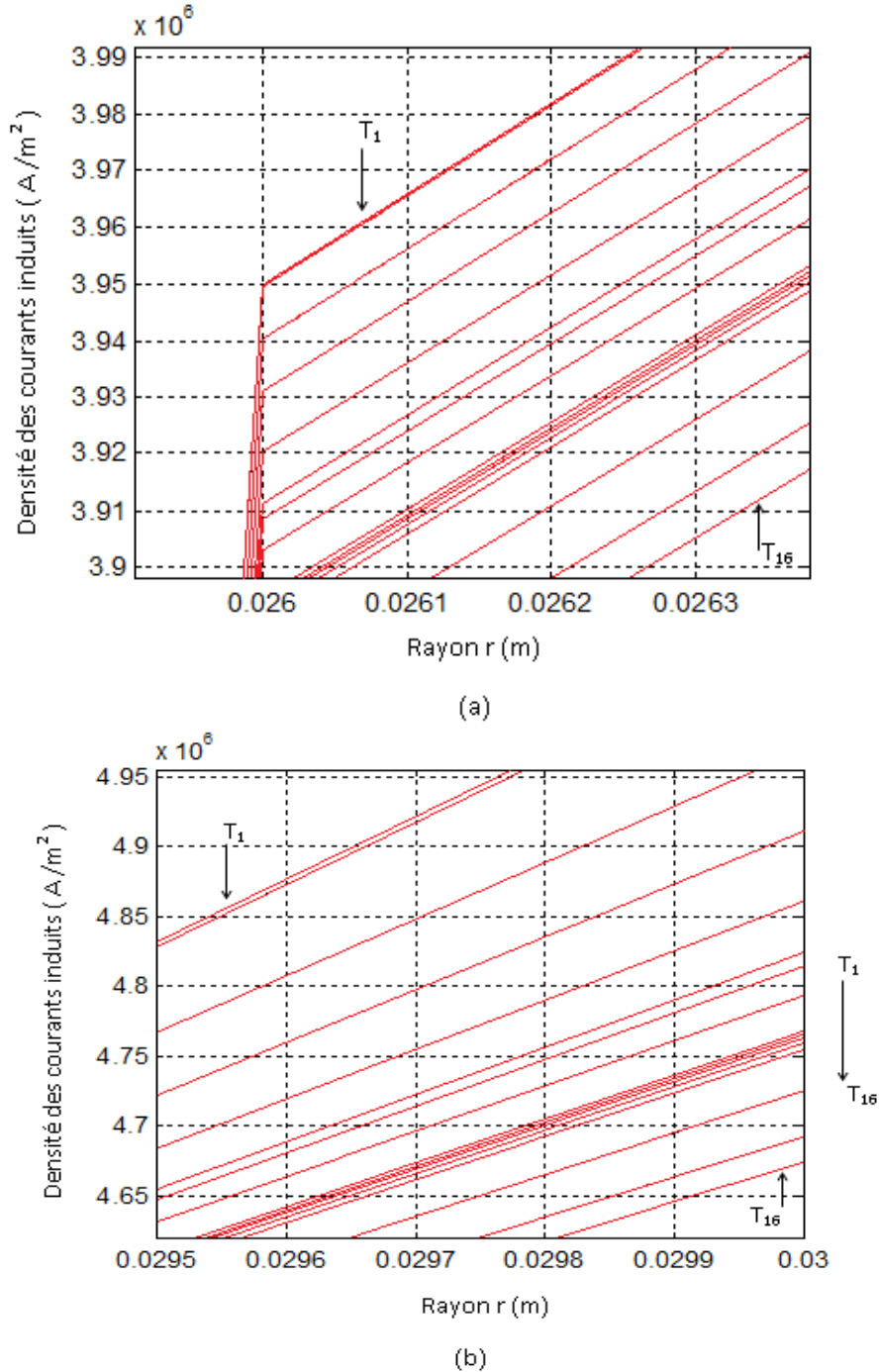
**Fig. IV.10.** Variation radiale du module de la densité des courants induits Dans la charge pour  $z = 1500\text{mm}$  et pour  $T = 1200\text{ °K}$ .

$T_1 = 293\text{ °K}$	$T_9 = 950\text{ °K}$
$T_2 = 298\text{ °K}$	$T_{10} = 960\text{ °K}$
$T_3 = 400\text{ °K}$	$T_{11} = 970\text{ °K}$
$T_4 = 500\text{ °K}$	$T_{12} = 980\text{ °K}$
$T_5 = 600\text{ °K}$	$T_{13} = 1000\text{ °K}$
$T_6 = 700\text{ °K}$	$T_{14} = 1100\text{ °K}$
$T_7 = 900\text{ °K}$	$T_{15} = 1200\text{ °K}$
$T_8 = 800\text{ °K}$	$T_{16} = 1255\text{ °K}$



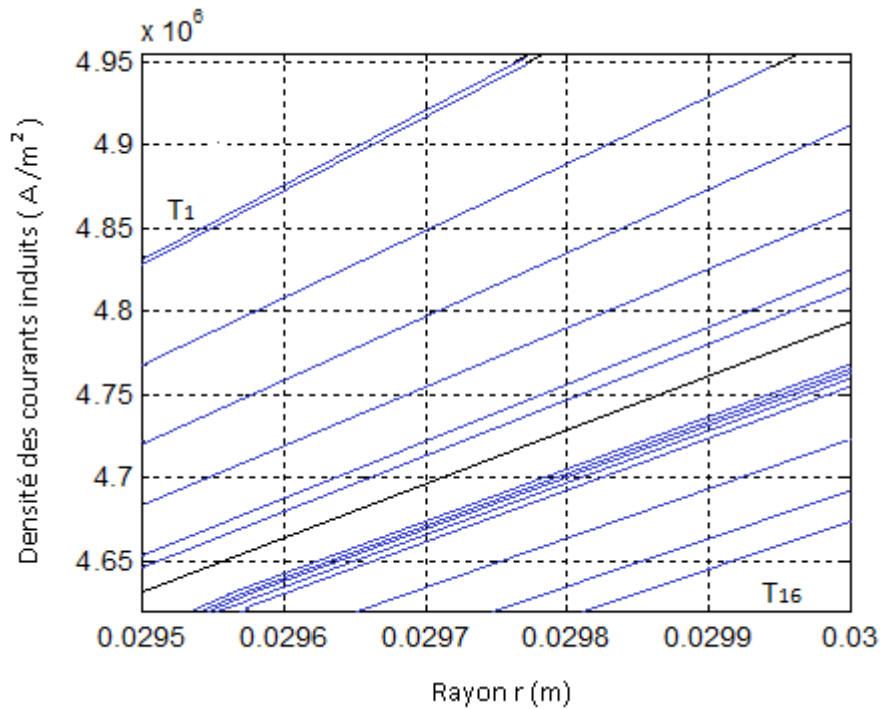
**Fig. IV.11.** Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A pour  $z = 1500\text{mm}$  et pour  $T \in [293\text{ °K}-1255\text{ °K}]$ .

$T_1 = 293 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_9 = 950 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_2 = 298 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{10} = 960 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_3 = 400 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{11} = 970 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_4 = 500 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{12} = 980 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_5 = 600 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{13} = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_6 = 700 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{14} = 1100 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_7 = 900 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{15} = 1200 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_8 = 800 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{16} = 1255 \text{ }^\circ\text{K}$



**Fig IV.12.** Variation radiale du module de la densité des courants induits dans la charge pour  $z = 1500\text{mm}$  et pour  $T \in [293 \text{ }^\circ\text{K}-1255 \text{ }^\circ\text{K}]$

$T_1 = 293 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_9 = 950 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_2 = 298 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{10} = 960 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_3 = 400 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{11} = 970 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_4 = 500 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{12} = 980 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_5 = 600 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{13} = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_6 = 700 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{14} = 1100 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_7 = 900 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{15} = 1200 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_8 = 800 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{16} = 1255 \text{ }^\circ\text{K}$



**Fig IV.13 .** Variation radiale du module de la densité des courants induits dans la charge pour  $z = 1500\text{mm}$  et pour  $T \in [293 \text{ }^\circ\text{K}-1255 \text{ }^\circ\text{K}]$ .

$T_1 = 293 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_9 = 950 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_2 = 298 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{10} = 960 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_3 = 400 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{11} = 970 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_4 = 500 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{12} = 980 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_5 = 600 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{13} = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_6 = 700 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{14} = 1100 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_7 = 900 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{15} = 1200 \text{ }^\circ\text{K}$
$T_8 = 800 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_{16} = 1255 \text{ }^\circ\text{K}$



### IV.2.4.3. Interprétation des résultats électromagnétiques

Pour différentes valeurs discrètes de température  $T_i$  et pour une valeur de densité de courant inducteur, fixe :  $J_s = J_{so} = J_{ex} = 2.33 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ , et une fréquence de travail égale à 7500 Hz, le terme de potentiel vecteur A, densité du courant induit sont effectuées.

A température ambiante, le tube inox présente pour une fréquence de fonctionnement de 7500 Hz :

- Une profondeur de peau égale à :  $\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \sigma(T_{amb})}} = 5.4 \text{ mm}$

Etant donnée l'épaisseur de la pièce fixée à 4 mm, l'effet de peau est ici inexistant.

En conséquence, la densité de puissance dissipée par les courants induits à été estimé et distribuée sur toute l'épaisseur du tube, limité à la hauteur de l'inducteur.

D'après le modèle de variation de la résistivité en fonction de la température, désignée par l'inconnue T (figure IV.3), on voit bien d'après les figures obtenues que :

- En augmentant la température, la résistivité augmente qui aboutit à une diminution de la conductivité électrique, les pics du potentiel vecteur A augmentent, la densité des courants induits diminue.
- Il y a un déplacement des lignes de champs en direction de la paroi extérieure de tube (charge) à cause de la valeur élevée de la fréquence de fonctionnement.
- Pour une valeur égale à zéro de la conductivité électrique ( $\sigma = 0$ ), la courbe du module du potentiel vecteur A passe bien par l'origine ainsi les courants induits sont nuls .

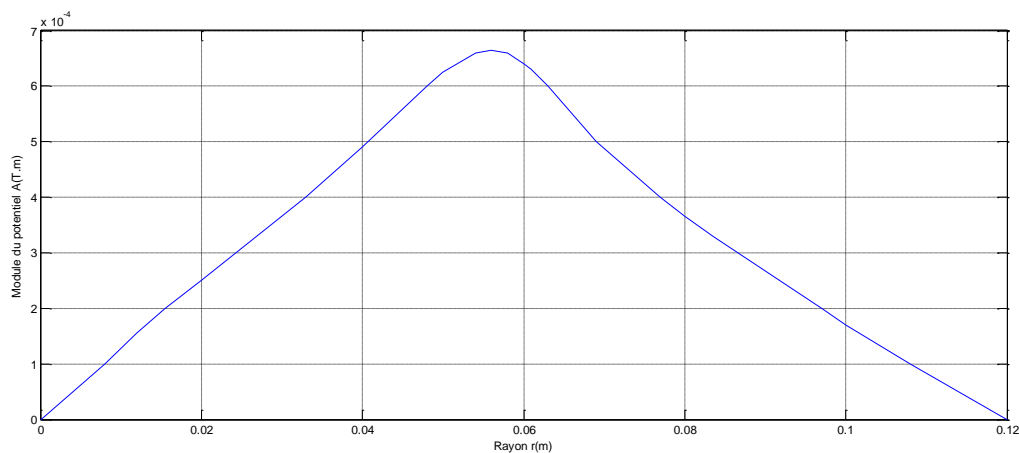
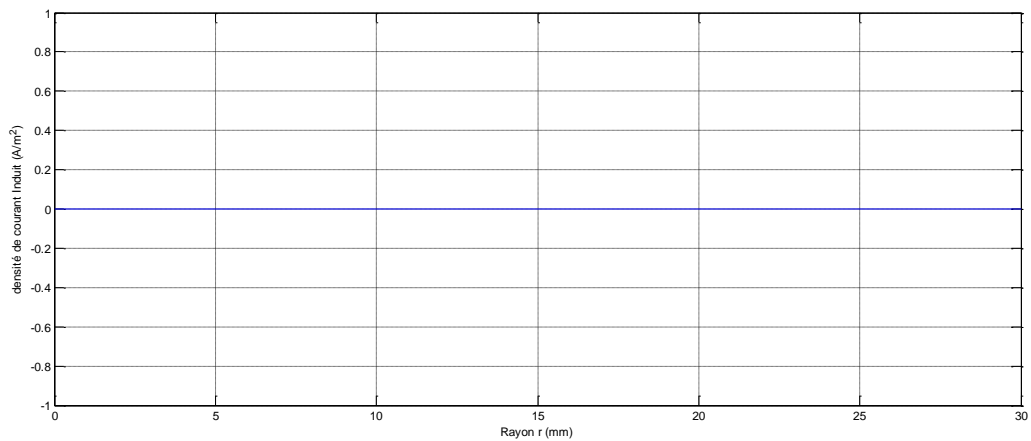
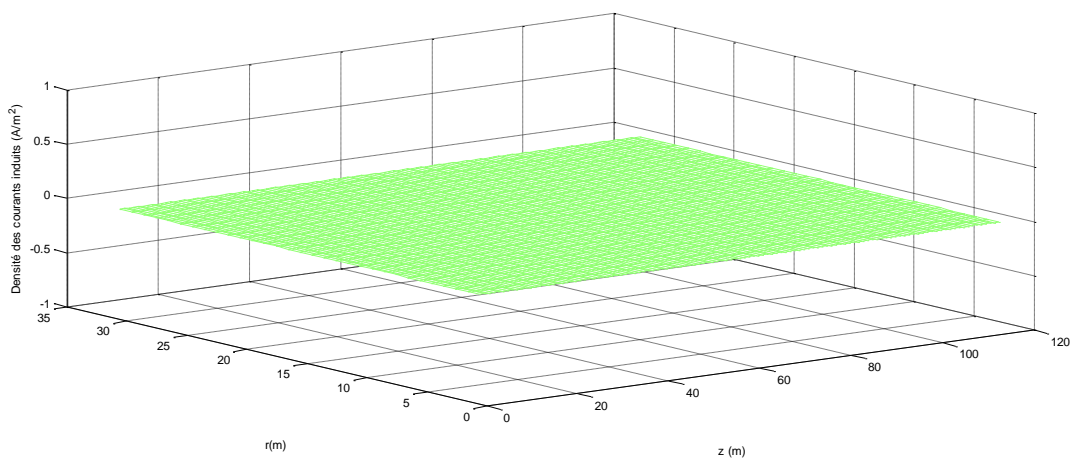


Fig. IV.14. Variation radiale du module du potentiel vecteur magnétique A pour  $z = 1500 \text{ mm}$  et pour  $\sigma = 0 \text{ (1/(\Omega.m))}$  .



**Fig. IV.15.** Variation radiale du module de la densité des courants induits dans la charge pour  $z = 1500\text{mm}$  et pour  $\sigma = 0 (1/(\Omega.m))$ .



**Fig. IV.16.** Répartitions du module de la densité des courants induits dans le plan  $(r, z)$  pour  $\sigma = 0 (1/(\Omega.m))$

***CONCLUSION GENERALE***

## CONCLUSION GENERALE

Ce travail est une contribution importante à l'avancement de la modélisation des phénomènes électromagnétiques pour les Calculs de la Densité des Courants Induits du Chauffage par Induction par la Méthode des Volumes Finis.

Le chauffage par induction nécessite le calcul des courants de FOUCAULT induits dans la charge à chauffer, à partir de la résolution des équations du champ électromagnétique. La distribution de température, quant à elle, est obtenue en résolvant l'équation de diffusion de la chaleur. Or, ces deux équations sont couplées par le fait que les propriétés physiques dépendent à la fois du champ électromagnétique et de la température.

Les équations de MAXWELL, les caractéristiques électriques (conductivité électrique) et magnétiques (perméabilité magnétique) en électromagnétisme mènent à l'obtention de modèles mathématiques représentant les phénomènes physiques qui régissent le comportement des systèmes de chauffage par induction.

Les dispositifs électromagnétiques modélisés présentent une symétrie de révolution ce qui a permis leurs traitements en bidimensionnel. L'hypothèse d'une modélisation cylindrique axisymétrique est séduisante, l'inconnue est invariante par rotation, elle prend en compte l'homogénéité de la température due à la rotation.

L'utilisation de la méthode des volumes finis dans ce travail, comme étant une méthode de discrétisation a permis de réaliser des modèles économiques et suffisamment précis. Néanmoins, cette méthode s'adapte mal aux objets à géométries complexes à cause de la rigidité du maillage.

Les résultats obtenus en appliquant notre modèle sur un dispositif de chauffage sélectionné ont conclué concernant l'étude du comportement d'un acier inoxydable, en régime permanent. Ce dernier est atteint pour une température inférieure au point de Curie.

D'après le modèle de variation de la résistivité en fonction de la température étudiée, désignée par l'inconnue  $T$ , on voit bien d'après les figures obtenues que :

- En augmentant la température, la résistivité augmente qui aboutit à une diminution de la conductivité électrique, les pics du potentiel vecteur  $A$  augmentent, la densité des courants induits diminue.
- Il y a un déplacement des lignes de champs en direction de la paroi extérieure de tube (charge) à cause de la valeur élevée de la fréquence de fonctionnement.

➤ Pour une valeur égale à zéro de la conductivité électrique ( $\sigma = 0$ ), la courbe du module du potentiel vecteur  $A$  passe bien par l'origine ainsi les courants induits sont nuls

En perspective, il serait intéressant de :

- Etudier le chauffage au défilé de la pièce ferromagnétique permettant ainsi d'appréhender l'avancement progressif du tube et sa montée en température.

- Utiliser ce modèle tout en se basant sur les valeurs moyennes de la densité de puissance dissipée par zones.

## ***BIBLIOGRAPHIE***

- [1] Champ électromagnétique ED 4211
- [2] Le **Chauffage par Induction** : Conception et Applications Industrielles, note EDF HE 122 W 2242.
- [3] MAURICE **ORFEUILLE** « Electrothermie industrielle » paris Dunod 1981
- [4] **PHILIPPE AURIOL, NOEL BURAI**S, “ La Compatibilité Electromagnétique en Chauffage par Induction, Partie A : Corps Humain ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés industriels ”, Paris, France, Mai 1997.
- [5] **G. DEVELEY**, “ L’Induction : Effets Thermiques et Mécaniques. Rappel des Bases Théoriques ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997.
- [6] Victor **Paschkis** « Les fours électroniques industriels » Dunod. Paris 1952.
- [7] **J. NUNS**, “ Le Chauffage par Induction Appliqué aux Industries Agro-alimentaires ”, Note EDF, Avril 1993.
- [8] **GERARD DEVELEY** « technique de l’ingénieur », D 5 935.
- [9] **M. COEVOET**, “ La Place de l’Induction dans l’Industrie ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997.
- [10] J.P. Faroux and J.Renault, ”Cours de l’électrotechnique ”, Dunode Paris, 1998.
- [11] H. Gie, J. P. Sarmant, ”Electromagnétisme 2”, Lavoisier Paris ,1982.
- [12] J.C. Sabonnadiere, J.L. Coulomb, ” CAO En Electrotechnique”, Hermès Publishing, Paris,1985.
- [13] **JOSEPHA. EDMINISTER**, “ Electromagnétisme ”, Série Schaum, 1985.
- [14] **ANDRE VANDER VORST**, “ Electromagnétisme (Champ, Forces et Circuits) ”, Université Catholique de Louvain, Laboratoire de Télécommunications et d’Hyperfréquences CABAY, Librairie-Editeur, Louvain-La-Neuve, 1985.
- [15] **A. Faussurier, R. Servan**,” Les matériaux électrotechniques “, Edition Dunod, Paris1971
- [16] **J. C. SABONNADIÈRE, J. L. COULOMB**, “ Calcul des Champs Electromagnétiques ”, Technique de l’ingénieur D.3020.pp. I-20

- [17] **ABDELLAH CHENTOUF**, “ Contribution à la Modélisation Electrique, Magnétique et Thermique d’un Applicateur de Plasma Inductif Haute Fréquence ”, Thèse de Doctorat, Université de NANTES, 1994.
- [18] **N. O. MATHEW SADIKU**, “Numerical Techniques in Electromagnetics”, CRC, London, 1992.
- [19] **J.P. Faroux and J.Renault**, ”Cours de l’électrotechnique ”, Dunode Paris, 1998.
- [20] **N. Benyahia** “Modélisation des phénomènes électromagnétiques par couplage : Méthode des volumes finis- méthode des circuits couplés” ; Thèse de magistère, Université de Batna 2004.
- [21] **N. Bergoug**, « Etude de l’influence des matériaux ferromagnétiques sur les Performances d’une machine MHD par la modélisation numérique 2D », Thèse de Magister, Université de Batna, 2006.
- [22] **H. Gie, J. P. Sarmant**, ”Electromagnétisme 2”, Lavoisier Paris ,1982.
- [23] **H. Bêcha**, « Modélisation des phénomènes électromagnétiques et thermique couplés Par la méthode des Volumes finis et du para métrisation dans les systèmes Amagnétiques de chauffage par induction ». Thèse de magistère 2001.
- [24] **M. COEVOET**, “ La Place de l’Induction dans l’Industrie ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997
- [25] **L. Mokrani**, “ Contribution A la simulation du moteur linéaire a simple induction par La méthode des éléments finis”, Thèse de Magister, ’institut d’électrotechnique, University de BISKRA, 1997.
- [26] **SUHAS V. PATANKAR**, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences
- [27] **M. BOUMAH RAT, A. GOURDIN**, “ Méthode Numériques Appliquées ”, (O.P.U).