

Université Mohamed khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Civil et d'Hydraulique
Référence :2019/ 2020

جامعة محمد خيضر- بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية و الري
المرجع:2019 /2020



Mémoire de Master

Spécialité :GENIE CIVIL

Option :STRUCTURE

Thème :

ETUDE NEMURIQUE DE LA STABILITES DES PLAQUES COMPOSITES STRATIFIEES

Etudiant:

- **MARAH BILLEL**

Encadreur :

- **Dr. BELARBI. MED.OUEJDI**

Promotion: Sept 2020

REMERCIEMENTS

Avant tout nous remercions Allah tout puissant qui nous a donné la bonne santé et le courage, la volonté et la force pour accomplir ce présent travail.

J' exprime mes sincères et profonds remerciements et reconnaissances à mon encadreur. Ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Que tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ma Formation, trouvent ici ma gratitude et mes remerciements.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements à tous les enseignants de l' institut de Génie Civil de l' Université de Biskra

DEDICACE

Je dédie ce travail à la mémoire de mon père bien aimé,

qu' Allah ait son âme pour tous ce qu' il m' a donné et appris

spécialement l' amour de la science et la patience.

Et ma mère que j' estime beaucoup pour ce qu' elle est.

RESUME

Le flambement est un mode d'instabilité s'attaquant à tous les éléments de structures sollicités par des contraintes normales de compression. Le présent travail a pour but de déterminer la charge critique des plaques isotropes et des plaques composites stratifiées. Les calculs ont été effectués numériquement en utilisant un programme en langage en Fortran et un autre programme en langage Matlab. Un élément fini de forme rectangulaire avec cinq degrés de libertés est formulé sur la base de la théorie du premier ordre (FSDT). La bonne performance de l'élément est montrée à travers une série de tests en comparant les résultats obtenus par le présent élément avec ceux trouvés via des modèles analytiques et numériques (EF).

Le travail a été achevé par étude paramétrique afin de montrer les effets de différents paramètres agissant sur la charge critique.

MOTS CLES : Flambement, Isotrope, Composites, Charge critique.

ABSTRACT

The buckling is an instability mode addressing all elements of structures sought by normal stresses of compression: columns of buildings, piles of bridges, braces, poles, towers...

The present work aims to determine the critical load of beams isotropic and beams anisotropic (sandwich). The calculations were performed numerically using a program in Fortran language and another program in Matlab.

The work was completed by parametric study to show the effects of different parameters affecting the critical load.

KEY WORDS: Buckling, Isotropic, Sandwich, Critical load

ملخص

التواء هو نمط من عدم الاستقرار يهاجم جميع العناصر الهيكلية تحت الضغط ضغوط العادية.

يهدف العمل الحالي إلى تحديد الحمل الحرج للوحات الخواص والألواح المركبة المصفحة. تم

إجراء الحسابات رقمياً باستخدام برنامج بلغة فورتران وبرنامج آخر بلغة ماتلاب. تمت صياغة عنصر

محدود من الشكل المستطيل مع خمس درجات من الحرية على أساس نظرية الدرجة الأولى (FSDT).

يظهر الأداء الجيد للعنصر من خلال سلسلة من الاختبارات من خلال مقارنة النتائج التي حصل عليها

هذا العنصر مع النتائج التي تم الحصول عليها من خلال النماذج التحليلية والرقمية (FE).

تم الانتهاء من العمل من خلال دراسة البارامترية من أجل إظهار تأثيرات العوامل المختلفة

التي تعمل على الحمل الحرج.

الكلمات مفتاحية: انبعاج، آيزوتروبي، ساندويتش، تحميل حرج

SOMMAIRE

Introduction générale	1
------------------------------------	----------

Chapitre I

Généralités Sur Les Matériaux Composites

I.1 Introduction	6
I.2 Définition général des composites	7
I.3 Définitions de base	8
I.4 Avantage des matériaux composites	9
I.5 Utilisation des matériaux composites dans les structures	9
I.6 Les types de matériaux composites	10
I.6.1. Composites à renforts de particules	11
I.6.2. Composites à renforts de fibres	11
I.6.3. Composites à renforts de paillettes	11
I.6.4. Composites stratifiés	12
I.7. Les matériaux composites et leur fondamentaux de base	12
I.7.1. Renforts	13
I.7.2. Matrices	14
I.8. Les matériaux composites structuraux	15
I.8.1. Les monocouches	16
I.8.2. Les stratifiés	17
I.8.3. Les sandwichs	17
I.9. Les théories utilisées pour la modélisation des plaques stratifiées composites	18
I.9.1. Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)	18
I.9.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de Reissner-Mindlin (FSDT)	20

I.9.3. Les théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	23
I.10. Phénomènes de flambage :	24
I.10.1. Qu'est-ce que le flambement ?	24
I.10.2. Forme et importance des phénomènes de flambement :	25
I.11 Conclusion :	26

Chapitre II

Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie du premier ordre

II.1. Introduction	28
II.2. Définition des plaques	29
II.3. Historique des plaques	30
II.4. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de Reissner-Mindlin (FSDT)	30
II.5. comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie du premier ordre	33
II.5.1. Comportement dans les axes du matériau	33
II.5.2. Etat de contraintes planes	34
II.5.3. Constantes de rigidités réduites d'un composite orthotrope en dehors de ces axes principaux	35
II.6. THEORIE DES STRATIFIES	37
II.6.1. Champ de déplacements	37
II.6.2. Champ de déformations	37
II.6.3. Champ de contraintes	40
II.6.4. Expression des résultantes et moments	41

II .6.4.1. Résultantes en membrane	41
II .6.4.2. Moments de flexion et de torsion	43
II.6.4.3. Résultantes en cisaillement	44
II.6.5. Equation constitutive d'un stratifié	45
II.6.6. Facteurs de correction de cisaillement transverse pour des plaques Stratifiées	46

Chapitre III

FORMULATION DE L'ELEMENT FINI UTILISE

III.1 Introduction	49
III.2 Historique	50
III.3 Formulation de l'élément fini utilisé	51
III.3.1 Principe de la méthode des éléments finis	51
III.3.2 Description de l'élément utilisé	51
III.3.3 Cinématique de la théorie	52
III.3.4 Approximation nodale des déplacements	52
III.3.5 Champs des déplacements	53
III.3.6 Relations cinématiques	55
III.3.7 Loi de comportement	58
III. 3.8 Évaluation de la matrice de rigidité	58
III.3.8.1 Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées	58
III. 3.8.2 Problème de flexion	59
III.4 Evaluation la matrice géométrique [Kg]	61
III.5 Etat de l'équilibre élastique	62
III.5.1 Charge critique de flambement	63
III.6. Présentation du programme	64
III.6.1 Introduction :	64
III.7 Conclusion	65

Chapitre IV

Validation de l'élément

IV.1 Introduction	68
IV.1 Validation numérique sur le comportement du flambage des plaques stratifiées	68
IV.3 Conditions aux limites adoptées et propriétés des matériaux utilisés	68
IV.4 Test de convergence	69
IV.4.1 Plaque isotrope carrée :	69
IV.4.2 Plaque stratifiée carrée cross-ply symétrique (0/90/90/0) :	71
IV.4.3 Exemple numériques	73
IV.4.3.1 L'effet de l'orthotropie sur les plaques carrées cross-ply (0/90...)	73
Conclusion générale	75
Bibliographie	77

LISTE DES FIGURES

Chapitre I

Généralités Sur Les Matériaux Composites

Fig. I.1 Matériau composite	8
Fig. I.2 Classification schématique des types de composites.	10
Fig. I.3 Les différents types de composites	12
Fig. I.4 Schéma typique d'un matériau composite	13
Fig. I.5 Différents composants de matériau composite	13
Fig. I.6 Classification schématique des principaux matériaux de renfort.	14
Fig. I.7 Classification schématique des principaux matériaux de matrice	15
Fig. I.8 Schématisation d'une monocouche	16
Fig. I.9 Matériau composite stratifié	16
Fig. I.10 Schématisation d'une plaque sandwich	17
Fig. I.11 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie classique de Kirchhoff (Reddy .J .N, 2004)[9]	19
Fig. I.12 : Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour la théorie classique (CLT).	20
Fig. I.13 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie du premier ordre Reissner-Mindlin (Reddy .J .N, 2004). [9]	
Fig. I.14 : Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour la théorie du premier ordre	22

Fig. I.15 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie d'ordre élevé (Reddy .J .N, 2004).[9] 23

Fig. I.16 Flambement des poutres droites comprimées. 25

Chapitre II

Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie du premier ordre

Fig. II.1 Élément plaque 29

Fig. II.2 Description d'une plaque 30

Fig. II.3 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie du premier ordre Reissner-Mindlin(Reddy .J .N, 2004) 32

Fig. I.4 Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour la théorie du premier ordre 32

Fig. II. 5 Orientation des couches d'un stratifié orthotrope 33

Fig. II. 6 Transformation par rapport à un axe 36

Fig. II. 7 Les couches d'un stratifié 40

Fig. II. 8 Forces par unités de longueur 41

Fig. II. 9 Moments par unités de longueur 43

Fig.II.10 Représentation schématique des résultantes de cisaillement. 44

Fig. II.11 Approximations de la contrainte du cisaillement transversal CT Constante (FSDT) et quadratique (HSDT). 47

Chapitre III

FORMULATION DE L'ELEMENT FINI UTILISE

Fig. III.1 Géométrie de l'élément rectangulaire et variable nodales correspondantes 52

Chapitre III : Validation de l'élément

Fig. IV.1 : Géométrie de la plaque. 69

Fig. IV-2 Convergence de la charge critique uniaxial d'une plaque isotrope simplement appuyée (N_{cr}). 71

Fig. IV-3 Test de convergence de la charge critique uniaxial d'une plaque carrée stratifiée [0/90/90/0] simplement appuyée (N_{cr}). 72

Fig. IV. 4 L'effet de l'orthotrope E1/E2 sur le comportement de flambage des plaques stratifiées cross-ply. 74

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre III

Tableau (III.1): Rôles des sous-routines 65

Chapitre IV

Tableau IV-1 Test de convergence de la charge critique uniaxial d'une plaque isotrope simplement appuyée ($N_{cr} = N_{cr} a^2 / \pi^2 D$). 70

Tableau IV.2 Test de convergence de la charge critique uniaxial suivant x d'une plaque carrée stratifiée [0/90/90/0] simplement appuyée ($N_{cr} = N_{cr} a^2 / E_2 h^3$). 71

Tableau IV-3 L'effet du rapport d'orthotropie sur la charge critique uniaxial de flambage ($N_{cr} = N_{cr} a^2 / E_2 h^3$) d'une plaque carrée cross-ply ($a/h=10$) 73

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale

1. Introduction :

Le développement des technologies moderne exige que l'on utilise des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées (bons rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'amples qualités). Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent à ces exigences. Ils deviennent de plus en plus incontournables dans de nombreuses composantes structurales comme la marine, le transport, la navigation, les sports, les applications aérospatiales et ils ont été utilisés récemment dans les structures de génie civil comme des compléments aux matériaux classiques (acier, bois et béton).

Parmi les composites les plus convoités, on peut distinguer deux grandes catégories de matériaux composites structuraux : les stratifiés et les sandwichs. Les stratifiés sont des matériaux couramment rencontrés dans les éléments structuraux. Ces derniers sont constitués par l'empilement de plusieurs couches où chaque couche peut avoir une orientation différente, i.e. les caractéristiques mécaniques varient selon les directions considérées. Les sandwichs sont des structures composites dont l'utilisation connaît un essor important.

Malgré les nombreux avantages que présentent ces matériaux, leur comportement est assez complexe à cause des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. L'étude du comportement flambage de ces composites stratifiés est très importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle, car ils aident les ingénieurs à concevoir les meilleures structures.

2. Objectif de mémoire :

- ❖ L'objectif principal de cette mémoire c'est l'étude numérique de la stabilité des plaques composites stratifiées en utilisant un élément fini de forme rectangulaire.
- ❖ Par ailleurs, une étude paramétrique a également été menée pour mettre en évidence l'effet de certains paramètres sur les fréquences propres des plaques sandwichs multicouches.

3. Plan de mémoire :

Le travail de cette mémoire est divisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre : on a exposé quelques définitions sur les matériaux composites et les sandwichs en particuliers. Puis, nous avons présenté les trois théories des plaques : Théorie classique des stratifiés (CLPT), la théorie du premier ordre de cisaillement transverse (FSDT et la théorie d'ordre supérieur (HSDT).

Le deuxième chapitre : nous avons fait premièrement un rappel sur la théorie du premier ordre de cisaillement transversal, ainsi que l'écriture de la loi de comportement d'un stratifié. Puis nous allons décrire les efforts résultants des stratifiées.

Le troisième chapitre : porte sur la formulation d'un élément fini bidimensionnelle (2D), construit sur la base de l'approche monocouche équivalente en utilisant la théorie du premier ordre (FSDT). L'élément formulé est de forme rectangulaire défini par quatre nœuds et cinq degrés de liberté (5DDL) par nœud. Cet élément est destiné à l'analyse statique et du flambage des plaques isotropes et composites stratifiées. Le principe de l'énergie potentielle totale a été adopté pour établir la relation entre les forces et les déplacements.

Le quatrième chapitre : Après la formulation de l'élément fini rectangulaire, ce chapitre est consacré, dans la première partie, à la validation de l'élément utilisé en termes de précision, de convergence et de stabilité, à travers une série de tests. Des plaques isotropes et composites stratifiées sont considérés. Les résultats obtenus seront comparés avec les solutions obtenus analytiquement et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. Ainsi, on procède à une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres tels que l'orientation des fibres, le nombre de couches et le degré d'anisotropie sur la charge critique des plaques composites stratifiées.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES

MATÉRIAUX COMPOSITES

Chapitre I

Généralités Sur Les Matériaux Composites

I.1. Introduction :

La réalisation d'une structure est nécessairement liée à la nature de ses constituants c'est-à-dire ses matériaux.

De ce fait la technologie nouvelle exige de ses derniers qu'ils soient à la fois résistants, rigides, légers et surtout adaptables à des utilisations spécifiques. Rares sont les matériaux qui répondent d'une façon entière à ces exigences.

Les matériaux traditionnels sont limités dans leurs champs d'actions de par leurs propriétés mécaniques et leurs techniques de mise en œuvre.

La naissance de produits nouveaux tels que les matériaux composites ouvre un large éventail d'application, et répond à des utilisations bien spécifiques (l'élaboration du matériau se réalise selon la fonction avancée). **(Benachour A., 2010). [1]**

L'art de l'ingénieur dans la conception et l'utilisation de matériaux ou de structures composites réside dans le fait de placer le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition spatiale).

Au sens strict du terme, il faut parler de matériau ou de structure composite dès lors qu'une pièce est composée de plusieurs types de constituants. Le but recherché dans ces associations est de combiner les propriétés de plusieurs classes de matériau pour obtenir des propriétés moyennes améliorées. **(Mechab I., 2009). [2]**

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les

différents éléments de renfort et ainsi joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble.

Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite. Les renforts peuvent se trouver utilisés sous différentes formes, comme par exemple en fibres longues, en fibres courtes, en sphères et même en tissu de fibres plus ou moins complexe (**tissage 2D, voire même 3D**).

Ainsi, Danos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Du point de vue des applications industrielles, les composites les plus répandus sont caractérisés généralement par une matrice polymère et des renforts sous forme de fibres longues tissées ou non. Les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits, ainsi que fibres de carbone et aramide pour les applications plus exigeantes. (**Draiche K., 2015**) [3]

Les matériaux composites permettent de concevoir et de réaliser des structures améliorées possédant de bonnes propriétés mécaniques alliées à un poids minimal. Ces matériaux ont suscité un intérêt particulier dans de nombreux secteurs tel que, l'aéronautique, les constructions navales, l'industrie automobile, etc....

I.2. Définition général des composites :

D'après **Berthelot(2010)**, « Un matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion) et de nature différente, (donc Ils sont des matériaux artificiels), se complétant et permettant d'obtenir un matériau dont les performances globales sont améliorées, vis-à-vis d'un besoin spécifique, par rapport à celles de ses constituants élémentaires».

Les composites sont constitués d'une matrice dans laquelle on a dispersé de façon contrôlée des renforts. La matrice maintient les renforts et assure les transferts de charge, tandis que les renforts apportent principalement leurs caractéristiques mécaniques élevées

(Modules et limites d'élasticité, résistance mécanique...) Cette association a pour but d'obtenir un matériau dont les propriétés spécifiques (propriétés mécaniques rapportées à la masse volumique) sont supérieures à celles de la matrice non renforcée. Le concept de matériau composite, par le choix des constituants et de leurs proportions respectives, ainsi que le choix de la forme, des dimensions et de la disposition des renforts, permet donc de concevoir un matériau présentant les caractéristiques spécifiques recherchées.

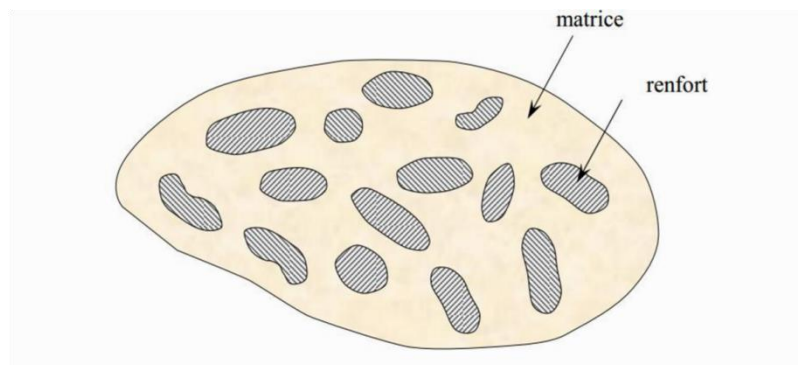


Fig. I.1 Matériau composite

I.3. Définitions de base :

- ✓ **Homogène** : mêmes propriétés physiques en tout point du matériau.
- ✓ **Hétérogène** : propriétés physiques différentes d'un point à un autre.
- ✓ **Isotrope** : mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions.
- ✓ **Orthotrope** : propriétés mécaniques symétriques par rapport à 2 plans de symétrie.
- ✓ **Anisotrope** : l'anisotropie (contraire d'isotropie) est la propriété mécanique d'être dépendant de la direction. Quelque chose d'anisotrope pourra présenter différentes caractéristiques selon son orientation

I.4. Avantages des matériaux composites :

L'utilisation des matériaux composites apporte de nombreux avantages en termes de propriétés des matériaux. En effet, le but de leur fabrication est de profiter des bonnes propriétés de chaque matériau afin d'en former un qui sera mieux adapté à certaines applications.

La combinaison de deux matériaux permet donc d'améliorer les propriétés d'un matériau, par exemple, la résistance, la rigidité, la conductivité, le poids, etc.... Ainsi, les composites permettront d'augmenter la performance de la structure dans laquelle ils seront inclus. Dans le cas d'une structure mince, le laminé composite de fibre permet une augmentation considérable de la résistance en traction et de la ductilité.

I.5. Utilisation des matériaux composites dans les structures :

L'utilisation des matériaux composites est très répandue dans divers domaines tels que l'aérospatiale, l'aéronautique, l'industrie automobile, l'industrie navale, de même que dans l'industrie sportive et le génie civil. Ces matériaux sont connus par leurs grands rapports rigidité – poids et résistance-poids, ainsi que pour d'autres propriétés mécaniques intéressantes telles que la résistance à la corrosion.

En outre, l'utilisation des matériaux composites dans le domaine de génie civil peut être avantageuse par rapport aux matériaux traditionnels comme l'acier, car ils permettent la conception de structures aux propriétés globales qui répondent mieux aux exigences particulières d'une situation donnée. Parmi ces propriétés globales, on retrouve la rigidité

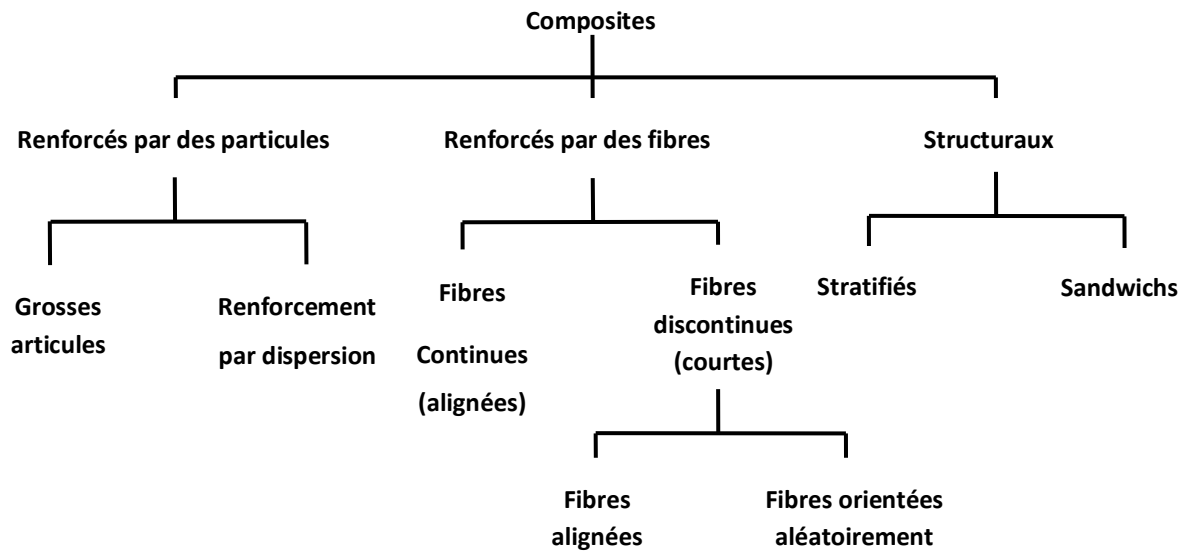


Fig. I.2.Classification schématique des types de composites.

La Fig. I.2 présente une classification schématique des matériaux composites.

Nous distinguons trois catégories principales : les composites renforcés par des particules, les composites renforcés par des fibres et les composites structuraux. Dans le présent chapitre, on va parler sur les composites structuraux de type sandwich.

I.6. Les type de matériaux composites :

En général, le domaine des composites est très vaste et, ceux-ci peuvent être divisés en quatre types

- Composites à renforts de particules
- Composites à renforts de fibres
- Composites à renforts de paillettes
- Composites stratifiés

I.6.1. Composites à renforts de particules :

Les matériaux composites de particules consistent à mettre des particules d'un ou plusieurs matériaux en suspension dans une matrice.

En fait, le meilleur exemple est sûrement le béton. Le béton est composé de particules de sable et de gravier et elles sont liées ensemble par la réaction chimique du ciment et de l'eau qui donne la pâte (matrice). Le béton est donc un composite de particules très complexes puisqu'une multitude de paramètres influence ses propriétés. Plusieurs ouvrages de référence traitent de ces paramètres. **(Draiche K., 2015) (Beeby A.W., 1979).[3 , 4]**

I.6.2. Composites à renforts de fibres :

Les composites de fibres sont des matériaux composés d'une matrice dans laquelle divers types de fibres sont ajoutés. Le comportement des composites de fibres est beaucoup influencé par le type de fibres et leur nature.

Il existe deux grands types de fibres ; les macros fibres et les microfibrilles. Les macros-fibrilles (≈ 10 mm de longueur et plus) qui sont ajoutées à la structure afin d'augmenter sa ténacité et les microfibrilles (≈ 10 mm de longueur et moins) qui sont ajoutées afin d'améliorer principalement la résistance à la traction. La longueur qui caractérise les fibres comme microfibrilles ou macro-fibrilles peut varier en fonction de la composition de la matrice.

Le rôle des fibres dans la structure est le même que celui des armatures, c'est-à-dire reprendre les efforts de traction. Les composites à renforts de fibres limitent la formation, la propagation et la coalescence des microfissures au sein de la matrice.

Les fibres cousent à la fois les fissures existantes en empêchant leur développement et, limitent la formation d'autres fissures en renforçant la matrice d'acier. **(Draiche K.,2015)(Pierre P., 1998) (Beaudoin J.J., 1990). [3, 5,6]**

I.6.3. Composites à renforts de paillettes :

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces « particules minces » est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes

peuvent être rangées parallèlement l'un à l'autre afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan. Les composites de fibres. (Draiche K., 2015). [3]

I.6.4. Composites stratifiés :

Un stratifié se compose d'au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues.

Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification (Draiche K., 2015). [3]

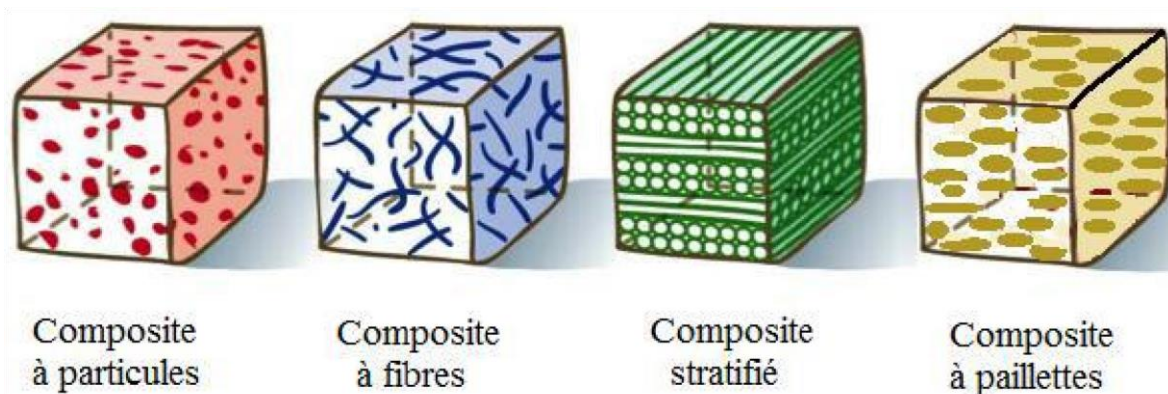


Fig. I. 3 Les différents types de composites

I.7. Les matériaux composites et leur fondamentaux de base :

En général les fondamentaux essentiels d'un matériau composite sont : le renfort, la matrice et l'interface. Dans certains cas des charges et des additifs peuvent être utilisés.

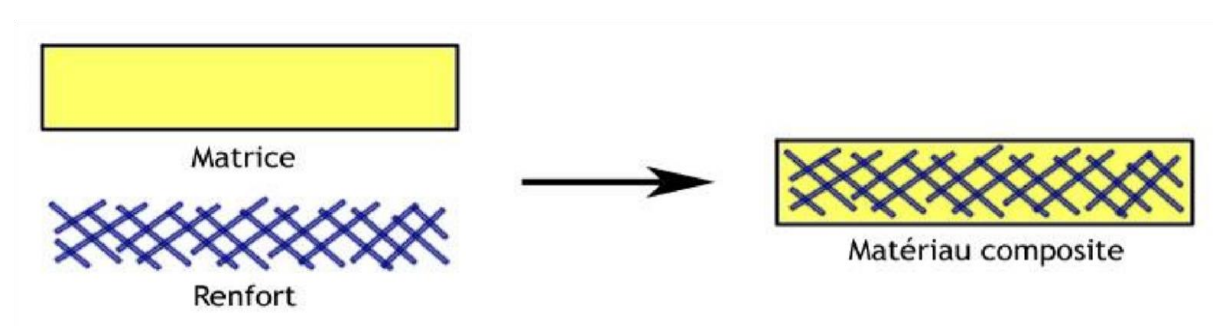


Fig. I. 4 Schéma typique d'un matériau composite

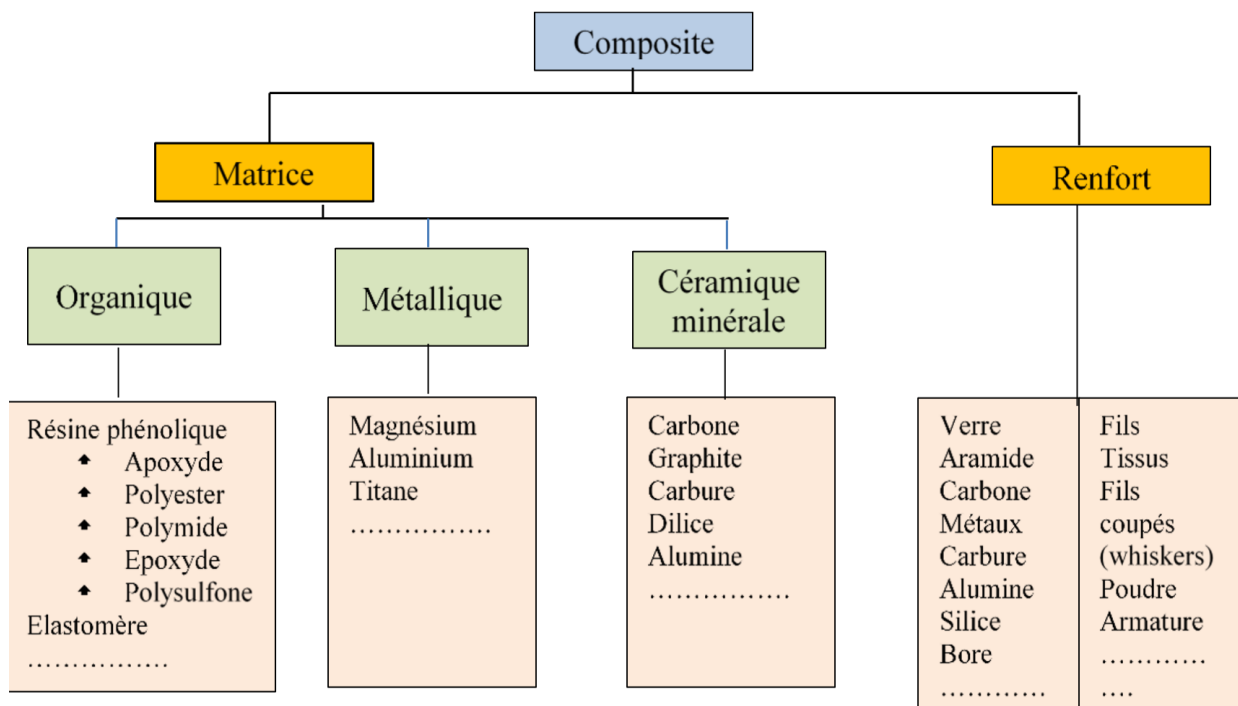


Fig. I.5 Différents composants de matériau composite

I.7.1. Renforts :

Les renforts forment les armatures du matériau composite, ils aident à améliorer la résistance mécanique et la rigidité et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue. Ainsi les fibres sont constituées par plusieurs milliers de filaments de diamètres variant de 5 à 25 µm.

Les renforts sont présents sous plusieurs formes : simple linéique, tissu surfacique simple, tissu complexe.

Les renforts sont caractérisés par :

- La nature de la fibre, minérale ou organique,
- L'architecture du renfort.

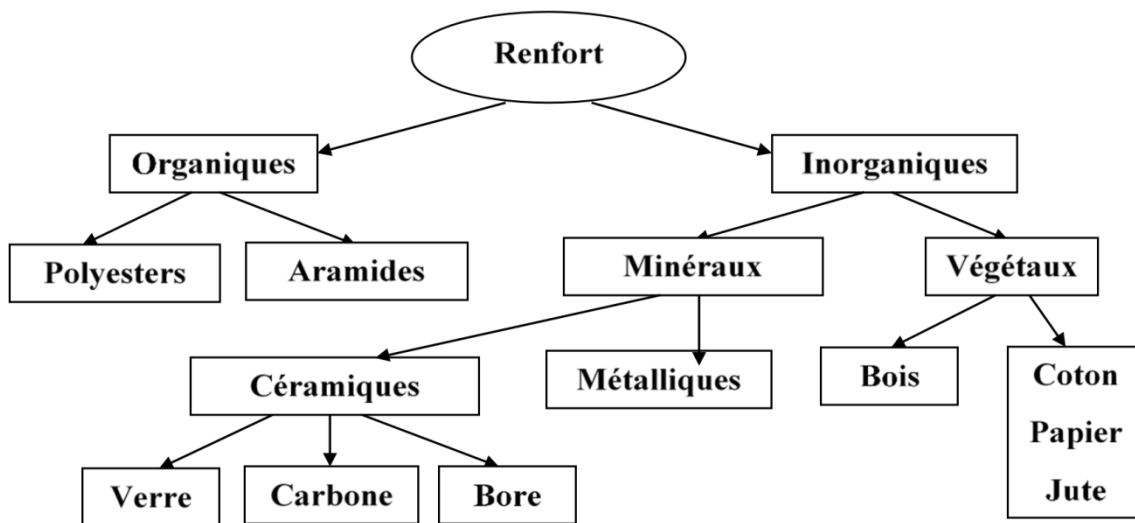


Fig. I. 6 Classification schématique des principaux matériaux de renfort.

I.7.2. Matrices :

Dans le composite la matrice ou bien la résine comme elle est appelée communément a pour rôle de maintenir les fibres entre elles tout en jouant le rôle de liant. Elle assure également le transfert de charge entre les renforts, tout en les maintenant dans leur position et leur orientation.

Enfin, elle protège le composite des agressions extérieures et donne la forme désirée au produit final. Pour obtenir des caractéristiques d'imprégnation plus élevées, la résine doit, dans sa configuration finale, occuper tous les espaces inter-fibres et présenter le moins de bulles d'air possible. Pour réaliser cette imprégnation, la viscosité de la résine est diminuée avec un apport thermique.

On peut classer les matériaux composites en fonction de leur nature, ils sont classés en trois grandes catégories : les composites à matrice organique (CMO) qui ne peuvent être

utilisés à des températures supérieures à 300°C, les composites à matrice métallique (CMM) qui sont utilisés jusqu'à 600°C, et les composites à matrice céramique (CMC) dont l'utilisation est possible même au-delà de 1000°C.

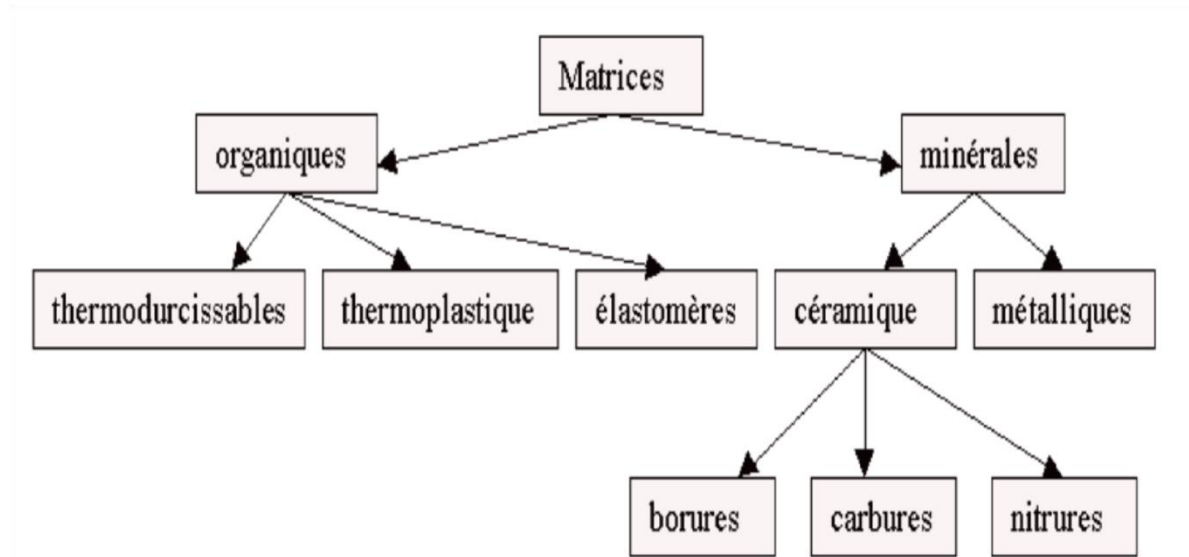


Figure I.7 Classification schématique des principaux matériaux de matrice

I.8. Les matériaux composites structuraux :

Les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories : Les monocouches, Les stratifiés et Les sandwichs. Leur rigidité est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc.

I.8.1. Les monocouches :

L'élément de base des structures composites ces les monocouches, ils sont constituées d'une matière plastique (résine) renforcée d'un matériau fibreux (renfort). La variation des multitudes types de monocouches sont définis par la forme du renfort : fibres longues, fibres tissées, ou à fibres courtes.

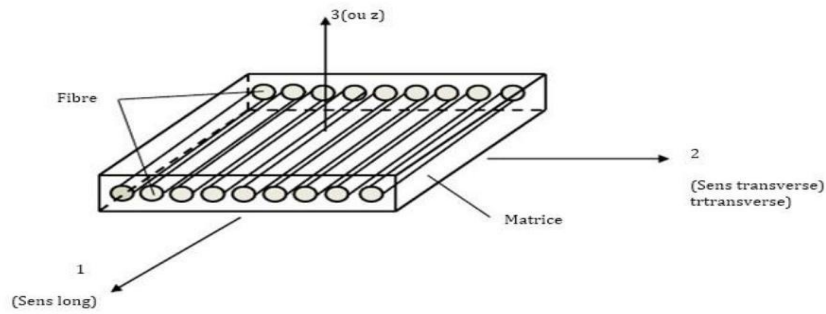


Fig. I.8 Schématisation d'une monocouche

I.8.2. Les stratifiés :

La superposition de plusieurs monocouches dans la direction de l'épaisseur permet d'obtenir des structures composites stratifiées qui sont constituées de couches de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également désignées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. La résistance mécanique aux efforts est assurée par le renfort. La résine quant à elle assure la cohésion entre les renforts de sorte à distribuer les excitations mécaniques.

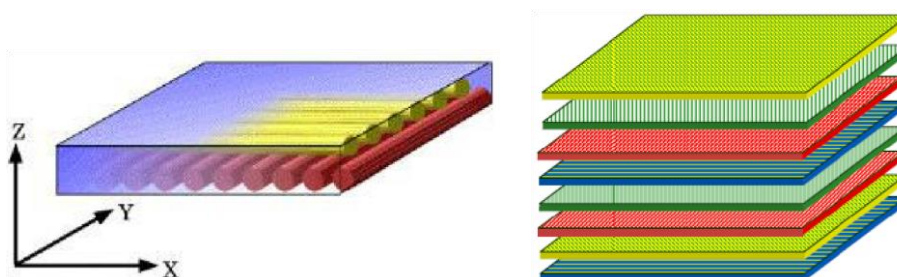


Fig. I.9 Matériau composite stratifié

I.8.3. Les sandwichs :

La structure des composites sandwichs est constituée de deux peaux ou bien de couvercle en matériaux composites entre lesquelles est collé un noyau à faible densité permettant d'augmenter les propriétés du matériau en flexion tout en conservant un poids très faible (**fig. I.10**).

Typiquement, l'industrie aéronautique utilise un noyau en forme de nid d'abeille constitué de feuilles ondulées collées ensemble.

Ces feuilles sont fabriquées en imprégnant des fibres d'aramide dans une résine phénolique ayant des propriétés ignifuges. Lors de la mise en forme de ce type de panneaux sandwichs, il est souvent nécessaire d'utiliser plusieurs morceaux de noyau afin de fabriquer de grandes pièces.

La jonction entre deux noyaux pose un problème de discontinuité qui est réglé dans l'industrie en injectant une mousse dans l'interstice.

L'injection de cette mousse ajoute une étape à la fabrication de grandes pièces et constitue un ajout de masse à la structure. Dans le domaine aéronautiques Les panneaux sandwichs intégrés dans les structures sont légers et rigides ce qui en fait de très bon transmetteurs de vibration mécaniques et sonores. Ces dernières vont à l'encontre du confort des passagers et peuvent même causer des bris mécaniques si elles ne sont pas amorties.

Généralement les matériaux composites ont un amortissement plus élevé que les métaux, mais celui-ci demeure insuffisant et il est nécessaire de trouver des solutions pour l'améliorer.

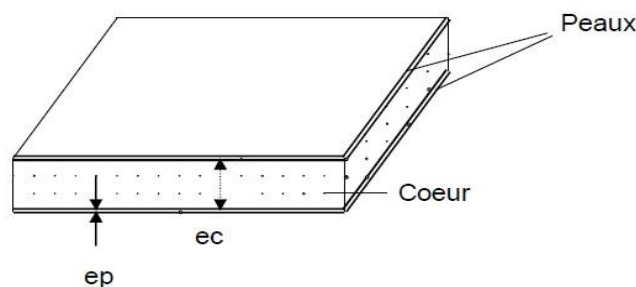


Figure I.10 Schématisation d'une plaque sandwich

I.9. Les théories utilisées pour la modélisation des plaques stratifiées composites :

Il existe plusieurs théories utilisées pour décrire le comportement mécanique des matériaux multicouches. On peut citer la théorie classique de la plaque stratifiée (**CLPT**), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (**FSDT**), les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (**HSDT**).

I.9.1. Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)

Cette théorie qui néglige l'effet du cisaillement transverse est appréciée par les ingénieurs vu sa simplicité. Les éléments basés sur cette théorie sont en principe des mieux adaptés à la modélisation des plaques minces. Leur formulation ne nécessite que l'approximation d'une seule composante de déplacement $w(x, y)$. Or ceci n'est qu'une simplicité apparente puisque des dérivées secondes des déplacements interviennent dans l'expression de l'énergie de déformation. Ainsi, la condition de la compatibilité inter-éléments correspond à la continuité C^1 du déplacement transverse, en d'autres termes $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ et W doivent être continus à travers les interfaces des éléments. Cette condition ne peut généralement être satisfaite qu'avec des éléments sophistiqués et d'ordre élevé.

La théorie classique des plaques minces (**CPT**) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, d'où :

- Une section droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, (**fig.I.11 et fig.I.12**), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse ($\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).
- L'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$).

Basant sur ces hypothèses, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ V(x, y, z) &= V_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ W(x, y, z) &= W_0(x, y) \end{aligned} \quad (I.1)$$

Où

u_0, v_0, w_0 les composantes du champ de déplacement du plan moyen de la plaque ($z = 0$).

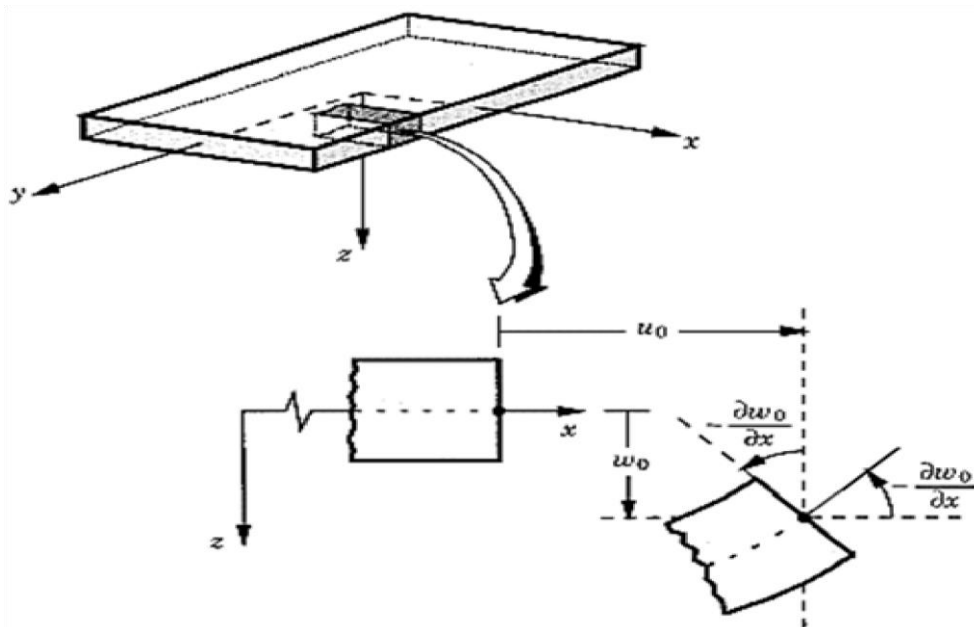


Fig. I.11 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie classique de Kirchhoff (Reddy .J .N, 2004)[9]

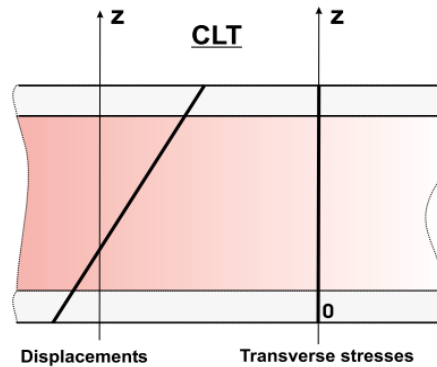


Fig. I.12 : Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour la théorie classique (CLT).

I.9.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de Reissner-Mindlin (FSDT)

Cette théorie proposée par Mindlin, **en 1951**, prend en compte les déformations dues à l'effort tranchant et l'effet dû à l'inertie de rotation. Cette approche plus fine du problème des plaques repose également sur une autre cinématique de la déformation, et donc une autre expression des conditions aux limites.

Cette théorie peut être considérée comme une amélioration par rapport à la **théorie classique (CLPT)**. Et elle est basée essentiellement sur l'hypothèse de **Reissner-Mindlin**.

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT**) se base sur les hypothèses de **Reissner-Mindlin**, d'où :

- La contrainte normale (σ_z) est négligeable devant les autres composantes ;
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

La troisième hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle dépend également à la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute

l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, **Mindlin** a proposé un facteur K de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement.

- Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, le champ de déplacement (**fig. I.13**) est exprimé sous la forme (**Mindlin R. D., 1951**).[7]

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= U_0(x, y) - z\varphi_x(x, y) \\
 V(x, y, z) &= V_0(x, y) - z\varphi_y(x, y) \\
 W(x, y, z) &= W_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{I.2}$$

Où :

u_0, v_0, w_0 les composantes du champ de déplacement du plan moyen de la plaque ($z = 0$), et Φ_x, Φ_y les rotations autour des axes y, x , respectivement.

Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, les déformations transversales sont constantes en Z , Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (**Whitney J.M., 1973**). [8]

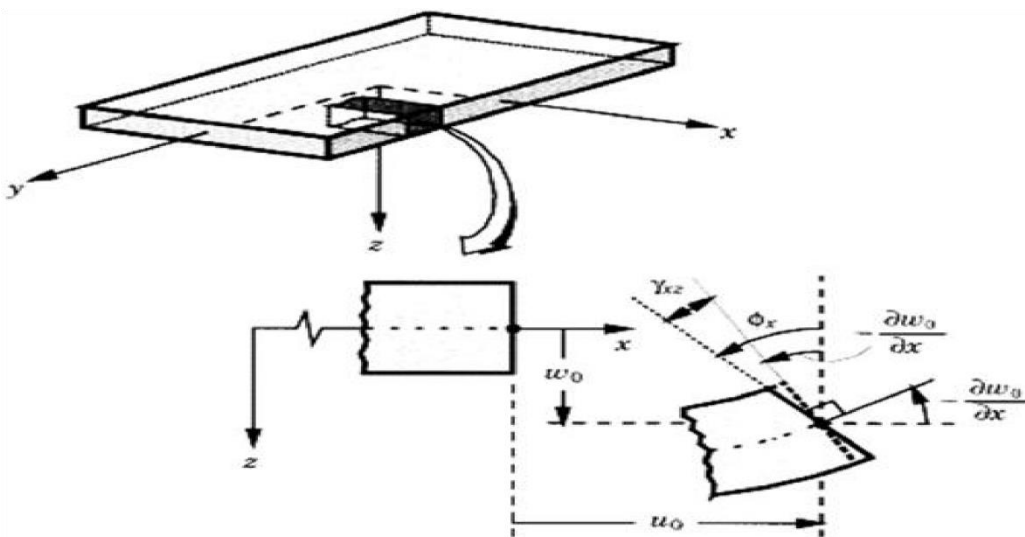


Fig. I.13 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie du premier ordre Reissner-Mindlin(**Reddy .J .N, 2004**). [9]

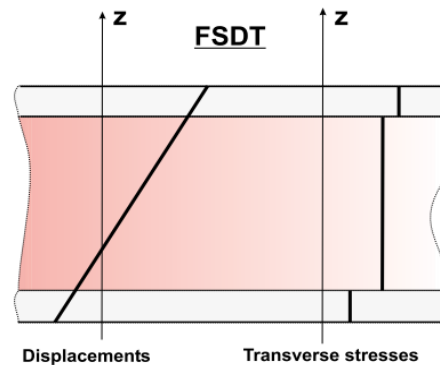


Fig. I.14 : Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour la théorie du premier ordre

Les résultats obtenus par cette théorie dépendent essentiellement du choix empirique des coefficients correcteurs, donc l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

I.9.3. Les théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Plusieurs auteurs ont proposé des théories plus élaborées pour franchir les limites des théories **CLT** et **FSDT**, parmi lesquelles on a la théorie des déformations de cisaillement d'ordre supérieur **HSDT**. Celle-ci adopte une variation cubique pour le champ des déplacements au long de l'épaisseur du stratifié.

Dans cette théorie, il n'est pas nécessaire d'introduire les facteurs de correction de cisaillement, car la distribution des déformations de **CT** ont la forme parabolique le long de l'épaisseur et qui est similaire à la condition réelle prévue par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Nombreuses auteurs proposent des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé, on peut citer (**Hildebrand F.B., 1949**) ; (**Naghdi P. M., 1957**) ; (**Reissner E., 1975**) ; (**Reddy J.N., 1984**) ; (**Kant T., 2002**) ; (**Liberscu L., 1967**) ; (**Whitney J.M., 1973**) ; (**Touratier M., 1991**) ; (**Nguyen. 2004**). [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]

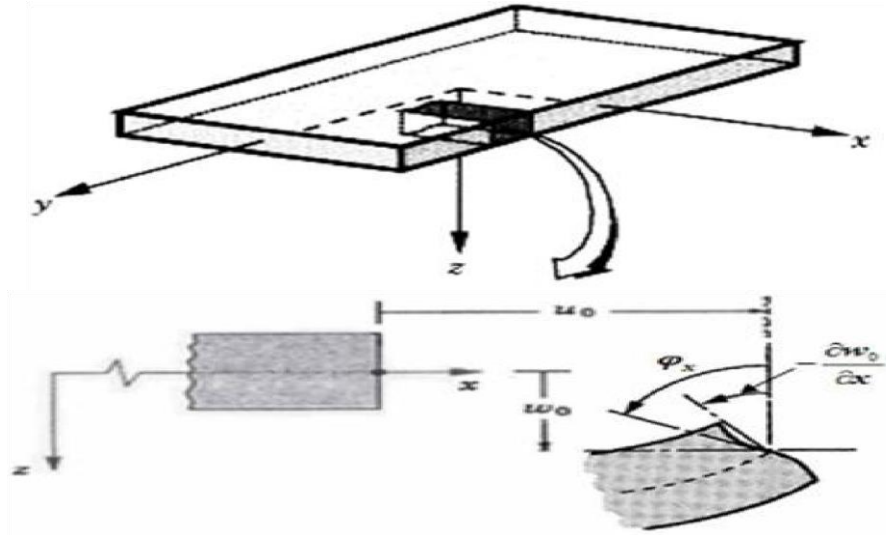


Fig. I.15 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie d'ordre élevé (Reddy .J .N, 2004).[9]

Nous avons introduit ici quelques modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

Le champ de déplacement généralement s'écrit comme suit :

$$U(x, y, z) = U_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z) \varphi_x(x, y)$$

$$V(x, y, z) = V_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z) \varphi_y(x, y) \tag{I.3}$$

$$W(x, y, z) = W_0(x, y)$$

Où :

U_0, V_0 et W_0 sont les composantes du champ de déplacement en membrane du plan moyen de la plaque ($z = 0$).

φ_x, φ_y sont les rotations autour des axes y, x , respectivement,

$$\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \quad \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$$

$\Psi(\mathbf{z})$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par la supposition suivante ($\Psi(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$), alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par ($\Psi(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$).

I.10. Phénomènes de flambage :

I.10.1. Qu'est-ce que le flambement ?

En résistance des matériaux (RDM), le flambage est un phénomène d'instabilité élastique mis en évidence lorsqu'une poutre est comprimée, il se développe un moment de flexion parasite amplifié par les déformations et déplacements de la poutre chargée.

Le flambement d'une structure se produit lorsqu'un léger accroissement du chargement entraîne des déformations importantes, provoquant l'effondrement. Le calcul du flambement se déroule en deux étapes:

- a) La structure est sollicitée par un chargement qui produit une distribution de contraintes (s).
- b) le chargement initial est multiplié par un facteur de charge λ .

Le flambement apparaît lorsque l'énergie de déformation élastique est équivalente au travail des contraintes initiales (s). Dans ce cas, un accroissement infime du chargement produit des déplacements infinis.

- Le phénomène du flambage est affecté par :

- ✚ **La résistance du matériau** : plus le matériau est résistant, plus la valeur de charge de flambement sera élevée.
- ✚ **L'inertie, respectivement le rayon de giration de la barre** : plus l'inertie est élevée, plus la résistance de flambement sera élevée.
- ✚ **La longueur de flambage** : plus la longueur de flambage est grande, plus la résistance de flambement sera faible.

I .10.2 Forme et importance des phénomènes de flambement :

Le flambement affecte tous les éléments structuraux comprimés : colonnes des bâtiments, piles des ponts, barres des treillis, étais des fouilles, pylônes, tours, etc...

Lorsque le flambement se produit par accroissement flexionnel de la déformée dans un plan, le phénomène s'appelle *flambement plan* ou *par flexion* (Fig.I.16.a). C'est le cas le plus courant.

Deux autres types de flambement sont toutefois aussi possibles :

La pièce comprimée peut s'enrouler (se visser) sur elle-même en hélice : c'est le *flambement par torsion*, chaque section tournant autour de son centre de torsion (Fig. I.16.b). Ce type de flambement est rare et n'est déterminant que pour les pièces à section ouverte et parois minces.

La poutre comprimée peut devenir instable par flexion oblique et torsion simultanément ; c'est une sorte combinaison des deux précédents, appelé *flambement spatial* ou *par flexion et torsion* (Fig. I.16.c). Ce cas est difficile à calculer. [19]



Fig. I.16 Flambement des poutres droites comprimées.

I.11 Conclusion :

De leur importance, on a fait appel aux définitions et des notations liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques mécaniques.

Nous avons aussi discuté sur les matériaux composites structuraux et leurs avantages principaux qu'offrent ces matériaux pour le renforcement des structures à hautes performances.

Dans cette partie, nous avons également donné un aperçu général sur les différentes théories des plaques à savoir la théorie classique (CPT) de Love-Kirchhoff utilisée pour l'étude des plaques minces, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre un (FSDT) qui prenne en considération l'effet de cisaillement transverse, pour avoir des résultats précises par cette théorie le plus souvent un coefficient de correction est utilisé, et la théorie d'ordre supérieur. Finalement, nous avons présentés quelques notions de base sur le phénomène de flambement des structures.

CHAPITRE II

COMPORTEMENT

MÉCANIQUE DES PLAQUES

STRATIFIÉES SELON LA

THÉORIE DU PREMIER

ORDRE

Chapitre II

Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie du premier ordre

II.1. Introduction :

De tous les temps, un des objectifs prioritaires dans la conception des structures a été de concevoir des structures les plus résistantes possibles pour un poids minimum. De nos jours, l'existence de matériaux performants et l'utilisation de techniques d'optimisation de plus en plus perfectionnées permettent de bien remplir ces critères. Cependant, cela conduit très souvent à des structures minces et élancées pour lesquelles la stabilité peut devenir un problème primordial. (BAGUET S., 2001).[20]

Pour mieux connaître, le comportement statique et dynamique de la structure, il est impératif d'approcher de la manière la plus correcte possible les phénomènes mis en jeu par les plaques composite qui sont plus ou moins complexes. Ainsi, une caisse de voiture, une aile d'avion, parois d'une centrale nucléaire, un bateau... Parmi tous ces domaines d'application, on peut distinguer plusieurs types de plaques : des plaques minces, modérées et épaisses. Afin de résoudre les problèmes des structures en plaques stratifiées, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres. On distingue quatre équations, dans un modèle de mécanique des solides, comportant :

- Les équations du mouvement
- Relations déformations-déplacements (et rotations)
- Loi de comportement, les relations de contrainte-déformations
- Et les équations de compatibilité

Dans ce chapitre, nous allons faire premièrement un rappel sur la théorie du premier ordre de cisaillement transversal, ainsi que l'écriture de la loi de comportement d'un stratifié. Puis nous allons décrire les efforts résultants dans le stratifié.

II.2. Définition des plaques :

Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés, définies par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur, notée $h(x, y)$, petite par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur, suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince ou épais aux plaques et coques.

Différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel, d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique régnant le comportement :

- a) Les plaques minces avec de petites flèches (**Kirchhoff**) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée.
- b) Les plaques minces avec de grandes flèches (**Karman**).
- c) plaques modérées ou épaisses (**Mindlin-Reissner**) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.

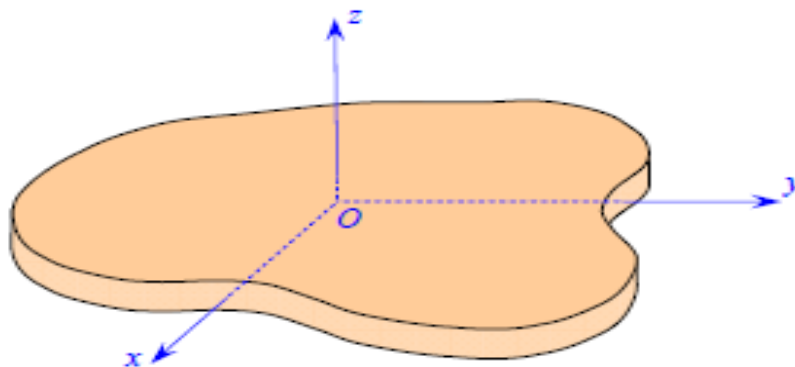


Fig. II.1Élément plaque

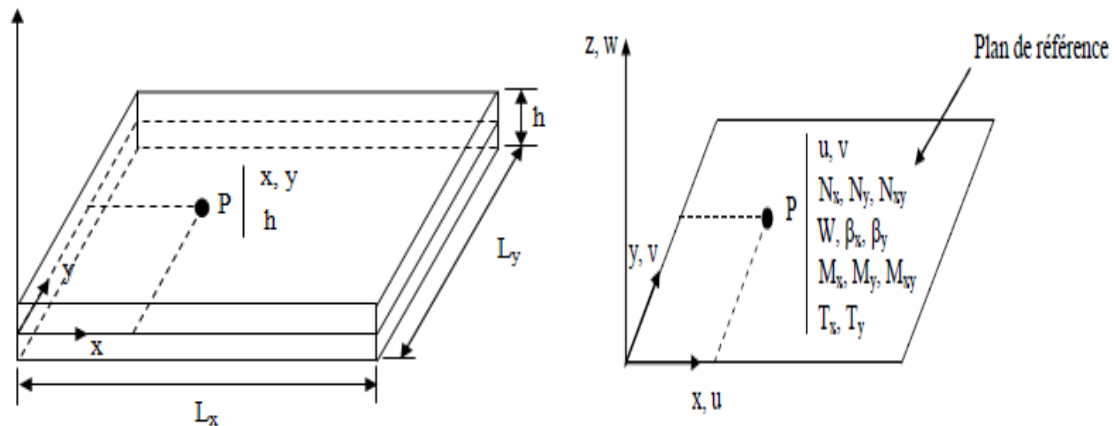


Fig. II.2 Description d'une plaque

II.3. Historique des plaques :

Du point de vue historique, c'est Love qui utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff en 1888, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les théories des poutres, pour fonder une théorie des plaques minces, appelée théorie classique **CPT** ou théorie de Love-Kirchhoff (**Love A. E. H., 1888**) [21]. La théorie des plaques modérées ou semi-épaisses, théorie des déformations du premier ordre, a été consolidée par **Mindlin** à partir des travaux de (**Timoshenko S., 1921**), (**Reissner E., 1945**) et (**Uflyand Y.S., 1948**) (**Mindlin R. D., 1951**), [22, 23, 24,25] cette théorie utilise un coefficient de correction pour obtenir des résultats plus exactes, $K=\frac{5}{6}$. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle

II.4 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de **Reissner-Mindlin (FSDT)**

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT**) (**Firsrt-OrderShear Déformation Plate Theory**) a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse.

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT**) se base sur les hypothèses de **Reissner-Mindlin**, d'où :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque ;
- La contrainte normale (σ_z) est négligeable devant les autres composantes ;
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.
- La troisième hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle dépend également à la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur K de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement.
- Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, le champ de déplacement (fig. II.3) est exprimé sous la forme (Mindlin R. D., 1951). [21]

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U_0(x, y) - z\varphi_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= V_0(x, y) - z\varphi_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= W_0(x, y) \end{aligned} \quad (I.1)$$

Où :

u_0, v_0, w_0 les composantes du champ de déplacement du plan moyen de la plaque ($z = 0$), et φ_x, φ_y les rotations autour des axes y, x , respectivement.

Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, les déformations transversales sont constantes en Z , Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement 1973 **transversal (Whitney J.M.,)**. [26]

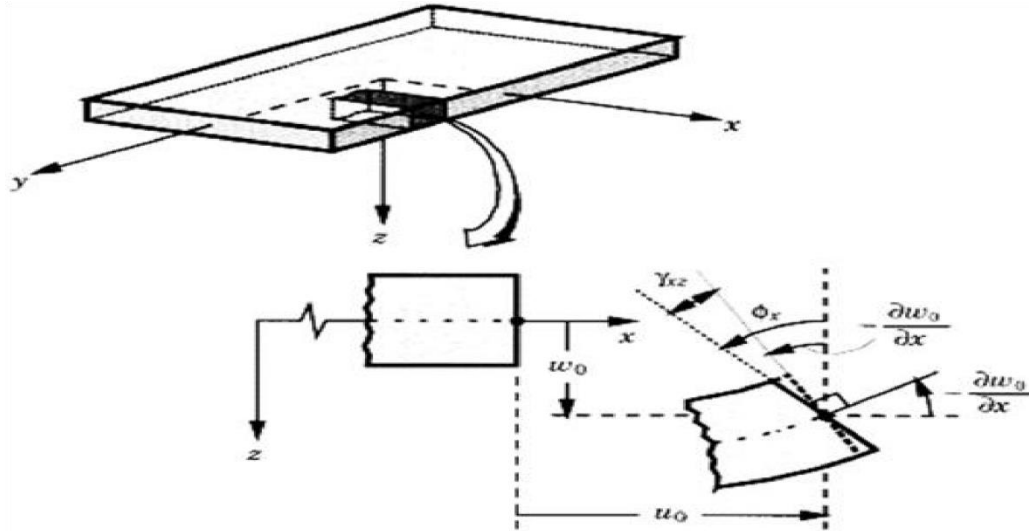


Fig. II.3 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie du premier ordre **Reissner-Mindlin**(Reddy .J .N, 2004). [9]

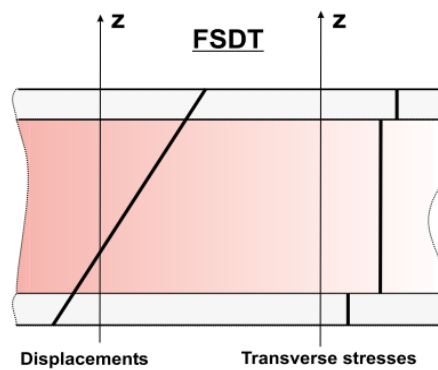


Fig. I.4 Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour la théorie du premier ordre

Les résultats obtenus par cette théorie dépendent essentiellement du choix empirique des coefficients correcteurs, donc l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.5. comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie du premier ordre :

II.5.1. Comportement dans les axes du matériau :

Le comportement élastique d'un matériau orthotrope, rapporté à ses axes principaux (Fig.II.5), peut être décrit soit par sa matrice de rigidité C ,

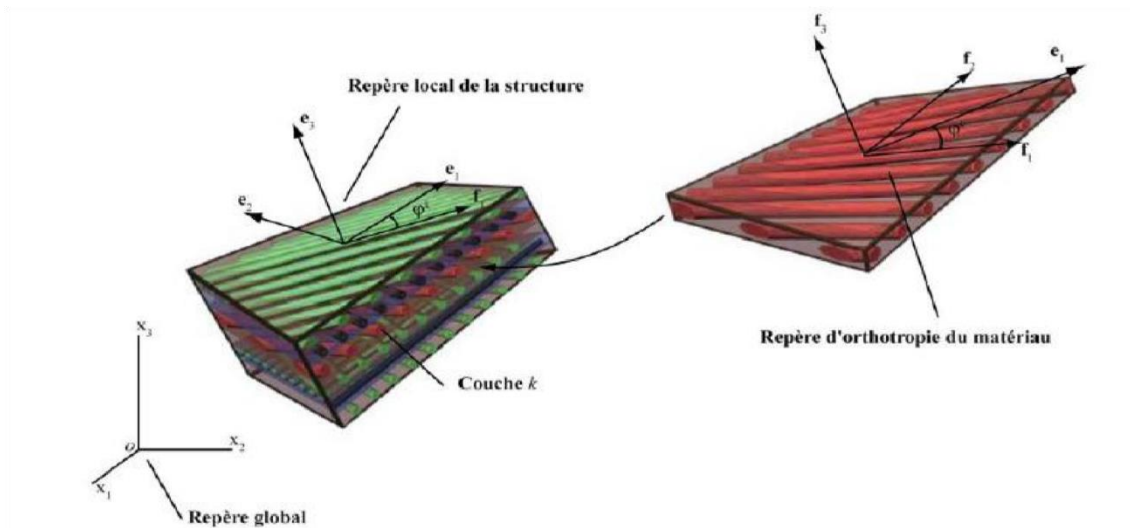


Fig. II. 5Orientation des couches d'un stratifié orthotrope

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

Soit par la matrice de souplesse en définie par S :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

II.5.2. Etat de contraintes planes :

Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

4

La déformation normale « ε_z » peut être exprimée en fonction des composantes des contraintes planes en utilisant le fait que $\sigma_z=0$

$$\varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{36}\tau_{xy} + S_{23}\sigma_y$$

Dans le plan matériau principal, les termes des coefficients de rigidité C 16 ($i \neq 6$) sont nuls, par conséquent $Q_{16}=Q_{26}=0$. Ainsi, dans le plan principal d'un matériau orthotrope, les équations constitutives en contraintes planes auront la forme simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

En inversant cette dernière équation, nous aurons :

Les éléments de cette matrice en contrainte plane sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Ou : $S_{ij} = Q_{ij}^{-1}$

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

Etant donné que la matrice de souplesse est symétrique $S_{21} = S_{12}$ donc nous aurons :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

Les constantes qui peuvent être mesurées dans le laboratoire d'une façon exacte sont. E_1 , E_2, G_{21}, ν_{21} . Une mesure exacte du coefficient de poisson, ν_{21} est souvent très difficile car, il est très petit pour plusieurs matériaux composites.

Les expressions explicites des termes Q_{ij} en fonction des constantes de l'ingénieur :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{11} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12}$$

II .5.3. Constantes de rigidités réduites d'un composite orthotrope en dehors de ces axes principaux :

On considère la rotation à travers un angle autour d'un axe « z » comme est indiqué dans la (Fig. II-6)

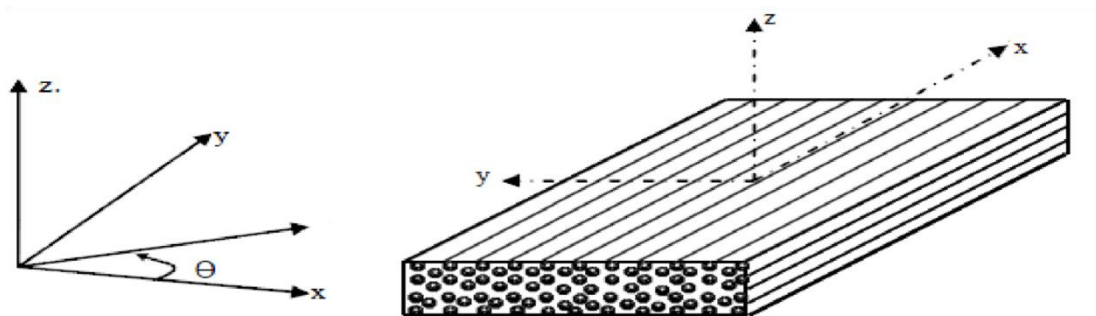


Fig. II. 6 Transformation par rapport à un axe

Les cosinus directeurs pour ces transformations sont exprimés en fonctions de l'angle θ

$$c = \cos\theta$$

et

$$s = \sin\theta$$

L'équation constitutive de contrainte plane dans un repère arbitraire x-y est alors écrite comme Suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{c}_{44} & \overline{c}_{45} \\ \overline{c}_{54} & \overline{c}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\}_x = [\overline{Q}] \{\varepsilon\}_x \quad (\text{II.8})$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Ou les termes \bar{Q}_{ij} sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 \\
 \bar{Q}_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)
 \end{aligned} \tag{II.10}$$

II.6. Théorie des stratifiés

II .6.1. Champ de déplacements :

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de **Henkey-Mindlin**, schéma de **Kirchhoff**) se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= U_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t), \\
 V(x, y, z, t) &= V_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t), \\
 W(x, y, z, t) &= W_0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{II.11}$$

(U_0, V_0, W_0) est le déplacement du plan moyen.

II .6.2. Champ de déformations :

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements soit

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{II.12}$$

Pour un schéma où les déformations en cisaillement transverse sont nulles :

$$\gamma_{xz} = 0, \text{ et, } \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{II.13})$$

Cette hypothèse implique :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial W_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial W_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Le champ de déformation s'écrit alors :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

La matrice de la déformation se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Le champ des déformations est la superposition :

- des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (U_0, V_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan ;

- des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote Z du point M. Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y) \quad (\text{II.19})$$

Avec :

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

La matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion :

Ou plus simplement :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kxy \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Avec :

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}$$

$$kx = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad ky = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \quad kxy = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \quad (\text{II.22})$$

Le champ des déformations s'écrit donc sous une forme analogue à la relation de la théorie classique des stratifiés :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon m(x, y, z) = \varepsilon m(x, y) + zk(x, y) \quad (II.23)$$

Seules les expressions des courbures sont modifiées

$$\{\varepsilon\}_x = \{\varepsilon^0\}_x + Z \{k\}_x \quad (II.24)$$

C'est l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés.

II .6.3. Champ de contraintes :

Les contraintes dans la couche **k** s'expriment de la façon suivante :

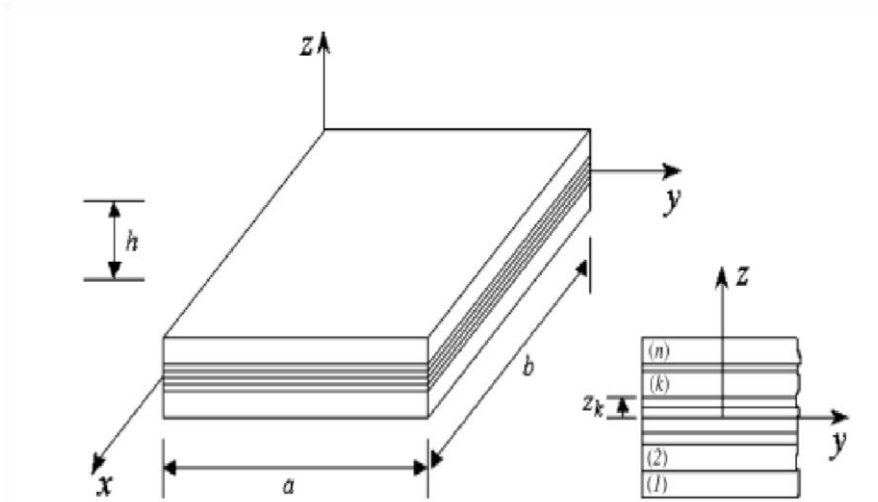


Fig. II. 7 Les couches d'un stratifié

L'expression des contraintes peut être maintenant déterminée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II.25)$$

Soit :

$$\{\sigma_x\} = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon_x\} \quad (II.26)$$

Ou matrice $[\bar{Q}_{ij}]^k$ de rigidité réduite transformée du k^{ieme} correspondant à la cote z .

À partir d'équation (III.27) nous pouvons obtenir :

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + [\bar{Q}]^k z \{K\}_x \quad (II.27)$$

II .6.4. Expression des résultantes et moments :

II .6.4.1. Résultantes en membrane :

Les forces par unité de longueur $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$ (voir Figure ci-dessous) sont définies

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz \quad (II.28)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz \quad (II.29)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz \quad (II.30)$$

Comme suit :

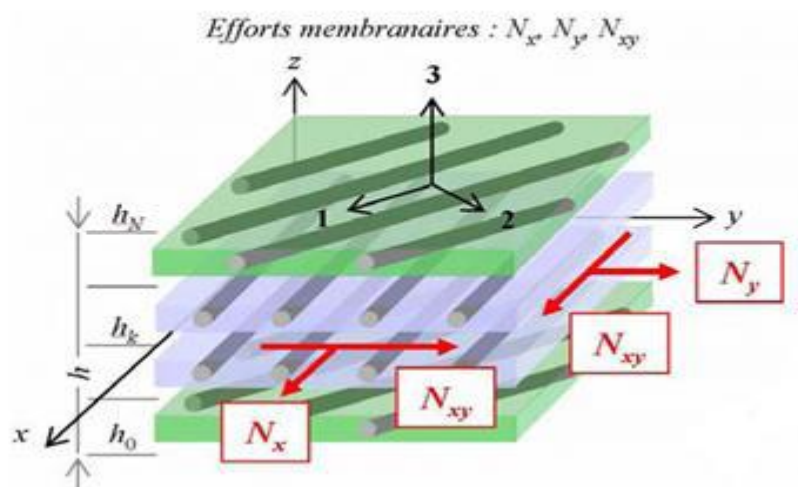


Fig. II. 8 Forces par unités de longueur

Les trois équations peuvent être sous la forme condensée :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} dz \quad (\text{II.31})$$

Nous aurons :

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]^k \{\epsilon^0\} + \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]^k \{k\} z dz \quad (\text{II.32})$$

Ou bien sous une autre forme :

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] dz \right) \{\epsilon^0\} + \sum_{k=1}^n \left([\bar{Q}]^k z dz \right) \{k\} \quad (\text{II.33})$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \{N\} &= [A] \{\epsilon^0\} + [B] \{k\} \\ [A] &= \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k - z_{k-1}) \\ [B] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Ou :

La matrice $[\bar{Q}_{ij}]^K$ est constante à travers chaque couche mais peut être différente d'une couche à une autre.

L'équation (III-34) relie les forces de membrane par unité de longueur aux déformations du plan médium $\{\epsilon^0\}$, et les courbures du stratifié $\{k\}$ par les matrices **[A]** et **[B]**. La matrice **[A]** représente « la membrane » et la matrice **[B]** représente « la matrice de couplage membrane – flexion ».

II .6.4.2. Moments de flexion et de torsion :

On définit les moments par unité de longueur $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$ comme l'intégrale des forces « $\sigma_i z dz$ », ainsi :

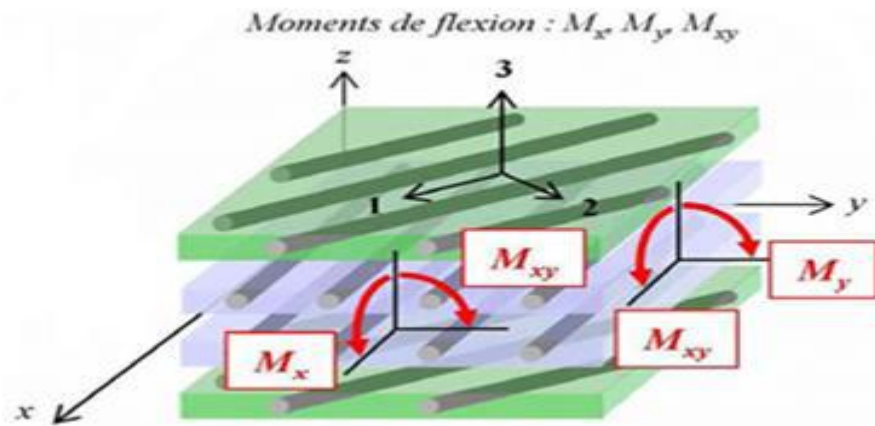


Fig. II. 9 Moments par unités de longueur

M_x : Moment fléchissant d'axe y , dû aux contraintes σ_x par unité de largeur suivant la direction y .

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_x\} z dz \quad (II.35)$$

M_y : Moment fléchissant d'axe x , dû aux contraintes σ_y par unité de largeur suivant la direction x .

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_y\} z dz \quad (II.36)$$

M_{xy} : Moment de torsion d'axe x , dû aux contraintes τ_{xy}

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\tau_{xy}\} z dz \quad (II.37)$$

Ou bien sous une forme condensée :

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} z dz \quad (\text{II.38})$$

Substituant l'équation (II.25) dans les équations (II.36), (II.37) et (II.38), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\{M\} = [B]\{\mathcal{E}^0\} + [D]\{k\} \quad (\text{II.39})$$

Ou la matrice de flexion est définie comme suit :

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (\text{II.40})$$

II.6.4.3. Résultantes en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$V(x, y) = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad (\text{II.41})$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié. Elles sont schématisées sur la figure suivante :

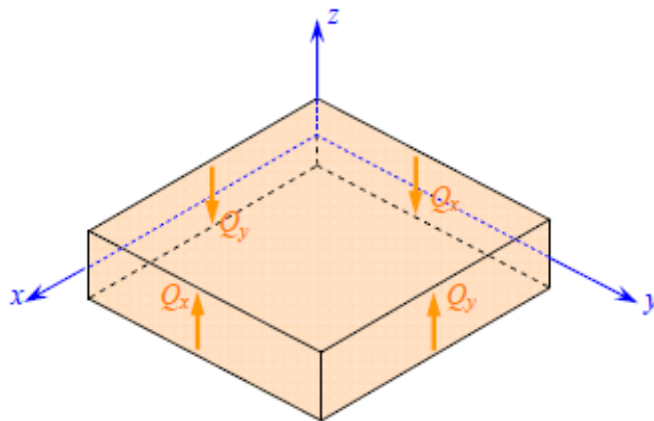


Figure II.10 Représentation schématique des résultantes de cisaillement.

$$V(x, y) = \begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) (\bar{C}_{ij})_k \quad (\text{II.43})$$

Les coefficients F_{ij} ont même forme que les coefficients A_{ij} . Ils en diffèrent par l'utilisation des coefficients \bar{C}_{ij} de rigidité en cisaillement transverse au lieu des coefficients \bar{Q}_{ij} de rigidité réduit.

II.6.5. Equation constitutive d'un stratifié :

L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) (\bar{Q}_{ij})_k \\ B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\bar{Q}_{ij})_k \\ D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\bar{Q}_{ij})_k \\ F_{ij} = \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) (\bar{C}_{ij})_k \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

Avec

L'équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \\ \gamma_c \end{Bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice $ABDF$) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés :

- ❖ La matrice A correspond au comportement de *membrane*,
- ❖ La matrice D correspond au comportement de *flexion*,
- ❖ La matrice B correspond aux termes de *couplage* entre les phénomènes de *membrane* et de *flexion*,
- ❖ La matrice F correspond au comportement *de cisaillement transverse*,

Ainsi, si B n'est pas *nul*, un effort de *traction* dans le plan moyen entraîne une *flexion* du stratifié. Toutefois d'autres couplages existent à l'intérieur même des comportements de membrane et de plaque :

- * Les termes A_{16} et A_{26} correspondent aux couplages plans entre *traction* et *cisaillement*.
- * Les termes D_{16} et D_{26} quantifient les couplages entre *flexion* et *torsion* de la plaque stratifiée. Le plus souvent ces couplages constituent une difficulté supplémentaire de la conception composite.

II.6.6. Facteurs de correction de cisaillement transverse pour des plaques Stratifiées :

Un premier choix du champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre. En optant pour ce nt constantes à travers l'épaisseur d'une structure composite.

Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai. En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (**Fig. II.11**).

Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal, dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre, des facteurs de corrections doivent être introduits, comme cela a été souligné précédemment.

Les résultats de *Reissner-Mindlin* qui supposent une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, donnent :

$$k = \frac{5}{6}$$

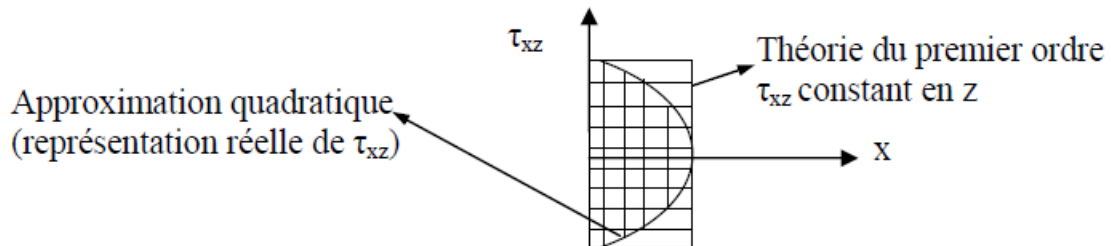


Fig. II.11 : Approximations de la contrainte du cisaillement transversal **CT** Constante (**FSDT**) et quadratique (**HSDT**).

CHAPITRE III

FORMULATION DE

L'ÉLÉMENT FINI UTILISÉ

Chapitre III

Formulation de l'élément fini utilise

III.1 Introduction :

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Nous pensons bien sûr aux projets spatiaux, aéronautiques et nucléaires dans lesquels la sécurité est vitale. La méthode éléments finis très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans le pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la formulation d'un élément fini bidimensionnelle (**2D**), construit sur la base de l'approche monocouche équivalente en utilisant la théorie du premier ordre (**FSDT**). L'élément formulé est de forme rectangulaire défini par quatre nœuds et cinq degrés de liberté (**SDDL**) par nœud. Cet élément est destiné à l'analyse statique des plaques isotropes, composites stratifiées et sandwichs, qu'elles soient symétriques ou non-symétriques. Le principe de l'énergie potentielle totale a été adopté pour établir la relation entre les forces et les déplacements. Ainsi, nous allons présenter l'organigramme du programme de l'élément utilisé.

III.2 Historique :

Bien que l'appellation de la méthode des éléments finis soit nouvelle, le concept est ancien et a été utilisé à chaque fois qu'une solution d'un problème réel par une méthode approximative s'est avérée indispensable. L'origine de la méthode remonte à l'aube du **XX** siècle où une technique de subdivision d'une structure complexe en un maillage régulier de poutre élastique était utilisée.

La méthode des éléments finis est apparue avec l'analyse des structures, née vers 1850. Les premières études ont été menées sur la résistance des matériaux dans des conditions de petites déformations, ce qui a permis d'obtenir des systèmes simples résolus « manuellement », notamment par *Maxwell*, *Castigliano*, *Mohr*. La formalisation, et le concept mathématique d'élément fini est apparu bien plus tard, vers 1940 et la définition est posée par *Newmark*, *Hrenikoff*, *Mc Henry et Courant*.

L'arrivée du calcul numérique et de méthodes de résolution performantes par ordinateur a permis de populariser la méthode.

Dans le temps la théorie des poutres élastiques était connue et utilisée pour approcher la solution exacte des structures. Il a fallu attendre le début des années **1940** pour que le mathématicien Courant suggère une approche similaire à celle de la M.E.F qui consiste à subdiviser la structure en maillage triangulaire défini par une interpolation polynomiale.

Comme il manquait les ordinateurs pour effectuer les calculs, l'utilisation de cette méthode est restée très restreinte. Une décennie après, La méthode des Eléments Finis est mise au point au début des années **50** chez *Boeing* (Seattle, USA, calcul des structures d'aile d'avion) ; on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (*publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956*).

Quant aux bases théoriques générales, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de **1954 à 1960** (*Argyris, Kelsey*) [*ARG 60*]. certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites par exemple celui

de la torsion de *Saint-Venant* en divisant la section en triangles, mais elles restent sans suite.

Dès 1970, la méthode envahit tous les créneaux de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Il faut ajouter que son essor est, dès le début et aujourd'hui encore, indissociable de celui des ordinateurs.

III.3 Formulation de l'élément fini utilisé :

III.3.1 Principe de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis consiste à mailler la structure à étudier en un certain nombre d'éléments finis de géométrie simple (segment de droite ou arc pour une structure linéique ; triangle ou quadrangle pour une structure surfacique ; tétraèdre, prisme ou hexaèdre pour une structure volumique, etc.). Le champ des déplacements en un point quelconque est ensuite évalué par interpolation des valeurs des déplacements aux nœuds du maillage, qui constituent les variables nodales du problème. Les équations de l'élasticité permettent ensuite d'exprimer en fonction des variables nodales l'énergie de déformation, l'énergie cinétique et le travail des actions mécaniques exercées sur la structure. L'application du théorème de l'énergie potentielle totale conduit enfin au système d'équations dont les variables nodales sont solutions.

III.3.2 Description de l'élément utilisé :

Dans la présente étude, un élément fini bi-dimensionnelle (**2D**), construit sur la base de la théorie du premier ordre (**FSDT**) a été utilisé. L'élément formulé est de forme rectangulaire défini par quatre nœuds et cinq degrés de liberté (**5DDL**) par nœud. Deux degrés dans le plan (\mathbf{x}, \mathbf{y}) qui sont $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $v_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et trois hors plan $w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\varphi_x(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\varphi_y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (Fig. III.1)

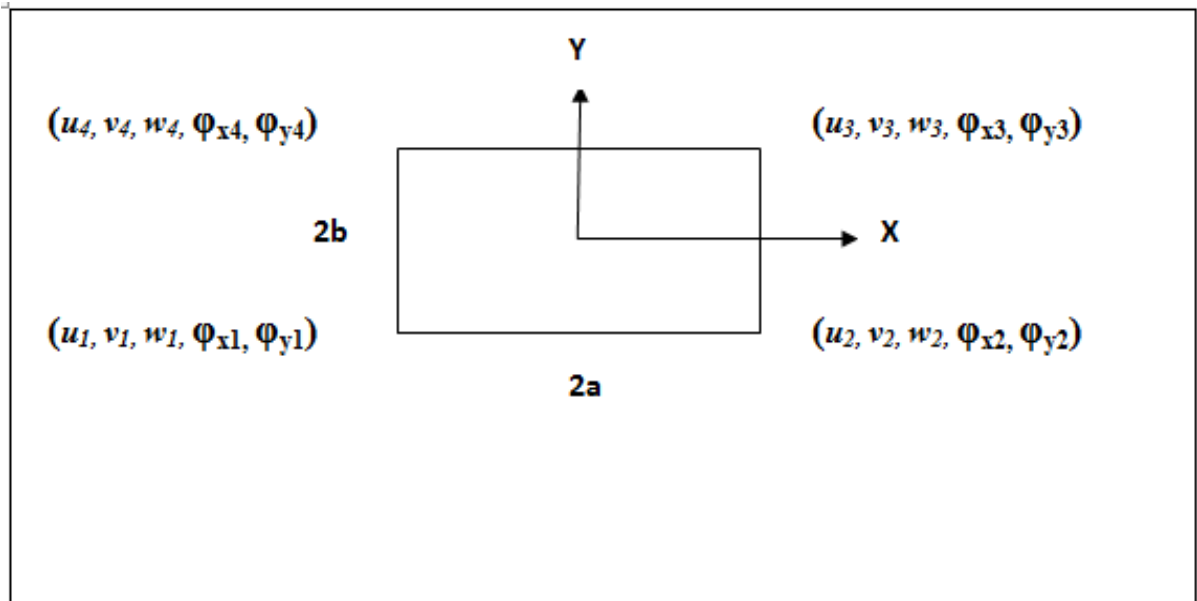


Figure III.1 Géométrie de l'élément rectangulaire et variable nodales correspondantes.

III.3.3 Cinématique de la théorie :

L'élément utilisé est basé sur la théorie du premier ordre, alors les déplacements dans le plan et hors plan sont données par :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\ V(x, y, z) &= V_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \\ W(x, y, z) &= W_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Les variables des déplacements sont: $U_0(x, y)$, $V_0(x, y)$, $W_0(x, y)$, $\varphi_x(x, y)$, $\varphi_y(x, y)$

III.3.4 Approximation nodale des déplacements :

Les variables : $U_0(x, y)$, $V_0(x, y)$, $W_0(x, y)$, $\varphi_x(x, y)$, $\varphi_y(x, y)$ sont interpolées en fonctions des variables nodales pour :

$$\delta(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy$$

Les coefficients ($\alpha_0 - \alpha_3$) peuvent être déterminés à partir des variables nodales.

Les fonctions de formes sont les fonctions N_i qui relient les déplacements d'un point quelconques intérieur à un élément aux n déplacements nodaux q_i .

$$\begin{aligned}
 N1 &= \frac{1}{4ab} (a - x)(b - y) \\
 N2 &= \frac{1}{4ab} (a + x)(b - y). \\
 N3 &= \frac{1}{4ab} (a + x)(b + y) \\
 N4 &= \frac{1}{4ab} (a - x)(b + y)
 \end{aligned}
 \tag{III.2}$$

III.3.5 Champs des déplacements :

Le vecteur déplacement en tous points de coordonnées (x, y) de la plaque peut être exprimé par :

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^4 Ni(x, y) \cdot \delta i
 \tag{III.3}$$

Où :

$\delta(x, y)$: est le vecteur des déplacements.

$Ni(x, y)$: Les fonctions de forme pour l'élément.

δi : est le vecteur des déplacements.

Pour cet élément qui est un rectangulaire de quatre nœuds on a :

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{i=1}^4 Ni(x, y) \cdot ui \\
 v(x, y) &= \sum_{i=1}^4 Ni(x, y) \cdot vi \\
 w(x, y) &= \sum_{i=1}^4 Ni(x, y) \cdot wi \\
 \varphi x(x, y) &= \sum_{i=1}^4 Ni(x, y) \cdot \varphi xi
 \end{aligned}
 \tag{III.4}$$

$$\varphi_y(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \varphi_{yi}$$

Où $v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}$: sont les déplacements d'un nœud i .

Est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément, étant le numéro du nœud considéré i

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot q \tag{III.5}$$

Sous forme matricielle : (III.6)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{y4} \\ u_5 \\ v_5 \\ w_5 \\ \varphi_{x5} \\ \varphi_{y5} \end{pmatrix}$$

III.3.6 Relations cinématiques :

Les déformations sont liés aux déplacements par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (\text{III.7}) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}$$

Sous forme contracté nous permet d'avoir :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(x, y) + z k(x, y) \quad (\text{III.8})$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.9})$$

Avec : $\{\varepsilon\}$ déformations

$$\varepsilon_m(M) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

$\{k\}$ Courbures

$$k(x, y) = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Les déformations en *membranes* sont exprimées par :

$$\{\varepsilon_m\} = [B_m]\{q\} \quad (\text{III.12})$$

Où :

$$(\text{III.13})$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[B_m]$: La matrice qui relie les déformations à l'intérieur de l'élément et les déplacements aux nœuds.

Les déformations en *flexion* et *torsion* s'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y). \quad (\text{III.14})$$

Où k la matrice de courbure s'écrit :

$$\{k\} = [B_f]\{q\}. \quad (\text{III.15})$$

En introduisant les fonctions de forme : (III.16)

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Les déformations en *cisaillement transverse* sont exprimées par :

$$\{\gamma\} = [B_c]\{q\} \quad (III.17)$$

Les déformations peuvent être en fonction de vecteur des déplacements :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [B_c]\{q\}. \quad (III.18)$$

$$\gamma_c \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix}. \quad (III.19)$$

On a:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot \varphi_{xi} \text{ et } \frac{\delta w}{\delta x} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta N_i}{\delta x} \cdot w_i \\ \varphi_y(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot \varphi_{yi} \text{ et } \frac{\delta w}{\delta y} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta N_i}{\delta y} \cdot w_i. \end{aligned} \quad (III.20)$$

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot w_i$$

Donc : (III.21)

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

III.3.7 Loi de comportement :

Les expressions des résultantes et des moments sont :

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon_m\} + [B]\{k\}$$

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon_m\} + [D]\{k\}. \quad (III.22)$$

$$\{Q\} = [H]\{\gamma_c\}$$

III. 3.8 Évaluation de la matrice de rigidité :

III.3.8.1 Énergie potentielle de déformation et travail des forces appliquées :

L'énergie potentielle de déformation d'une plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{v}} \delta \varepsilon^T dv. \quad (III.23)$$

Où \mathbf{v} est le volume de la plaque.

En utilisant les relations contraintes-déformations et les relations constitutives des stratifiés, l'énergie potentielle de déformation peut s'écrire : (III.24)

- $U = \frac{1}{2} \int_A (\{\varepsilon_m\}^T \{N\} + \{k\}^T \{M\} + \{\gamma\}^T \{Q\}) dA$

- $U = \frac{1}{2} \int_A (\{\varepsilon_m\}^T [A] \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_m\}^T [B] \{k\} + \{k\}^T [B] \{\varepsilon_m\} + \{k\}^T [D] \{k\} + \{\gamma\}^T [H] \{\gamma\}) dA$
- $U = \frac{1}{2} \int_A (\{B_m\}^T \{q\}^T [A] \{B_m\} \{q\} + \{B_m\}^T \{q\}^T [B] \{B_f\} \{q\} + \{B_f\}^T \{q\}^T [B] \{B_m\} \{q\} + \{B_f\}^T \{q\}^T [D] \{B_f\} \{q\} + \{q\}^T \{B_c\}^T [H] \{q\} \{B_c\}) dA$

Donc :

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T \int_A (\{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} + \{B_c\}^T [H] \{B_c\}) \{q\} dA. \quad (\text{III.25})$$

III. 3.8.2 Problème de flexion :

Le principe de l'énergie potentielle totale d'une plaque soumise à un chargement transversal répartie à travers sa surface est donnée par :

$$\Pi = U + W. \quad (\text{III.26})$$

La configuration d'équilibre est définie par la minimisation de l'énergie potentielle totale qui signifie l'annulation de sa première variation, soit :

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W = 0. \quad (\text{III.27})$$

$$\int_A [\{\partial q\}^T (\{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} + \{B_c\}^T [H] \{B_c\}) \{q\}] dA - \{\partial q\} \{F^e\} = 0. \quad (\text{III.28})$$

Qui permet d'obtenir l'équation d'équilibre suivante :

$$[k^e] \{q\} = \{F^e\}. \quad (\text{III.29})$$

Où la matrice de rigidité élémentaire :

$$[k^e] = \int_A (\{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} + \{B_c\}^T [H] \{B_c\}) dA. \quad (\text{III.30})$$

La matrice $[k^e]$ peut être écrite sous la forme :

$$[k^e] = [k_1^e] + [k_2^e] + [k_3^e] + [k_4^e] + [k_5^e] \quad (\text{III.31})$$

Avec : . (III.32)

$$[k_1^e] = \int_A \{B_m\}^T [A] \{B_m\} dA$$

$$[k_2^e] = \int_A \{B_m\}^T [B] \{B_f\} dA$$

$$[k_3^e] = \int_A \{B_f\}^T [B] \{B_m\} dA$$

$$[k_4^e] = \int_A \{B_f\}^T [D] \{B_f\} dA$$

$$[k_5^e] = \int_A \{B_c\}^T [H] \{B_c\} dA$$

$[k_1^e]$: Matrice de rigidité élémentaire membranaire.

$[k_2^e]$ Et $[k_3^e]$: Matrices de rigidité élémentaire de couplage membrane-flexion.

$[k_4^e]$: Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle.

$[k_5^e]$: Matrice de rigidité élémentaire de cisaillement transverse.

L'assemblage des matrices de rigidité et des vecteurs forces élémentaires permet d'obtenir l'équation suivante :

$$[k]\{q\} = \{F\}. \quad (\text{III.33})$$

Avec $[K]$ est la matrice de rigidité globale, $\{F\}$ est le vecteur de force global et $\{q\}$ est le vecteur des déplacements global des nœuds de la plaque.

III.4 Evaluation la matrice géométrique $[K_G]$

Les effets des forces de membrane sont estimés par une matrice $[K_G]$ qui augmente la matrice de rigidité conventionnelle $[K]$. Matrice $[K_G]$ a été donnée une

variété noms, comme suit : matrice de rigidité de contrainte initiale, matrice de rigidité différentielle, matrice de rigidité géométrique, matrice de coefficient de stabilité. Dans ce qui suit nous donnons le nom de $[K_G]$ matrice de rigidité géométrique. Matrice $[K_G]$ est défini par la géométrie d'un élément, champ de déplacement, l'état de contrainte. Ainsi $[K_G]$ est indépendante des propriétés d'élasticité.

La déformation de membrane est $\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2$, à une distance z de l'axe centroidal, la contribution de la flexion à la déformation axiale est $\varepsilon = -z w_{,xx}$, toute la déformation axiale d'une fibre arbitrairement localisée est donc

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - z \frac{d^2w}{d^2x} \quad \text{(III. 34)}$$

Le champ de déformation se compose à deux modes:

$$\{\varepsilon_x\} = \{\varepsilon_l\} + \{\varepsilon_{nl}\} \quad \text{(III. 35)}$$

avec:

$\{\varepsilon_l\}$: Déformation linéaire.

$\{\varepsilon_{nl}\}$: Déformation non linéaire.

Ainsi que la matrice géométrique élémentaire :

Les parties de grande déformation due au grand déplacement de Von-karman peuvent être écrites sous la forme matricielle comme suit en changeant les variables :

$$\int_A \varepsilon^{sT} [N] dA = \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_6 \\ N_6 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\delta\}^T [G]^T [N_0] [G] \{\delta\} \det |J| d\xi d\eta$$

$$\text{(III. 36)}$$

On note que :

$$[K_g] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b [G]^T [N_0] [G] d_x d_y \quad \text{(III.37)}$$

III.5 Etat de l'équilibre élastique :

L'état de l'équilibre d'un corps élastique est donné par le signe de la seconde variation de l'énergie potentielle totale :

$$\mathbf{Equiliber} \left\{ \begin{array}{ll} \text{stable} & \delta^2\Pi > 0 \\ \text{indifférent} & \delta^2\Pi = 0 \\ \text{instable} & \delta^2\Pi < 0 \end{array} \right\}$$

On appelle *état d'équilibre critique (indifférent)*, celui pour lequel l'équilibre cesse d'être stable, le niveau de charge correspondant est aussi critique.

Cela correspond à l'annulation de la *deuxième variation de l'énergie potentielle*.

$$\delta^2\Pi = \delta^2U - \delta^2W = 0 \quad (\text{III. 38})$$

En posant $P_{cr} = \lambda P$, l'expression précédent s'écrit :

$$\delta^2U - \lambda\delta^2W = 0 \quad (\text{III. 39})$$

Où :

δ^2U : est la deuxième variante de l'énergie de déformation stockée dans chaque élément.

$\lambda\delta^2W$: est la deuxième variante du travail effectué sur chaque élément par la charge critique.

δ^2W : est représenté la deuxième variation du travail qui est fait sur une charge la configuration initiale

λ : Paramètre de flambement.

En substituant les équations (III. 34) dans (III. 39) on obtient :

$$\delta^2\Pi = \{\delta d_e\}^T [K] \{\delta d_e\} + \lambda \{\delta d_e\}^T [K_G] \{\delta d_e\} = 0 \quad (\text{III. 40})$$

$$\delta^2\Pi = \{\delta d_e\}^T ([K] + \lambda[K_G]) \{\delta d_e\} = 0 \quad (\text{III. 41})$$

Ce qui permet d'avoir :

$$([K] + \lambda[K_G]) \{\delta d_e\} = 0 \quad (\text{III. 42})$$

Après introduction des conditions aux limites à des matrices de rigidité dans l'équation (III.42), l'équation peut être utilisée pour déterminer la charge de flambement de la structure.

L'équation (III.42) est sous la forme d'un problème linéaire de *valeurs propres* généralisées.

Pour qu'il y ait flambage, il faut $\{\delta d_e\} \neq 0$, dans ce cas :

$$\det([K] + \lambda[K_G]) = 0 \quad (\text{III.43})$$

Cela permet de trouver les valeurs propres de flambement.

La recherche des flambements se ramène au calcul des vecteurs propres et valeurs propres qui sont respectivement les modes de flambement et les coefficients d'amplification des charges:

La charge critique correspond à la plus petite valeur propre, c'est-à-dire le plus petit coefficient d'amplification du chargement initial. Le mode propre associé correspond à la déformée de ce coefficient d'amplification.

III.5.1 Charge critique de flambement :

Les charges de flambement sont les charges du procès à appliquer multiplié par la plus petite valeur propre, λ , qui peut être décrite par la relation [34] :

$$\{P\}_{cr} = \lambda \{P\} \quad (\text{III.44})$$

Où :

$\{P\}_{cr}$: est le vecteur des charges de flambage.

$\{P\}$: est le vecteur des charges d'essai.

III.6. Présentation du programme :

III.6.1 Introduction :

La mise au point d'un programme efficace de calcul des structures est subordonnée à la connaissance de trois disciplines scientifiques :

- ✚ La mécanique des structures.
- ✚ L'analyse numérique.
- ✚ L'informatique .

Un programme est divisé en trois parties, une pour l'introduction des données, une deuxième pour effectuer les calculs et exécuter les instructions, la dernière est réservée surtout à l'affichage des résultats.

Dans cette étude on utilise un programme en langage **FORTRAN** et un autre programme en langage **MATLAB**, le premier programme permet de résoudre l'équation $F = K U$ et calculer la matrice de rigidité $[K]$ et géométrique $[K_g]$, le deuxième programme destiné pour trouver les valeurs propres à partir de résoudre l'équation suivante :

$$\det([K] - \lambda [K_g]) = 0$$

Tableau (III.1): Rôles des sous-routines

Les sous-routines	Lerôle
<i>Force</i>	création du vecteur forces élémentaire.
<i>Hich</i>	construction du tableau de localisation.
<i>ELEM01</i>	création de la matrice de rigidité élémentaire dans lerepère globale.
<i>Assemb</i>	assembler les matrices de rigidité élémentaire.
<i>Limit 1</i>	introduire les conditions aux limites.
<i>GAUSS</i>	résolution du système et calculer des déplacements à partir de

	l'équation $F = KU$
<i>ELEMENT</i>	création de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local.
<i>Local</i>	localiser les matrices locales réduites dans la matrice globale.
<i>Xelem</i>	réduire la matrice de rigidité élémentaire.
<i>Assemb k</i>	assembler les matrices de rigidité élémentaires réduites
<i>Limit1 K</i>	Introduire les conditions aux limites dans la matrice de rigidité réduite.
<i>Elimin K</i>	éliminations les lignes et les colonnes de la matrice de rigidité réduite dans les éléments sont nulles.
<i>Stability</i>	création de la matrice de rigidité géométrique élémentaire.
<i>Assemb g</i>	assembler les matrices de rigidité géométrique.
<i>Limit1 g</i>	introduire les conditions aux limites dans la matrice de rigidité géométrique.
<i>Elimin g</i>	éliminations les lignes et les colonnes de la matrice géométrique dans les éléments sont nulles.

III.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation d'un élément fini rectangulaire à quatre nœuds en se basant sur la théorie du premier ordre de déformation en cisaillement (FSDT). Le chapitre suivant sera destiné à valider l'élément proposé (FSDT) afin de vérifier sa performance en termes de la précision et stabilité à partir d'une série d'exemples concernant les plaques isotropes et composites stratifiées sur le comportement de flexion et de flambage.

CHAPITRE IV

VALIDATION DE

L'ÉLÉMENT

Chapitre IV

Validation de l'élément

IV.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré, dans la première partie, à la validation de l'élément utilisé en termes de précision, de convergence et de stabilité, à travers une série de tests. Des plaques isotropes et composites stratifiées sont considérés. Les résultats obtenus seront comparés avec les solutions obtenus analytiquement et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. Ainsi, on procède à une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres tels que l'orientation des fibres, le nombre de couches et le degré d'anisotropie sur la charge critique des plaques composites stratifiées.

IV.1 Validation numérique sur le comportement du flambage des plaques stratifiées :

Dans cette section, certains exemples numériques les plus connus dans la littérature ont été proposés sur le comportement du flambage des plaques isotrope et stratifiées carrées, rectangulaire symétriques et antisymétriques, afin de valider et vérifier la performance du présent élément proposé (TSQ28) sur le comportement stabilité.

IV.3 Conditions aux limites adoptées et propriétés des matériaux utilisés :

Les types des conditions aux limites utilisées dans cette étude sont données comme suit ; deux cas simplement appuyées (SS1) et (SS2) et un seul cas encastré (En) sur toutes les arrêtes de la plaque :

$$SS : x= 0,a \rightarrow w=\psi_y=\theta_y=0 ; y= 0,b \rightarrow w=\psi_x=\theta_x=0$$

$$y= 0 \rightarrow u=\psi_y=\theta_y=0 ; y= b \rightarrow v=w=\psi_x=\theta_x=0$$

Les propriétés utilisées du matériau sont données comme suit :

$$M1 : E_1/E_2=25, G_{12}=G_{13}=0.5E_2, G_{23}=0.2E_2, \nu_{12}=0.25$$

$$M2 : E_1/E_2=40, G_{12}=G_{13}=0.6E_2, G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25$$

Les chargements considérés dans cette étude, sont les chargements uniaxial.

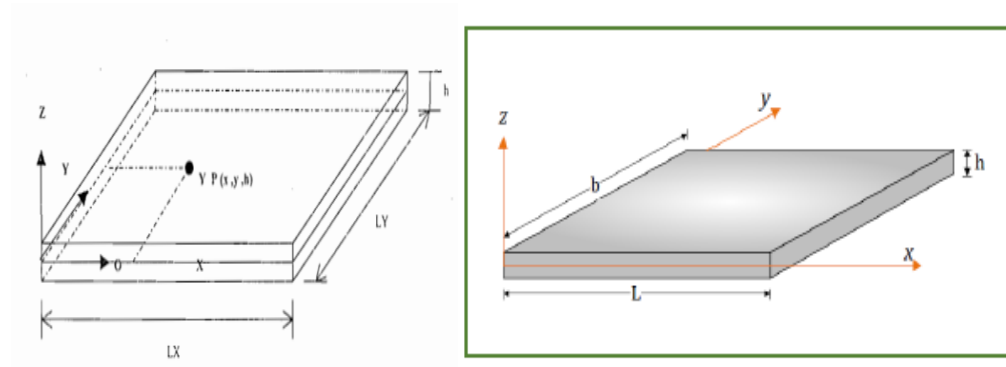


Fig.IV.1 : Géométrie de la plaque.

IV.4 Test de convergence :

IV.4.1 Plaque isotrope carrée :

Dans cette section, un test de convergence pour le présent élément (**R4-FSDT**) a été considéré en prenant une plaque isotrope carrée simplement appuyées (**SSSS**). Trois rapports d'épaisseurs sont considérés ($a/h=5, 10, 100$). Afin de vérifier la performance du modèle en termes de convergence et de précision, différents maillages de ($4 \times 4, 6 \times 6, 8 \times 8, 10 \times 10, 12 \times 12$) sont adoptés. Les propriétés mécaniques utilisées sont données comme suit : $E=10.92, \nu = 0.3$. La convergence des résultats obtenus par le présent élément sont présentés dans le **Tableau IV.1** et la **Figure IV.2**. Les résultats montrent la rapidité de convergences et la précision du présent élément, ainsi qu'il fournit un bon accord en comparant à ceux obtenus analytiquement par **Reddy and Phan [27]** et à ceux obtenus numériquement par le modèle d'élément fini triangulaire de **Chakrabarti & Cheikh [28]**. En addition, l'élément utilisé est capable de donner des résultats précises pour les deux types de plaques minces et épaisses.

Tableau IV-1 Test de convergence de la charge critique uniaxial d'une plaque isotrope simplement appuyée ($N_{cr} = \bar{N}_{cr} a^2 / \pi^2 D$).

Reference	Rapport d'épaisseur (a/h)		
	5	10	100
Presentelement (4*4)	3.4626	3.9039	4.3568
Presentelement (6*6)	3.3392	3.9069	4.1541
Presentelement (8*8)	3.3025	3.8391	4.0528
Presentelement (10*10)	3.2871	3.8283	4.0528
Presentelement (12*12)	3.2795	3.8106	4.0528
Sheikh and Chakrabarti [*]	3.2600	3.7800	3.9960
Reddy and Phan [*]	3.2650	3.7870	3.9980
Khmissi [*]	3.2550	3.7810	4.0190

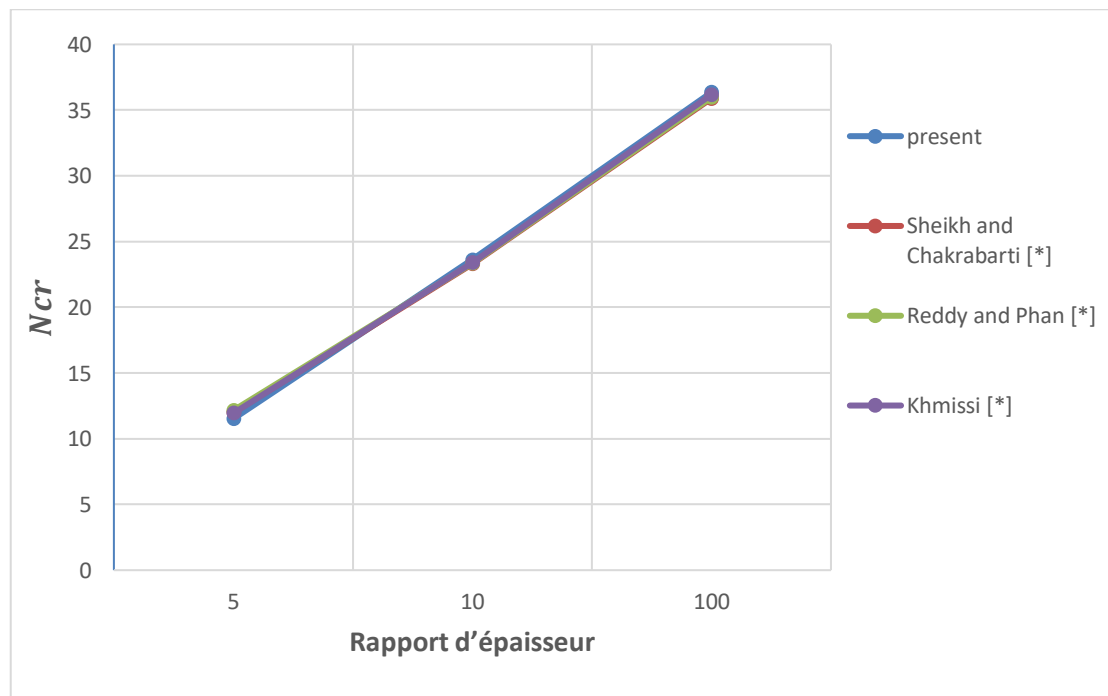


Fig. IV-2 Convergence de la charge critique uniaxial d'une plaque isotrope simplement appuyée (N_{cr}).

Les courbes de la **figure (IV.2)** sont représenté les valeurs de Convergence de la charge critique uniaxial d'une plaque isotrope simplement appuyée (N_{cr}). Les valeurs des quatre courbes sont convergentes par comparaison avec Rapport d'épaisseur (a/h)

IV.4.2 Plaque stratifiée carrée cross-ply symétrique (0/90/90/0) :

Un deuxième test de convergence a été considéré pour le présent élément afin de déterminer la charge critique uniaxial du flambage suivant l'axe en prenant une plaque stratifiée symétrique carrée de quatre couches (0°/90°/90°/0°). Trois rapports d'épaisseurs sont considérés ($a/h=5, 10, 100$) pour analyser les plaques minces et épaisses.

Les propriétés mécaniques utilisées sont données comme suit :

$$E_1/E_2 = 40, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$$

D'après le **tableau IV-2** et la **Figure VI-3**, des résultats satisfaisants ont été obtenus en comparant les résultats obtenus à ceux obtenus analytiquement par **Reddy et Phan [27]** et **Exacte HSDT [25]** et à celui obtenus numériquement par le modèle d'élément fini de **Chakrabarti& Cheikh [28]**.

Tableau IV.2 Test de convergence de la charge critique uniaxial suivant x d'une plaque carrée stratifiée [0/90/90/0] simplement appuyée ($N_{cr} = N_{cr} a^2 / E_2 h^3$).

Reference	Rapport d'épaisseur		
	5	10	100
Presentelement (4*4)	11.825	25.09	40
Presentelement (6*6)	11.65	24.15	38
Presentelement (8*8)	11.58	23.84	37
Presentelement (10*10)	11.542	23.70	37
Presentelement (12*12)	11.517	23.62	36.35

Sheikh and Chakrabarti [*]	11.988	23.303	35.889
Reddy and Phan [*]	12.156	23.349	35.971
Khmissi [*]	11.938	23.389	36.177

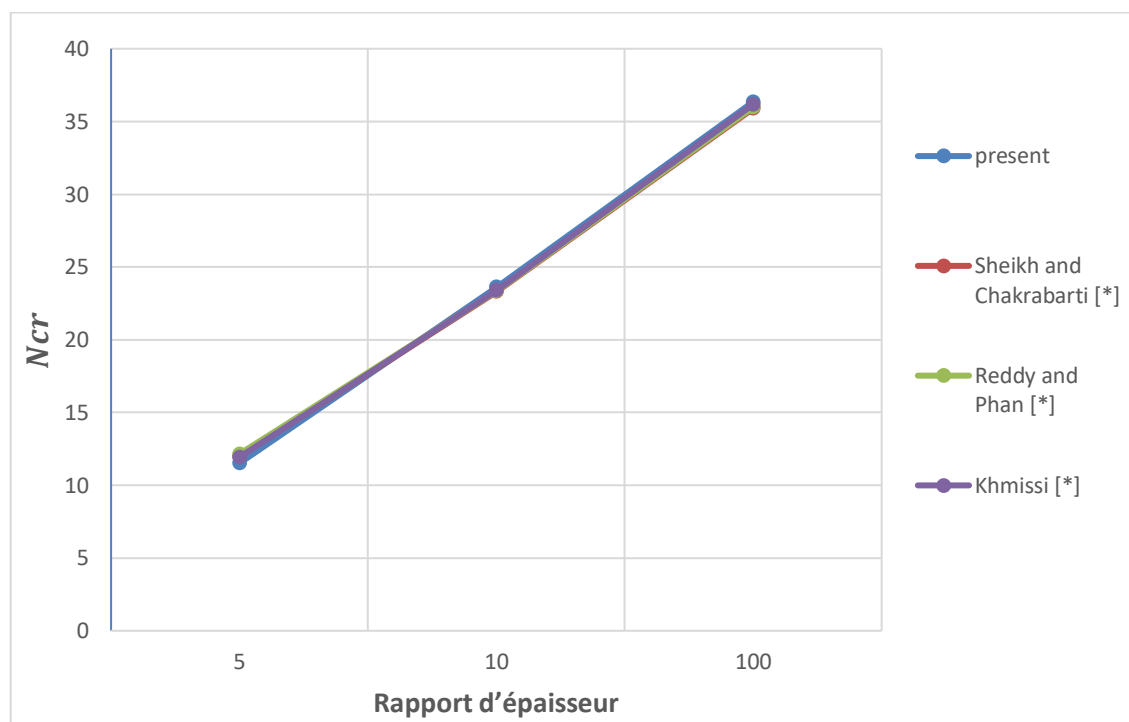


Fig. IV-3 Test de convergence de la charge critique uniaxial d'une plaque carrée stratifiée [0/90/90/0] simplement appuyée (N_{cr}).

Les courbes de la **figure (IV.3)** sont représenté les Test de convergence de la charge critique uniaxial d'une plaque carrée stratifiée [0/90/90/0] simplement appuyée (N_{cr}). Les valeurs des quatre courbes sont convergentes par comparaison avec Rapport d'épaisseur

IV.4.3 Exemple numériques :

IV.4.3.1 L'effet de l'orthotropie sur les plaques carrées cross-ply (0/90...) :

Dans cet exemple, on considère différentes plaques stratifiées simplement appuyées cross-ply du nombre de couche 3, 4 et 5 avec un rapport d'épaisseur $a/h=10$. Différents rapport d'orthotropie E_1/E_2 sont considérés. Des résultats satisfaisants ont été obtenus à partir le présent élément Tableau IV.3. La comparaison des résultats a été faite avec des solutions analytiques données par Noor [30] basés sur des équations d'élasticité 3D, des modèles basés sur la théorie d'ordre supérieur [31] et ceux obtenus via des modèles EF [32]. D'après la comparaison, l'élément utilisé donne des résultats très satisfaisant.

D'autre part, on constate que le rapport d'orthotropie et le nombre de couche ont des effets significatifs sur la charge critique du flambement. D'après la figure IV.4, on remarque que les valeurs de la charge critique du flambement augmentent avec l'augmentation du rapport d'orthotropie (E_{11}/E_{22}) quel que soit le nombre de couches. Cela revient peut-être à des raisons que la plaque possède une rigidité augmentée suivant le sens du module E_1 . Ainsi que, la stabilité du flambage augmente aussi lorsque le nombre de couche cross-ply augmente, à cause peut-être que la plaque être plus renforcée en fibres. Finalement à partir de cet exemple où dans lequel on peut conclure que plus le rapport d'orthotropie et le nombre de couche sont augmentés, plus la plaque est stable sur le comportement de flambage.

Tableau IV-3 L'effet du rapport d'orthotropie sur la charge critique uniaxial de flambage ($N_{cr} = N_{cr} a^2 / E_2 h^3$) d'une plaque carrée cross-ply ($a/h=10$)

Référence	Nbr de couches	E_{11}/E_{22}				
		3	10	20	30	40
Putch and Reddy	[0/90/0]	5,393	9,9406	15,298	19,674	23,340
Ferreira [.]		5,387	9,833	14,897	18,894	22,151
Khemissi [.]		5,408	9,883	14,965	18,965	22,213

Présent élément		5,430	9,950	15,100	19,16	22,460
Ferreira [.]	[0/90/90/0]	5,393	9,940	15,298	19,847	23,340
Khemissi [.]		5,387	9,969	15,348	19,729	23,389
Présent élément		5,450	10,090	15,530	19,980	23,700
PutchaReddy [.]	[0/90/0/90/0]	5,409	10,150	16,008	20,999	25,080
Ferreira [.]		5,404	10,088	15,791	20,591	24,690
Khemissi [.]		5,426	10,138	15,842	20,615	24,680
Présent élément		5,460	10,2	15,93	20,720	24,820

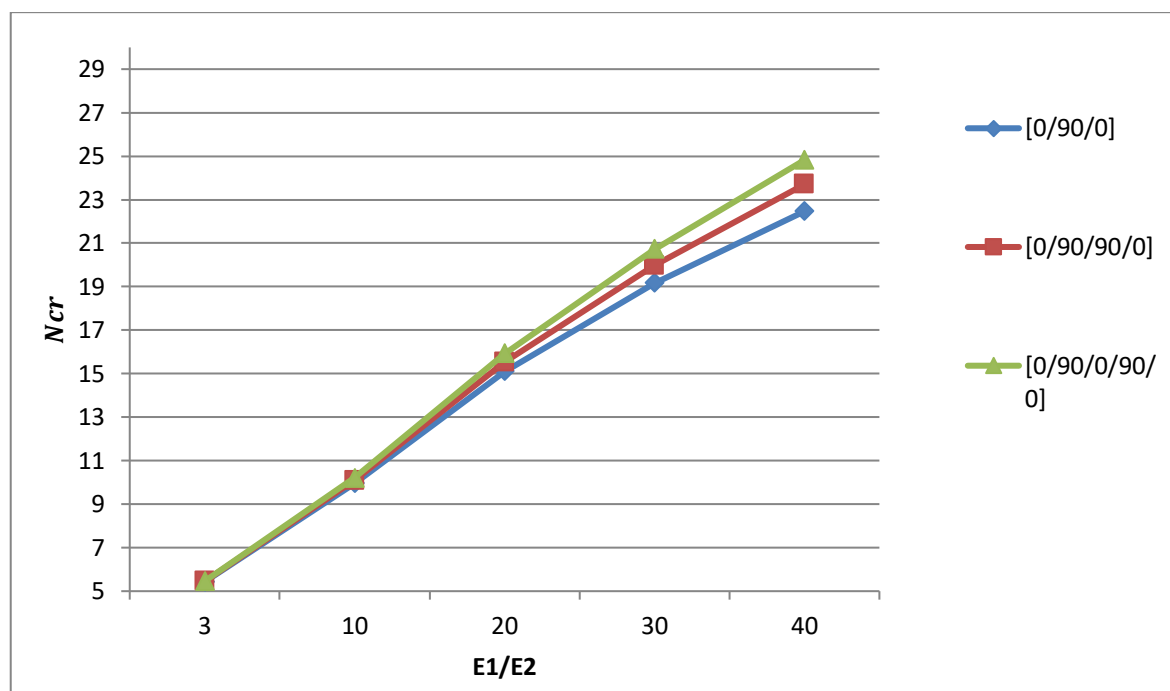


Fig. IV. 4 L'effet de l'orthotrope E1/E2 sur le comportement de flambage des plaques stratifiées cross-ply.

Les courbes de la **fig.IV.4** représentent L'effet du rapport d'orthotropie sur la charge critique uniaxial de flambage ($N_{cr} = N_{cr} a^2 / E_2 h^3$) d'une plaque carrée cross-ply ($a/h=10$). On constate que les trois courbes ont la même allure et que les valeurs de déplacement transversal augmentent avec l'augmentation du rapport (**E1/E2**).

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce travail une étude numérique de la stabilité des plaques composites stratifiées. Pour atteindre nos objectifs, un élément fini rectangulaire à 4 nœuds avec 5 degrés de libertés est formulé sur la base de la théorie de la déformation du premier ordre (FSDT). Les résultats obtenus sont comparés avec des modèles analytiques et ceux obtenus par des modèles numériques en utilisant la MEF. Selon la comparaison, on a constaté que le programme donne des résultats très satisfaisant en termes de précision et de rapidités de convergence. Par ailleurs, beaucoup de paramètres liés au stratifiée et à son hétérogénéité intrinsèque influent directement sur la valeur de la fréquence fondamentale qui est proportionnel à :

- Plus le rapport d'anisotropie (E_{11}/E_{22}) est élevé, plus la charge critique uniaxial des plaques sera élevée quelque soit le nombre de couches de cross-ply (0/90/...).
- Plus le rapport d'épaisseur (a/h) est élevé, la charge critique uniaxial sera élevée, quelque soit le nombre de couches.

Références Bibliographiques

- [1] **Benachour A. 2010.** "Analyse des contraintes d'interface dans les poutres renforcées par des plaques composites collées sous précontrainte". Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie. 2010.
- [2] **Mechab I. 2009.** "Etude des structures composites en utilisant les théories d'ordre élevé sous chargement thermomécanique". Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie. 2009.
- [3] **Draiche K. 2015.** "Contribution à l'analyse de la vibration des plaques composites comportant des patches". Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie. 2015.
- Draiche K., Tounsi A., Khalfi Y., 2014.** "A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass". [éd.] Int. J., Steel Compos. Struct. 2014, Vol. 17, 1, pp. 69-81.
- [4] **Beeby A.W. 1979.** "The prediction of crack widths in hardened concrete". [éd.] The structural Engineer. 1979, Vol. 57A, 1, pp. 9-17.
- [5] **Pierre P. 1998.** "Etude du comportement mécanique des composites cimentaires armés de microfibres d'acier". Thèse de doctorat de l'Université Laval, Québec, Canada. 1998.
- [6] **Beaudoin J.J. 1990.** "Handbook of fiber-reinforced concrete-principles, properties developments and applications". Noyes publication, U.S .A, p., [éd.] U.S .A., Noyes publication. 1990, p. 332.
- [7] **Mindlin R. D. 1951.** "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates". Journal of Applied Mechanics. 1951, Vol. 18, pp. 31-38.
- [8] **Whitney J.M. 1973.** "Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads". J. Applied Mechanics. 1973, Vol. 40, pp. 302-304.
- [9] **Reddy .J .N. 2004.** Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. 2nd Edition. Boca Raton : CRC Press, 2004.

- [10] **Hildebrand F.B., Reissner E., Thomas G.G., 1949.** "Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells". NACA T. N. 1949, p. 1833.
- [11] **Naghdi P. M. 1957.** "On the theory of thin elastic shells". Quarterly Appl. Math. 1957, Vol. 14, pp. 369-380.
- [12] **Reissner E. 1975.** "On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation". Int. J. Solids Structures. 1975, Vol. 25, (5), pp. 495-502.
- [13] **Reddy .J .N. 1984.** "A simple higher-order theory for laminated composite plates". Journal of Applied Mechanics. 1984, Vol. 51, (4), pp. 745-752.
- [14] **Kant T., Swaminathan K., 2002.** "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory". Composite. Structure. 2002, Vol. 56, (4), pp. 329-344.
- [15] **Liberscu L. 1967.** "On the theory of anisotropic elastic shell and plates". *Int J Solids Structures*. 1967, Vol. 3, pp. 53-68.
- [16] **Whitney J.M. 1973.** "Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads". *J. Applied Mechanics*. 1973, Vol. 40, pp. 302-304.
- [17] **Touratier M. 1991.** "An efficient standard plate theory". Int. J. Eng. Sc. 1991, Vol. 29, (8), pp. 901-916.
- [18] **Nguyen., Viet.Tung. 2004.** "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques". Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées. ParisTech, France, 2004.
- [19] **François F.,** «Analyse des structures et milieux continus : Mécanique des structures », Ecole Polytechniques Fédérale De Lausanne, 1994, volume2, 472p.
- [20] **BAGUET S. 2001.** "Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique". *Thèse de Doctorat université Aix-Marseille II, France*. 2001.
- [21] **Love A. E. H. 1888.** "On the small free vibrations and deformations of elastic shells". Philosophical trans. of the Royal Society. London, 1888, Vol. A, (17), pp. 491–549.

- [22] **Timoshenko S. 1921.** "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars". *Philosophical Magazine*. 1921, Vol. 41, (46), pp. 744-746.
- [23] **Reissner E., 1945— 1945.** "The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates". *J. Appl. Mech.*, 1945, Vol. 12, 69-77.
- [24] **Uflyand Y.S. 1948.** "The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates". 1948, Vol. 12, pp. 287-300.
- [25] **Mindlin R. D. 1951.** "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates". *Journal of Applied Mechanics*. 1951, Vol. 18, pp. 31–38.
- [26] **Whitney J.M. 1973.** "Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads". *J. Applied Mechanics*. 1973, Vol. 40, pp. 302-304.
- [27] **Reddy J., Phan N., 1985,** Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory, *Journal of Sound and Vibration*, 98, 2, 157-170
- [28] **Chakrabarti A., Sheikh A.H., 2003,** buckling of laminated composite plates by a new element based on higher order shear deformation theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 10, 4, 303-317
- [29] **Fazzolari F., Banerjee J., Boscolo M., 2013,** Buckling of composite plate assemblies using higher order shear deformation theory—An exact method of solution, *Thin-Walled Structures*, 71, 18-34
- [30] **Noor A.K., 1975,** Stability of multilayered composite plates, *Fibre Science and Technology*, 8, 2, 81-89
- [31] **Putcha N., Reddy J., 1986,** Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element based on a refined plate theory, *Journal of Sound and Vibration*, 104, 2, 285-300
- [32] **Ferreira A.J.M., et al., 2011,** buckling analysis of isotropic and laminated plates by radial basis functions according to a higher-order shear deformation theory, *Thin-Walled Structures*, 49, 7, 804-811