

Université Mohamed khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie civil et Hydraulique  
Référence :

جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم الهندسة المدنية و الري  
المرجع:



# Mémoire de Master 2<sup>ème</sup> année Conception et Calcul des structures

**L'effet de la température sur l'endommagement des poutres en  
matériaux composites**

Étudiant :

**Safaa chammah**

Encadreur :

**Dr. Abdelhak Khechai**

**septembre 2020**

## *Remerciements*

*Je tiens à remercier infiniment mon Dieu tout puissant ALLAH qui m'a donné la santé, le courage et la patience pour mener à bien ce modeste travail. Je remercie particulièrement mon encadreur, Monsieur Abdelhak Khechai, docteur au département de génie civil université Mohamed Khider de Biskra, d'avoir accepté de diriger ce travail avec de disponibilité et d'efficacité, (son expérience, ses conseils et son encouragement) qu'il a su me prodiguer pendant toute la durée de ce travail. Je tiens à remercier profondément les membres de jury qui auront à évaluer ce travail. Je remercie très chaleureusement Mon père et ma mère et mon frère et mon mari toute la famille. Un grand merci à tous les enseignants du département de génie civil université Mohamed Khider de Biskra et mes collègues et tous mes ami(e)s. Je souhaite également remercier chaleureusement les doctorants LAYACHI Safa et Layachi Maroua pour ses informations. Finalement, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

## *Dédicace*

*Je dédie ce travail à : Mes chers parents Mon frère et mes  
sœurs et Mari*

*Ma famille et mes cousin(e)s Mes cher(e)s ami(e)s Mes  
professeurs tous ceux et à toutes celles qui m'ont soutenu  
pendant ma vie et dans mon parcours d'études de près ou de  
Loin.*

# Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire a pour but d'étudier l'effet de la température *sur l'endommagement des poutres stratifiées* en utilisant un élément fini rectangulaire à quatre nœuds avec 4 degré de liberté par nœuds, basé sur la théorie classique.

Une série d'exemples a été testée sur l'effet des efforts des poutres isotropes et stratifiées, les résultats obtenus et comparés à ceux disponibles analytiquement, ont montré la rapidité de convergence et la bonne performance de l'élément.

Dans ce contexte, on va essayer de déterminer la température critique qui cause la rupture de ces poutres. D'autre part, plusieurs paramètres, tels que la stratification des couches, seront étudiés afin de déterminer leur influence sur la valeur de la température critique.

**Mots clés :** poutres stratifiées, endommagement, élément fini, théorie classique, température.

## الملخص

يهدف العمل المقدم في هذه الأطروحة إلى دراسة تأثير درجة الحرارة على انهيار الروافد الصفائحية باستخدام عنصر وأربعة عقد و أربعة درجات حرية لكل عقدة ، بناءً على النظرية الكلاسيكية. تم اختبار سلسلة من الأمثلة لتأثير القوى على الروافد، وأظهرت النتائج التي تم الحصول عليها ومقارنتها مع تلك المتاحة تحليليًا معدل التقارب والأداء الجيد للعنصر. في هذا السياق سنحاول تحديد درجة الحرارة الحرجة عند أصل فشل هذه الروافد. حيث اجرينا دراسة لمعرفة تأثير . مختلف العوامل مثلًا على حسب ترتيب الطبقات ، من أجل تحديد تأثيرها على قيمة درجة الحرارة الحرجة.

### الكلمات المفتاحية :

الروافد المركبة، انهيار (ضرر) ، عنصر محدود، النظرية الكلاسيكية، درجة الحرارة.

# SOMMAIRE

Introduction générale.....	
Problématique.....	
Chapitre 1 : Recherche bibliographique	
I.1.INTRODUCTION .....	
I.2. Historique.....	1
I .3.Quelques définitions de base .....	2
I.4. Les constituants d'un matériau composite .....	3
I.4.1 Le renfort.....	3
I.4.2. Matrice .....	4
I.5.Avantages et les inconvénients des matériaux composites .....	4
I.6.Indentification des matériaux composite .....	5
I.6.1. Les composites à matrices organiques (CMO) .....	5
I.6 .2. les composites à matrices céramiques (CMC) .....	5
I.6 .3.les composites à matrices métalliques (CMM) .....	5
I.7.les types des matériaux composites .....	5
I.7.1 Les matériaux composites a Grande diffusion (GD) .....	5
I.7.2. Les matériaux composites à haute performance (HP).....	6
I.8.Les composites structuraux .....	6
I.9.Composites structuraux .....	6
I.9.1.Monocouche .....	6
I.9.1.a) Fibres longues: (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement).....	6
I.9.1.b) Fibres courtes.....	7

I.9.2. Stratifiés.....	7
I.9.3.les structures sandwichs.....	8
I.9.3. a).Les peaux :(stratifiés).....	9
I.9.2 3.b).L'âme :(en mousse).....	9
❖ Désignation des structures stratifiées.....	11
❖ Angles positifs et négatifs.....	11
❖ Stratifiés symétriques.....	12
❖ Pourquoi la symétrie miroir.....	13
Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation.....	13

## Chapitre II: Le comportement mécanique et thermique des poutres stratifiées.

II.1. Introduction.....	15
II .2 .Loi de comportement des stratifiés.....	16
II.2.1. Caractéristiques du mélange renfort-matrice.....	16
II .2.1.a.Modules de Young longitudinale $E_1$ .....	18
II.2.1.b.Modules de Young transversal $E_2$ .....	19
II.2.1.c. Coefficient de Poisson longitudinal $\nu_{12}$ .....	20
II.2.1.d Module de cisaillement longitudinal $G_{12}$ .....	20
II.2.2.loi de Hooke généralisée.....	21
II.2.3 Différents Types des matériaux.....	22
II.2.3.a Matériaux anisotropes.....	22
II.2.3.b. Matériaux orthotropes.....	23
II.2.3.c.Matériaux transversalement isotropes.....	25
II.2.3.d Matériaux isotropes.....	26
II.2.4. Relation contrainte-déformation plane.....	27
II.2.5. Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres.....	27

II.3 .Théories utilisées dans la formulation analytique de structures composites .....	29
II.4 .Théorie classique des stratifiés (CLT).....	30
II.4.1. Relation déformations-déplacements (Cinématique) .....	33
II.4.2.a. Résultantes en membrane .....	33
II.4.2.b. Moment de flexion et de torsion .....	34

### Chapitre III : Étude théorique sur les différents critères d'endommagement

III.1.Introduction .....	38
III.2.Mécanismes de rupture dans les matériaux composites .....	39
III.2.1. Les divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel.....	39
III.2.2. Rupture des stratifiés .....	39
III.3. Critères en contraintes maximales.....	42
III.3.1. Critères dans les axes principaux.....	42
III.3.2 .Ordres de grandeurs des contraintes à la rupture.....	43
III.3.3.Critères de rupture en-dehors des axes des matériaux .....	44
III.3.4.Traction ou compression en-dehors des axes des matériaux rupture.....	46
III.4 .Critères en déformations maximales .....	47
III.4.1.Critère dans les axes des matériaux .....	47
III.4.2. Traction ou compression en-dehors des axes des matériaux .....	47
III.5.Théorie générale de Tsai-Wu .....	49
III.5 .1 .Formulation .....	49
III.5.2.Expression des constantes.....	50
III.5. 3.Critère de Tsai-Wu en contraintes planes.....	52

### Chapitre IV : Formulation Eléments Finis Et Programmation.

IV.1. Introduction .....	54
IV.2. Historique.....	54
IV.3.L'élément utilisé .....	55



IV.4. fonction de déplacements de l'élément.....	56
✚ En membrane.....	56
✚ En flexion .....	58
• Relation cinématiques.....	61
• Loi de comportement.....	62
IV.5. Les étapes à suivre afin de calculer la charge de rupture .....	63
IV.6. Validation de l'élément.....	66
IV.6.1. Poutre isotrope encastree à coté et libre à l'autre.....	66
IV.6.2. Poutre composite stratifiée sous une charge thermique.....	67
IV.6.3. Poutre stratifiée simplement appui à coté et libre à l'autre chargée par une charge de traction.....	70
IV.6.4. Poutre stratifiée simplement appui à coté et libre à l'autre chargée par une charge mécanique et thermique.....	72

# Liste des figures

Figure I.1 : Comparaison entre la déformation d'une plaque isotrope et anisotrope et orthotrope .....	2
Figure I.2 : Classification schématique des types de composites. ....	3
Figure I.3 : Classification schématique des principaux matériaux de renfort. ....	3
Figure. I.4 : Classification schématique des principaux matériaux de matrice.....	4
Figure I.5 : .Composites renforcés de fibres longues.....	7
Figure 1.6 Composites renforcés de fibres courtes. ....	7
Figure 1.7 : Les constituants d'un composite stratifié.....	8
Figure 1.8 : Matériaux sandwichent à âmes pleines .....	8
Figure I.9 : Différents Cœurs .....	9
Figure I.10 : Désignation d'un stratifié.....	10
Figure I.11 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés.....	11
Figure I.12 : L'influence de l'Orientation des fibres (Essai de traction).....	12
Figure II.2 : Schéma simplifié d'une traction longitudinale.....	18
Figure II.3 : Schéma simplifié d'une traction transversal .....	19
Figure II.4 : Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal.....	20
FIGURE II.5 : Composantes des vecteurs contraintes dans un système d'axes cisaillement transverse.....	22
Figure II.6 : Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie.....	23
Figure II.7 : Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope.....	25
Figure II.8: Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée.....	28
Figure II.9 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés (Figure adaptée de Berthelot).....	31
Figure II.10 : Schématisation des résultantes en membrane, des moments de flexion et de torsion (Figure adaptée de François-Xavier ).....	35
Figure III.1: Rupture de fibre.....	39
Figure III.2: Différents modes de rupture de la matrice associée à la rupture d'une fibre.....	40

Figure III.8: Mécanismes de rupture observés dans les stratifiés.....	41
Figure III.9: Stratifié croisé soumis à une traction dans la direction $0^\circ$ .....	41
Figure III.10: Stratifié croisé $\pm 45^\circ$ soumis à une traction dans la direction $0^\circ$ .....	42
Figure III.11: Comportements fragile et “ductile” d'un matériau... ..	43
Figure III.12: Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche.....	43
Figure III.13 : Couche rapportée à des axes de référence quelconques.....	45
Figure III.14 : Traction en-dehors des axes des matériaux.....	46
Figure III.16: Essais de cisaillement.....	51
Figure IV.1: élément plaque rectangulaire.....	55
Figure IV.2: L'emplacement des plis dans un stratifié .....	64
Figure IV.3: Géométrie de la poutre.....	66
Figure IV.4: Poutre isotrope encastrée à coté et libre à l'autre.....	66
Figure IV .5: Poutre composite stratifiée [0/90/0].....	68
Figure IV.6 : Poutre composite simplement appui à coté et libre à l'autre chargé par une charge de traction.....	70

## Liste des tableaux

Tableau IV.1 : Propriétés géométriques et mécaniques de la première poutre test.....	65
Tableau IV.2 : Déplacement maximum pour une poutre isotrope.....	66
Tableau IV.3 : Propriétés géométriques et mécaniques de la deuxième poutre test.....	67
Tableau IV.4 : Comparaison des efforts obtenus numériquement et analytiquement.....	69
Tableau IV.5 : Propriétés géométriques et mécaniques de la poutre test.....	69
Tableau IV.6: Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 100.....	70
Tableau IV.7 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 3500.....	70
Tableau IV.8: Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 100.....	71
Tableau IV.9 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 790.....	72
Tableau IV.10 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 500.....	73

## Introduction général

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifique à leur emploi.

De nos jours les matériaux composites sont devenus incontournables et commencent peu à peu à être une alternative aux matériaux classiques, grâce aux avantages qu'ils présentent. En effet, leur résistance et leur rigidité spécifiques rendent leur utilisation prend de l'ampleur dans presque tous les domaines de construction et de l'industrie. Cependant ce type de matériaux possède des comportements très complexes dus à leur hétérogénéité et leur anisotropie prononcé.

### Problématique:

Grâce à leurs rapports rigidité-poids et résistance-poids, les poutres en matériaux composites stratifiés sont largement utilisées dans divers domaines de l'industrie et dans certaines constructions civiles. En général, détermination la température critique.

L'analyse de l'endommagement de ces poutres est d'une grande importance car ce type de structures est soumis généralement à des chargements thermiques conduisant à la rupture.

### L'objectif :

L'objectif de ce travail est étudier numériquement l'effet de la température *sur l'endommagement des poutres en matériaux composite*. En utilisant la méthode d'élément finis basée sur la théorie générale de *Tsai-Wu*.

### Organisation des chapitres:

Notre mémoire est divisé en quatre chapitres :

- 1) Dans le premier chapitre**, on présente des Généralités sur les matériaux composites l'effet de l'effet de la température sur l'endommagement des poutres stratifiées.
- 2) Dans le deuxième chapitre**, on présente la loi de comportement mécanique et thermique des poutres stratifiées.
- 3) Le troisième chapitre**, on présente l'Etude théorique sur les différents critères d'endommagement.
- 4) Le quatrième chapitre**, est consacré à la présentation de la formulation de l'élément fini utilisé, suivi par la validation de l'élément à partir solutions analytiques.

## GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

### I.1. INTRODUCTION:

Le matériau composite est un matériau constitué de deux matériaux constitutifs (renforts, **et matrice**), ou plus ayant des propriétés physiques ou chimiques significativement **différentes** qui, lorsqu'ils sont combinés, produisent un matériau présentant des **caractéristiques différentes** de celles des composants individuels.

Le développement des nouvelles technologies à pousser ingénieurs et chercheurs à concevoir **des matériaux nouveaux** de haute performance afin **de remplacer** les matériaux **classiques**.

Donc, pour palier la fragilité de quelque matériaux classiques et les poids élevés des autres les chercheurs ont mis énormément d'efforts pour aboutir en fin à la création de nouveaux matériaux présentant une **bonne rigidité**, une bonne résistance mécanique, une ténacité élevée, un bon comportement à la fatigue et à la corrosion et surtout avec une grande légèreté pour permettre au concepteur et designers des possibilités nouvelles d'associer des formes et des matériaux de plus en plus performants.

L'utilisation des matériaux composites dans la réalisation des structures offre aux concepteurs des possibilités nouvelles, car les composites structuraux ont de très bons Rapports rigidité/densité et résistance/densité [1].

### I.2. Historique:

Historiquement, le **bois** était le **premier** matériau composite naturel utilisé par l'homme (fibre de cellulose).

- En suite est venu l'utilisation des torchis à base d'argile et de **fibre végétal** (9000-7000 AV J-C), après les **mongols** les ont utilisé dans la fabrication **d'arc en bois** (âme) contre collé de tendon (tension) et de corne (compression) (2000 AV J-C).
- En 1823 **Charles Macintosh** crée l'imperméable du **caoutchouc** sur **coton**, en suite est en 1892 **François Hennebique** dépose le brevet du béton armé.
- Mais les nouveaux **matériaux composites** ceux utilisés à nos jours n'ont vraiment été

- utilisés **qu'après 1930**, lorsque, en Angleterre et aux États-Unis, les progrès réalisés sur
- les adhésifs ont permis la réalisation de structures mécaniques complexes [2].
- Après cela les matériaux composite ont pris plus d'ampleur en 1942 l'US **Rubber Company** invente **le premier composite a fibre de verre** (verre-epoxy),
- En 1956 le **toit** de la **Citroën DS** fut fabrique par des matériaux composites,
- En 1970 le **moteur** de la **rolls royce RB211** (réacteurs d'avion) est fabrique à base de fibre de **carbone**,
- En 2009 la **boeing 787** fut fabrique a **50%** par des composites fessant ainsi d'important économie de carburant [3].

### I.3. Quelques définitions de base:

- ✓ **Homogène** : mêmes propriétés phasique en tout point du matériau.
- ✓ **Hétérogénéité** : propriétés phasique différent (résine et fibres) d'un point à un autre.
- ✓ **Isotrope** : même propriété mécanique dans toutes les directions, (contrainte dans 1 direction = contrainte dans 2 directions = contrainte dans n'importe quelle direction voire le Figure I.1.
- ✓ **Anisotropie** : (contrainte d'isotrope) comportement différent selon la direction envisagée voire le Figure I.1. .
- ✓ **Orthotrope**: propriétés symétriques par rapport à 2 plans de symétrie voire le Figure I.1.
- ✓ **Un matériau composite** : (la plupart du temps Hétérogène et Anisotrope), voire le Figure I.2.

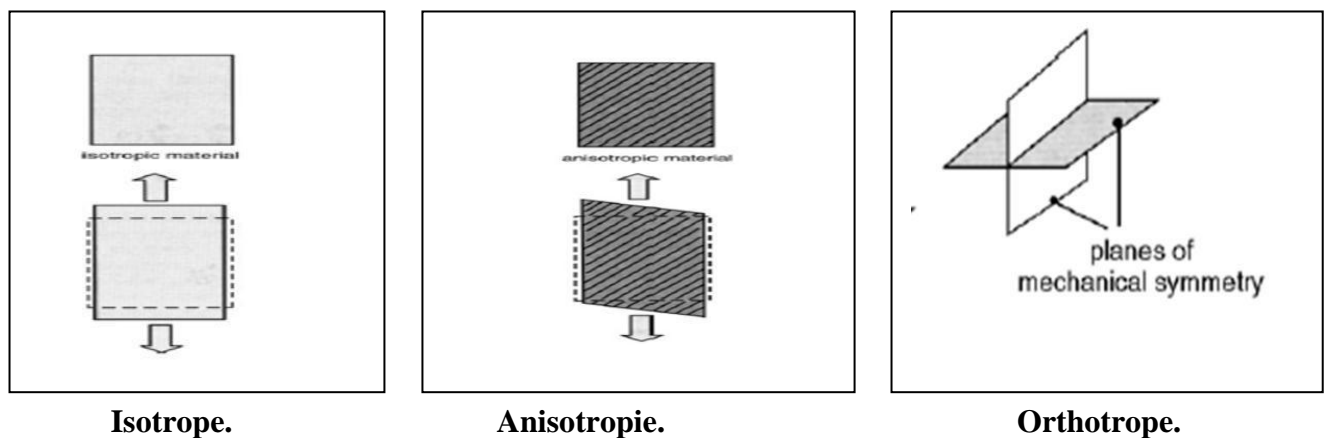


Figure I.1. Comparaison entre la déformation d'une plaque isotrope et anisotrope et orthotrope [4].

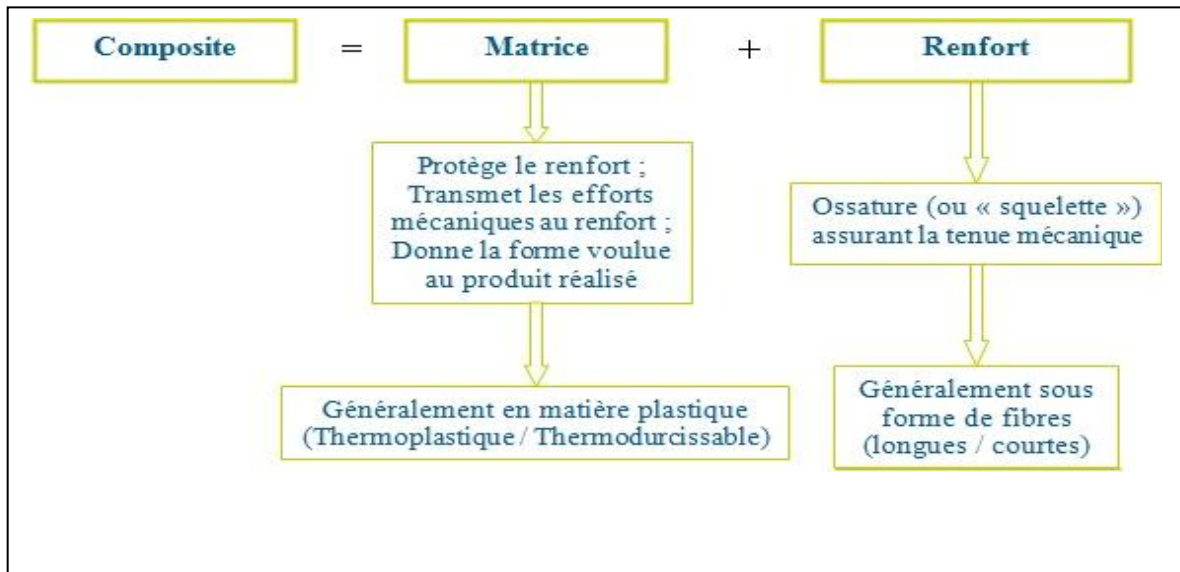


Figure I.2 : Classification schématique des types de composite.

**I.4. Les constituants d'un matériau composite :**

Le matériau composite constituants de:

**I.4.1 Le renfort :** Les renforts contribuent à **améliorer la résistance mécanique** (résistance à la traction et rigidité des matériaux). 2 type nature des fibres organiques ou inorganiques voire le Figure I.3.

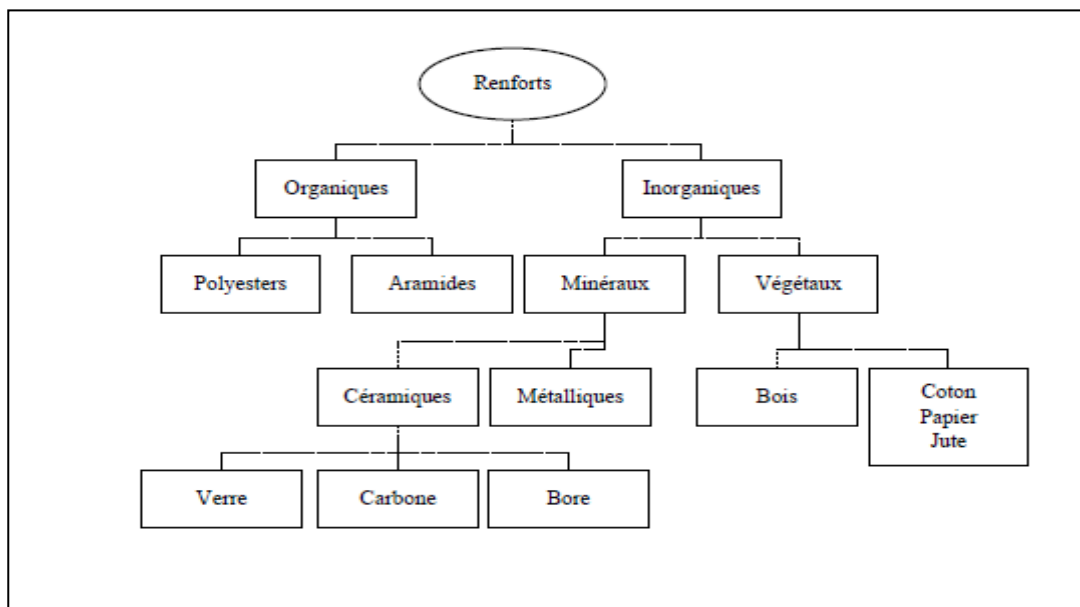




Figure. I.3 : Classification schématique des principaux matériaux de renfort.

#### I.4.2. Matrice:

La matrice permet de lier les fibres du renfort fibreux entre elles, ainsi que de **répartir** les **efforts** (résistance à la compression ou à la flexion), voire le Figure .I.4.

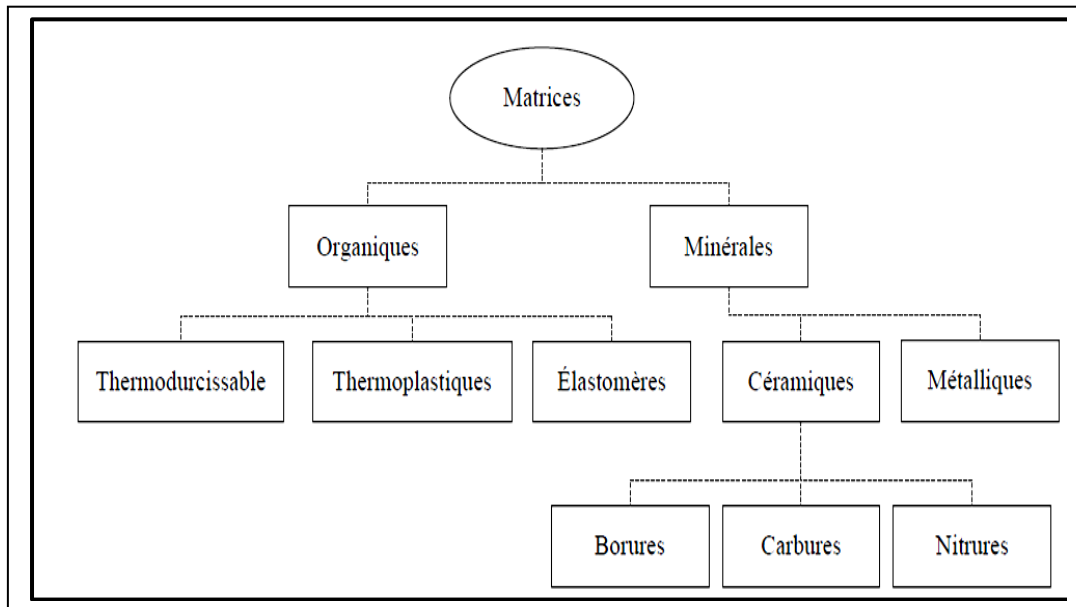


Figure. I.4: Classification schématique des principaux matériaux de matrice.

#### I.5. Avantages et les inconvénients des matériaux composites:

- Légèreté (poids).
- en raison de ses propriétés mécaniques (rigidité élevée, bonne Résistance à la fatigue),
- Augmentation dure de vie.
- maintenance réduite.
- faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu carbone).
- insensibles aux produits chimiques sauf les décapants de peinture qui **attaquent** les
- Comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole .résines.
- Une bonne isolation électrique.
- isolement thermique et phonique supérieur à celui des matériaux traditionnels.

- ☒ Coût important du passage matériau métallique à matériau composite, prenant en compte le coût matériau (des constituants) et le coût associé au procédé de fabrication.
- ☒ Vieillesse sous l'action de l'eau et de la température.
- ☒ Méthodes de contrôle coûteuses et compliquées.
- ☒ Forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) constituant des maillons faibles au sein de la structure.
- ☒ Dispersion matériau **plus importante** que les matériaux métalliques induisant un surcoût des campagnes de qualification matériau due aux nombres de répétitions d'essais imposées.
- ☒ Sensibilité à l'environnement des matrices organiques entraînant une perte de propriétés mécaniques notables après vieillissement thermique ou hydrique.

### **I.6. Identification des matériaux composite : [5]**

Les matériaux composites que l'on classe généralement en 3 familles en **fonction** de la nature de la matrice.

#### **I.6.1 Les composites à matrices organiques (CMO):**

Qui constituent, de loin, les volumes les plus importants aujourd'hui à l'échelle industrielle.

#### **I.6.2. les composites à matrices céramiques (CMC):**

Réservés aux applications de très haute technicité et travaillant à haute température comme le spatial, le nucléaire et le militaire, ainsi que le freinage (freins céramique).

#### **I.6.3. les composites à matrices métalliques (CMM):**

La matrice est un métal ductile. Ces composites supportent des températures plus élevées que le métal de leur matrice.

### **I.7.les types des matériaux composites : [5]**

On peut classer les matériaux composites en deux types :

#### **I.7.1 Les matériaux composites a Grande diffusion (GD) :**

Représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant **30%**. Dans **90%** des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (**+ de 99%** des renforts utilisés !). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.

### I.7.2. Les matériaux composites à haute performance (HP) : [6]

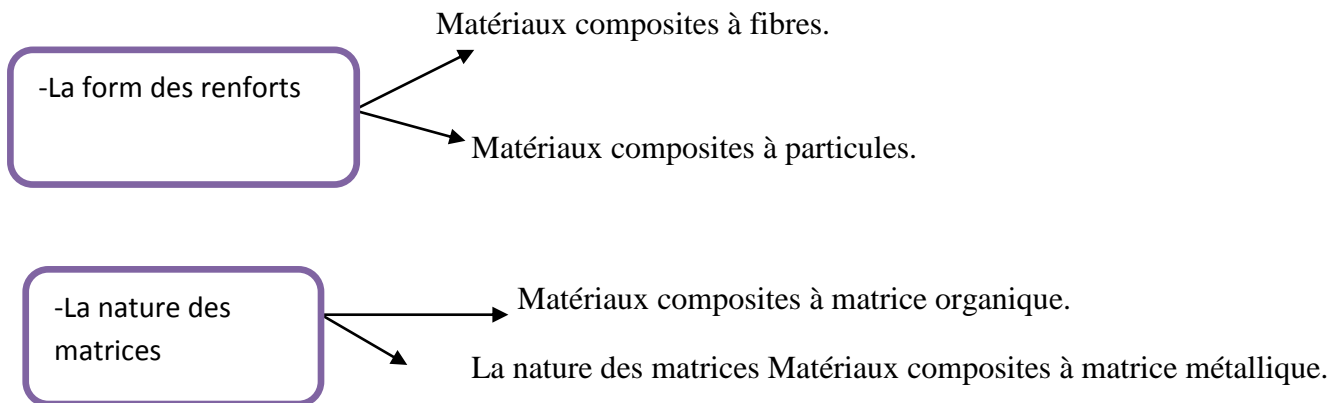
Les matériaux composites à hautes performances sont utilisés dans le domaine d'aéronautique où le besoin d'une grande performance déduite des hautes valeurs ajoutées.

Les renforts sont plutôt des fibres longues.

Ils sont orientés vers l'optimisation des caractéristiques mécaniques et thermiques tout en diminuant le poids au maximum. Leurs coûts sont très élevés, ils sont réservés aux applications de pointe tel que l'aéronautique et l'espace, l'armement, le sport de haut niveau, etc... .

### I.8. Classification des matériaux composites:

Il est possible de définir des classes de matériaux composites en se référant à la **nature** ou à la **forme** des constituants [7].



### I.9. Composites structuraux:

#### I.9.1. Monocouche:

Qui représente l'élément de base de la structure composite.

##### I.9.1.a) Fibres longues: (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement)

Parmi les fibres les plus utilisées dans l'industrie on a fibre de verre, fibre de carbone, fibre aramide voir le Figure .I.5.

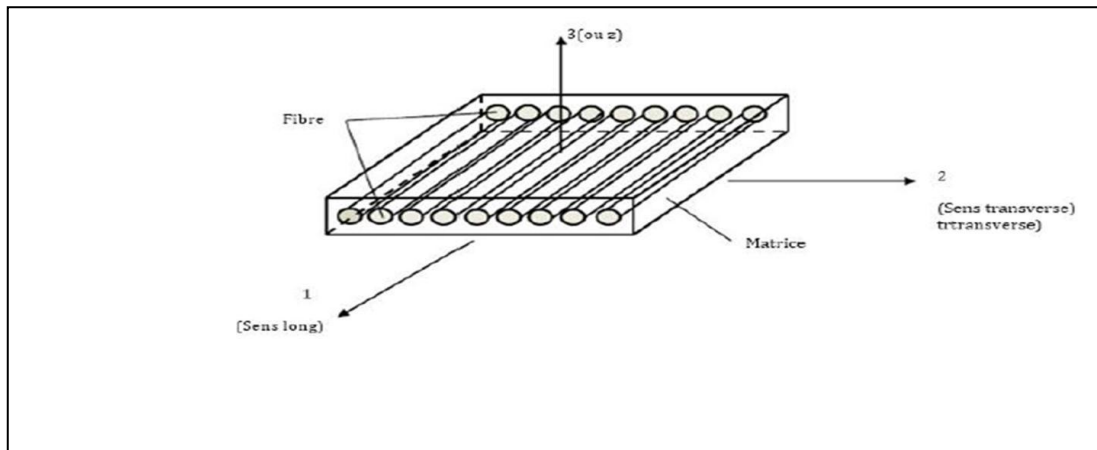
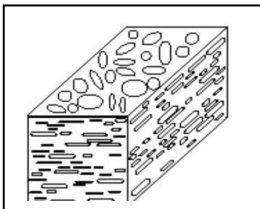


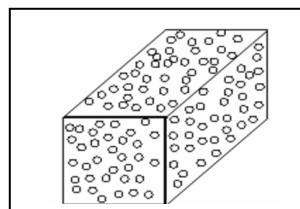
Figure I.5: Composites renforcés de fibres longues.

#### I.9.1.b) Fibres courtes :

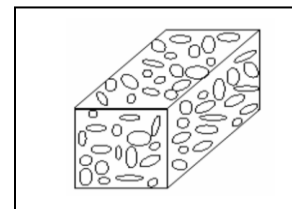
Elles sont à quelques centimètres, ou fractions des millimètres on distingue les feutres et les mats .Elles sont **coupées** au moment de la fabrication du matériau composite .Elles peuvent être utilisées telles quelles ou bien **tissés** (trio type de fibre courtes). Voir le Figure .I.6.



Flocons Composites



Composite Particulaire.



Composites de remplissage.

Figure .I.6: Composites renforcés de fibres courtes.

#### I.9.2. Stratifiés:

Les structures composites stratifiées sont constituées de **couches successives de renforts** imprégnés de **résines**. Les couches sont **également** nommées **plis**. Les structures stratifiées réalisées à

partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes **unidirectionnelles** ou **bidirectionnelles**. Ces nappes sont formées de renforts en fibres

Longues liées par de la résine [7]. Cette opération permet de créer des plaques dont les caractéristiques mécaniques, de rigidité et résistance, peuvent être l'objet de la conception [8]. L'épaisseur d'une couche dépend de son grammage. L'épaisseur de chacune des couches est généralement très faible voir le Figure. I.7.

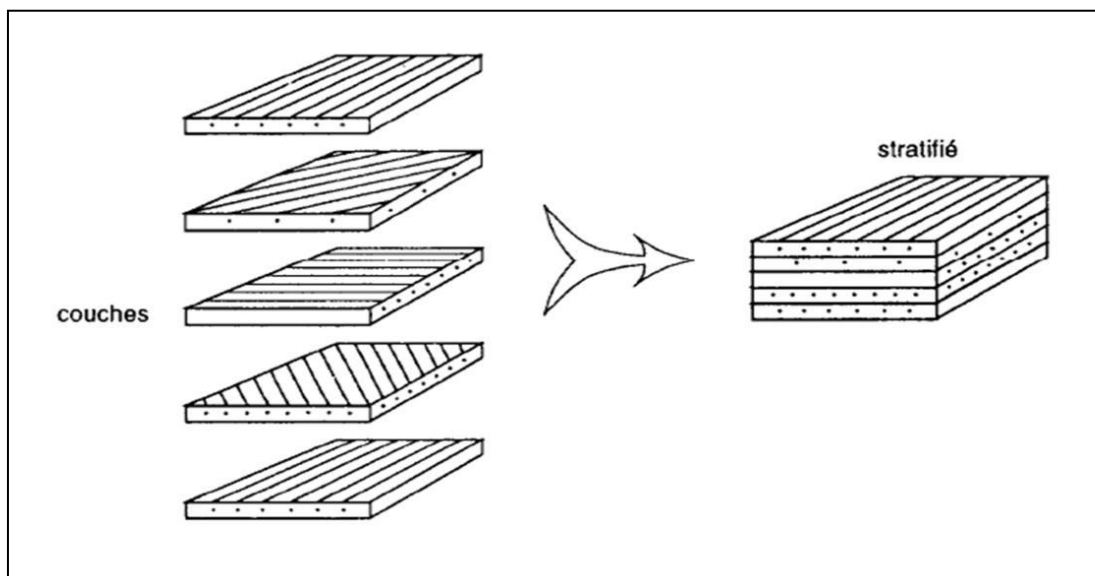


Figure. I.7: Les constituants d'un composite stratifié.

### I.9.3. Les structures sandwichs:

Selon Vincent [9], Un sandwich typique est représenté à la figure I.6 est constitué :

- ✓ de deux **peaux** fines, (possédant de bonnes caractéristiques en traction).
- ✓ prenant une **âme** ou coeur en sandwich, (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de **bonnes propriétés** en compression).

L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité.

Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.). Pour que les structures sandwiches jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

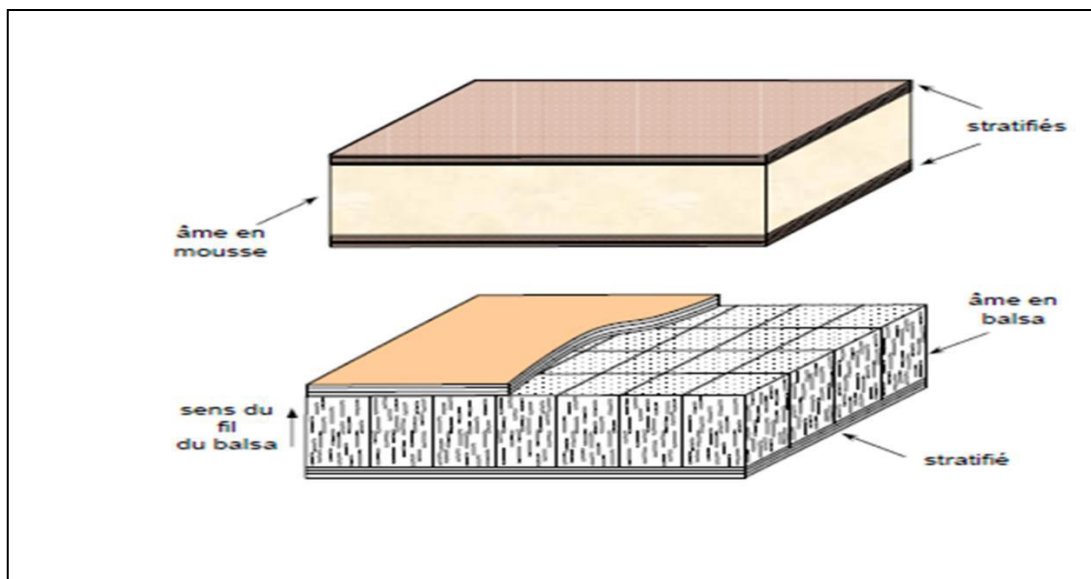


Figure I. 8 : Matériaux sandwichent à âmes pleines [10].

### I.9.3. a).Les peaux :(stratifiés)

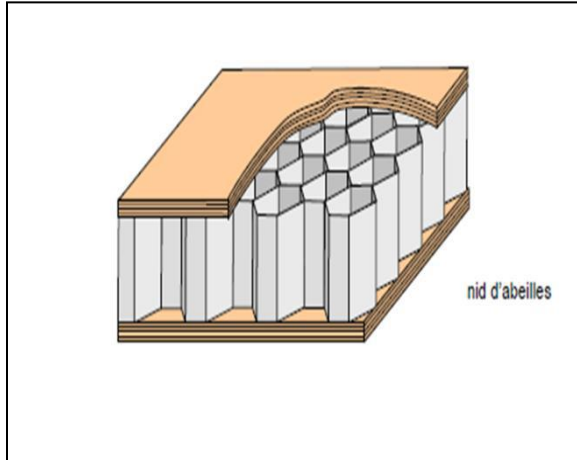
Généralement de **faibles épaisseurs**, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être les alliages d'aluminium, les plastiques **renforcés par des fibres**, l'acier et les contreplaqués, bois, ou matériau composite.

Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour **but** de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression).

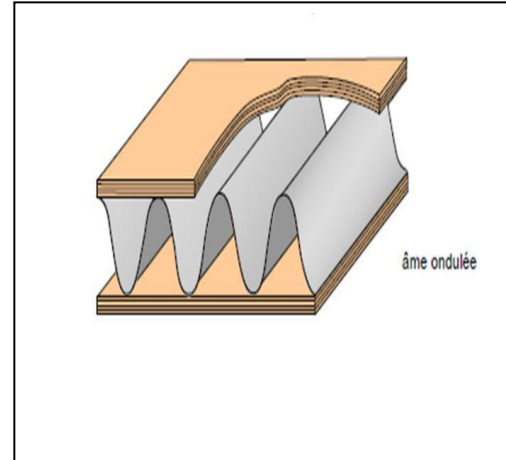
### I.9.2 3.b).L'âme :(en mousse)

Le **coeur** remplit deux fonctions structurales:

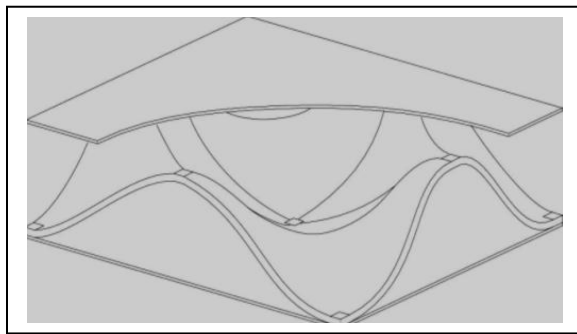
- Premièrement, il s'oppose aux déformations perpendiculaires au plan des faces qu'il sépare.
- Deuxièmement, il donne au sandwich la rigidité qui lui permet de résister aux forces de cisaillement s'exerçant dans les plans perpendiculaires aux faces, il se présente principalement sous quatre formes comme illustré à la figure I.7.



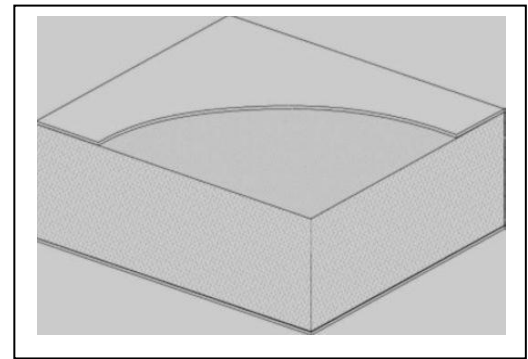
**Cœur en nid d'abeilles [10]**



**Cœur ondulé [10].**



**Cœur plein [11].**



**Gaufré [11].**

**Figure I.9: Différents Cœurs**

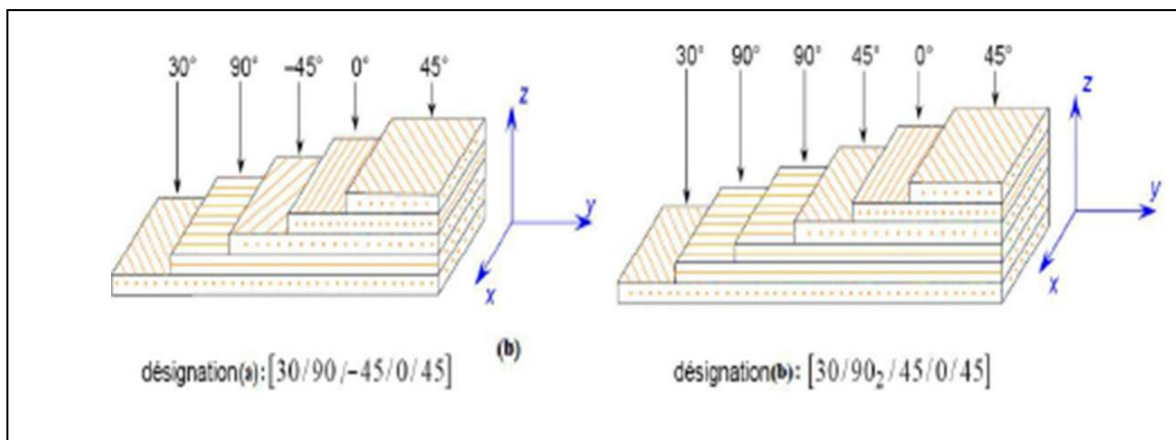
❖ **Désignation des structures stratifiées :** [11]

Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x. Sur les figures 1.8(a) et 1.8(b), les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut ;

- les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à
- la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole

comme l'exemple de la figure 1.8(a):  $[30/90/-45/0/45]$  ;

- les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme l'exemple de la figure 1.8(b) :  $[30/90_2/45/0/45]$  ;



**Figure I.10 : Désignation d'un stratifié.**

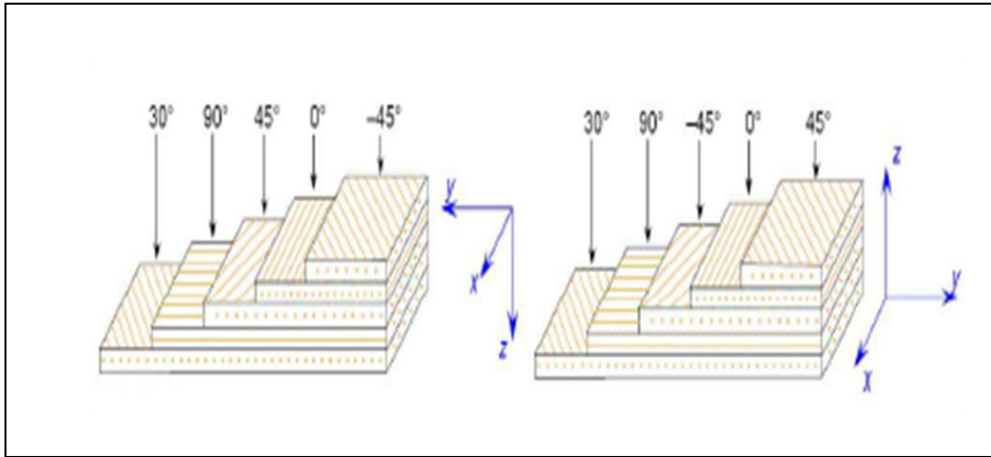
❖ **Angles positifs et négatifs :** [11]

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signes opposés, les signes (+) ou (-) sont utilisés. La convention pour les angles positifs ou négatifs dépend du **système d'axes choisi** : une inversion peut apparaître suivant le choix effectué (figure I.9).

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des stratifiés de type :

Nous donnons ci-après quelques exemples de désignation de stratifiés.





**Figure I.11:** Convention de signe pour la désignation des stratifiés.

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des stratifiés de type :

	0°	30°	0°	0°
	30°	-60°	-45°	-45°
<b>Stratifié:</b>	-30°	-60°	-45°	45°
	-45°	0°	45°	-45°
	45°	45°	45°	45°
<b>Désignation:</b>	[ ±45 / ∓30 / 0 ]	[ 45 / 0 / -60 <sub>2</sub> / 30 ]	[ 45 <sub>2</sub> / -45 <sub>2</sub> / 0 ]	[ ± ∓ ±45 / 0 ] [ 45 / -45 <sub>2</sub> / 45 <sub>2</sub> / -45 / 0 ]

❖ **Stratifiés symétriques :**

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des **couches successives**.

Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice **S** indique que le stratifié est symétrique. Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée [10].

❖ Pourquoi la symétrie miroir:

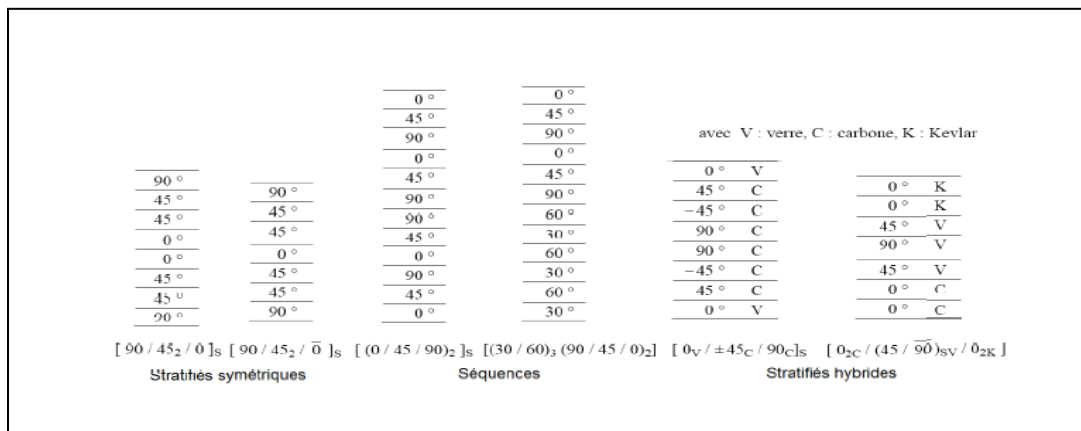
Selon Daniel [12], Lors de la constitution de la pièce stratifiée, les plis successifs imprégnés de résine sont drapés à température ambiante, puis placés dans une étuve pour la polymérisation. Dans le composite ainsi créé à chaud, la dilatation d'ensemble de la pièce d'origine thermique, s'effectue sans qu'il y ait variation globale de sa forme par voilement ou gauchissement. Par contre lors du refroidissement, les plis ont tendance à se contracter différemment suivant le sens des fibres ou suivant le sens travers. Lorsque la symétrie miroir est réalisée, elle entraîne la symétrie de ces contraintes, et empêche ainsi l'apparition des déformations d'ensemble de la pièce : voilement ou gauchissement.

**Séquence :**

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est **successivement répétée** [10].

**Stratifiés hybrides :**

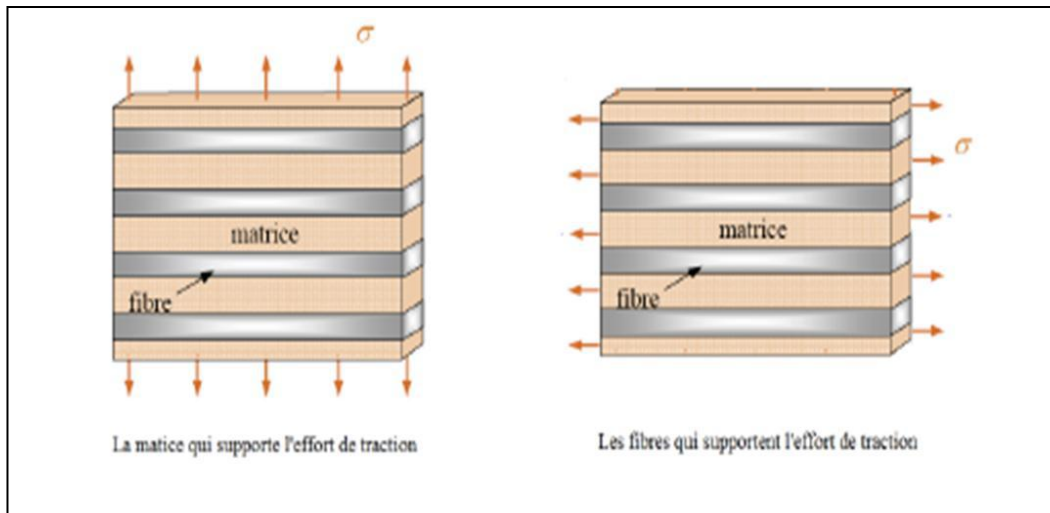
Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de **natures différentes**. Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la



**Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation :**

L'orientation de la fibre est choisie de façon adaptable avec les directions d'efforts. Les fibres sont disposées de sorte qu'elles résistent aux efforts de traction et de compression, figure (I.10). Pour résister aussi à l'effet de cisaillement, on met **deux fibres orthogonales** de façon à ce que l'une d'elle supporte l'effet de compression ou traction et l'autre l'effet de cisaillement. En outre, il y a une **influence de la forme de renfort** sur la déformation. En effet, la raideur obtenue avec un renfort tissé sera moindre que celle que l'on observait en

Superposant **deux directionnels croisés à 90°**. Cela est dû à la courbure des fibres du fait de l'opération de tissage, qui rend le pli tissé plus déformable que les unidirectionnels croisés sous une même sollicitation [13] [14].



**Figure I.12: L'influence de l'Orientation des fibres (Essai de traction).**

## Chapitre II :

# Le comportement mécanique et thermique des poutres stratifiées.

### II.1. Introduction :

Les technologies modernes ont besoin de matériaux qui allient à la fois une rigidité, une résistance mécanique et une *grande légèreté*. Pour atteindre cet objectif il faut nécessairement *utiliser un matériau composite*, dans ce domaine, les matériaux composites à base de fibres jouent un rôle de plus en plus important dans les techniques avancées. Les propriétés mécaniques des composites fibreux dépendent de la quantité, de la taille et surtout de l'orientation des fibres. [11]

Les propriétés d'une poutre dépendent, en grande partie, de son *épaisseur* en fonction de ses autres dimensions.

On appelle  $h$  l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan  $z = h/2$ .

Dans ce chapitre, nous allons procéder à l'étude théorique en utilisant *la théorie classique des stratifiés* pour exprimer les résultantes  $N_{ij}$  et les moments  $M_{ij}$  en fonction des déplacements de la poutre, lorsque cette dernière est constituée d'un matériau composite stratifié.

Premièrement, nous allons écrire dans le repère global *la loi de comportement d'un pli composite* afin de relier le champ des *contraintes* au champ des *déformations*. Ensuite, *les résultantes et les moments* seront exprimés en tenant compte du comportement mécanique des différents plis composites.

## II.2 .Loi de comportement des stratifiées :

Les matériaux composites sont souvent schématisés par un milieu continu *homogène équivalent anisotrope*. L'étude de leur comportement consiste à passer des propriétés des composantes et de la géométrie du composite. Cette étude comportera deux phases:

- ✓ l'étude du comportement mécanique de *chaque pli*,
- ✓ l'étude du comportement *globale* du matériau constitué de plusieurs plis, et désigné généralement par *le comportement du stratifiés* [15].

Historiquement, L'étude du comportement des plaques stratifiées composites est basée sur la théorie des plaque stratifiés. Cette théorie utilise les *mêmes hypothèses que la théorie générale* des plaques qui sont, dans un schéma de premiers degrés, associées aux noms de *Reissner/Mindlin* et de *Kirchoff-Love*. La théorie de *Kirchoff-Love* est historiquement l'une des premières approches bidimensionnelles de la flexion des poutre élastiques. Elle est basée sur l'hypothèse de conservation des normales en *négligeant ainsi le cisaillement transverse* [11].

### II.2.1. Caractéristiques du mélange renfort-matrice:

Les principaux types de matériaux composites utilisés pour la fabrication de systèmes structuraux sont ceux formés par une phase discontinue, appelée *renfort*, insérée dans une phase solide, appelée *matrice*. La distribution et l'interaction, physique et chimique, entre les deux phases donne les propriétés mécaniques finales du matériau composite.

En général, les composites structuraux sont *présentés* sous la forme d'un empilage de *plusieurs plis*, chacun présentant des fibres orientées selon une direction préférentielle.

L'ensemble matrice-fibres forme le *pli*, l'ensemble de plis orientées forme le *stratifié* [16].

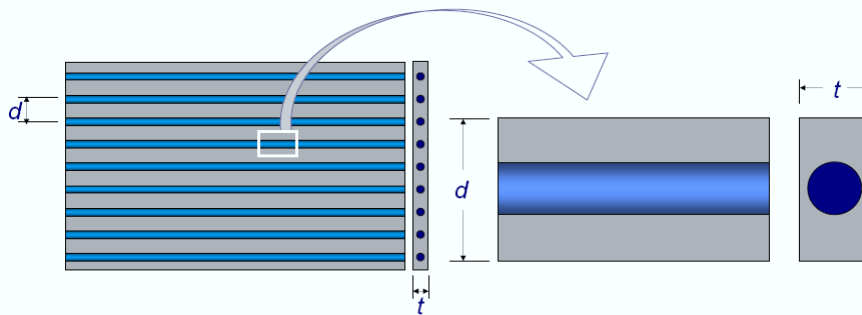
Les *propriétés mécaniques* moyennes de chaque *pli* sont obtenues par la *règle de mélange* [17]. Selon celle-ci, certaines propriétés du pli, telles que ses modules d'élasticité et sa densité, sont obtenus grâce à l'utilisation de la *fraction volumique de fibres et de la matrice* [10] [18].

Pour cela, La première étape d'un calcul composite consiste à déterminer *les caractéristiques mécaniques du matériau* en fonction de celles de ses composants. Dans la plupart des cas, ces calculs se réduisent uniquement au calcul du *module d'Young*. Il existe divers modèles d'homogénéisations pour l'obtenir.

D'après Paolo [19], Soit un matériau composite de repère d'orthotrope (1, 2, 3), *l'axe 1* ou l'axe *longitudinal* étant disposé conventionnellement selon la direction des fibres, Les directions normales aux fibres dans le plan de la couche sont appelées directions *transversales*, Le composite est considéré comme étant *isotrope transverse* c'est-à-dire qu'il est isotrope dans le plan normal à la direction 1. Le plan transverse est repéré par les deux directions équivalentes 2 et 3.

Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une couche renforcée par des *fibres unidirectionnelles* uniformément distribuées dans le corps de la couche (Voir figure II.1).

Soit une cellule élémentaire de *fraction volumique*  $V = 1$  *constituée de fibres et de matrice* avec :



**Figure II.1 : Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel [11].**

$$V_m = \frac{V_m}{V_c} : \text{Fraction volumique de matrice}$$

$$V_f = \frac{V_f}{V_c} : \text{Fraction volumique de fibre}$$

$$V = V_m + V_f = 1 \quad (2.1)$$

Nous nous proposons, par le biais du volume élémentaire représentatif introduit auparavant, de trouver les caractéristiques mécaniques homogénéisées d'une couche à renfort unidirectionnel uniformément reparti.

Les hypothèses de calcul sont:

- matrice *isotrope*, de module d'Young  $E_m$  et coefficient de Poisson  $\nu_m$  ;
- fibres *isotropes*, de module d'Young  $E_f$  et coefficient de Poisson  $\nu_f$  ;
- la fraction volumique des fibres est connue  $V_f$  ;
- le comportement est *élastique linéaire* ;

- il y a une *adhésion parfaite* entre les fibres et la matrice.

L'objectif est de déterminer les constantes techniques homogénéisées de la couche ( $E_1, E_2, G_{12}$  et  $\nu_{12}$ ); à cause de la disposition régulière des fibres, cette dernière a un *comportement macroscopique orthotrope*.

### II.2.1.a Modules de Young longitudinale $E_1$ :

Le volume élémentaire représentatif est soumis à un état de sollicitation dans lequel seulement  $\sigma_1$  n'est pas nulle, voir la (figure II.2).

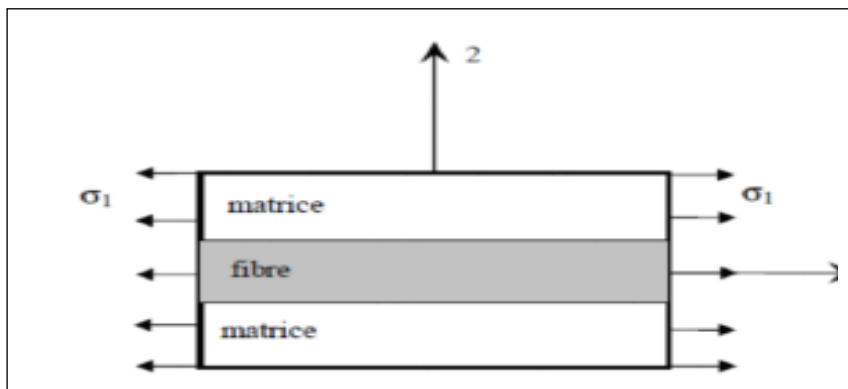


Figure II.2 : Schéma simplifié d'une traction longitudinale [20].

Le lien élastique linéaire implique :

$$\sigma_1^m = E_m \varepsilon_1^m, \quad \sigma_1^f = E_f \varepsilon_1^f, \quad \sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l \quad (2.2)$$

L'hypothèse d'adhérence parfaite a comme conséquence que la déformation est la même partout (en particulier, les sections droites restent planes):

$$\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l \quad (2.3)$$

Où l'indice ( $m$ ) indique une quantité relative à la matrice, ( $f$ ) à la fibre et ( $l$ ) à la couche.

$$\sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l = E_1 \varepsilon_1^f = E_1 \varepsilon_1^m$$

L'équilibre impose la relation :

$$\begin{aligned} \sigma_1^l A_l &= \sigma_1^f A_f + \sigma_1^m A_m = E_1^f \varepsilon_1^f A_f + E_1^m \varepsilon_1^m A_m \\ &= E_1^f \varepsilon_1^l A_f + E_1^m \varepsilon_1^l A_m = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La loi de comportement de l'unidirectionnelle s'écrit :

$$\sigma_1^l A_l = E_1 \varepsilon_1^l A_l$$

$$\text{Donc} \quad E_1 \varepsilon_1^l A_l = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \Rightarrow E_1 = \frac{E_1^f A_f + E_1^m A_m}{A_l}$$

$$\text{avec} \quad V_f = \frac{\nu_f}{\nu_c} = \frac{A_f}{A_l} \quad \text{et} \quad V_m = 1 - V_f = \frac{A_m}{A_l}$$

On obtient

$$E_1 = E_1^f V_f + (1 - V_f) E_1^m \quad (2.5)$$

Relation très bien vérifiée dans la direction des fibres. Cette dernière est la célèbre *loi des mélanges*, qui donne la valeur homogénéisée du module d'Young en direction longitudinale (celle des fibres).  $E_1$  dépend linéairement de  $V_f$ , à savoir de la quantité de fibres présentes.

Le modèle utilisé pour trouver  $E_1$  est un modèle de type *parallèle*: matrice et fibres travaillent en parallèle, pour le champ de contraintes appliqué.

### II.2.1.b Modules de Young transversal $E_2$ :

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seulement  $\sigma_2$  n'est pas nulle, voir (la figure II.3).

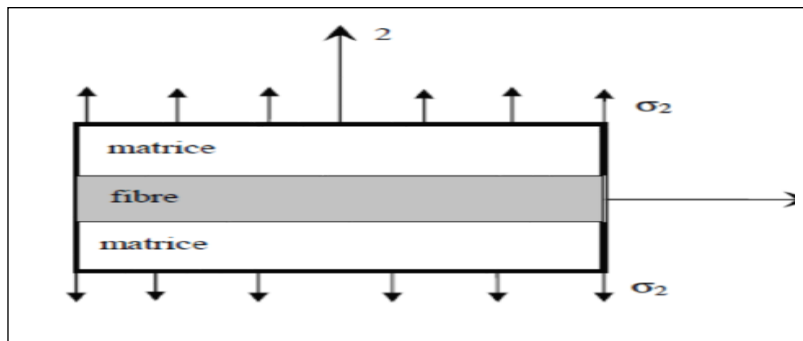


Figure II.3 : Schéma simplifié d'une traction transversal [20].

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que la contrainte est constante dans une section droite.

$$\sigma_2^l = \sigma_2^m = \sigma_2^f \quad (2.6)$$

La compatibilité de la déformation implique :

$$V \varepsilon_2^l = \varepsilon_2^f V_f + (1 - V_f) \varepsilon_2^m$$

$$\Rightarrow \quad V \frac{\sigma_2^l}{E_2} = V_f \frac{\sigma_2^f}{E_2^f} + (1 - V_f) \frac{\sigma_2^m}{E_2^m}$$



$$\text{Donc } \frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_2^f} + \frac{(1-V_f)}{E_2^m}$$

$$E_2 = \frac{E_2^f E_2^m}{V_f E_2^m + (1-V_f) E_2^f} \quad (2.7)$$

La dépendance du module  $E_2$  de  $V_f$  n'est plus linéaire; en outre, la présence des fibres donne *une faible* à  $E_2$ : les fibres ne sont pas un *renfort efficace* pour la rigidité transversale.

Le modèle utilisé est un modèle de type *série*.

### II.2.1.c Coefficient de Poisson longitudinal $\nu_{12}$ :

Comme pour  $E_1$ , on applique un état de contrainte où seulement  $\sigma_1$  n'est pas nulle.

$$\text{Par définition : } \nu_f = -\frac{\varepsilon_2^f}{\varepsilon_1^f}, \quad \nu_m = -\frac{\varepsilon_2^m}{\varepsilon_1^m}, \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2^l}{\varepsilon_1^l} \quad (2.8)$$

$$\text{D'ailleurs, l'hypothèse de l'adhérence prescrit encore que : } \varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l \quad (2.9)$$

Comme  $E_2$  pour la compatibilité, en moyenne, des déformations transversales impose encore la relation :

$$\begin{aligned} V\varepsilon_2^l &= \varepsilon_2^f V_f + (1-V_f)\varepsilon_2^m \\ \Rightarrow \varepsilon_2^l &= \nu_f \varepsilon_1^f V_f + (1-V_f)\nu_m \varepsilon_1^m \\ \Rightarrow \nu_{12} \varepsilon_1^l &= \nu_f \varepsilon_1^f V_f + (1-V_f)\nu_m \varepsilon_1^m \end{aligned}$$

finalement :  $\nu_{12} = \nu_f V_f + (1-V_f)\nu_m \quad (2.10)$

### II.2.1.d Module de cisaillement longitudinal $G_{12}$ :

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seule  $\tau$  n'est pas nulle, voir la figure II.4, où on a mis en évidence même la déformation correspondante

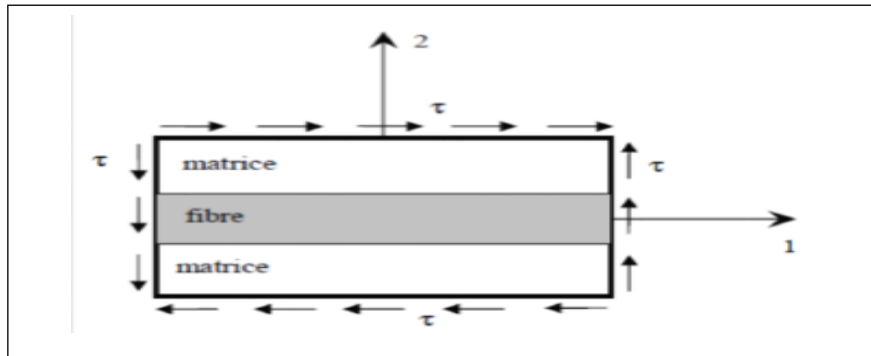


Figure II.4 : Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal [20].

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que ce soit :

$$\tau^l = \tau^m = \tau^f \quad (2.11)$$

Tandis que par le lien élastique on a :

$$\tau^m = G_m \varepsilon_6^m, \quad \tau^f = G_f \varepsilon_6^f, \quad \tau^l = G_{12} \varepsilon_6^l \quad (2.12)$$

La compatibilité, en moyenne, de la déformation à cisaillement prescrit que ce soit :

$$\begin{aligned} V \varepsilon_6^l &= \varepsilon_6^f V_f + (1 - V_f) \varepsilon_6^m & \Rightarrow \frac{\tau^l}{G_{12}} &= \frac{\tau^f}{G_f} V_f + \frac{\tau^m}{G_m} (1 - V_f) \\ \Rightarrow G_{12} &= \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1 - V_f) G_f} \end{aligned} \quad (2.13)$$

## II.2.2 Loi de Hooke généralisée [10] :

Les contraintes ( $\sigma_{ij}$ ) et les déformations ( $\varepsilon_{kl}$ ) sont associées au tenseur de rigidité  $C_{ijkl}$  en utilisant la *loi de Hooke dans le domaine de l'élasticité linéaire*, et sont exprimées, en notation indicielle, sous la forme:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.14)$$

Où  $i, j, k, l$  prennent les valeurs 1, 2, 3.  $\varepsilon_{kl}$  est le *tenseur de déformations*,  $\sigma_{ij}$  est le *tenseur de contraintes* et  $C_{ijkl}$  est le *tenseur d'élasticité* (ou de *rigidité*).

Les composantes du tenseur des contraintes et des déformations peuvent être réduites à six composantes indépendantes à cause de sa symétrie. Ainsi, la notation tensorielle peut être contractée en utilisant la notation suivante :

$$\text{Le tenseur des contraintes : } \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Le tenseur des déformations :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

La **loi de Hooke** est réécrite en notation vectorielle en utilisant les formes contractées des tenseurs de contraintes et de déformations selon l'équation:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2.17)$$

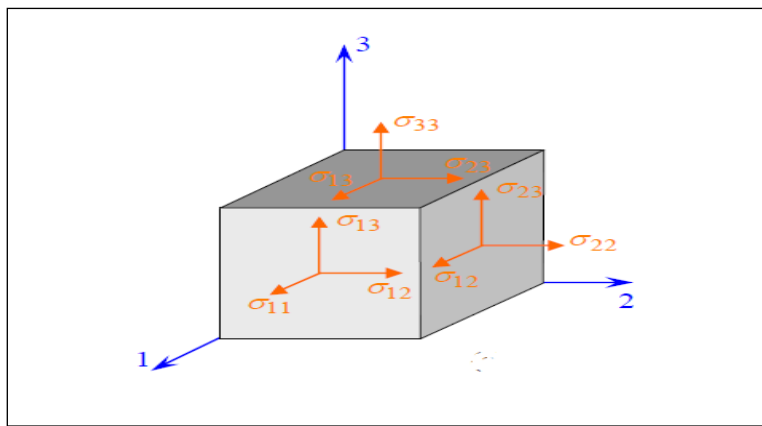


FIGURE II.5 : Composantes des vecteurs contraintes dans un système d'axes (1,2,3) [10]

## II.2.3 Différents Types des matériaux :

### II.2.3.a Matériaux anisotropes:

Selon Nye [21], les **matériaux anisotropes** sont des matériaux dont ses propriétés varient selon une direction considérée mais ils **ne présentent pas de plans de symétrie**. La **loi de Hooke** peut être exprimée par:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \end{cases} \quad (2.18)$$

Où  $S_{ijkl}$  est le tenseur de souplesse. Le tenseur de rigidité en a **81** coefficients de même pour le tenseur de souplesse, pour **raison de la symétrie** des contraintes  $\sigma_{ij}$  et de déformation  $\varepsilon_{kl}$ , il y a une **réduction** des coefficients à **36** parmi ces derniers, **21** sont indépendants.

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \text{et} & \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \text{et} & \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{ijkl} = C_{jikl} \\ C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{cases}$$

Application du théorème des travaux virtuels :  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \Leftrightarrow C_{ijkl} = C_{klij}$

La nouvelle forme du tenseur de raideur permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & sym & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

La forme inverse de l'équation (2.19), est écrite sur la forme:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & sym & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

### II.2.3.b Matériaux orthotropes :

Selon Kollar et Springer [23], un milieu est dit *orthotrope* pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par *symétrie* relative à *deux plans orthogonaux*. On remarque qu'alors la *symétrie* par rapport au *troisième plan* orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour les composites *unidirectionnels*.

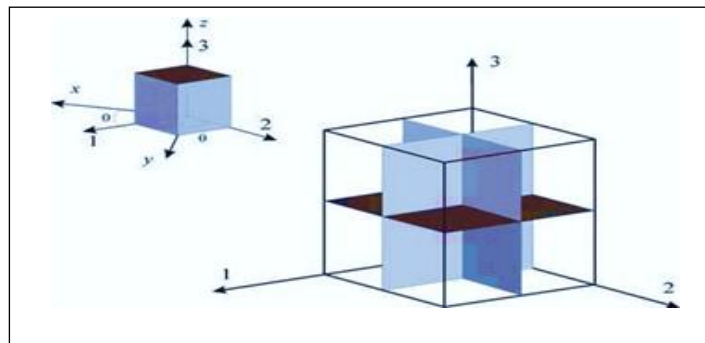


Figure II.6 : Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie.

Donc, Le nombre des coefficients indépendants est réduit à 9.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Les constantes de rigidité et de souplesse sont caractérisées par 9 coefficients indépendants :

\* 3 modules d'élasticité longitudinal  $E_1, E_2, E_3$  dans les directions de l'orthotrope.

\* 3 modules de cisaillement  $G_{12}, G_{23}, G_{31}$ .

\*  $\nu_{ij}$  : ( $\nu_{12}, \nu_{23}$  et  $\nu_{31}$ ) est le coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction j quand la contrainte est appliquée selon la direction i.

La matrice de souplesse étant symétrique, nous obtenons la relation suivante:

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \Rightarrow \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} ; \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} ; \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Les composantes de la matrice de rigidité du matériau, sont obtenues par inversion de la matrice de souplesse  $S_{ij}$  :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{22} &= \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{33} &= \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{13} & C_{66} &= G_{12} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12}-\nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{13} &= \frac{\nu_{13}-\nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{23} &= \frac{\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

### II.2.3.c Matériaux transversalement isotropes:

De la même façon que dans le matériau orthotrope, le *matériau transversalement isotrope a trois plans de symétrie* (Figure II.5). Toutefois, un de ces plans est isotrope.

Le composite renforcé par fibres longues et uniformes est un exemple de matériau transversalement isotrope.

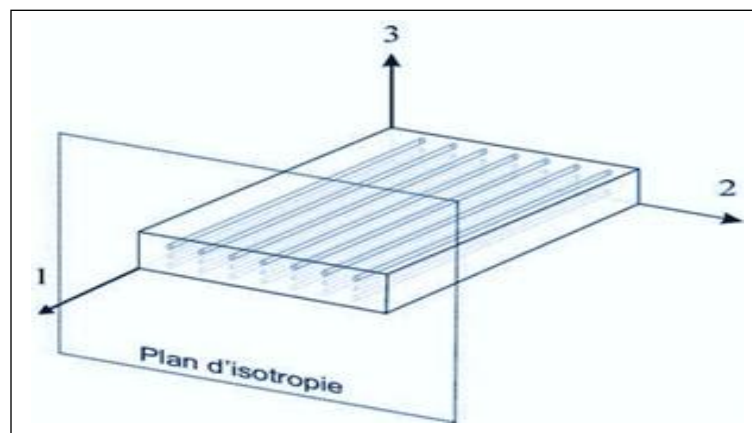


Figure II.7 : Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope.

Celui-ci a des fibres alignées par rapport à la direction 1 du système de référence matériau (Figure II.6). Dans ce cas, le plan perpendiculaire au plan des fibres, plan (2,3), est dit *isotrope*.

Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc:

$$C_{22} = C_{33} \quad C_{12} = C_{13} \quad C_{55} = C_{66} \quad C_{44} = \frac{C_{22} - C_{33}}{2}$$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité ( $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}$  et  $G_{12}$ ).

#### II.2.3.d Matériaux isotropes:

L'hypothèse d'*isotropie* impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base.

Donc, les propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E \quad ; \quad \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu \quad \text{et} \quad G_{12} = G_{31} = G_{23} = G$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\text{Avec : } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

### II.2.4 Relation contrainte-déformation plane :

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de *contrainte plane*, La relation contrainte déformation peut être donnée par [10] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ sym & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Les coefficients  $Q_{ij}$  sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte plane :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.27)$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité ( $E_1, E_2, \nu_{12}$  et  $G_{12}$ ), qui sont déjà déterminés à partir des essais de laboratoire tel que les essais de traction uni-axiale ou de cisaillement pur.

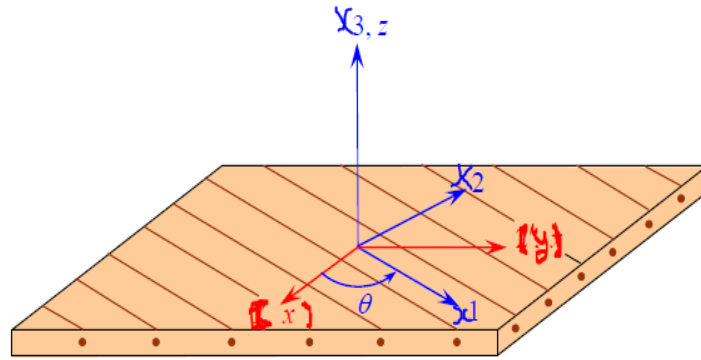
### II.2.5 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :

Selon Berthelot [10], les stratifié sont élaborés par l'empilement de couche successible dont la *direction des fibres* et **variable d'une couche** a l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre *un système d'axe de référence* pour l'ensemble du stratifiée, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

*Un pli composite unidirectionnel* est classiquement assimilé à un matériau orthotrope dont les axes principaux d'orthotrope sont définis à partir du repère local  $(0, x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2, 3)$ .

En règle générale, l'axe  $(x_1)$  est contenu dans le plan du pli et parallèle aux fibres. L'axe  $(x_2)$  est lui aussi contenu dans le plan du pli mais perpendiculaire à la fibre. Enfin, l'axe  $(x_3)$  est perpendiculaire au plan du pli (voir figure II.7). Il est question de caractériser les propriétés élastique de la couche en les exprimant dans le système d'axes de référence  $(x, y, z)$  du stratifié, la direction des fibres fait un angle  $(\theta)$  avec la direction  $x$ .





**Figure II.8: Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [10].**

Les matrices d'élasticité  $\bar{C}$  et de souplesse  $\bar{S}$  dans le *système de référence* sont obtenues en appliquant aux matrices d'élasticité et de souplesse  $C$  et  $S$  les relations de *changement de base* suivantes:

$$[\bar{C}] = [T]^{-1} [C] [T] \quad (2.28)$$

$$\text{Et} \quad [\bar{S}] = [T]^{-1} [S] [T] \quad (2.29)$$

Avec  $T$  est la matrice de changement de base, donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Avec  $c = \cos \theta$  et  $s = \sin \theta$

$$\text{Et} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

De même pour les déformations, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Nous pouvons également montrer que les contraintes dans le repère  $(x, y, z)$  sont définies en fonction des déformations par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

La matrice de rigidité réduite **hors axes** est donnée par l'expression :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Il faut toutefois noter que  $\bar{Q}_{16}$  et  $\bar{Q}_{26}$  ne sont que des combinaisons linéaires des quatre constantes élastiques de base. **Ils impliquent un couplage** entre les **contraintes** normales et les **déformations** en cisaillement, ainsi qu'un couplage entre les contraintes en cisaillement et les déformations normales.

### II.3 .Théories utilisées dans la formulation analytique de structures composites :

Différentes théories, utilisées pour l'approximation du déplacement et de la déformation, ont été initialement utilisées pour la modélisation de *structures métalliques* (en matériau isotrope), puis étendues à l'étude de *structures composites* (en matériau anisotrope, orthotrope ou transversalement isotrope). Ces théories sont essentiellement divisées en deux catégories:

- ✓ celles formulées tenant pour base la notion d'une *seule couche* équivalente, appelées *Théorie en Couche Équivalente Unique (Equivalent Single Layer Theory)*;
- ✓ celles formulées sur le concept de couches distinctes (discrètes), appelées *Théorie en Couches Equivalentes Discrètes (Discrete Layer Theory)*, ou *simplement Théorie*

### *Layerwise (Layerwise Theory).*

La première catégorie inclue *la Théorie Classique des Stratifiés* (CLT) et d'autres. D'autre part, la deuxième catégorie inclue la *Théorie en Couches Indépendantes* (TCI) et la *Théorie de Couches Dépendantes* (TCD). On peut citer par exemple les publications de Berthelot (2010) [10], de Reddy (1997) [23] et de Kollar et Springer (2003) [22] qui présentent ces différentes théories.

Dans la section subséquente, nous allons procéder à l'étude théorique en utilisant *la théorie classique des stratifiés*.

#### II.4. Théorie classique des stratifiés (CLT) :

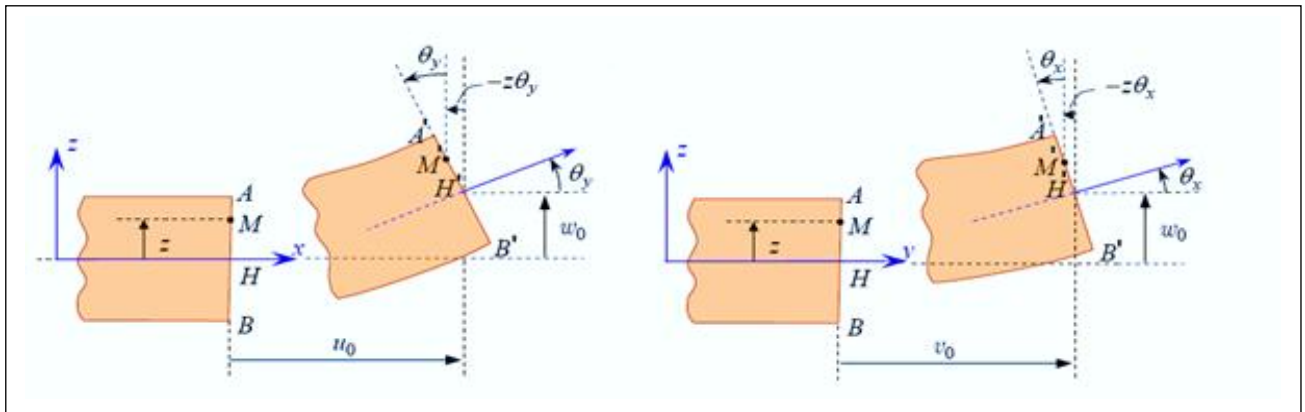
La *Théorie Classique des Stratifiés* est basée sur les *hypothèses cinématiques de Kirchhoff*, employées pour l'étude de structures du type plaque, et sur les hypothèses cinématiques de *Kirchhoff-Love*, utilisées pour l'étude de structures du type coques *courbes*.

D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure (connue comme *surface de référence ou surface neutre*), reste droite et perpendiculaire à la surface de référence, *ne changeant pas sa forme* dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction, tel que représenté sur la Fig. II.8.

Selon Reddy [23], dans la théorie *CLT* les effets des *déformations de cisaillements transversaux* ( $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ) et la *déformation normale transversale* ( $\varepsilon_z$ ), ne sont pas considérés. Les autres hypothèses adoptées pour la formulation de la théorie *CLT*, sont:

- Le stratifié est considéré comme une superposition de couches *parfaitement liées*, (la liaison est supposée infinitésimale) afin d'éviter *le délaminage*,
- La déformation est supposée continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre,
- Le *stratifié* se comporte comme *une seule couche* mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales.
- La *déformation transversale est nulle*, (pas de variation de l'épaisseur).
- Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Ceci revient à *négliger l'effet de cisaillement transverse*.

- Le matériau de *chaque pli* présente un comportement *élastique* ;
- Le stratifié est considéré *mince*, c'est-à-dire, que les plis de la structure sont relativement minces par rapport aux dimensions planes (largeur et longueur) de la structure ;
- Les déformations, les déplacements et les rotations sont *petits*.



**Figure II.9 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiées (Figure adaptée de Berthelot (2010)).**

Selon Reddy [23], le *champ de déplacements* de la théorie *CLT* est donné par l'expression suivante:

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

En raison de *l'hypothèse* de déplacements linéaires et tenant compte du fait que les *déformations de cisaillement transverse ne sont pas prises* en compte, la précision de la théorie *CLT* n'est adéquate que dans l'étude structures minces. Ainsi, selon CEN et al. [24], l'erreur commise par son emploi augmente avec le ratio de *l'épaisseur-largeur* des structures composite.

### II.4.1 Relation déformations-déplacements (Cinématique) :

Les relations déplacements-déformations suivantes sont établies aux niveaux des plis du stratifié. Pour l'obtention des *relations* entre *les composantes* des déplacements et des *déformations* nous considérons dans *ce mémoire* que ces quantités sont petites et que l'on reste dans le domaine de *l'élasticité linéaire*. Ainsi, la relation entre les déformations et déplacements est définie en fonctions des dérivées des déplacements ( $u, v, w$ ) par rapport aux coordonnées ( $x, y, z$ ).

Donc, selon Reddy [23], ces relations sont exprimées sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} & \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[ -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left[ -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] = 0 \end{array} \right. \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Le champ des déformations est bien la superposition :

- des déformations de *membrane* :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

S'exprimant en fonction des déplacements ( $u_0, v_0$ ) des points situés dans le plan ( $o y z$ ).

- des déformations en *flexion et torsion* :

$$\varepsilon_f = z\kappa(x, y) = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

$\kappa_x, \kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  sont les courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Finalement le champ des déformations s'écrit :  $\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_f$  (2.39)

A partir de l'équation (2.33) les contraintes dans **une couche k**, s'expriment par :

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\text{où} \quad \sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y) \quad (2.40)$$

$\sigma_k(M)$  Représente la matrices de contrainte dans la couche k :  $h_{k-1} \leq z \leq h_k$ , la matrice de rigidité réduite  $\bar{Q}_k$  varie d'une couche à l'autre .il en résulte donc **une discontinuité** du champ des contraintes dans les couches successives.

## II.4.2. Expression des résultantes et des moments :

### II.4.2.a Résultantes en membrane :

D'après Berthelot [10], Les résultantes des forces qui agissent sur le stratifié peuvent être obtenus en intégrant les contraintes dans chaque couche à travers son épaisseur :

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \\ &= \sum_{k=1}^N \left[ \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[ \bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \\ &= \left[ \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Soit, en définitive:

$$N(x, y) = A_{ij} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} \kappa(x, y) \quad (2.42)$$

$$\text{avec} \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^N \left[ \bar{Q}_{ij} \right]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (2.43)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left[ \bar{Q}_{ij} \right]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.44)$$

$N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes *par unité de longueur*, respectivement des contraintes normales (suivant  $x$  et suivant  $y$ ) et de contrainte de cisaillement dans le plan ( $x, y$ ). Elles sont schématisées sur la figure II.9.

#### II.4.2.b Moment de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \\ &= \sum_{k=1}^N \left[ \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[ \bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \\ &= \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h^2_k - h^2_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h^3_k - h^3_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y) \end{aligned}$$

Soit, en définitive:

$$M(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} \kappa(x, y) \quad (2.46)$$

$$\text{avec} \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h^2_k - h^2_{k-1}) \quad (2.47)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h^3_k - h^3_{k-1}) \quad (2.48)$$

$M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion et  $M_{xy}$  le moment de torsion. Ils sont schématisés sur la figure II.9.

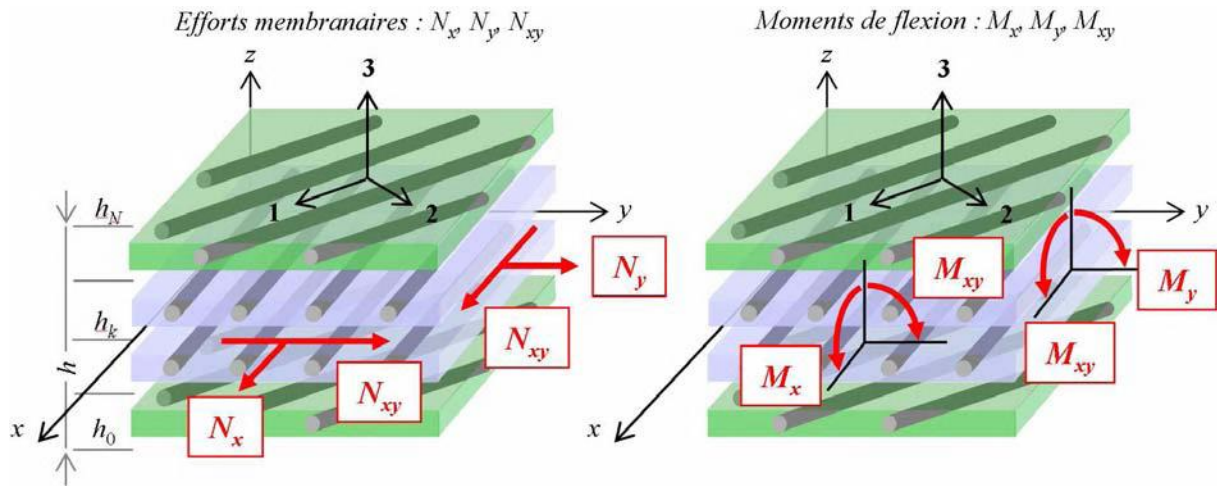


Figure II.10 : Schématisation des résultantes en membrane, des moments de flexion et de torsion (Figure adaptée de François-Xavier [25]).

Connaissant que  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  sont indépendants de  $z$ , les *vecteurs forces* et *moments résultant* peuvent être assemblés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés:

- ✓ la matrice  $A$  correspond au comportement de *membrane*,
- ✓ la matrice  $D$  correspond au comportement de *flexion*,
- ✓ la matrice  $B$  correspond aux termes de *couplage* entre les phénomènes de *membrane* et de *flexion*.

Dans le cas où le stratifié est symétrique, le couplage membrane-flexion-torsion est nul ( $B=0$ ).

*Les relations contraintes-déformations* dans le système de coordonnées locale des fibres d'un stratifié soumis à une variation de *température*, sont données par (Kaw )



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

Où 1 et 2 désignent respectivement la *direction longitudinale des fibres* et la direction *transversale normale aux fibres* dans le plan de la poutre  $\varepsilon_1^T$  et  $\varepsilon_2^T$  sont les *déformations d'origine thermique* et qui sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} = \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont respectivement le *coefficient de dilatation thermique longitudinal et transversal* et  $\Delta T$  la variation de température. Les composantes de la rigidité  $Q_{ij}$  sont données par:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.52)$$

Où  $E_1, E_2, \nu_{12}$ , et  $G_{12}$  sont les *caractéristiques mécaniques d'une couche*.

Les relations contraintes-déformations de la couche "k" dans le repère global du stratifié, sont données par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_K \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_K - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_K \quad (2.53)$$

Les *efforts à mi-plan* d'une poutre et les *moments* sont liés aux déformations et aux courbures par les expressions suivantes:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{Lx}^0 \\ \varepsilon_{Ly}^0 \\ \gamma_{Lxy}^0 \\ \kappa_{Lx} \\ \kappa_{Ly} \\ \kappa_{Lxy} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_{XY} \\ M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

Où  $\varepsilon_L^0$  et  $\kappa_k$  sont les déformations et courbures de la couche "k" dans le repère global du stratifié. (2.55)

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix}$$

Avec [A], [B] et [D] sont les *rigidités extensionnelle, flexionnelle et de couplage* respectivement, celles-ci peuvent être définies par :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]_k dz \\
 B_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]_k z dz \\
 D_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]_k z^2 dz
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

En notant par  $\sigma_{ij}$  les contraintes dans le plan, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
 N_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dz \\
 M_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z dz
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Les résultantes de force et de moment *thermique* sont définies par:

$$\begin{aligned}
 N^T_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]_k [\Delta T \{\alpha\}^T] dz \\
 M^T_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}]_k [\Delta T \{\alpha\}^T] z dz
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

## Chapitre III :

# Étude théorique sur les différents critères d'endommagement.

### III.1.Introduction :

Dans les deux ressources « *Modélisation du comportement des composites : l'élasticité anisotrope* » et « *Modélisation du comportement des composites : les poutres stratifiées* » consacrées à la modélisation du comportement des composites à fibres longues, nous avons vu *comment modéliser un comportement élastique* anisotrope dans le cas d'un pli unidirectionnel, *puis comment* calculer les contraintes et les déformations au sein d'un stratifié réalisé en empilant de tels plis disposés selon des orientations différentes. Nous nous intéressons maintenant à la prévision de la ruine d'un tel stratifié, c'est-à-dire que *nous cherchons à savoir si les sollicitations* qui y sont appliquées sont **susceptibles** de le dégrader au point de le rompre, de le déformer de façon permanente ou de lui faire perdre sa rigidité [22].

Par *mécanisme de rupture*, il faut comprendre tout processus mécanique produisant au sein d'un matériau une “discontinuité” locale de matière appelée fissure. Il est usuel de parler d'initiation de la rupture et de *propagation de la rupture*. L'initiation de la rupture peut être considérée comme la création de *microfissures* l'échelle microscopique (celle des constituants) à partir d'un défaut, on parlera de microfissuration [23].

## III.2.Mécanismes de rupture dans les matériaux composites:

### III.2.1. Les divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel:

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires.

Généralement, un mécanisme *n'est pas isolé*, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

Dans un matériau composite *unidirectionnel* soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres intervient lorsque la contrainte de traction  $\sigma_f$  dans une fibre atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{fu}$  de la fibre (voire la figure III.1).

- ✚ La rupture de la fibre produit une concentration de contraintes au voisinage de la rupture. La redistribution de ces contraintes, et par *conséquent* le processus de rupture résultant, dépend principalement : de la contrainte à la rupture des fibres, de la capacité de la *matrice à absorber l'énergie libérée*, des propriétés de l'interface fibre-matrice, etc. [26].

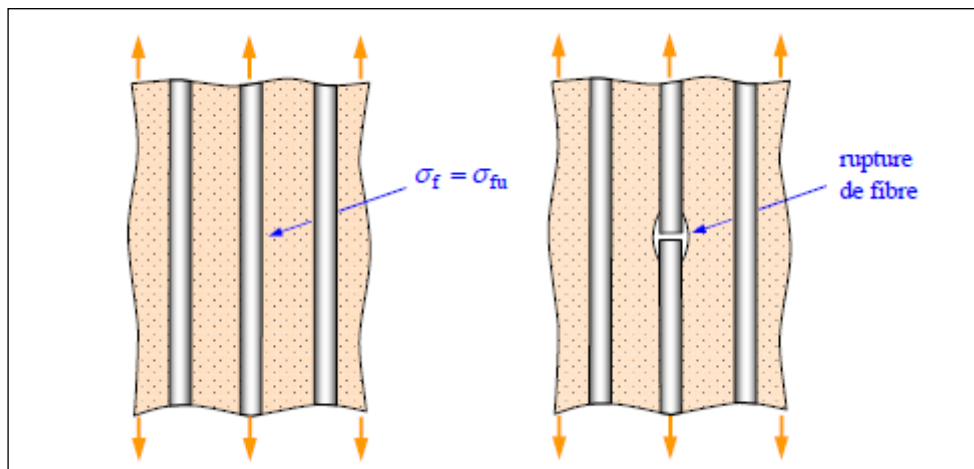


Figure III.1: Rupture de fibre.

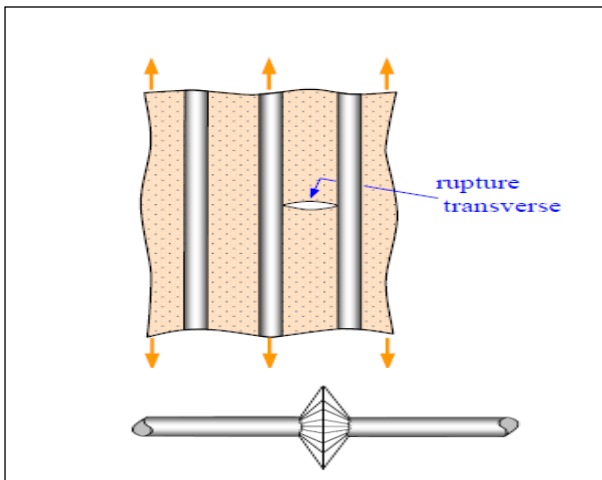
- ✚ La fissuration de la matrice peut se produire, soit par *fissuration transverse* (figure III. 2.a) lorsque la contrainte en traction  $\sigma_m$  dans la matrice atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{mu}$  de la matrice,

- ✚ soit par *fissuration longitudinale* (figure III.2.b) lorsque la contrainte de cisaillement  $\sigma_m$  dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture  $\sigma_{mu}$ , généralement au voisinage d'une fibre. Ce dernier mode de rupture, appelé "*splitting*" par les anglo-saxons, se

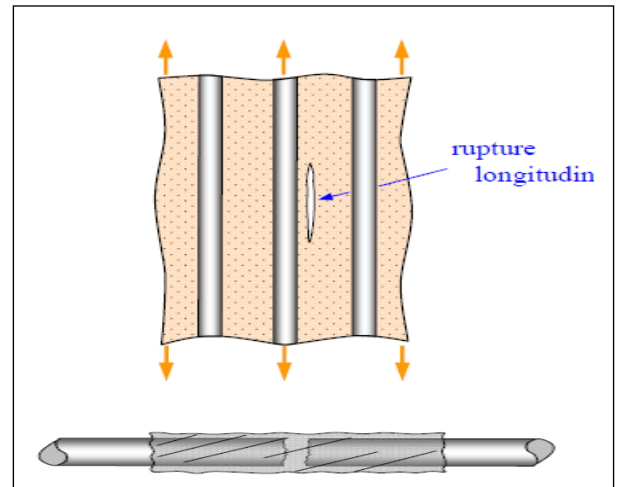
produit lorsque la contrainte de **décohésion** est supérieure à la contrainte en cisaillement à la rupture de la matrice :  $Z_d > \sigma_{mu}$ .

✚ Dans le cas contraire où  $Z_d < \sigma_{mu}$ , il se produit une *rupture par décohésion* de l'interface fibre-matrice (figure III.2.c).

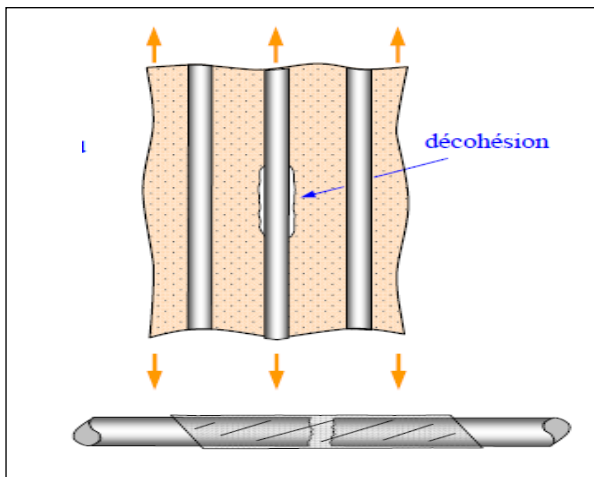
La rupture finale d'un matériau composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de ces divers mécanismes élémentaires. L'initiation, puis la propagation de la rupture dépendent des propriétés des fibres et de la matrice, de



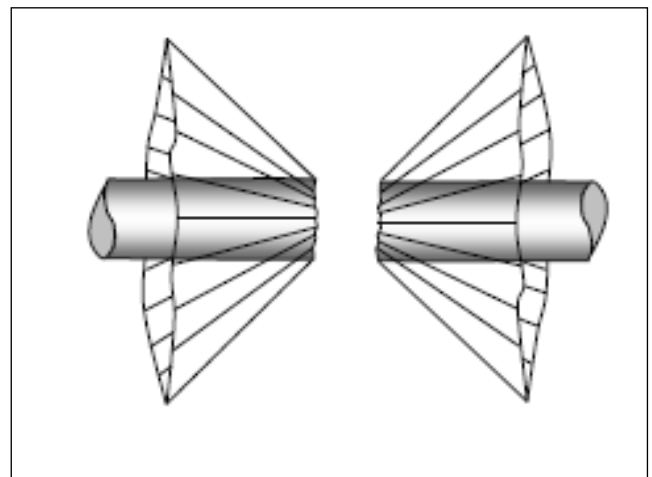
(a) Rupture transverse de la matrices.



(b) Rupture longitudinale de la matrice.



(C) Décohésion de l'interface fibre-matrice.



(d) Rupture en cisaillement de la matrice.

✚ **Figure III.2: Différents modes de rupture de la matrice associée à la rupture d'une fibre [26].**

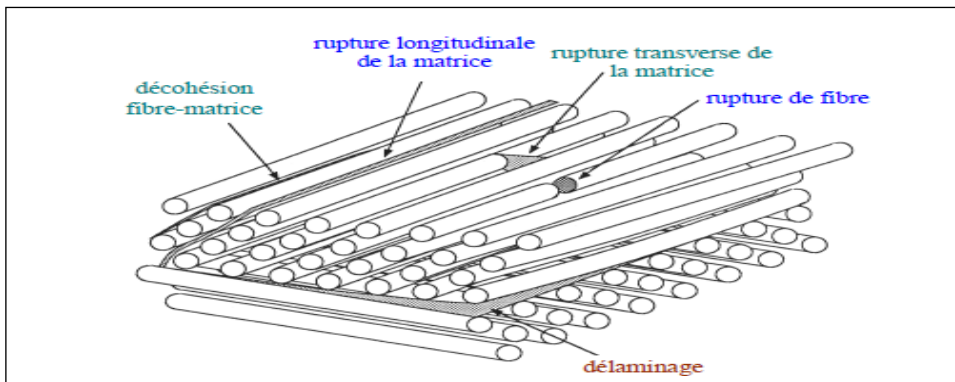
**III.2.2. Rupture des stratifiés :**

Dans le *cas de stratifiés*, aux mécanismes élémentaires décrits précédemment (*décohésion fibre-matrice, rupture longitudinale de la matrice, rupture transverse de la matrice, rupture de fibres*), s'ajoute (figure III.8) **un mécanisme de rupture entre les couches, appelé rupture par délaminage.**

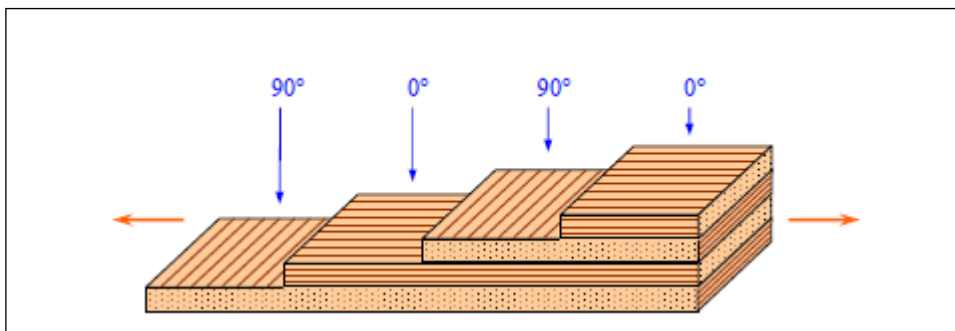
Les *mécanismes de rupture* induits dépendent de la *nature* des constituants, de *l'architecture des couches* et du mode **de sollicitation mécanique** imposé.

Par exemple, dans le cas d'un **stratifié croisé** soumis à une traction dans la direction  $0^\circ$  (figure III.9), le **premier phénomène** de rupture observé est celui de la *fissuration* des *couches orientées à  $90^\circ$* .

- ✚ Lorsque le chargement mécanique est **augmenté**, le nombre de fissures croît jusqu'à atteindre un état de *saturation de la fissuration*. **Les fissures transverses** créent en pointes de fissures, entre les couches orientées à  $90^\circ$  et à  $0^\circ$ , des concentrations de contraintes qui conduisent à l'initiation puis à la propagation du délaminage à l'interface entre les couches. **Ce délaminage se développe ensuite jusqu'à la rupture finale du stratifié** par rupture des fibres et de la matrice dans les couches à  $0^\circ$  [26].

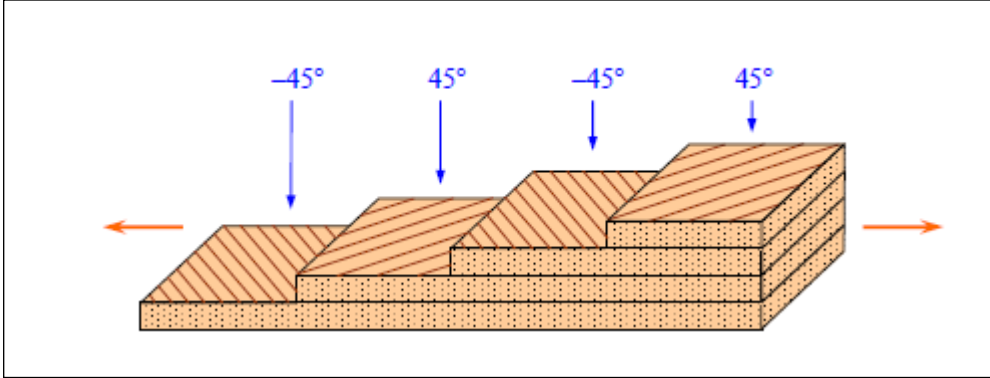


**Figure III.8: Mécanismes de rupture observés dans les stratifiés.**



**Figure III.9: Stratifié croisé soumis à une traction dans la direction  $0^\circ$ .**

Dans le cas d'un stratifié croisé  $\pm 45^\circ$ , soumis à une *traction longitudinale* dans la direction  $0^\circ$  (figure III.10), on observe d'abord une *rupture longitudinale* dans les couches à  $\pm 45^\circ$ , suivie d'un *délamination* entre les couches.



**Figure III.10: Stratifié croisé  $\pm 45^\circ$  soumis à une traction dans la direction  $0^\circ$  [26].**

### **III.3. Critères en contraintes maximales:**

#### **III.3.1. Critères dans les axes principaux:**

Les critères en contraintes maximales font intervenir :

- $X_t, X_c$  : les contraintes à la rupture suivant l'axe *longitudinal* respectivement en traction et en compression,
- $Y_t, Y_c$  : les contraintes à la rupture suivant l'axe *transversal* respectivement en traction et en compression,

**S**: la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche. L'axe longitudinal et l'axe transversal sont pris suivant les axes des matériaux de la couche (Figure III.12). **Les grandeurs à la rupture** sont les valeurs positives des contraintes à la rupture mesurées dans des *essais* de traction, compression ou cisaillement. Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes ( $\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$ ) dans les axes des matériaux, **les critères en contraintes maximales** stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes auxquelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante. Les critères de rupture s'écrivent ainsi sous la forme [26] :

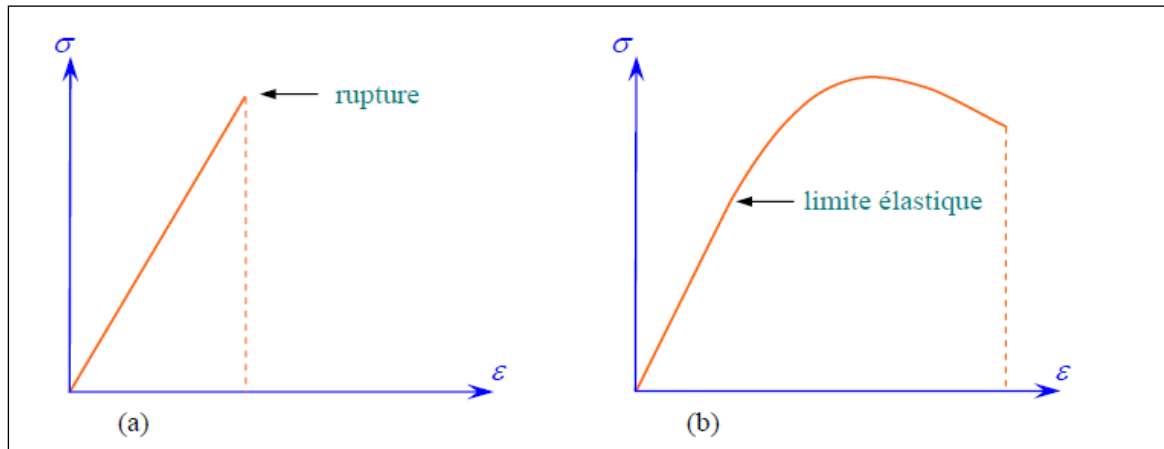


Figure III.11: Comportements fragile et "ductile" d'un matériau.

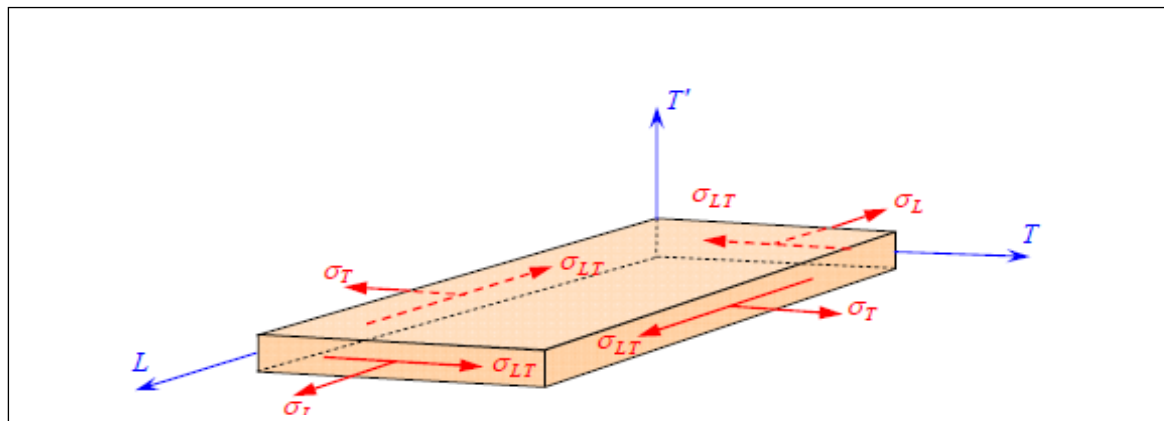


Figure III.12: Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche.

$$\left\{ \begin{array}{l} -X' < \sigma_L < X \\ -y' < \sigma_T < y \\ -S < \sigma_{LT} < S \end{array} \right. \quad (6)$$

- Si les *six* inéquations sont vérifiées, l'état de contraintes limite n'est pas atteint : la rupture de la couche ne se produit pas.
- Si l'une quelconque des inéquations n'est plus vérifiée, l'état limite est atteint : la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'inéquation non vérifiée.



**III.3.2 .Ordres de grandeurs des contraintes à la rupture [26] :**

- ✚ Les *valeurs des contraintes à la rupture* sont déterminées dans des *essais de traction, de compression et de cisaillement*. Dans la *pratique*, la mise en place de ces essais peut conduire à des *difficultés* liées à la *nature* fortement *anisotrope* des matériaux, en particulier ruptures prématurées des éprouvettes dans un mode différent de celui souhaité.
- ✚ D'autre part, *l'essai de cisaillement* est un essai complexe à mettre en œuvre. D'autres problèmes sont liés aux modes de fabrication des éprouvettes.
- *Finalemnt*, les valeurs expérimentales *fiables disponibles* sont peu nombreuses, et le *problème de la détermination des contraintes à la rupture* reste ouvert. Nous donnons quelques indications dans le cas des composites unidirectionnels.
- Dans le cas où *l'allongement à la rupture de la matrice* est supérieur à celui des *fibres la contrainte à la rupture en traction longitudinale* d'un composite unidirectionnel suit la loi des mélanges (1), soit :

$$x_t = \sigma_{fu} v_f + (\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}} (1 - v_f) \quad (7)$$

Avec pour des fractions usuelles de fibres :

$$x_t \approx \sigma_{fu} v_f \quad (8)$$

**III.3.3 .Critères de rupture en-dehors des axes des matériaux :**

Dans le cas d'une rotation  $\theta$  autour de la direction  $e_3$  (Figure III.13), la relation entre les bases  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3)$ .

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

La matrice de changement de base inverse est :

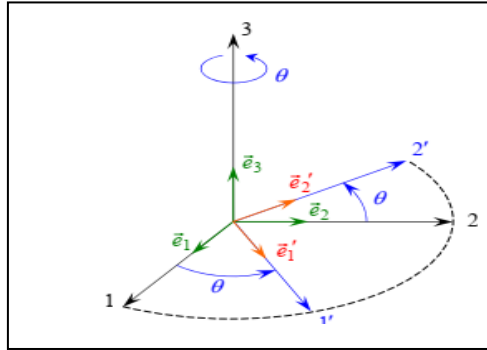
$$A^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dans le cas où l'état des contraintes est exprimé dans des axes de référence  $(x, y, z)$ , il est nécessaire de se ramener aux axes des matériaux par une rotation d'angle  $\theta$ . Les contraintes exprimées dans les axes des matériaux s'écrivent :

$$T = A T A' \quad (11)$$

En combinant les relations (9), (10), (11) Soit :

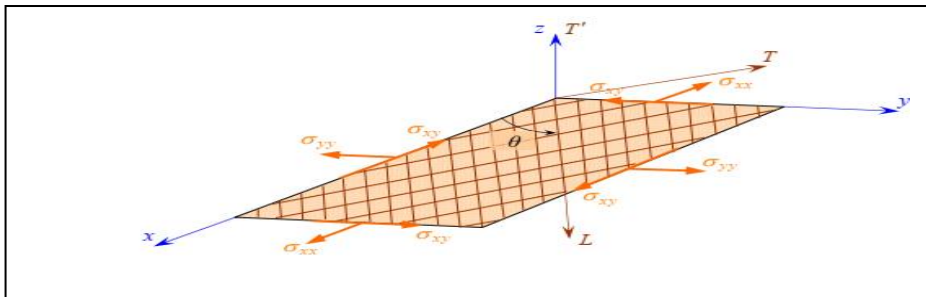
$$\begin{aligned}
 \sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta . \\
 \sigma'_{12} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) . \\
 \sigma'_{13} &= \sigma_{13} \cos \theta + \sigma_{23} \sin \theta . \\
 \sigma'_{21} &= \sigma_{12} . \\
 \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta - 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta . \\
 \sigma'_{23} &= -\sigma_{13} \sin \theta + \sigma_{23} \cos \theta , \\
 \sigma'_{31} &= \sigma_{13} , \quad \sigma_{32} = \sigma'_{23} , \quad \sigma'_{33} = \sigma_{33}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$



**Figure III.13:Rotation autour de la direction 3.**

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}
 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_l &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2 \sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta , \\
 \sigma_t &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2 \sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta , \\
 \sigma_{lt} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) ,
 \end{aligned}
 \tag{14}$$



**Figure III.13 :Couche rapportée à des axes de référence quelconques.**

Et les critères (6) en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$\begin{aligned}
 -x_c &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2 \sigma_{yy} \sin \theta \cos \theta < x_t , \\
 -y_c &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2 \sigma_{yy} \sin \theta \cos \theta < y_t, \\
 -s &< (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) < s_t.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

### III.3.4. Traction ou compression en-dehors des axes des matériaux :

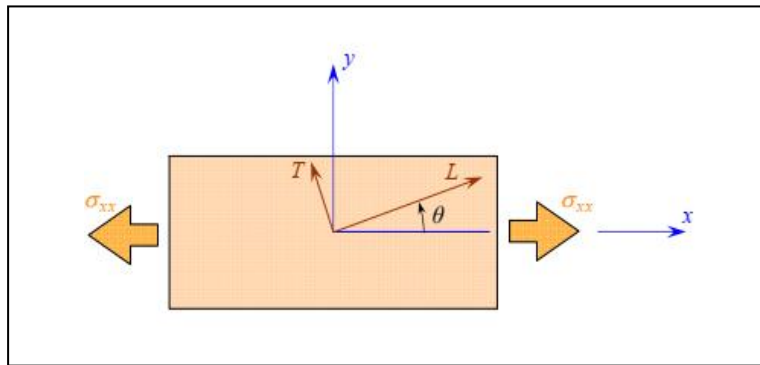
Dans le cas d'une traction ou d'une compression en-dehors des axes des matériaux (Figure III.14), les contraintes (9) *se réduisent* à :

$$\begin{aligned}
 \sigma_L &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta, \\
 \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta, \\
 \sigma_{LT} &= -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Et les critères en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$\begin{aligned}
 -x_c &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta < x_t , \\
 -y_c &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta < y_t , \\
 -s &< \sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta < s_t.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Ce critère peut être représenté graphiquement en traçant la *valeur maximale*  $\sigma_{xu}$  de la contrainte  $\sigma_{xx}$  de traction ou compression pour laquelle l'un des critères est atteint, en fonction de l'angle  $\theta$  entre la direction du chargement et les directions du matériau. Dans un essai de traction, la contrainte de traction  $\sigma_{xu}$  correspond à la plus petite des valeurs :



**Figure III.14 : Traction en-dehors des axes des matériaux.**

$$\sigma_{xu} = \frac{x_t}{\cos^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{y_t}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{s}{\sin \theta \cos \theta}, \tag{18}$$

Et dans un essai de compression , la contrainte de compression  $\sigma_{xu}$  correspond aux petites valeurs :

$$\sigma_{xu} = \frac{x_c}{\cos^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{y_c}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{s}{\sin \theta \cos \theta}, \quad (19)$$

### ✚ III.4. Critères en déformations maximales [26]:

#### III.4.1. Critère dans les axes des matériaux :

Les critères en déformations maximales sont *transposés* des critères en *contraintes* maximales, les déformations étant bornées, au lieu des contraintes. Les critères en déformations font intervenir :

$X\epsilon_t$  ( $X\epsilon_c$ ) : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe longitudinal,

$Y\epsilon_t$  ( $Y\epsilon_c$ ) : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe transversal,

$S\epsilon$  : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

La résistance mécanique est alors considérée comme étant atteinte, lorsque l'une des déformations principales atteint la déformation à la rupture correspondante. Les critères en déformations maximales s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{aligned} -x_\epsilon < \epsilon_L < x_\epsilon, \\ -y_\epsilon < \epsilon_T < y_\epsilon, \\ -S_\epsilon < \gamma_{LT} < S_\epsilon. \end{aligned} \quad (20)$$

#### III.4.2. Traction ou compression en-dehors des axes des matériaux :

Dans le cas d'une traction ou compression en-dehors des axes des matériaux (Figure III.14), les contraintes dans les axes sont données par la relation (11). Les déformations dans les axes sont, dans le cas d'un schéma de contraintes planes :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_l \\ \epsilon_t \\ \epsilon_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Soit, en associant les relations (11) et (16) :

$$\begin{aligned} \epsilon_l &= (s_{11} \cos^2 \theta + s_{12} \sin^2 \theta) \sigma_l, \\ \epsilon_t &= (s_{12} \sin^2 \theta + s_{22} \cos^2 \theta) \sigma_{xx}, \\ \gamma_{LT} &= s_{66} \sin \theta \cos \theta \sigma_{xx}. \end{aligned} \quad (22)$$

Les constantes de souplesse  $S_{ij}$  s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur, déterminés dans les axes des matériaux :  $EL$ ,  $ET$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $\nu_{TL}$  et  $GLT$ , suivant les

$$s_{11} = \frac{1}{E_L}, \quad s_{12} = \frac{-v_{LT}}{E_T}, \quad s_{22} = \frac{1}{E_T}, \quad s_{23} = \frac{-v_{LT'}}{E_T}, \quad s_{66} = \frac{1}{G_{LT}}. \quad (23)$$

Relations (23) dans le cas de composites unidirectionnels et suivant les relations (9), (13) et (20) dans le cas de composites orthotropes. Les relations (17), exprimant les déformations, sont alors transformées suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= \frac{1}{E_L} (\cos^2 \theta - v_{lt} \sin^2 \theta) \sigma_{xx}, \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E_T} (\sin^2 \theta - v_{lt} \cos^2 \theta) \sigma_{xx}, \\ \gamma_{LT} &= \frac{1}{G_{LT}} \sin \theta \cos \theta \sigma_{xx}. \end{aligned} \quad (24)$$

Les *critères en déformations maximales* doivent conduire à des valeurs identiques à celles trouvées avec le critère de contrainte maximale dans le cas d'une traction (ou compression) longitudinale :  $\theta = 0^\circ$  et dans le cas d'une traction (ou compression) transversale :  $\theta = 90^\circ$ . Ceci implique que :

$$\begin{aligned} X_{\varepsilon_t} &= \frac{x_t}{E_L}, & X_{\varepsilon_c} &= \frac{x_c}{E_L}, \\ y_{\varepsilon_t} &= \frac{y_t}{E_L}, & y_{\varepsilon_c} &= \frac{x_t}{E_L}, \end{aligned} \quad (25)$$

D'autre part, l'identité du critère de rupture en cisaillement dans les deux cas conduit à :

$$s_\varepsilon = \frac{S}{G_{LT}}. \quad (26)$$

Il en résulte que les critères en déformations maximales (15) peuvent être réécrits suivant :

$$\begin{aligned} \frac{-X_C}{\cos^2 \theta - v_{lt} \sin^2 \theta} < \sigma_{xx} < \frac{X_T}{\cos^2 \theta - v_{lt} \sin^2 \theta}, \\ \frac{-Y_C}{\sin^2 \theta - v_{lt} \cos^2 \theta} < \sigma_{xx} < \frac{Y_T}{\sin^2 \theta - v_{lt} \cos^2 \theta}, \\ \frac{-S}{\sin \theta \cos \theta} < \sigma_{xx} < \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}. \end{aligned} \quad (27)$$

En comparant ces expressions aux expressions (12) obtenues dans le cas des critères en *contraintes maximales*, nous constatons que les deux critères diffèrent simplement par l'introduction dans les critères en *déformations maximales* des termes fonctions des coefficients de Poisson  $v_{LT}$  et  $v_{TL}$ . Ces termes modifient assez peu dans la pratique les résultats numériques. Les contraintes limites sont modifiées de la même manière. Dans un essai de traction, la contrainte à la rupture  $\sigma_{xu}$  correspond à la plus petite des valeurs :

$$\begin{aligned}\sigma_{xu} &= \frac{x_t}{\cos^2 \theta - \nu_{lt} \sin^2 \theta}, \\ \sigma_{xu} &= \frac{y_t}{\sin^2 \theta - \nu_{lt} \cos^2 \theta}, \\ \sigma_{xu} &= \frac{s}{\sin \theta \cos \theta},\end{aligned}\tag{28}$$

Et dans un *essai de compression*, la détermination positive  $\sigma_{xu}$  de la contrainte à la rupture correspond à la plus petite des valeurs :

$$\begin{aligned}\sigma_{xu} &= \frac{x_c}{\cos^2 \theta - \nu_{lt} \sin^2 \theta}, \\ \sigma_{xu} &= \frac{y_c}{\sin^2 \theta - \nu_{lt} \cos^2 \theta}, \\ \sigma_{xu} &= \frac{s}{\sin \theta \cos \theta}.\end{aligned}\tag{29}$$

Comme dans le cas des critères en contraintes maximales, il est possible de tracer  $\sigma_{xu}$  en fonction de l'angle  $\theta$ .

### ✚ III.5. Théorie générale de Tsai-Wu [26]:

#### III.5.1. Formulation :

Les critères précédents suffisent généralement pour décrire les divers résultats expérimentaux observés. Toutefois, une des façons d'améliorer la corrélation entre résultats *expérimentaux et théoriques* est d'accroître le nombre de paramètres des équations théoriques. Ce fait, associé à la possibilité de représenter les critères de rupture sous forme tensorielle, a conduit S.W. Tsai et E.M. Wu [20] à admettre que la *rupture d'un matériau anisotrope est atteinte lorsque l'égalité suivante est vérifiée* :

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6\tag{30}$$

Où les *constantes*  $F_i$  et  $F_{ij}$  sont les composantes de deux tenseurs respectivement de rang 2 et de rang 4. La notation contractée usuelle est utilisée dans cette relation pour les contraintes rapportées aux axes des matériaux :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{11} = \sigma_l, \quad \sigma_2 = \sigma_{22} = \sigma_T, \quad \sigma_3 = \sigma_{33} = \sigma_{T'}, \\ \sigma_4 &= \sigma_{23} = \sigma_{TT'}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13} \sigma_{LT'}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12} = \sigma_{LT}.\end{aligned}$$

L'équation (30) s'écrit sous forme développée suivant :

$$\begin{aligned}
 F_1 \sigma_{11} &= F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_4 \sigma_4 + F_5 \sigma_5 + F_6 \sigma_6 \\
 + F_{11} \sigma_1^2 &+ 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{14} \sigma_1 \sigma_4 + 2F_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2F_{16} \sigma_1 \sigma_6 \\
 + F_{22} \sigma_2^2 &+ 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2F_{25} \sigma_2 \sigma_5 + 2F_{26} \sigma_2 \sigma_6 \\
 + F_{33} \sigma_3^2 &+ 2F_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2F_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2F_{36} \sigma_3 \sigma_6 \\
 + F_{44} \sigma_4^2 &+ 2F_{45} \sigma_4 \sigma_5 + 2F_{46} \sigma_4 \sigma_6 \\
 + F_{55} \sigma_5^2 &+ 2F_{56} \sigma_5 \sigma_6 + F_{66} \sigma_6^2 = 1.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Les termes linéaires  $F_i$  prennent en compte la différence éventuelle du comportement du matériau en *traction* et en *compression*. Les termes quadratiques  $F_{ij}$  définissent un ellipsoïde dans l'espace des contraintes et tiennent compte des interactions entre les contraintes  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$ .

L'intérêt de la formulation *développée par Tsai-Wu* réside dans :

1. l'invariance de la forme de la relation (30) (dans tout changement de base) ;
2. La transformation du critère suivant les lois de transformation des tenseurs  $\sigma_i$ ,  $\sigma_{ij}$  ou  $F_i$ ,  $F_{ij}$ ;
3. Les propriétés de symétrie des tenseurs  $F_i$ ,  $F_{ij}$  similaires à celles des constantes d'élasticité.

### III.5.2. Expression des constantes :

Nous nous intéressons, dans ce paragraphe, au cas d'un matériau composite orthotrope soumis à un état de contraintes planes dans le plan  $(1, 2) = (L, T)$ . La relation (31) s'écrit alors:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1,$$

Ou (32)

$$F_1 \sigma_L + F_2 \sigma_T + F_6 \sigma_{LT} + F_{11} \sigma_L^2 + F_{22} \sigma_T^2 + F_{66} \sigma_{LT}^2 + 2F_{12} \sigma_L \sigma_T = 1,$$

Les *paramètres*  $F_i$  et  $F_{ij}$  peuvent être exprimés à l'aide des contraintes à la rupture, mesurées dans divers *essais*.

Dans le cas d'un *essai de traction* suivant la direction  $L$ , la contrainte à la rupture  $X_t$  est telle que ( $X_t = \sigma_T$ ) :

$$F_1 X_t + F_{11} X_t^2 = 1, \tag{33}$$

*Et dans un essai de compression :*

$$F_1 X_c + F_{11} X_c^2 = 1, \tag{34}$$

*De ces deux relations, nous tirons :*

$$F_1 = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, \tag{35}$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_T X_C} .$$

Par analogie, nous avons de même :

$$F_2 = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} , \tag{36}$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_T Y_C} .$$

*Dans le cas d'un essai de cisaillement* dans le plan  $(L, T)$  (*Figure III.16 a*), la contrainte à la rupture  $S_{LT}^+$  est telle que :

$$F_6 S_{LT}^+ + F_{66} S_{LT}^{+2} = 1 \tag{37}$$

En *inversant* le sens des contraintes (*Figure III.16 b*), la contrainte à la rupture  $S_{LT}^-$  est telle que :

$$F_6 S_{LT}^- + F_{66} S_{LT}^{-2} = 1 \tag{38}$$

Ces deux relations conduisent à :

$$F_6 = \frac{1}{S_{LT}^+} + \frac{1}{S_{LT}^-} \tag{39}$$

$$F_6 = \frac{1}{S_{LT}^+ S_{LT}^-}$$

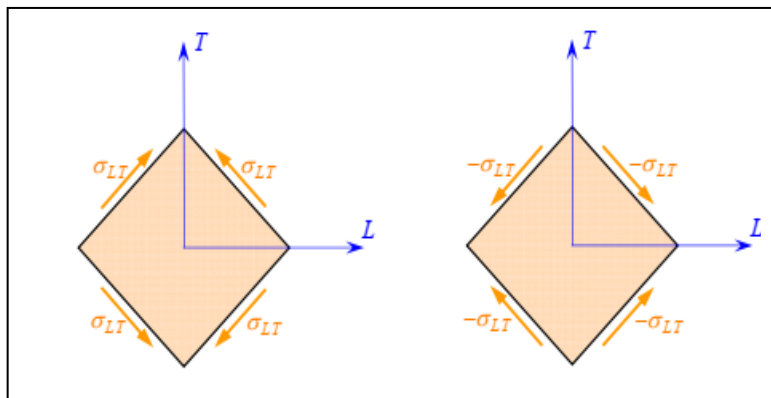
La contrainte à la rupture étant indépendante du signe de la contrainte de cisaillement, nous avons :

$$S_{LT}^- = S_{LT}^+ = S_{LT} \tag{40}$$

Il en résulte que dans le cas de *matériaux orthotropes* :

$$F_6 = 0 \tag{41}$$

$$F_{66} = \frac{1}{S_{LT}^2} \tag{42}$$



**Figure III.16:Essais de cisaillement.**



Il reste à déterminer le *paramètre de couplage*  $F_{12}$ . Ce paramètre peut être déterminé dans un essai biaxial, par exemple une traction biaxiale. Un tel essai est effectué en exerçant la *même contrainte* dans les directions 1 et 2 du matériau. Les contraintes sont alors :  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  les autres contraintes étant nulles. Le critère (32) s'écrit

$$(F_1 + F_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_1 + F_{12}) \sigma^2 = 1. \quad (43)$$

D'où l'expression du paramètre d'interaction :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} + \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) \sigma + \left( \frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} \right) \sigma^2 \right]. \quad (44)$$

La valeur de  $F_{12}$  correspond à la valeur  $\sigma$  de la contrainte mesurée lors de la rupture dans l'essai de traction bi axiale.

Dans la pratique, le coefficient d'interaction  $F_{12}$  peut également être déterminé dans un essai de traction (ou compression) à  $45^\circ$  des axes du matériau orthotrope. Dans ce cas, les contraintes dans les axes du matériau sont :

Où  $\sigma_{45}$  est la contrainte de traction exercée. Le critère (32) s'écrit dans ce cas :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_6 = \frac{\sigma_{45}}{2}, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad (45)$$

Où  $\sigma_{45}$  est la contrainte de traction exercée. Le critère (32) s'écrit dans ce cas : D' où l'expression du paramètre  $F_{12}$  obtenue dans cet essai :

$$F_{12} = \frac{2}{\sigma_{45}^2} \left[ 1 - \frac{\sigma_{45}}{2} \left( \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} + \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) - \frac{\sigma_{45}^2}{4} \left( \frac{1}{X_C X_T} + \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{S_{LT}^2} \right) \right]. \quad (46)$$

La valeur de  $F_{12}$  correspond à la valeur de  $\sigma_{45}$  mesurée lors de la rupture dans un essai de traction à  $45^\circ$ .

### ✚ III.5.3 Critère de Tsai-Wu en contraintes planes [27] :

En tenant compte des résultats précédents, le critère de Tsai-Wu (32), dans un état de contraintes planes, s'écrit sous la forme :

$$\left( \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) \sigma_L + \left( \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) \sigma_t + \frac{\sigma_L^2}{X_C X_T} + \frac{\sigma_t^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_{LT}^2}{S_{LT}^2} + 2F_{12}^* \frac{\sigma_t \sigma_L}{X_T X_C} = 1. \quad (47)$$

En *introduisant* le coefficient de couplage  $F_{12}^*$ , exprimé suivant :

$$F_{12}^* = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 1 - \left[ X_C - X_T + \frac{X_T X_C}{Y_T Y_C} (Y_C Y_T) \right] \frac{\sigma_{45}}{2} + \left( 1 + \frac{X_T X_C}{Y_T Y_C} + \frac{X_T X_C}{S_{LT}^2} \right) \frac{\sigma_{45}^2}{4} \right\}, \quad (48)$$

Ou

$$F_{12}^* = \frac{2}{2\sigma_{45}^2} \left\{ 1 - \left[ X_C - X_T + \frac{X_T X_C}{Y_T Y_C} (Y_C Y_T) \right] \frac{\sigma_{45}}{2} + \left( 1 + \frac{X_T X_C}{Y_T Y_C} + \frac{X_T X_C}{S_{LT}^2} \right) \frac{\sigma_{45}^2}{4} \right\}, \quad (49)$$

Où  $\sigma$  et  $\sigma_{45}$  sont les contraintes à la rupture déterminées, respectivement, dans un essai bi axial

et dans une traction à 45°. Bien souvent, le coefficient de couplage  $F_{12}^*$  est considéré comme un coefficient empirique, ajusté en fonction des résultats expérimentaux. Dans le cas où le coefficient de couplage est pris égal à  $-\frac{1}{2}$  :

$$F_{12}^* = -\frac{1}{2}, \quad (50)$$

$$\left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}\right)\sigma_L + \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}\right)\sigma_t + \frac{\sigma_L^2}{X_C X_T} + \frac{\sigma_t^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_{LT}^2}{S_{LT}^2} + \frac{\sigma_t \sigma_L}{X_T X_C} = 1. \quad (51)$$

Nous retrouvons le critère de Hoffman (45) en contraintes planes. Si, de plus, les contraintes à la rupture en traction et en compression sont identiques :

$$X_T = X_C = X, \quad Y_T = Y_C = Y, \quad (52)$$

le critère (48) s'écrit :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{S_{LT}}\right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X^2} = 1$$

---

## Chapitre IV :

### Formulation Eléments Finis Et Programmation.

#### IV.1. Introduction :

La *modélisation physique* de systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui *n'ont pas une solution exacte*, pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une *méthode numérique* doit être employée pour la solution *approximée du problème physique*. La Méthode des Éléments Finis (*MEF*) est souvent considérée comme la méthode la *plus appropriée* pour des études de cette nature.

La méthode des éléments finis a été établie comme un outil très performant pour la *résolution des systèmes d'analyse des structures* et les sciences d'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique ...) permettent de décrire le comportement de système physique **grâce** à des équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations [23].

Dans ce chapitre, nous allons présenter la formulation d'un élément fini rectangulaire (R4) destiné à modéliser des poutres stratifiées, en utilisant le principe des *Travaux virtuels*, qui nous permettra de trouver le vecteur force  $\{f\}$  et la matrice de rigidité globale  $[K]$ .

Suite à cette formulation nous avons écrit un programme en langage **FORTRAN** qui sera utilisé pour calculer les déplacements et les contraintes, ensuite nous allons procéder à la *validation du programme* en comparant les résultats de celui-ci avec les résultats analytiques.

#### IV.2. Historique :

Bien que l'appellation de la *méthode des éléments finis* soit nouvelle, le concept est ancien et a été utilisé à chaque fois qu'une solution d'un *problème réel par une méthode approximative* s'est avérée indispensable. L'origine de la méthode remonte à l'aube du XX siècle où une technique de subdivision d'une *structure complexe* en un maillage régulier de poutre élastique était utilisée.

Dans le temps la théorie des poutres élastiques était connue et utilisée pour approcher la solution exacte des structures. Il a fallu attendre le début des années 1940 pour que le mathématicien Courant suggère une approche similaire à celle de la M.E.F qui consiste à subdiviser la structure en maillage triangulaire défini par une interpolation polynomiale. *Comme il manquait les ordinateurs* pour effectuer les calculs, l'utilisation de cette méthode est restée très restreinte. Une décennie après, La méthode des Eléments Finis est mise au point au début des années 50 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'aile d'avion); on y développe le *premier élément fini*, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des *déplacements* (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956). Quant aux bases *théoriques générales*, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey), certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les *mathématiciens pour résoudre divers problèmes* aux limites, par exemple celui de la *torsion* de Saint-Venant en divisant la section en triangles, mais elles restèrent sans suite.

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la méthode des éléments finis, signalons en particulier ceux de Zienkiewicz, Gallagher, Rockey. La méthode des éléments finis est très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire.

Dès 1970, la méthode envahit tous les domaines de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Il faut ajouter que son essor est, dès le début et jusqu'à aujourd'hui encore, indissociable de celui des ordinateurs [24].

### IV.3.L'élément utilisé :

L'élément utilisé est un élément rectangulaire de (24) degrés de liberté. La figure montre la géométrie de l'élément utilise, les dimensions (a, et b) et l'épaisseur (t).

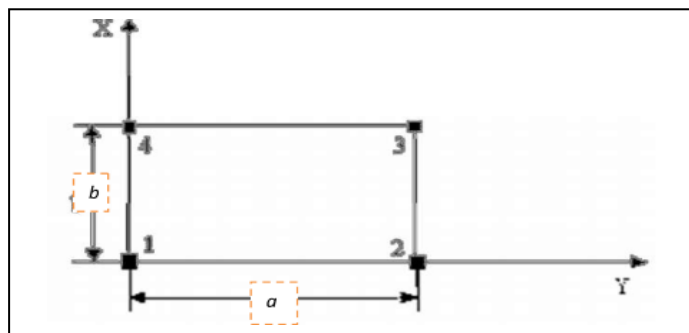


Figure IV.1: élément plaque rectangulaire.

**IV.4. fonction de déplacements de l'élément :**

L'élément possède quatre (4) nœuds avec (6) degrés de libertés chacun, ces degré de liberté sont :

- Deux degrés de liberté dans le plans (x, y) qui sont (u, v).
- Quatre degrés de liberté hors plans qui sont :  $(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})$ .

**✚ En membrane :**

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (1)$$

$$v(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

En peut écrire ces équations sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Noud (1) : (x=0, y=0)} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i = 1,8$$

$$\text{Noud (2) : (x=a, y=0)} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i = 1,8$$

$$\text{Noud (3) : (x=a, y=b)} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i = 1,8$$

$$\text{Noud (4) : (x=0, y=b)} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i = 1,8$$

$$\{\delta_m^e\}_{8 \times 1} = [X]_{8 \times 8} \{\alpha_i\}_{8 \times 1} \rightarrow \{\alpha_i\}_{8 \times 1} = [X]_{8 \times 8}^{-1} \{\delta_m^e\}_{8 \times 1} \quad \text{et } \{\delta_m^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} [X]^{-1} \{\delta_m^e\}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \end{bmatrix} \{\delta_m^e\}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{\delta_m^e\}$$

Calcule les déformations :

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 1 & y \end{bmatrix} \{\alpha_i\} \rightarrow \{\varepsilon(x,y)\} = [Q]\{\alpha_i\}$$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [Q][X]^{-1}\{\delta_m^e\} \rightarrow \{\varepsilon(x,y)\} = [B_m]\{\delta_m^e\}$$

alors :

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{ab} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix}$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Donc la matrice  $[B_m]$  relie les déformations membranaires avec les déplacements nœuds :

#### ✚ En flexion :

$W(x, y)$

$$= \left[ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y^2 \\ + \alpha_{12} x^2 y^2 + \alpha_{13} x y^3 + \alpha_{14} x^3 y^2 + \alpha_{15} x^2 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^3 \end{array} \right]$$

$$W(x, y) = \{p(x, y)\} \{\alpha\}^T$$

avec

$$\{\alpha\}^T = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{15} \alpha_{16}\}$$

$$\{p(x, y)\} = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x^3 y \ x^2 y^2 \ x y^3 \ x^3 y^2 \ x^2 y^3 \ x^3 y^3\}$$

L'élément plaque nécessite donc quatre degrés de liberté par nœud

$$\{w_i\} = \left\{ \begin{array}{l} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial y \partial x} \end{array} \right\}, i=1,4$$

Ce qu'explique l'introduction de la dérivée seconde par rapport à x et y.

$$\begin{pmatrix} w(x, y) \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & x^3y^2 & x^2y^3 & x^3y^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & 2xy^2 & y^3 & 3x^2y^2 & 2xy^3 & 3x^2y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 2x^2y & 3xy^2 & 2x^3y & 3x^2y^2 & 3x^3y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 3x^2 & 4xy & 3y^2 & 6x^2y & 6y^2x & 9x^2y^2 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}$$

Nœud (1) : (x=0, y=0)

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,16$$

Nœud (2) : (x=a, y=0)

$$\begin{pmatrix} w_2 \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,16$$

Nœud (3) : (x=a, y=b)



$$\begin{pmatrix} w_3 \\ \frac{\partial w_3}{\partial x} \\ \frac{\partial w_3}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_3}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & a^2b^2 & ab^3 & a^3b^2 & a^2b^3 & a^3b^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & 2ab^2 & b^3 & 3a^2b^2 & 2ab^3 & 3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 2a^2b & 3ab^2 & 2a^3b & 3a^2b^2 & 3a^3b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 2b & 0 & 3a^2 & 4ab & 3b^2 & 6a^2b & 6b^2a & 9a^2b^2 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i$$

$$= 1,16$$

Nœud (4) : (x=0, y=b)

$$\begin{pmatrix} w_4 \\ \frac{\partial w_4}{\partial x} \\ \frac{\partial w_4}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_4}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,16$$

$$\{\delta_f^e\}_{16 \times 1} = [X]_{16 \times 16} \{\alpha_i\}_{16 \times 1} \rightarrow \{\alpha_i\}_{16 \times 1} = [X]^{-1}_{16 \times 16} \{\delta_f^e\}_{16 \times 1}$$

$$\{w(x, y)\} = \{p(x, y)[X]^{-1}\{\delta_f^e\}\}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } w_1^*(x, y) &= \left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_1 + \left(-x\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x1} + \\ &\left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{y1} + \left(-x\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) y \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 \theta_{xy1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } w_2^*(x, y) &= \left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_2 + \left(-x\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x2} + \\ &\left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{y2} + \left(-x\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{xy2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } w_3^*(x, y) &= \left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_3 + \left(-x\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x3} + \\ &\left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{y3} + \left(-x\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{xy3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } w_4^*(x, y) &= \left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_4 + \left(-x\left(\frac{x}{a} - 1\right)\right)^2 \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x4} + \\ &\left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{y4} + \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{xy4} \end{aligned}$$

$$\{w(x, y)\} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ \dots \ \dots \ \dots \ N_{13} \ N_{14} \ N_{15} \ N_{16}] \{\delta_f^e\} \text{ et}$$

$$\{\delta_f^e\}^T = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{xy1} \ \dots \ \dots \ \dots \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4} \ \theta_{xy4}\}$$

• **Relation cinématiques :**

L'élément utilise est basé sur la théorie de Kirchhoff, alors les déplacements ans le plan et hors le plans sont données par :

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Les déformations sont données par :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} = zk_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} = zk_y$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y} = zk_{xy}$$

Avec  $k_x$  ,  $k_y$  et  $k_{xy}$  sont les courbures.

$$\{k_x(x, y)\} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial_x \partial_y} \end{bmatrix} \{p(x, y) [X]^{-1}\} \{\delta_f^e\} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \{p(x, y)\}}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial^2 \{p(x, y)\}}{\partial^2 y} \\ 2 \frac{\partial^2 \{p(x, y)\}}{\partial_x \partial_y} \end{bmatrix} [X]^{-1} \{\delta_f^e\}$$

$$\{k_x(x, y)\} = [Q]_{3 \times 16} [X]_{16 \times 16}^{-1} \{\delta_f^e\}_{16 \times 1} = [B_f]_{3 \times 16} \{\delta_f^e\}$$

• **Loi de comportement :**

D'après Berthelot les résultant des forces les moments de flexion et de torsion sur un stratifié sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A_{ij} = \sum_{K=1}^N [\overline{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \cdot \\ B_{ij} = \sum_{K=1}^N \frac{1}{2} [\overline{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \cdot \\ D_{ij} = \sum_{K=1}^N [\overline{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \cdot \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{Bmatrix}$$

• Détermination de la matrice de rigidité

L'énergie potentielle totale de déformation d'une plaque soumise à un chargement transversal répartie à travers sa surface est donnée par :

$$\pi = u + v'$$

La configuration d'équilibre est définie par la minimisation de l'énergie potentielle totale qui signifie l'annulation de sa première variation.

$$\delta\pi = \delta u + \delta V = 0$$

• Travail virtuels des efforts :

$$\iint \{\delta\sigma\}^T \left\{ [B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] \right\} \{\delta\} ds$$

On pose

$$[K^e] = \left\{ [B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] \right\} ds$$

La matrice  $[K^e]$  peut être écrite sous la forme :

$$[K^e] = [k_1^e] + [k_2^e] + [k_3^e] + [k_4^e]$$

Avec :

$$[k_1^e] = [B_m]^T [A] [B_m] : \text{Matrice de rigidité élémentaire membranaire.}$$

$$[k_2^e] = [B_m]^T [B] [B_f] : \text{Matrice de rigidité élémentaire de couplage membrane-flexion}$$

$$[k_3^e] = [B_f]^T [B] [B_m] : \text{Matrice de rigidité élémentaire de couplage flexion- membrane}$$

$$[k_4^e] = [B_f]^T [D] [B_f] : \text{Matrice de rigidité élémentaire de flexionnelle.}$$

Le travail virtuel s'écrit.

$$\delta u = \{\partial\delta\}^T [K^e] \{\delta\}$$

- $[K^e]$  est la matrice de rigidité élémentaire ; la matrice de rigidité globale de la structure s'obtient par assemblage des matrice de rigidité élémentaire.

- Travail virtuels des forces extérieures

Soit  $[\partial\delta]$  le vecteur des déplacements virtuel, alors le travail des forces appliquées à

$$\delta v = \{\partial\delta\}^T \{f^e\}$$

En équilibre, les travaux virtuels égaux, alors on aura :

$$\delta u = \delta v$$

$$\{\partial\delta\}^T [K^e] \{\delta\} = \{\partial\delta\}^T \{f^e\}$$

Ce qui permet 'obtient l'équation d'équilibre suivante :

$$[K^e] \{\delta\} \{f^e\}$$

Après assemblage , on obtient l'équation d'équilibre globale

$$[k_G] \{\delta_G\} \{f_G\}$$

Ou  $[k_G]$  est la matrice de rigidité globale,  $\{\delta_G\}$  est le vecteur déplacement globale et  $\{f_G\}$  est le vecteur force global .

#### IV.5. Les étapes à suivre afin de calculer la charge de rupture :

1-calculer les valeurs e la matrice de rigidité réduite  $[Q]$  pour chaque pli, à l'aide e ses quatre modules élastiques  $E_1, E_2, E_2, \nu_{12}$  et  $G_{12}$ .

2-trouve les valeurs de la matrice rigidité réduite transformée  $[\bar{Q}]$  pour chaque pli, en utilisant la matrice calculée à l'étape 1 et l'angle du pli.

3-Avoir l'épaisseur  $t_k$ , de chaque pli, trouver les coordonnées de la surface supérieure et inférieure  $h_i, i=1, \dots, n$ , de chaque pli en utilisant l'équation suivant :

$$h = \sum_{k=1}^n t_k$$

L'emplacement du plan médian est  $h/2$ , à partir de la surface supérieure ou inférieure du stratifié. La coordonnée  $z$  e chaque surface de pli  $k$  (supérieure et inférieure) est donné par:

1. pli 1 :

$$h_0 = -\frac{h}{2} \text{ (Surface supérieure).}$$

$$h_1 = -\frac{h}{2} + t_1 \text{ (Surface inférieure).}$$

2. pli k : (k=2,3,..., n-2, n-1)

$$h_{k-1} = -\frac{h}{2} + \sum_{-1}^{k-1} t \text{ (Surface supérieure).}$$

$$h_k = -\frac{h}{2} + \sum_{-1}^k t \text{ (Surface supérieure).}$$

3. pli n:

$$h_{k-1} = \frac{h}{2} - t_n \text{ (Surface supérieure).}$$

$$h_k = \frac{h}{2} + \sum_{-1}^{k-1} t \text{ (Surface supérieure).}$$

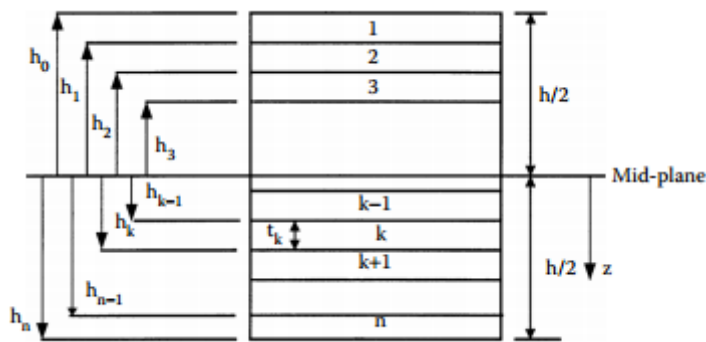


Figure IV.2: L'emplacement des plis dans un stratifié [2].

Considérons un stratifié composé de n couches comme illustré à la figure 2. chaque couche a une épaisseur  $t_k$ . Donc, l'épaisseur totale de ce stratifié ' h ' est:

$$h = \sum_{k=1}^n t_k$$

4. utilisez les matrices de rigidité transformée de l'étape 2 et l'emplacement de chaque couche, de l'étape 3, pour trouver les trois matrices de rigidité [A], [B] et [D].

5. Remplacer les valeurs de la matrice de rigidité trouvée à l'étape 4 et les force et les moments appliqués dans l'équation suivant :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{Bmatrix}$$

6. Résolvez les six équations de simulation pour trouver les déformations et les courbures du plan moyen.

7. Maintenant que l'emplacement de chaque couche est connu, trouver les déformations globale dans chaque couche en utilisant l'équation suivant :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{yx}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}$$

8. Pour trouver les contraintes globales, utilisez la relation contrainte –déformation:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = [\bar{Q}] \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

9. Pour trouver les déformations locales, utilisez l'équation de transformation suivant:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{pmatrix} = [T]^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{pmatrix}$$

10. Pour trouver les contraintes locales, utilisez l'équation de transformation suivant:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = [T]^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

D'après avoir les contraintes locales dans chaque couche, nous pouvons utiliser l'un des critères de rupture afin de calculer la charge admissible. Dans ce travail nous allons utiliser le critère de Tsai-Wu.

#### IV.6. Validation de l'élément :

Dans cette partie, nous allons étudier l'efficacité de l'élément proposée et montrer qu'il est efficace pour étudier plus tard le comportement à la rupture des poutres stratifiées.

Dans ce travail, nous allons comparer les résultats du déplacement obtenues utilisant le programme avec les résultats obtenus analytiquement. En ce qui concerne les résultats analytiques, on a fait appel à des logiciels de calcul, pour faciliter les taches.

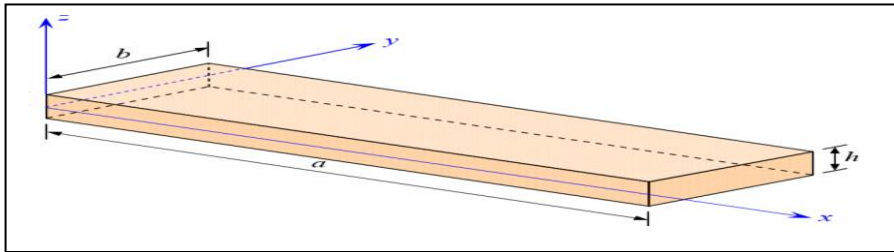


Figure IV.3: Géométrie de la poutre.

##### IV.6.1. Poutre isotrope encastée à coté et libre à l'autre:

La première structure est une poutre isotrope encastée à coté et libre à l'autre, chargée par une charge concentrée ( $p$ ) à l'extrémité libre, avec une stratification symétrique  $[0/\mp 45/90]_s$  (8 couches) dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau IV.1).

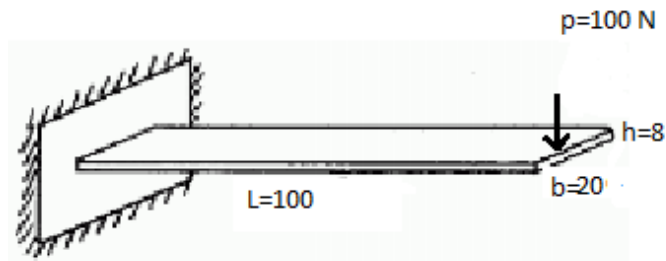


Figure IV.4: Poutre isotrope encastée à coté et libre à l'autre.

Tableau IV.1 : Propriétés géométriques et mécaniques de la première poutre test.

$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	b	P	$h_k$	h
40	1	0.6	0.25	20	100	1	8

$h_k$  : est l'épaisseur de chaque couche.

Les valeurs du déplacement sont calculées théoriquement par la relation suivante :

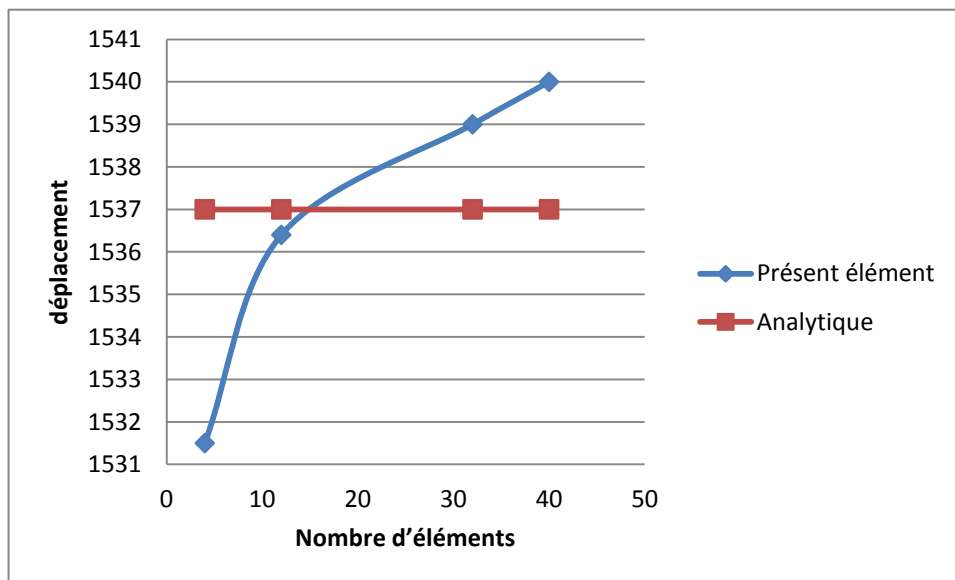
$$\omega = \frac{p l^3}{3E_{eq}I}$$

avec :  $E_{eq} = \frac{12}{h^3 D_{11}^*}$  ,  $D_{11}^* = 0.905370588 \times 10^{-3}$  (l'inverse du premier terme de la matrice de rigidité [D]).

**Tableau IV.2 : Déplacement maximum pour une poutre isotrope.**

Maillage	Déplacement w	Erreur(%)
4*2	-0.15315E+04	0.3904
6*2	-0.15364E+04	0.0651
8*4	-0.15390E+04	0.1301
10*4	-0.15400E+04	0.1952
Déplacement analytique	<b>-0.1537E+04</b>	

Pour différents maillages, la convergence du déplacement obtenu est regroupée dans le tableau (IV-2) et tracée sous forme de graphe (figure IV.4).



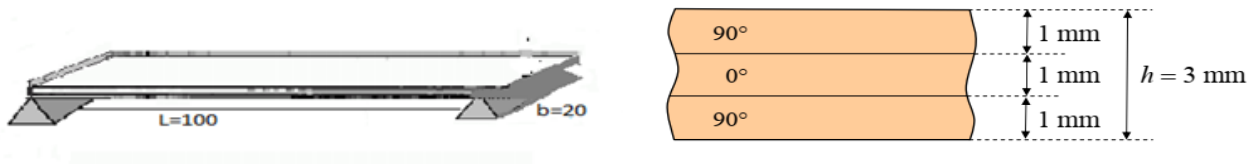
**Figure IV.4 : Convergence du déplacement pour une poutre isotrope encastree à coté et libre à l'autre.**

D'après les résultats donnés par l'étude analytique du déplacement et les résultats obtenus par notre élément, on peut constater que les résultats sont proches.



**IV.6.2. Poutre composite stratifiée sous une charge thermique:**

Dans cet exemple, on considère une poutre stratifiée croisé symétrique constitué (figure IV.5) de 3 couches unidirectionnelles de 1 mm d'épaisseur et simplement appuyée 2 cotés, avec une stratification [0/90/0].



**Figure IV .5: Poutre composite stratifiée [0/90/0].**

Les dimensions géométriques et les propriétés mécaniques de cette poutre sont regroupées au (tableau IV.3).

**Tableau IV.3 : Propriétés géométriques et mécaniques de la deuxième poutre test.**

$E_L$	$E_T$	$G_{LT}$	$\nu_{LT}$	b	h	$\alpha_L$	$\alpha_T$
45	10	4.5	0.31	20	3	$5 \times 10^{-6}$	$20 \times 10^{-6}$

La polymérisation du stratifié a été effectuée à une température de 120 °C. Nous voulons déterminer les contraintes résiduelles à la température d'utilisation de 20 °C. Rapportées aux axes des matériaux des couches, les constantes de rigidité des couches sont:

$$Q_{11} = 45.982 \text{ GPa} \quad , \quad Q_{12} = 3.168 \text{ GPa} , Q_{16} = 0$$

$$Q_{22} = 10,218 \text{ GPa} \quad , \quad Q_{26} = 0 \quad , Q_{66} = 4.5 \text{ GPa} .$$

Les matrices de rigidité des couches s'expriment alors suivant :

$$Q_{0^0} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} , \quad Q_{90^0} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

La relation (4.11) permet d'exprimer les déformations d'origine thermique dans la couche à 0° :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^* \\ \epsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta \\ 2\sin\theta \cos\theta & -2\sin\theta \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^* \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^* \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^* \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \end{bmatrix} \Delta T. \quad (4.11)$$

soit:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^* \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^* \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^* \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

De même, pour les couches à  $90^\circ$ :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^* \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^* \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^* \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} (N_x^*, M_x^*) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{11} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^* + Q'_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^* + Q'_{16} \boldsymbol{\gamma}_{xy}^*)_k(1, z) dz \\ (N_y^*, M_y^*) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^* + Q'_{22} \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^* + Q'_{26} \boldsymbol{\gamma}_{xy}^*)_k(1, z) dz \\ (N_{xy}^*, M_{xy}^*) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{16} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^* + Q'_{26} \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^* + Q'_{66} \boldsymbol{\gamma}_{xy}^*)_k(1, z) dz \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les résultantes d'origine thermique, déduites des relations (4.14), s'écrivent :

$$\begin{aligned} N_x^* &= [(Q_{11} + 2Q_{12})\alpha_L + (2Q_{22} + Q_{12})\alpha_T] \frac{h}{3} \Delta T, \\ N_y^* &= [(Q_{22} + 2Q_{12})\alpha_T + (2Q_{11} + Q_{12})\alpha_L] \frac{h}{3} \Delta T, \\ N_{xy}^* &= 0 \text{ (Résultant de } Q_{16} = Q_{26} = 0 \text{ et } \boldsymbol{\gamma}_{xy}^* = \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Les moments sont nuls du fait de la symétrie du stratifié:

$$M_x^* = M_y^* = M_{xy}^* = 0$$

L'application numérique conduit à:

$$N_x^* = 733,7 \Delta T \quad , \quad N_y^* = 806,7 \Delta T \quad , \quad (\Delta T = 1).$$

Pour un maillage de 10x4, les déplacements obtenus sont regroupés dans le tableau (IV-4).

**Tableau IV.4 : Comparaison des efforts obtenus numériquement et analytiquement.**

Maillage 10*4	Effort $N_x^*$	Effort $N_x^*$	Erreur(%)
Présent élément	733,7	806,7	0
Analytique	733,7	806,7	0

D'après les résultats donnés par l'étude théorique des efforts et les résultats obtenus par notre élément, on peut constater que les résultats sont identiques. Ces résultats montrent la performance de l'élément utilisé.

#### IV.6.3. Poutre stratifiée simplement appui à coté et libre à l'autre chargée par une charge de traction.

La quatrième structure test est une poutre composite stratifiée avec quatre couches, chargée par une charge membranaire  $N_x=100$  N/mm, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau V.1). L'épaisseur de chaque couche est 1 mm.



**Figé IV. 6 :** Poutre composite simplement appui à coté et libre à l'autre chargée par une charge de traction.

**Tableau IV.5 :** Propriétés géométriques et mécaniques de la poutre test.

$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$\nu_{12}$	$N_x$ (N/mm)	L (mm)	h (mm)	b (mm)	L'orientation des fibres
141000	9340	4500	0.35	100	1000	4	100	[0/90] <sub>s</sub>
$X_t$ (MPa)	$Y_t$ (MPa)	$X_c$ (MPa)	$Y_c$ (MPa)	$S$ (MPa)				
1500	180	1000	240	150				

Dans cet exemple, notre poutre soumise à une charge de traction varie de 100 à 3500 N/mm.

**Tableau IV.6:** Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 100.

Charge	Couche	Coeff de rupture	Rupture ?	
			Oui	Non
100	TOP1	3357.2163		×
	BOT1	3357.2163		×
	TOP2	5678.898		×
	BOT2	5678.898		×
	TOP3	5678.898		×
	BOT3	5678.898		×
	TOP4	3357.2163		×
	BOT4	3357.2163		×

$\sigma_{  }$	$\sigma_{\perp}$	$T_{  \perp}$	Failure Criteria	$RF_{min}$	Failure Type
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure

**Tableau IV.7 :** Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 3500.

Charge	Couche	Coeff de rupture	Rupture ?	
			Oui	Non
3500	TOP1	0.959	×	
	BOT1	0.959	×	
	TOP2	1.623		×
	BOT2	1.633		×
	TOP3	1.623		×
	BOT3	1.623		×
	TOP4	0.959	×	
	BOT4	0.959	×	

$\sigma_{  }$	$\sigma_{\perp}$	$T_{  \perp}$	Failure Criteria	$RF_{min}$	Failure Type
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure

D'après les tableaux, on peut observer que :

- La charge de rupture est 3500 N/mm, pour une plaque composite  $[0/90]_s$  et le déplacement correspondant est 11.56802.
- Les couches endommagées sont les couches numéro 1 et 4.
- Les résultats numériques obtenus en utilisant notre élément sont identiques aux ceux obtenus analytiquement en utilisant un logiciel pour les calculs analytiques.

#### IV.6.4.Poutre stratifiée simplement appui à coté et libre à l'autre chargée par une charge mécanique et thermique:

La dernière poutre que nous présentons ici, est analogue à celle étudiée à la section précédente, ce que veut dire que les propriétés mécaniques et géométriques sont celles présentées au (tableau IV.5). Mais dans ce cas, la poutre soumise à une variation de température. A travers ce test, nous souhaitons analyser l'influence de la variation de la température sur les mécanismes de rupture. Dans cet exemple, notre poutre soumise à une variation de température varie de 100 à 790. La poutre est aussi chargée par une charge de traction  $N_x=100$  N/mm.

Les coefficients de dilatation sont :  $\alpha_1=1.0*10^{-6}$ ,  $\alpha_2=3.5*10^{-5}$

Pour une variation de température  $\Delta T = 100$

**Tableau IV.8:** Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 100.

Charge mécanique	Variation thermique	Couche	Coefficient de rupture	Rupture ?	
				Oui	Non
100	100	TOP1	7.819		×
		BOT1	7.819		×
		TOP2	7.835		×
		BOT2	7.835		×
		TOP3	7.835		×
		BOT3	7.835		×
		TOP4	7.819		×
		BOT4	7.819		×

- Pour une variation de température  $\Delta T = 790$

**Tableau IV.9 :** Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 790.

Charge mécanique	Variation thermique	Couche	Coeff de rupture	Rupture ?	
				Oui	Non
100	790	TOP1	0.991	×	
		BOT1	0.991	×	
		TOP2	0.991	×	
		BOT2	0.991	×	
		TOP3	0.991	×	
		BOT3	0.991	×	
		TOP4	0.991	×	
		BOT4	0.991	×	

Pour une variation de température  $\Delta T = 500$

**Tableau IV.10 :** Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la variation de température appliquée est 500

Charge mécanique	Variation thermique	Couche	Coeff de rupture	Rupture ?	
				Oui	Non
100	500	TOP1	1.565		×
		BOT1	1.565		×
		TOP2	1.5658		×
		BOT2	1.5658		×
		TOP3	1.5658		×
		BOT3	1.5658		×
		TOP4	1.565		×
		BOT4	1.565		×

$\sigma_{  }$	$\sigma_{\perp}$	$\tau_{  \perp}$	Failure Criteria	$RF_{min}$	Failure Type
225,95	-225,471	-0,0	TsaiWu	0,991	Failure
225,95	-225,471	-0,0	TsaiWu	0,991	Failure
225,471	-225,45	0,0	TsaiWu	0,991	Failure
225,471	-225,45	0,0	TsaiWu	0,991	Failure
225,471	-225,45	0,0	TsaiWu	0,991	Failure
225,471	-225,45	0,0	TsaiWu	0,991	Failure
225,471	-225,45	0,0	TsaiWu	0,991	Failure
225,95	-225,471	-0,0	TsaiWu	0,991	Failure

D'après les tableaux, on peut observer que :

- La variation de température causée la rupture est 790, pour une poutre composite  $[0/90]_s$ .
- Toutes les couches de la poutre ont été endommagé à la fois, par contre pour une poutre soumise uniquement à une charge de traction, que les couches 1 et 4 ont été endommagé.

# CONCLUSION GENERALE

L'objectif du présent travail est d'étudier numériquement l'effet de la température *sur*

## *L'endommagement des poutres stratifiées.*

L'élément utilisé est un élément fini rectangulaire à 4 nœuds. Chaque nœud possède 4 degrés de liberté. Utilisant la théorie *Classique des Stratifiés*. Dans ce contexte, on va essayer de déterminer la température critique qui cause la rupture de ces poutres. D'autre part, plusieurs paramètres, tels que l'orientation des fibres et la stratification des couches, seront étudiés afin de déterminer leur influence sur la valeur de la température critique. Dans le cas des poutres isotropes, on a constaté que le programme donne des bons résultats qui convergent mieux vers la solution analytique pour différents maillages.

Les résultats ont montré que la présence d'ouverture dans certaines conditions d'appuis change la valeur de fréquence fondamentale des plaques dans tout les paramètres étudiés.

Cette étude a permis de tirer les remarques suivantes :

À partir de cette analyse des remarques sont obtenus :

D'après les tableaux, on peut observer que :

- La charge de rupture est 3500 N/mm, pour une plaque composite  $[0/90]_s$  et le déplacement correspondant est 11.56802.
- Les couches endommagées sont les couches numéro 1 et 4.
- Les résultats numériques obtenus en utilisant notre élément sont identiques aux ceux obtenus analytiquement en utilisant un logiciel pour les calculs analytiques.
- La variation de température causée la rupture est 790, pour une poutre composite  $[0/90]_s$ .
- Toutes les couches de la poutre ont été endommagées à la fois, par contre pour une poutre soumise uniquement à une charge de traction, que les couches 1 et 4 ont été endommagées.



### BIBLIOGRAPHIE

[1]- Paolo VANNUCCI. *Méthodes Avancées en Optimisation des Structures*. Université de Versailles et Saint Quentin-en-Yvelines, A.U. 2005-06.  
<http://paolo.vannucci.free.fr/2012/Downloads.html>

[2]- Vincent MANET, *méthodes d'analyse par élément finis des contraintes aux interfaces dans les structures sandwich*. Mémoire de Doctorat Université Blaise Pascal- Clermont II, France, 17 juillet 1998.

[3]- Marc François, *cours matériaux composites*, Université Paris-sud 11.

[4]- Daniel Gay Suong V. Hoa Stephen W. Tsai ,*composite materials*. French editions published by Editions Hermès, Paris, 1997 No claim to original U.S. Government works International Standard Book Number 1-58716-084-6

[5] Nadia Bahlouli, *Cours Matériaux Composites université de Strasbourg*, <http://www-ipst.u-strasbg.fr/cours/materiaux-composites>

[6] Tegua Mohamed Salah, *dynamique des structures composites sandwiches* .Mémoire de Magister en génie mécanique, Université Mohamed Khider –Biskra

[7] KHERBOUCHE, Laaziz. *Introduction aux modélisations et aux méthodes de calcul des matériaux composites*. 2010. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammeri.

[8]-Imen KALLEL-KAMOUN, *Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique*. Mémoire de Doctorat, Université de Sherbrooke (Canada), 30 Juin 1999.

[9]-Vincent MANET, *Méthodes d'analyse par éléments finis des contraintes aux Interfaces dans les structures sandwich*. Mémoire de Doctorat Université Blaise Pascal - Clermont II, France, 17 juillet 1998.

[10]- Berthelot J. M. *Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures*. 4ème édition, 2010.

[11]- KHECHAI ABDELHAK, *Etude numérique de l'effet des singularités géométriques sur la distribution des contraintes dans les plaques stratifiées*. Mémoire de Master 2ème année, Juin 2013.

## Bibliographie

---

- [12]- Daniel Gay, *Matériaux composite*, Hermes, 4<sup>ème</sup> édition, 1997.
- [13]- Achraf Tafla , *éléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du Cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches*, Thèse de Doctorat de l'Université de Reims Champagne-Ardenne, 2007.
- [14]- Michel Dupeux, *Aide-mémoire science des matériaux*, Dunod, Paris, 2004.
- [15]-Imen KALLEL-KAMOUN, *Analyse mécanique de l'essai de flexion par Flambement post-critique*. Mémoire de Doctorat, Université de Sherbrooke (Canada), 30 Juin 1999.
- [16]- IRISARRI, F.X. *Stratégies de Calcul pour l'Optimisation Multi-objectif des Structures Composites* .Thèse de doctorat. Université de Toulouse III - Paul Sabatier, Toulouse, France, 2009.
- [17]- Albert Willian FARIA, *Modélisation par éléments finis de plaques composites : Contribution à l'étude de l'amortissement, endommagement et prise en compte D'incertitudes*. Mémoire de Doctorat Université Fédérale d'Uberlândia, 19 novembre 2010.
- [18]- CHOU, T.-W. *Micro structural Design of Fiber Composites*.1.ed. New York: Cambridge University Press, 1992.
- [19]- Paolo VANNUCCI, *Cours Matériaux Composites*. Université de Versailles et Saint Quentin-en-Yvelines, A.U,2005-06. <http://paolo.vannucci.free.fr/2012/Downloads.html>
- [20]- Layachi Maroua ,*Effet des efforts membranaires sur la vibration des plaques stratifiées en matériaux composite*. Mémoire de Master 2 émet année, Juin2019.
- [21]- NYE, J. F. *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*.4.ed. London: Oxford University Press, 1969.
- [22]- KOLLAR, L. P. and SPRINGER, G. *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press. 2003.
- [23]-REDDY, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. 2. ed. Florida: CRC Press, 1997

## Bibliographie

---

- [24]- CEN, S., SOH, A., LONG, Y. and YAO, Z. A, *New 4-node Quadrilateral FE Model with Variable Electrical Degrees of Freedom for the Analysis of Piezoelectric Laminated Composite Plates*. Composite Structures. v. 58, n. 4, p. 583-599, 2002.
- [25]- François-Xavier IRISARRI, *Stratégies de calcul pour l'optimisation multi-objectif des structures composites*, thèse de doctorat, Université de Toulouse, 23 Janvier 2009.
- [26]- Berthelot J. M. *Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures*. Chapitre 12, 4<sup>ème</sup> édition, 2010.