



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des sciences et de la Technologie
Génie Mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Réf. :

Présenté et soutenu par :

Manel SAID

Le : jeudi 10 septembre 2020

Écoulement laminaire dans un débitmètre de type «plaque à orifice»

Jury :

Mr	A.Hakim BENMACHICHE	MCA	Université de Biskra	Président
Mr	Chawki MAHBOUB	MCB	Université de Biskra	Rapporteur
Mr	Miloud ZELLOUF	MA	Université de Biskra	Examineur

Année universitaire : 2019 - 2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Je remercie d'abord « Allah » le tout puissant qui m'a aidé et donné le courage, la patience et la santé au cours de mon travail, c'est grâce à lui que j'ai fait ce travail malgré tous les obstacles.

*Je tiens à remercier fortement mes chers parents qui sont toujours à mes côtés, je dois également remercier mon encadreur Mr **Ch. MAHBOUB**, qui a contribué à l'élaboration de ce modeste travail, avec ses conseils et ses critiques et sa disponibilité qui m'ont permis d'évoluer mes connaissances acquises et de les approfondir.*

J'adresse aussi mes remerciements les plus sincères aux membres du jury, pour avoir accepté de juger et d'examiner mon travail.

*Je remercie aussi tous mes **enseignants** pour leurs efforts ainsi que les responsables pédagogiques.*

*Enfin je remercie tous mes amis « **Zidi Nour Elhouda, Torki Nour Elhouda, Arroussi Aicha, Sayah Ikram et Segni Kinza** ». Ce sont souvent des petits moments qui paraissent banals qui créent les meilleurs souvenirs lorsqu'on est avec les bonnes personnes. Merci d'ajouter de la valeur aux moments que nous passons ensemble.*

A vous tous je vous dis :

« MERCI »

Dédicaces

Dédicaces

Que ce travail témoigne de mes respects :

À mes parents :

Grâce à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de mes études.

Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers eux.

Je prie ALLAH de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils seront toujours fiers de moi.

À ceux qui me manquent.... À mon cher grand-père, qui était mon deuxième père.

À ma grand-mère... qu'Allah bénie sa vie.

À mes sœurs et mes frères.

À la famille SAID et DJAGHOUBI.

Ils vont trouver ici l'expression de mes sentiments de respect et de reconnaissance pour le soutien qu'ils n'ont cessé de me porter.

À tous mes professeurs :

Leur générosité et leur soutien m'oblige de leurs témoigner mon profond respect et ma loyale considération.

À tous mes amis et mes collègues :

Ils vont trouver ici le témoignage d'une fidélité et d'une amitié infinie.

SAID MANEL.

Résumé

التدفق الصفائحي في مقياس الجريان من نوع "لوحة ذو فتحة"

ملخص

قمنا في هذا العمل بإنجاز دراسة عددية لجريان صفائحي غير قابل للإنضغاط داخل قناة أسطوانية مزودة بلوح ذو فتحة بجواف قائمة بهدف تحديد معامل التفريغ الذي يمثل النسبة بين التدفق الفعلي و التدفق النظري المشتق من معادلة "Bernoulli". تم تبسيط معادلات "Navier-Stokes" باستعمال صيغة الدوامية - دالة التيار، ثم حلها بطريقة الاحجام المنتهية و خوارزمية حساب تكراري عبر برنامج "Matlab". أظهرت النتائج أن معامل التفريغ يتعلق فقط بالخصائص الهندسية للوح ذو الفتحة، و أنه من أجل معامل هندسي β محصور بين القيمتين 0.3 و 0.7 فإن معامل التفريغ C_d محصور بين القيمتين 0.77 و 0.84 و هو ما يمثل خطأً بنسبة 20 إلى 30% في حساب قيمة التدفق نظرياً.

الكلمات المفتاحية : جريان صفائحي غير قابل للإنضغاط، لوح ذو فتحة، المعامل الهندسي β ، معامل التفريغ C_d .

Résumé

Dans ce travail, nous avons effectué une étude numérique de l'écoulement laminaire incompressible dans un canal cylindrique muni d'une plaque à orifice d'arêtes vives; afin de déterminer le coefficient de décharge qui représente le rapport entre le débit réel et le débit théorique issu du théorème de Bernoulli. Les équations de Navier-Stokes ont été simplifiées en utilisant la formulation de vorticity-fonction de courant, puis résolues avec la méthode des volumes finies et un algorithme itératif via Matlab. Les résultats ont montré que le coefficient de décharge dépend seulement de la géométrie de la plaque à orifice, et que pour un coefficient géométrique β compris entre 0.3 et 0.7, le coefficient de décharge C_d est compris entre 0.77 et 0.84, ce qui représente une erreur de 20 à 30% dans la valeur du débit calculée théoriquement.

Mots-clés : Ecoulement laminaire incompressible, plaque à orifice, coefficient géométrique β , coefficient de décharge C_d .

Laminar flow in an "orifice plate" type flowmeter

Abstract

In this work, we carried out a numerical investigation of an incompressible laminar flow in a cylindrical channel fitted with a sharp-edged orifice plate in order to determine the discharge coefficient which represents the ratio between the actual flow rate and the theoretical flow rate derived from Bernoulli's theorem. The Navier-Stokes equations were simplified using the vorticity-stream function formulation, then solved with the finite volume method and an iterative algorithm via Matlab. The results showed that the discharge coefficient depends only on the geometry of the orifice plate, and that for a geometric coefficient β between 0.3 and 0.7, the discharge coefficient C_d is between 0.77 and 0.84, which represents an error of 20 to 30% in the flow rate calculated theoretically.

Keywords : Laminar incompressible flow, orifice plate, geometric coefficient β , discharge coefficient C_d .

Table des matières

Table des matières

Remerciements	I
Dédicaces	II
Résumé	III
Table des matières	V
Liste des figures	VII
Liste des tableaux	VIII
Nomenclature	IX
Introduction	1

Chapitre I : Généralités sur les écoulements

I. Introduction	3
II. Classification des écoulements	3
1. Ecoulement laminaire et écoulement turbulent	3
2. Ecoulement compressible et écoulement incompressible	4
3. Ecoulement permanents et non permanents	4
4. Ecoulement internes et externes	4
III. Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel sans échange	4
IV. Les pertes de charge	5
1. Pertes de charge linéaires	5
2. Pertes de charge singulières	6
V. Théorème de Bernoulli généralisé	6
VI. Types de débitmètres	7
1. Débitmètres à ultrason	7
2. Débitmètres à pression différentielle	7
3. Débitmètres plaque à orifice	7
3.1. Principe d'exploitation	7
3.2. Types de plaque à orifice	8
4. Débitmètre à Venturi	10
5. Débitmètres mécaniques avec traduction électrique	10
5.1. Principe de fonctionnement	10
5.2. Débitmètre à turbine	10

Table des matières

5.3. Rotamètre	11
5.4. Débitmètre électromagnétique	12
5.5. Débitmètre à palettes	12
6. La sonde de Pitot « Pitot tube »	13
VII. Equations de mouvement.....	13
1. Equation de continuité	13
2. Equation de la quantité de mouvement.....	14
3. Equation de Navier-Stokes	14
VIII. Conclusion	15

Chapitre II : Revue de littérature

I. Introduction	16
II. Revue de littérature	16

Chapitre III : Simulation numérique

I. Introduction	22
II. Description du problème et hypothèses	22
III. Formulations mathématiques.....	23
IV. Forme adimensionnelle.....	23
V. Le maillage.....	24
VI. Discrétisation avec la méthode des volumes finis	25
VII. Conditions aux limites	28
VIII. Détermination du champ de pression	30
IX. Algorithme de résolution numérique.....	30
X. Conclusion.....	31

Chapitre IV : Résultats et Discussion

I. Introduction	32
II. Interprétation des résultats	32
III. Détermination du coefficient de décharge Cd	37
IV. Conclusion.....	38
Conclusion générale.....	39
Références bibliographiques.....	40
Annexe	43

Liste des figures

Liste des figures

Figure	Intitulé	Page
I.1	Diagramme de Moody-Stanton	5
I.2	Principe de fonctionnement d'un débitmètre ultrasonique	7
I.3	Motif de flux avec plaque d'orifice	8
I.4	Croquis d'orifices de différents types	9
I.5	Débitmètre à tube de Venturi	10
I.6	Débitmètre à turbine	11
I.7	Sections transverse et longitudinale du rotamètre	11
I.8	Principe de fonctionnement d'un débitmètre électromagnétique	12
I.9	Débitmètre à palettes	12
I.10	La sonde de Pitot « Pitot tube »	13
III.1	Géométrie du problème	22
III.2	Maillage décalé	25
III.3	Volume de contrôle typique bidimensionnel	25
III.4	Conditions aux limites de la vorticité à la paroi du canal	29
IV.1	plaque à orifice concentrique - arête vive	32
IV.2	Lignes de courant pour $\beta = 0.3$ et $Re_{D_h} = 500, 1000, 1500, 2000$ respectivement	33
IV.3	Lignes de courant pour $\beta = 0.5$ et $Re_{D_h} = 500, 1000, 1500, 2000$ respectivement	33
IV.4	Lignes de courant pour $\beta = 0.7$ et $Re_{D_h} = 500, 1000, 1500, 2000$ respectivement	34
IV.5	Profil de la vitesse longitudinale à différentes positions sur l'axe des X pour $Re_{D_h} = 2000$ et $\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ respectivement	35
IV.6	Distribution de la pression moyenne suivant X pour $Re_{D_h} = 2000$	36

Liste des tableaux

Liste des tableaux

Tableau	Intitulé	page
IV.1	Coefficient de décharge C_d en fonction du coefficient β	38

Nomenclature

Nomenclature

Lettres latines :

Δp : Pertes de charge [N/m^2]

C_d : Coefficient de décharge [/]

D : Diamètre de la conduite [m]

e : Epaisseur de la plaque [m]

g : Gravité [m/s^2]

p : Pression [N/m^2]

P : Pression adimensionnelle [/]

Q : Débit volumétrique [m^3/s]

Re : Nombre de Reynolds [/]

S_1 : Section transversale du tuyau [m^2]

S_2 : Section transversale du trou d'orifice [m^2]

\bar{U} : Vitesse moyenne [m/s]

u, v : Composantes du champ de vitesse [m/s]

U : Vitesse adimensionnelle horizontale [/]

V : Vitesse adimensionnelle verticale [/]

x, r : Coordonnées cylindriques [m]

X, R : Coordonnées adimensionnelle [/]

Lettres grecques :

ρ : La masse volumique du fluide [kg/m^3]

μ : La viscosité dynamique du fluide [$kg/m \cdot s$]

Nomenclature

λ : Coefficient de perte de charge linéaire [Pa]

β : Relation entre le diamètre du canal et le diamètre de l'objet [/]

ψ : Fonction de courant [/]

Ψ : Fonction de courant adimensionnelle [/]

ω : Vorticité [s⁻¹]

Ω : Vorticité adimensionnelle [/]

Introduction générale

Introduction générale

1. Introduction :

La mécanique des fluides est une science de la mécanique appliquée qui concerne le comportement des liquides et des gaz au repos ou en mouvement [1]. Les problèmes traités par cette branche sont nombreux allant de l'étude de l'écoulement de l'eau, du pétrole brut et des gaz dans des conduites de l'ordre du mètre de diamètre avec des longueurs pouvant aller jusqu'à 13000 Km à l'écoulement dans les vaisseaux sanguins de diamètre de quelques microns [2]. Elle comprend deux grandes sous branches : la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos (c'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression); et la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement [3]. On distingue également d'autres branches importantes telles que l'hydrodynamique, l'aérodynamique...etc.

Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies est la mécanique des fluides numérique (en anglais : **Computational Fluid Dynamics** ou **CFD**) qui permet la simulation par ordinateurs les écoulements des fluides par résolution numérique des équations qui les gouvernent [4]. La simulation numérique est utilisée dans nombreux stades de conception de produits industriels et de validation des procédés de fabrication. Elle met en œuvre des technologies variées dont le but est globalement de contribuer à l'innovation et à la compétitivité industrielle, à l'accroissement de la qualité et de la sécurité des produits, à la réduction des coûts et des délais [5].

2. Objectif du sujet :

Le transport des fluides industriels dans les conduites et les mesures de leurs débits sont nécessaires pour la plus part des opérations de la production et de la commercialisation. Pour déterminer le débit d'un écoulement dans une conduite, on peut utiliser parmi d'autres appareils un débitmètre différentiel qui crée une dépression (chute de pression) dans l'écoulement proportionnelle au carré du débit d'après le théorème de Bernoulli. Ce dernier ne tient pas compte de l'effet de viscosité, et c'est pourquoi nous avons besoin d'introduire dans la formule du débit un coefficient de correction appelé « coefficient de décharge ». Le présent travail vise à déterminer ce coefficient (C_d) dans le cas d'un écoulement laminaire ($Re < 2300$) à travers un débitmètre de type plaque à orifice concentrique - arête vive (en anglais : square-edged concentric orifice-plate).

3. Organisation du mémoire :

Cette étude s'articule autour de quatre chapitres : le premier chapitre présente des généralités sur les écoulements et les types de débitmètres; le deuxième chapitre dresse une synthèse bibliographique des plusieurs travaux scientifiques réalisés sous différentes conditions de fonctionnement de la plaque à orifice; le troisième chapitre constitue une description générale du problème et une discrétisation des équations gouvernantes par la méthode des volumes finis; le quatrième chapitre est consacré à l'analyse et aux commentaires des résultats; et enfin, nous terminons notre mémoire avec une conclusion générale qui résume les différents résultats obtenus.

Chapitre I :
Généralités sur les
écoulements

I. Introduction :

La dynamique des fluides est l'étude du mouvement des fluides. Ce mouvement est lié à l'action extérieure, action représentée soit des forces exercées sur le fluide, soit par des conditions imposées sur les frontières par des parois ou par d'autres écoulements. Les équations du mouvement des fluides traduisent les trois principes généraux de conservation de la mécanique : conservation de la masse ; conservation de la quantité de mouvement ; conservation de l'énergie [2].

Le transport des fluides industriels dans les conduites et les mesures de leurs débits sont nécessaires pour la plupart des opérations de la production et de la commercialisation. Comme les fluides industriels sont corrosifs ou érosives, leur nature peut être modifiée en causant des variations dans la composition ou dans les paramètres de ces derniers (la température, la pression ou la vitesse) [6].

Ce chapitre traite les différents régimes d'écoulement, les types de fluides et quelques procédés pour déterminer les pertes de charge, ainsi que les débitmètres les plus utilisés dans l'industrie.

II. Classification des écoulements :

Selon leurs nature physique, géométrique ou cinématique, on peut classer les écoulements des fluides comme suit :

1. Ecoulement laminaire et écoulement turbulent :

Les expériences réalisées par Reynolds (1883) lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de trois régimes d'écoulement (laminaire, transitoire et turbulent). En utilisant des divers fluides (viscosité différente), et en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds et donné par :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (I.1)$$

Avec ρ est la masse volumique du fluide; V est la vitesse moyenne; D est le diamètre de la conduite; et μ est la viscosité dynamique du fluide [7].

L'écoulement est dit laminaire lorsqu'il est strictement permanent ou lorsque le champ de vitesse évolue de façon continue et ordonnée en fonction du temps et de l'espace, dans ce type d'écoulement le nombre de Reynolds $Re < R_{critique,L}$, dont la valeur de $R_{critique,L}$ dépend du fluide et du type d'écoulement. Pour les écoulements

turbulents le régime permanent n'existe pas, les trajectoires s'enchevêtrent, et dans ce cas $Re > R_{critique,T}$. Le régime est dit intermédiaire ou transitoire quand le nombre de Reynolds est compris entre $R_{critique,L}$ et $R_{critique,T}$ [8].

2. Écoulement compressible et écoulement incompressible :

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure et de la température. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.). Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure et de la température, les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles [4].

3. Écoulement permanents et non permanents :

Dans la description eulérienne, nous avons les variables indépendantes x, y, z et t . Si en chaque point de l'espace l'écoulement est indépendant du temps, il est alors appelé permanent (ou stationnaire). S'il varie avec le temps en un point donné, l'écoulement est dit non-permanent (ou instationnaire) [9].

4. Écoulement internes et externes :

Un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement (c'est à dire quand les forces surfaciques sont normales aux éléments de surface dS). Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide. C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait [3]. Un fluide parfait est un fluide dont la viscosité est nulle. Un fluide réel est un fluide dont la viscosité n'est pas nulle. [2]

III. Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel sans échange :

Lors de l'écoulement d'un fluide réel entre deux points (1) et (2), il peut y avoir des pertes de charge. Dans le cas d'une installation ne comportant pas de machine hydraulique (pompe ou turbine) entre les points (1) et (2), la relation de Bernoulli s'écrit sous la forme:

$$\frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) + \rho g(Z_2 - Z_1) + (p_2 - p_1) = -\Delta p_{12} \quad (I.2)$$

Où Δp_{12} représente l'ensemble des pertes de charge entre (1) et (2) exprimée en Pa, dont il existe deux types de pertes de charge à savoir [7]:

- Les pertes de charges systématiques (appelées aussi linéaires ou régulières).
- Les pertes de charges singulières.

IV. Les pertes de charge

1. Pertes de charge linéaires :

Ces pertes de charge sont déterminées dans les conduites à section constante. La relation permettant de calculer la perte de charge linéaire a été établie en utilisant l'analyse dimensionnelle et en appliquant le théorème de Vachy-Buckingham. Les résultats obtenus avec cette méthode et ceux obtenus par expérience montre que la perte de charge linéaire dépend des caractéristiques géométriques de la conduite et du régime d'écoulement.

$$\Delta H_L = \lambda \frac{v^2 L}{2gD} \tag{I.3}$$

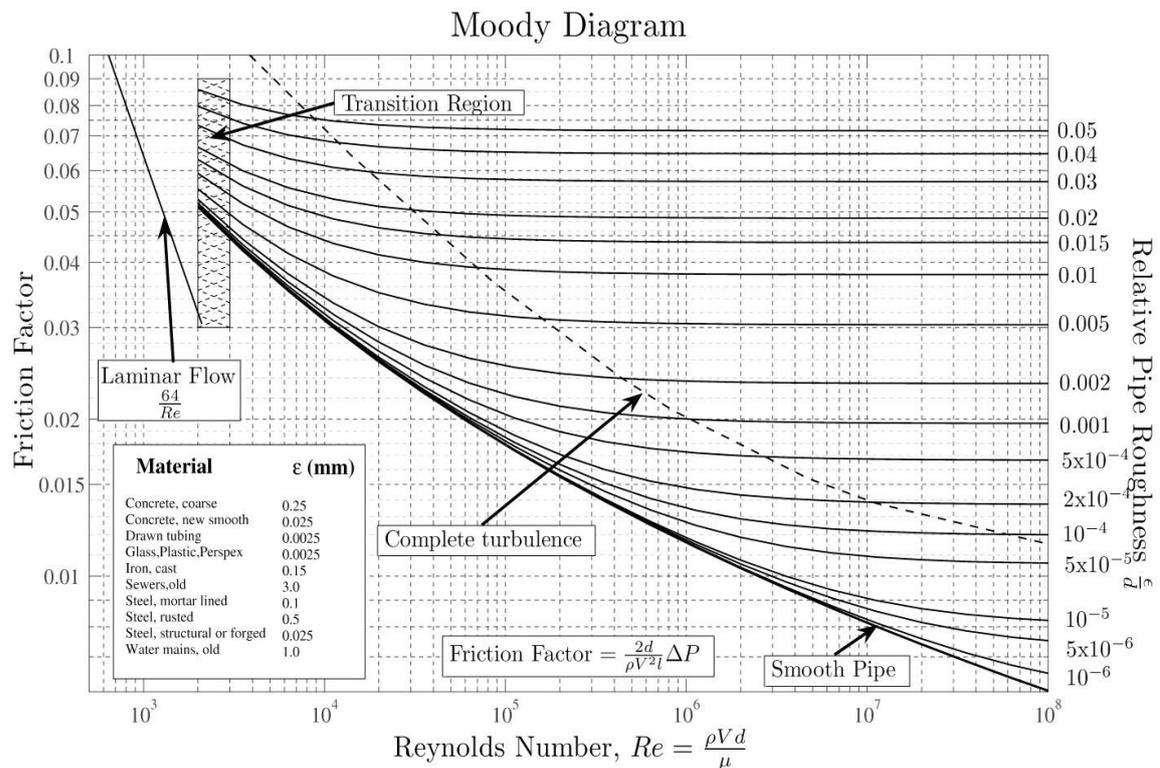


Figure I.1 : Diagramme de Moody-Stanton [10]

Où $\lambda = f\left(R_e, \frac{\epsilon}{D}\right)$ est appelé coefficient de la perte de charge linéaire, et peut être déterminé à partir du diagramme de Moody (Fig. I.1) ou à partir des relations suivantes:

Régime laminaire:

$$\lambda = \frac{64}{R_e} \tag{Relation de Poiseuille} \tag{I.4}$$

Régime turbulent:

a) Régime turbulent lisse :

$$\lambda = \frac{0.316}{(Re)^{1/4}} \quad \text{pour} \quad 2100 < Re < 10^5 \quad (\text{Relation de Blasius}) \quad (I.5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{Re \sqrt{\lambda}}{2.51} \quad \text{pour} \quad 10^5 < Re < 10^6 \quad (\text{Relation de Von Karman}) \quad (I.6)$$

b) Régime turbulent rugueux [1]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(3.71 \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad \text{pour} \quad Re > 10^6 \quad (\text{relation de Nikuradse}) \quad (I.7)$$

2. Pertes de charge singulières :

Ce sont des pertes de charge apparaissent lors de changement de direction d'écoulement, de changement de diamètre, et lorsque des dispositifs (vannes, raccords et manchons, coudes, tés,...etc.) sont disposés sur la ligne d'écoulement. Ces pertes sont typiquement exprimées par la relation :

$$h_s = \sum_i K_i \frac{V_i^2}{2g} \quad (I.8)$$

Où V_i et K_i sont respectivement la vitesse moyenne et le coefficient de perte de charge pour le dispositif i , avec K_i est défini par :

$$K_i = \frac{h_{s_i} 2g}{V_i^2} = \frac{\Delta p_i}{\rho V_i^2 / 2} \quad (I.9)$$

On relie souvent les pertes de charge singulières à une longueur équivalente L_s de pertes de charge régulière [1]:

$$h_s = K \frac{V^2}{2g} \equiv h_r = \lambda \frac{L_s V^2}{D 2g} \quad (I.10)$$

Soit:

$$L_s = D \frac{K}{\lambda} \quad (I.11)$$

V. Théorème de Bernoulli généralisé

Lors d'un écoulement d'un fluide réel entre deux points (1) et (2) il peut y avoir des échanges d'énergie entre ce fluide et le milieu extérieur soient:

- par travail à travers une machine, pompe ou turbine ; la puissance échangée étant P (voir Théorème de Bernoulli).

- par pertes de charge dues aux frottements du fluide sur les parois ou les accidents de parcours; la différence de pression étant Δp .

Le théorème de Bernoulli s'écrit alors sous la forme générale [7]:

$$\frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2) + \rho g (Z_2 - Z_1) + (P_2 - P_1) = \frac{\sum P}{q_v} - \Delta P_{T_{12}} \quad (I.12)$$

Avec $\sum P$ est la somme des puissances échangées entre le fluide et le milieu extérieur, à travers une machine, entre (1) et (2) :

- $P > 0$: si le fluide reçoit de l'énergie de la machine (pompe).
- $P < 0$: si le fluide fournit de l'énergie à la machine (turbine).
- $P = 0$: s'il n'y a pas de machine entre (1) et (2).
- $\Delta P_{T_{12}}$: somme des pertes de charge entre (1) et (2)

VI. Types de débitmètres :

1. Débitmètres à ultrason :

Le débitmètre à ultrason est une nouvelle technologie qui commence à connaître un champ d'application de plus en plus croissant dans le comptage transactionnel des fluides industriels. Le principe repose sur l'utilisation d'ondes acoustiques pour la mesure de la vitesse de l'écoulement. Un émetteur ultrasonique émet des trains d'ondes qui traversent le fluide à mesurer vers un récepteur placé diamétralement opposé à l'émetteur [6].

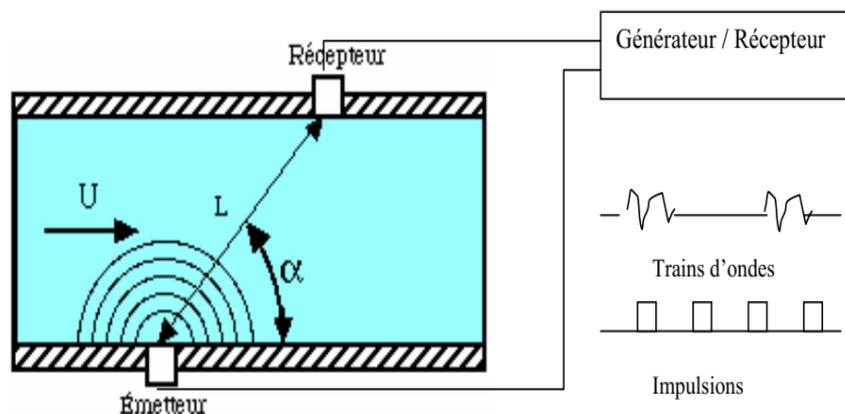


Figure I.2 : Principe de fonctionnement d'un débitmètre ultrasonique [6]

2. Débitmètres à pression différentielle :

Le principe est basé sur un système perturbateur statique constitué d'un organe d'étranglement ou organe déprimogène qui provoque une chute de pression dont la valeur est fonction du débit de l'écoulement et des caractéristiques thermodynamiques du fluide à mesurer [6].

3. Débitmètres plaque à orifice :

Un compteur d'écoulement Orifice est le dispositif de mesure du débit de type de tête le plus courant. Une plaque d'orifice est insérée dans le pipeline et la pression différentielle à travers elle est mesurée [11].

3.1. Principe d'exploitation :

La plaque d'orifice insérée dans le pipeline entraîne une augmentation de la vitesse d'écoulement et une diminution correspondante de la pression. Le schéma d'écoulement

montre une diminution efficace de la section transversale au-delà de la plaque d'orifice, avec une vitesse maximale et une pression minimale à la vena contracta.

Le motif d'écoulement et le bord d'avant pointu de la plaque d'orifice (Fig. I.3) qui le produit sont d'une importance majeure. Le bord tranchant entraîne un contact de ligne presque pur entre la plaque et le débit efficace, avec la traînée de frottement fluide-métal négligeable à la limite.

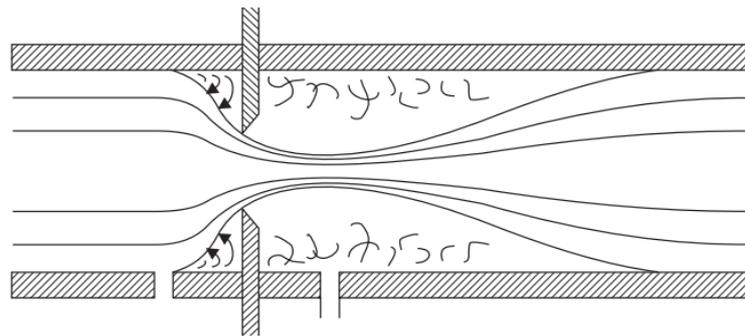


Figure I.3 : Motif de flux avec plaque d'orifice [11]

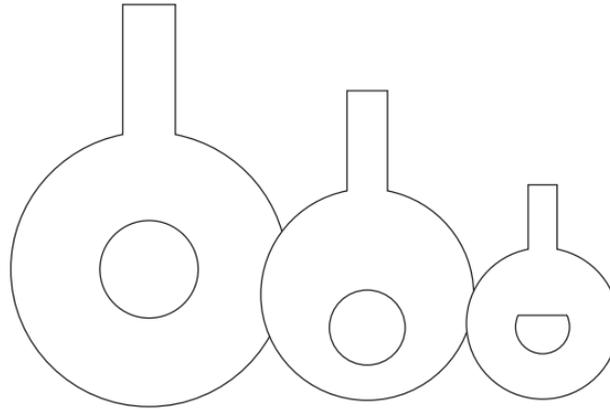
3.2. Types de plaque à orifice :

La forme la plus simple de plaque d'orifice se compose d'une mince feuille de métal, ayant en elle un bord carré ou un trou circulaire tranchant ou rond bordé.

Il existe trois types de plaques d'orifice, à savoir

- Concentrique
- Excentrique et type segmental

Le type concentrique est utilisé pour les fluides propres. Dans la mesure des fluides sales, des boues et des fluides contenant des solides, le type excentrique ou segmentaire est utilisé de telle manière que son bord inférieur coïncide avec le fond intérieur du tuyau. Cela permet aux solides de circuler à travers sans aucune obstruction. La plaque d'orifice est insérée dans le pipeline principal entre les brides adjacentes, les diamètres extérieurs de la plaque étant tournés pour s'adapter dans les boulons de flange. Les flanges sont vissées ou soudées aux tuyaux [11].



(1) Concentrique (2) Excentrique (3) segmental

Figure I.4 : Croquis d'orifices de différents types [11]

Les flux dans le tuyau auront certainement une quantité de turbulence qui agit pour convertir l'énergie du flux cinétique en chaleur. Cet effet est pris en compte en ajoutant un nouveau terme à l'équation appelé coefficient de décharge (C_d). L'équation qui en résulte montre comment la zone et ce nouveau coefficient sont appliqués pour obtenir un débit (Q) [12].

$$Q = C_d \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} \times \frac{S_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \quad (\text{I.13})$$

Étant donné que le profil d'écoulement réel à l'emplacement 2 (en aval) est assez complexe, ce qui rend la valeur effective de S_2 incertaine, une substitution est faite et un nouveau coefficient C_f est mis en place de la zone et du C_d . La nouvelle équation ressemble à :

$$Q = C_f \cdot S_0 \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \quad (\text{I.14})$$

Comme vous pouvez le voir la formule a été simplifiée de manière significative, ne nécessitant maintenant que la valeur de C_f , la zone de l'orifice (S_0), la densité du fluide et la pression différentielle pour obtenir le débit volumétrique. Le seul problème maintenant est la valeur de C_f .

Le coefficient d'écoulement se trouve expérimentalement et est compilé dans de nombreux ouvrages de référence. Cette valeur varie de 0,6 à 0,9 pour la plupart des orifices, et la valeur dépend du diamètre de l'orifice et du tuyau ainsi que du nombre Reynolds [12].

4. Débitmètre à Venturi :

Le compteur d'écoulement venturi, bien qu'il soit considéré comme un débitmètre d'obstruction, est moins d'une obstruction que le type d'orifice. Il a encore une certaine quantité de baisse de pression, mais il est significativement inférieur au compteur de type orifice [12].

Parce qu'il canalise bien mieux la veine de fluide qu'un diaphragme, sa précision est bien meilleure. De plus, son coefficient de décharge est proche de l'unité (typiquement 0,95), et la perte de charge qu'il engendre est bien plus faible.

Les principaux inconvénients des tubes de Venturi sont :

- Sa taille, puisqu'elle peut aller à plus de 6.D, sans compter la longueur nécessaire en amont
- Son prix, plus élevé que celui d'un diaphragme.

La valeur de la perte de charge qu'il engendre est de 5 % à 20 % de la Δp mesurée [13].

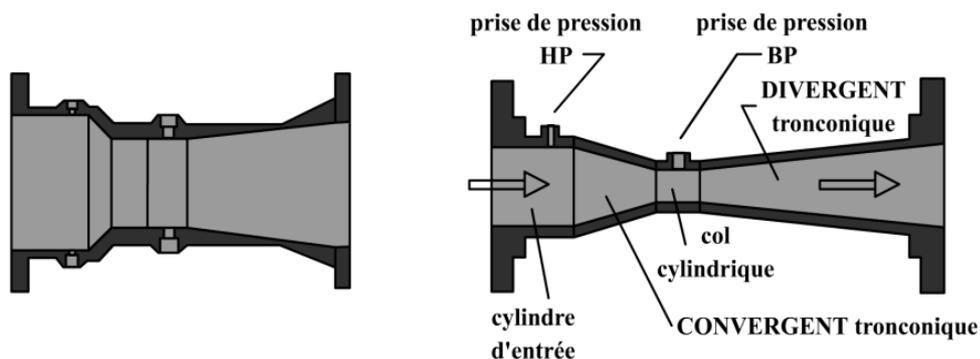


Figure I.5 : Débitmètre à tube de Venturi [13]

5. Débitmètres mécaniques avec traduction électrique :

5.1. Principe de fonctionnement :

Un corps d'épreuve placé dans la conduite de mesure est mis soit en rotation (rotor de turbine) soit en déplacement (flotteur de rotamètre, palette) sous l'effet de la vitesse du fluide. Un capteur approprié, tachymétrique dans le premier cas, de position dans le second cas, délivre un signal électrique qui est proportionnel au débit.

5.2. Débitmètre à turbine :

L'écoulement du fluide entraîne la mise en rotation d'une turbine placée dans l'axe de la conduite de mesure. Sa vitesse de rotation qui est mesurée par un tachymètre, est

proportionnelle à la vitesse d'écoulement du fluide. La vitesse de rotation de la turbine peut être mesurée par l'intermédiaire d'un capteur inductif. Le passage de chaque pale devant le capteur influe sur le champ magnétique, la variation de flux dans la bobine réceptrice engendre une impulsion à chaque passage. Le nombre d'impulsion par unités de temps (fréquence) est proportionnel au débit instantané [14] :

$$Q = 3600 \cdot \frac{f}{k} \quad (\text{I.15})$$

Avec :

Q : Débit (m^3/h)

f : Impulsion par seconde (fréquence)

k : Coefficient d'étalonnage

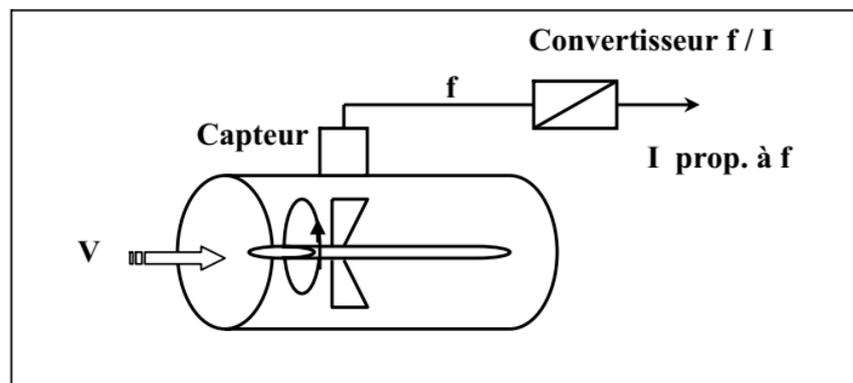


Figure I.6 : Débitmètre à turbine [14]

5.3. Rotamètre :

Le rotamètre est constitué d'un flotteur pouvant se déplacer dans un tube vertical transparent dont le diamètre est légèrement croissant (Fig. I.7). Le déplacement du flotteur est sensiblement proportionnel au débit. Cependant, la théorie qui va suivre est très simplifiée et un rotamètre nécessite normalement un étalonnage [15].

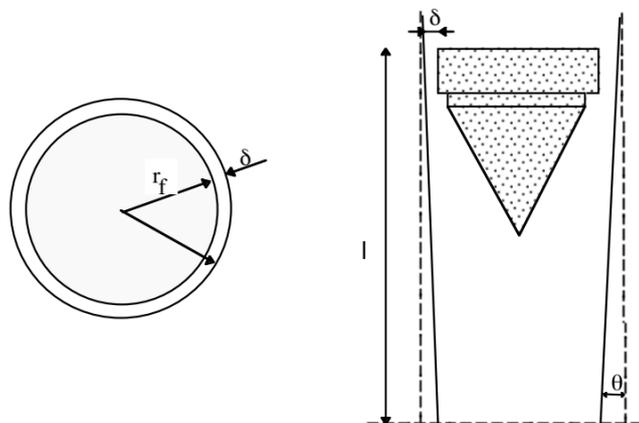


Figure I.7 : Sections transverse et longitudinale du rotamètre [15]

5.4. Débitmètre électromagnétique :

Il fonctionne sur le principe de l'induction électromagnétique de base ; c'est-à-dire quand un conducteur se déplace le long d'un champ magnétique perpendiculaire à la direction du flux, une tension serait induite perpendiculaire à la direction du mouvement aussi bien au champ magnétique.

Le liquide qui coule agit comme un conducteur. Le champ magnétique externe est appliqué perpendiculairement à la direction du flux et deux électrodes sont rincées sur la paroi du pipeline comme indiqué [16]. L'expression de la tension induite est donnée par :

$$e = B \times v \quad (\text{I.16})$$

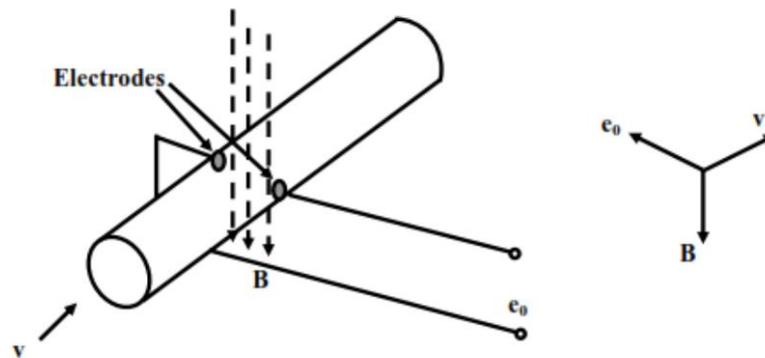


Figure I.8 : Principe de fonctionnement d'un débitmètre électromagnétique [16]

5.5. Débitmètre à palettes :

La palette est soumise à la force exercée par l'écoulement du fluide, à son poids et éventuellement à l'action d'un ressort de rappel. La position d'équilibre de la palette est fonction du débit et peut être converti en signal électrique à l'aide d'un potentiomètre dont l'axe est fixé à celui de la palette [14].

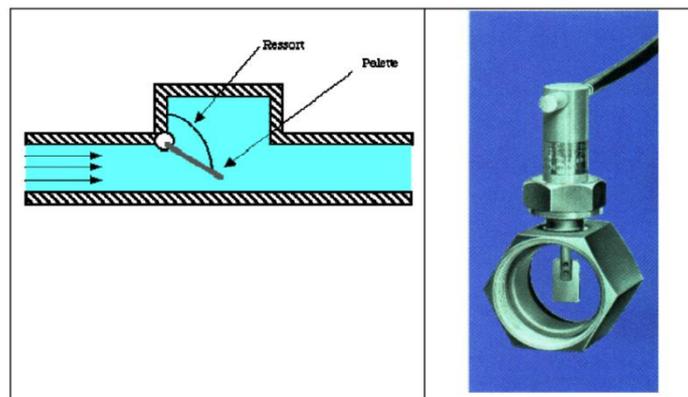


Figure I.9 : Débitmètre à palettes [14]

6. La sonde de Pitot « Pitot tube » :

Elle est constituée par un jeu de deux tubes :

- Un tube qui donne accès à la pression statique en un point de la section
- Un tube qui donne accès à la pression dynamique en ce même point.

La différence de ces deux pressions, mesurée par un manomètre différentielle, permet d'avoir une image de la vitesse du fluide sur la ligne de mesure.

Le tube de Pitot est l'un des capteurs les plus simples, utilisé dans une large gamme de mesure de débits : entrée d'air dans les voitures de course et les avions de combat, mais aussi pour les mesures de débits d'air, de liquides dans les conduites industrielles ouvertes ou fermées.

Alors que sa précision, et sa rangeabilité sont modestes, sa mise en place est simple (il peut être placé dans des canalisations déjà existantes sans interruption du processus ...), et il peut être adapté à des conditions extérieures extrêmes. Les tubes de Pitot doivent être utilisés pour des régimes hautement turbulents ($Re > 20\ 000$) [13].

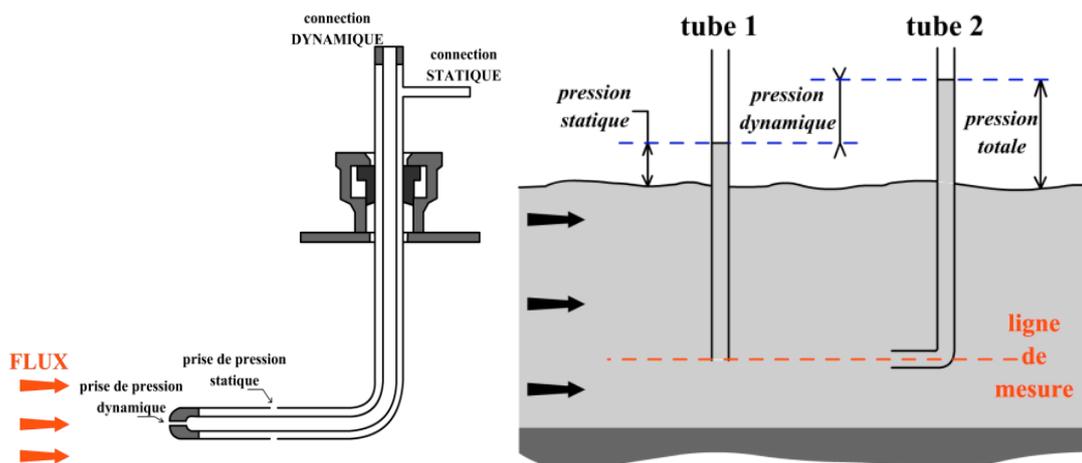


Figure I.10 : La sonde de Pitot « Pitot tube » [13]

VII. Equations de mouvement :

1. Equation de continuité :

Cette équation exprime la conservation de la masse contenue dans un volume élémentaire.

Elle est encore appelée équation de continuité. On peut l'utiliser sous deux formes :

Forme différentielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.17})$$

Forme intégrale :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv}_{(1)} + \underbrace{\int_S \rho (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS}_{(2)} = \frac{Dm}{Dt} = 0 \quad (I.18)$$

La première partie (1) de l'équation (I.18) représente le taux de variation locale de la masse dans le volume de contrôle V ; et la seconde partie (2) représente quant-à-elle, le débit masse à travers la surface de contrôle S [9].

2. Equation de la quantité de mouvement :

L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut être obtenue à partir de la 2nd loi de Newton :

$$\frac{d(m\vec{q})}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V.C} \rho \vec{q} dV + \int_{S.C} \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \sum F_{ext} \quad (I.19)$$

Généralement deux types de forces agissent sur le fluide : les forces volumique; et les forces surfaciques:

$$F_V = \int_{V.C} \rho \vec{f} dV \quad (I.20)$$

$$F_S = \int_{S.C} \bar{P} \vec{n} dS \quad (I.21)$$

$$\text{Avec } \bar{P} = -p\bar{I} + \bar{\tau}$$

\bar{P} : Tenseur de contraintes surfacique.

$p\bar{I}$: Tenseur de contraintes associées à la pression.

$\bar{\tau}$: Tenseur de contraintes visqueuses.

En remplaçant par les expressions (I.20) et (I.21) dans l'équation (I.19), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V.C} \rho \vec{q} dV + \int_{S.C} \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \int_{V.C} \rho \vec{f} dV - \int_{S.C} P \cdot \vec{n} dS + \int_{S.C} \bar{\tau} \cdot \vec{n} dS \quad (I.22)$$

Considérant un volume de contrôle fixe et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, l'équation (I.22) peut s'écrire sous la forme différentielle (locale) suivante [17]:

$$\rho \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \rho (\vec{q} \cdot \vec{\nabla}) \vec{q} = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} + \rho \vec{f} \quad (I.23)$$

3. Equation de Navier-Stokes :

Si le fluide est newtonien c'est-à-dire il se déforme d'une façon proportionnelle à la valeur de la contrainte appliqué en un point, on a alors [8]:

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + p \delta_{ij} \quad (I.24)$$

Où :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{ij} + U_{ji}) \text{ est le taux de déformation}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \text{ est le symbole de Kronecker}$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \overrightarrow{div} \vec{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \text{ est la trace de } \varepsilon$$

En introduisant toutes ces relations dans l'équation (I.23), on obtient les équations de Navier-Stokes (pour un fluide incompressible):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_z \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

VIII. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons pris un aperçu de la mécanique des fluides avec présentation de quelques aspects tout en dénombrant les différents types d'écoulement avec les pertes de charge et quelques différents types de débitmètre. A la fin de ce chapitre, nous avons exposé les équations de base se rapportant à la mécanique des fluides dans leur forme générale.

Chapitre II :

Revue de littérature

I. Introduction :

La technologie moderne envisage la bonne maîtrise de l'énergie thermique et de la mécanique des fluides qui a été traduit par le thème de ce mémoire. Dans le but de situer notre travail par rapport aux travaux effectués antérieurement par d'autres chercheurs, on essaye de présenter dans ce chapitre les principaux travaux rencontrés dans la littérature qui ont été menés dans le même sujet.

II. Revue de littérature :

LIU et al. [20] :

Dans cette étude, la perte de charge du gaz humide à travers des plaques à orifice (à entrée conique) a fait l'objet d'une étude expérimentale dans la région de transition de la structure de l'écoulement en utilisant l'air et l'eau comme deux phases, et les prédictions des modèles de pertes de charge disponibles ont été validées en se basant sur les données expérimentales. Les résultats expérimentaux montrent que les modèles de l'écoulement homogène surestiment la perte de charge, alors que les modèles basés sur le modèle d'écoulement séparé présentent souvent des sous-estimations. Les modèles pour le gaz humide sont également incapables de prédire la perte de charge dans cette région avec une précision acceptable. Grâce à une analyse des écarts de prédiction, il est constaté qu'en plus du nombre de Froude de la phase de gaz, le nombre de Froude de la phase liquide a également une influence significative sur la perte de charge du gaz humide. Ensuite, trois nouvelles corrélations basées sur le modèle de l'écoulement homogène, le modèle de Chisholm et le modèle de Murdock, respectivement, ont été proposées sur la base de résultat expérimental.

SZOLCEK et al. [21]:

L'écoulement de l'eau monophasé à travers une plaque à micro-orifice a été étudié expérimentalement avec six pièces d'essai multi-micro-orifice de diamètre de 200 μm et un rapport épaisseur/diamètre entre 4,25 et 27. Au cours des expériences, le nombre de Reynolds variait entre 5 et 4500, ce qui correspond à un écoulement rampant et un écoulement transitoire laminaire-turbulent. L'apparition de la turbulence, comme indirectement déduite de la variation de pente de la courbe de perte de charge en fonction du débit massique, s'est avérée graduelle et régulière. À l'aide des données présentées dans cette étude, la validité de la méthode de prédiction de décharge à travers des micro-orifices

pour un écoulement rampante a été étendue aux applications micro-fluidiques avec des micro-orifices épais.

HOLLINGSHEAD [22] :

Dans ce mémoire ; l'auteur a étudié la relation entre le nombre de Reynolds (Re) et le coefficient de décharge (C) en utilisant un manomètre différentiel. L'étude s'est intéressée de très petits nombres de Reynolds couramment associés au transport par pipeline de fluides visqueux. Il y a actuellement peu de recherche qui a été effectuée dans ce sujet pour le Venturi, la plaque à orifice standard, le V-cône, et les débitmètres avec coin. Le code de CFD « FLUENT » a été utilisé pour effectuer cette étude, tandis que « GAMBIT » a été utilisé comme outil de prétraitement pour les modèles de débitmètre créés. L'huile lourde et l'eau ont été utilisées séparément comme des fluides de travail pour obtenir une large gamme du nombre de Reynolds avec une grande précision. Plusieurs modèles ont été utilisés avec des caractéristiques variables, telles que la taille du canal et la géométrie du débitmètre, pour obtenir une meilleure compréhension de la relation entre le coefficient de décharge C et le nombre de Reynolds Re . Tous les modèles numériques simulés ont été comparés aux données expérimentales pour déterminer leur précision. L'étude indique que les différents coefficients de décharge diminuent rapidement à mesure que le nombre de Reynolds approche de l'unité pour chacun des débitmètres ; toutefois, la gamme de nombre Reynolds dans laquelle les coefficients de décharge étaient constants variait selon la conception du débitmètre. La plaque à orifice standard ne suit pas la loi générale dans la courbe de coefficient de décharge que les autres débitmètres font ; au lieu de cela, à mesure que Re diminue, la valeur de C augmente à un maximum avant de chuter brusquement. Plusieurs graphiques démontrant les différentes relations et les résultats de cette étude sont présentés. L'objectif principal de cette recherche était d'obtenir une meilleure compréhension de la performance du coefficient de décharge par rapport au nombre de Reynolds dans les débitmètres différentiels pour des nombres de Reynolds très petits.

KUHNEN et al. [23] :

Dans cet article, ils ont montré qu'une modification assez simple et permanente du profil de la vitesse "principale" dans une conduite peut conduire à un effondrement complet de la turbulence et la relaminarisation complète de l'écoulement. Deux dispositifs différents, un obstacle stationnaire (encastré) et un dispositif qui injecte du fluide à travers

un espace annulaire près de la paroi, sont utilisés pour contrôler l'écoulement. Les deux appareils modifient le profil de la vitesse "principale" de telle sorte que l'écoulement est décéléré au centre de la conduite, et accéléré près de la paroi. Des mesures avec la vélocimétrie stéréoscopique d'image de particule ont été présentées pour étudier et visualiser le développement de l'écoulement relaminarisé en aval de ces dispositifs et les circonstances spécifiques responsables de cette relaminarisation. Ils ont trouvé que la relaminarisation totale existe jusqu'à un nombre de Reynolds de 6000, où le coefficient de frottement loin en aval est réduit par un facteur de 3.4 dû à cette relaminarisation. Dans une conduite lisse et droite, l'écoulement reste complètement laminaire en aval. En outre, ils ont montré que la relaminarisation instationnaire dans une région spatialement confinée juste en aval des dispositifs se produit également à des nombres de Reynolds beaucoup plus élevés, accompagnée d'une réduction significative du coefficient de frottement local. Le mécanisme physique de la relaminarisation est attribué à un affaiblissement du cycle de production de la turbulence près de la paroi.

TANVIR et al. [24]:

Cet article étudie à l'aide de la technique CFD l'effet des fossettes de surface sur le coefficient de décharge d'un débitmètre de type plaque à orifice dans les régimes laminaires et turbulents. Les fossettes hémisphériques sont disposées selon une configuration donnée sur la surface amont d'une plaque à orifice. Le modèle standard k- ϵ est utilisé pour l'analyse des écoulements turbulents. Ils ont constaté que le coefficient de décharge diminuait en présence de fossettes. Le coefficient de décharge diminue davantage à mesure que les fossettes se rapprochent de l'orifice. Le coefficient de décharge diminue encore avec l'augmentation de la taille des fossettes. Lorsque les fossettes sont grandes, c'est-à-dire que la surface est gravement endommagée, la réduction en pourcentage du coefficient de décharge dans les régimes laminaires et turbulents peut atteindre 1,6 %.

KARTHIK et al. [25]:

Les caractéristiques de performance des plaques à orifice pour différents paramètres géométriques sont analysées à l'aide de la technique (CFD) pour des conditions non standard avec de l'eau comme fluide de travail. Dans le présent travail, un outil CFD (ANSYS, FLUENT) a été utilisé pour prédire la variation du coefficient de décharge (C_d) et l'analyse du débitmètre de type plaque à orifice (à entrée conique) a été effectuée pour différentes épaisseurs de plaques (3mm, 5mm, 10mm et 15mm) dans un canal de 50mm de

diamètre, dont l'effet de ce dernier sur le coefficient de décharge (C_d) a été étudié en détail. La valeur du coefficient de décharge en fonction du nombre de Reynolds dépend du type de l'écoulement, des sondes de pression et du contour de l'obstruction. L'effet des conditions non standard sur le coefficient de décharge (C_d) a été discuté en détail.

TUNAY et al. [26] :

L'objectif de ce travail est d'étudier les effets de l'épaisseur et du nombre de Reynolds circulaires de plat d'orifice bordes par place sur les caractéristiques d'écoulement en utilisant la méthode finie de volume pour des écoulements laminaires et turbulents. Ici, l'épaisseur de l'orifice/diamètre du tuyau est change sur la gamme de $1/12 \leq t^* \leq 1$ et pour l'intervalle de nombre de Reynolds de $0 \leq Re_0 \leq 2 \times 10^5$ gardant le rapport de diamètre d'orifice/tuyau, $\beta = 0,6$ constant. Par conséquent, la considération dans ce travail est donnée aux effets du nombre de Reynolds et de l'épaisseur d'orifice sur le coefficient de décharge, $C_d = f(Re, t^*)$. On a assume que l'écoulement est bidimensionnel, visqueux, incompressible et régulier pour des régimes laminaires et turbulents d'écoulement. Les distributions de vitesse, formation des régions séparées d'écoulement, coefficients de décharge d'écoulement et par conséquent la réponse de la géométrie de mètre d'orifice aux états ascendants connus d'écoulement sont étudiées en fonction du nombre de Reynolds et de l'épaisseur sans dimensions d'orifice (t^*). Le coefficient de décharge, C_d , valeurs sont plus sensible au nombre de Reynolds dans le cas des plus petites valeurs de t^* . la variation minimum du coefficient de décharge en ce qui concerne Re_0 se produit à $t^* = 1$ dans des écoulements laminaires et turbulents. En conséquence, avoir $t^* = 1$ cause moins de chute de pression et moins de variations de C_d évalue rivaliser avec les résultats de $t^* = 1/12$.

RAO et al. [27] :

Le nombre de Reynolds critique, correspondant au passage au régime turbulent d'un écoulement en aval d'un diaphragme, ou d'une buse, dans une conduite en charge, représente un paramètre important, correspondant au point-limite séparant l'écoulement en régime purement laminaire de celui en train de repasser à ce régime. On évalue le nombre de Reynolds critique pour les cas des diaphragmes à arêtes vives, des diaphragmes aux bords de secteur, et des buses de grand rayon, à partir de données déterminées directement sur la base de résultats de mesures. On tient compte de différents critères: variations du coefficient de débit, du coefficient de perte de charge, de la variation de celui-ci exprimé

comme pourcentage de la perte de charge piézométrique de l'écoulement au passage du débitmètre, et enfin, de la distance nécessaire à la récupération de la charge, en aval du diaphragme. Ces critères définissent un domaine comprenant les nombres de Reynolds de transition, correspondant à différents diaphragmes ou buses. On constate que le nombre de Reynolds critique, correspondant à un diaphragme donné, tend à une valeur constante aux faibles valeurs du rapport des diamètres du diaphragme (ou de la buse), et de la conduite. La valeur du nombre de Reynolds critique augmente progressivement en fonction de l'accroissement du rayon du bord du diaphragme, la valeur maximale étant représentée par le rayon de la buse.

JIANHUA et al. [28] :

Dans cet article, l'auteur a mené une analyse théorique du coefficient de perte de charge, qui se rapportait directement à la dissipation de l'énergie, ainsi que d'autres paramètres tels que le rapport de contraction du diamètre de la plaque à orifice et le diamètre du tunnel, le rapport de l'épaisseur de la plaque à orifice au diamètre du tunnel, la longueur de recirculation adimensionnel et le nombre de Reynolds. Des corrélations ont été obtenues par la simulation numérique et les expériences sur des modèles physiques. Le coefficient de perte de charge est principalement affecté par la taille de la région de recirculation qui est à son tour affectée par le rapport de contraction et le rapport de l'épaisseur de la plaque à orifice. Moins le rapport de contraction de la plaque à orifice est élevé, plus la longueur et la hauteur de recirculation sont grandes et plus le coefficient de perte de charge est important. À partir des résultats de cette étude une expression empirique qui permet de déterminer le coefficient de perte de charge est établie.

WANG et al. [29] :

Une étude expérimentale sur les caractéristiques d'explosion des mélanges hydrogène-méthane-air dans un récipient fermé à la pression et à la température normales est rapportée dans ce papier. Les paramètres d'explosion, tels que la pression d'explosion maximale, le temps d'explosion, le taux d'augmentation maximal de pression et l'indice de déflagration ont été dérivés en se basant sur l'évolution temps-pression. L'effet du rapport de blocage ainsi que la position de la plaque à orifice sur ces paramètres d'explosion ont été analysés. Les résultats montrent que la pression maximale d'explosion a été diminuée en présence d'une plaque à orifice en raison du transfert de chaleur vers le déflecteur. Au début de la propagation de la flamme, cette dernière a été supprimée. Par la suite, la vitesse de la flamme a été augmentée à un stade ultérieur dans certains cas. Combiné avec les

différentes réactivités des mélanges, les temps d'explosion obtenus dans tous les cas étaient très proches. Pour un mélange donné et une position de la plaque à orifice, le taux d'augmentation maximal de pression et l'indice de déflagration ont été augmentés avec l'augmentation du rapport de blocage. En outre, le taux d'augmentation maximal de pression ainsi que l'indice de déflagration a été diminués lorsque la plaque à orifice était proche de et, à l'encontre, augmentés lorsque la plaque à orifice était loin de l'allumage.

Chapitre III :

Simulation numérique

I. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter une description géométrique et phénoménologique du problème considéré, puis nous allons procéder à la simulation numérique en transformant le modèle mathématique général en une forme plus simple (dont le nombre des inconnues sera réduit) qui sera discrétisée par la suite en application la méthode des volumes finis; les systèmes d'équations qui en résultent seront résolus en utilisant un programme de calcul itératif.

II. Description du problème et hypothèses :

L'étude envisagée ici examine l'effet d'un rétrécissement-élargissement brusque dans un canal long de section droite circulaire et de paroi lisse sur un écoulement de fluide visqueux de nombre de Reynolds modéré. En plus des pertes de charge linéaires dues au frottement avec les parois du canal, des pertes de charge brusques se produisent également due à la singularité géométrique du canal (Figure III.1). Les hypothèses sur lesquelles se base ce travail sont les suivantes :

1. Le fluide est newtonien;
2. L'écoulement est permanent, incompressible, laminaire dans le plan (x,r) ;
3. Les forces de gravités sont négligeables, ce qui impose la symétrie axiale du problème.

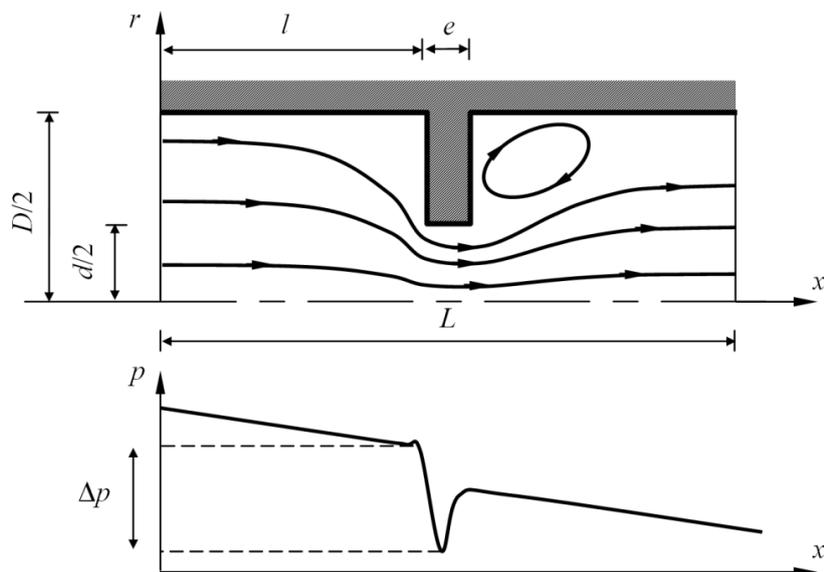


Figure III.1 : Géométrie du problème

III. Formulations mathématiques :

En tenant compte des hypothèses susmentionnées, les équations de mouvement s'écrivent en coordonnées cylindriques comme suit :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \quad (\text{III.1})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right) \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Dans le but de simplifier la résolution du système (III.1)-(III.3), il est commode d'éliminer la pression des deux premières équations en dérivant la première par rapport à r et la deuxième par rapport à x puis soustrayant l'une de l'autre. L'équation qui en résulte exprimée avec la vorticité, définie par $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}$, comme variable indépendante, s'écrit :

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{v\omega}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \frac{\omega}{r^2} \right) \quad (\text{III.4})$$

Cette équation s'écrit sous sa forme non-conservative. Cependant l'application de la méthode des volumes finis exige l'écriture de cette équation sous sa forme conservative qui peut être obtenue en multipliant l'équation de continuité (III.3) par ω puis faisant la somme de l'équation qui en résulte avec l'équation (III.4), on obtient ainsi :

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \frac{\omega}{r^2} \right) \quad (\text{III.5})$$

ou encore sous la forme :

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) \right) \quad (\text{III.6})$$

Maintenant, en introduisant la fonction de courant définie par :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{III.7})$$

En substituant les relations (III.7) qui satisfont l'équation de continuité (III.3), dans l'expression de la vorticité, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega \quad (\text{III.8})$$

IV. Forme adimensionnelle :

Afin de rendre les équations précédentes régissant notre problème sous forme adimensionnelle, on introduit le changement de variables suivant :

$$X = \frac{x}{D_h} \quad R = \frac{r}{D_h} \quad U = \frac{u}{\bar{u}} \quad V = \frac{v}{\bar{u}}$$

$$\Psi = \frac{\psi}{\bar{u}D_h^2} \quad \Omega = \frac{\omega D_h}{\bar{u}} \quad P = \frac{p}{\rho \bar{u}^2} \quad (\text{III.9})$$

Où \bar{u} est la vitesse moyenne de l'écoulement à l'entrée du canal, et D_h est le diamètre hydraulique du canal. Substituant (III.9) dans les équations (III.6)-(III.8), on obtient respectivement :

$$\frac{\partial(U\Omega)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Omega)}{\partial R} = \frac{1}{\text{Re}_{D_h}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Omega}{R} \right) \right) \quad (\text{III.10})$$

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad V = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = -R\Omega \quad (\text{III.12})$$

Les équations (III.10)-(III.12) représentent le modèle qu'on doit résoudre pour déterminer le champ de vitesse. Le champ de pression peut être déduit par la suite à partir des équations (III.1) et (III.2) qui s'écrivent sous la forme conservative adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial R} + \frac{VU}{R} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}_{D_h}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) \quad (\text{III.13})$$

$$\frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial R} + \frac{V^2}{R} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{\text{Re}_{D_h}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} \right) \quad (\text{III.14})$$

$\text{Re}_{D_h} = \frac{\bar{u} D_h}{\nu}$ est le nombre de Reynolds qui exprime le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

V. Le maillage :

Quand la géométrie est régulière, rectangulaire ou circulaire par exemple, le choix du maillage est simple. Les lignes du maillage suivent souvent les directions des coordonnées [30]. Le maillage est la subdivision du domaine d'étude en grilles longitudinales et transversales dont l'intersection représente un nœud. Les grandeurs scalaires pression, température, sont stockées dans le nœud P du maillage, tandis que les grandeurs vectorielles u et v sont stockés aux milieux des segments reliant les nœuds. L'équation générale du transport est intégrée sur le volume de contrôle associé aux variables scalaires et les équations de quantités de mouvement sont intégrées sur les volumes de contrôle associés aux composantes de vitesse. Le volume de contrôle de la composante longitudinale U est décalé suivant la direction X par rapport au volume de contrôle principal (scalaire), celui de la composante transversale V est décalé suivant la direction R . Ce type de maillage dit maillage décalé permet une bonne approximation des flux convectifs et une meilleure évaluation des gradients de pression ainsi une stabilisation numérique de la solution [31]. En ce qui concerne la formulation de vorticité-fonction de

courant, on définit les variables dans les coins du volume de contrôle scalaire comme la figure III.2 le montre.

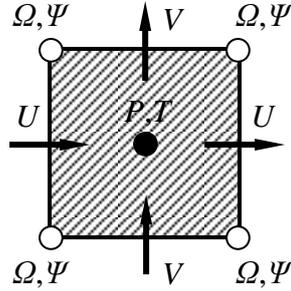


Figure III.2 : Maillage décalé

VI. Discrétisation avec la méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques, qui peuvent être résolues numériquement. Elle consiste à intégrer les équations de transport (EDP) sur chaque volume de contrôle. Ce dernier de centre P est délimité par les lignes discontinues, et ces faces sont localisées aux points *e* et *w* dans la direction X, *n* et *s* dans la direction R. E, W, N, S sont les centres des volumes de contrôle adjacents situés respectivement à l’Est, à l’Ouest, au Nord et au Sud du point P (Figure III.3).

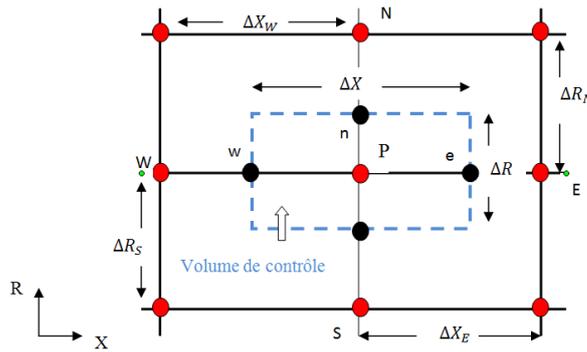


Figure III.3 : Volume de contrôle typique bidimensionnel

La discrétisation de l'équation (III.10) se fait en l'intégrant sur le volume de contrôle de la variable Ω :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial(U\Omega)}{\partial X} dXdR + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(V\Omega)}{\partial R} dXdR = \frac{1}{Re_{D_h}} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} dXdR +$$

$$\frac{1}{\text{Re}_{D_h}} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} dXdR + \frac{1}{\text{Re}_{D_h}} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Omega}{R} \right) dXdR \quad (\text{III.15})$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} ((U\Omega)_e - (U\Omega)_w) \Delta R + ((V\Omega)_n - (V\Omega)_s) \Delta X &= \frac{\Delta R}{\text{Re}_{D_h}} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)_e - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)_w \right] + \\ &\frac{\Delta X}{\text{Re}_{D_h}} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_n - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_s \right] + \frac{\Delta X}{\text{Re}_{D_h}} \left[\left(\frac{\Omega}{R} \right)_n - \left(\frac{\Omega}{R} \right)_s \right] \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

En utilisant un schéma approprié pour approximer les valeurs des fonctions aux interfaces du volume de contrôle par rapport aux nœuds du maillage (Dans cette étude, nous avons choisi le schéma de loi de puissance), le réarrangement de cette équation donne :

$$A_P \Omega_P = A_E \Omega_E + A_W \Omega_W + A_N \Omega_N + A_S \Omega_S \quad (\text{III.17})$$

Où les expressions des coefficients de cette équation sont données par :

$$A_E = D_e \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_e}{D_e} \right| \right)^5 \right] + [-F_e, 0]$$

$$A_W = D_w \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_w}{D_w} \right| \right)^5 \right] + [F_w, 0]$$

$$A_N = D_n \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_n}{D_n} \right| \right)^5 \right] + [-F_n, 0] + \frac{\Delta X}{2\text{Re}_{D_h} R_N}$$

$$A_S = D_s \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_s}{D_s} \right| \right)^5 \right] + [F_s, 0] - \frac{\Delta X}{2\text{Re}_{D_h} R_S}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + F_e - F_w + F_n - F_s - \frac{\Delta X}{2\text{Re}_{D_h} R_N} + \frac{\Delta X}{2\text{Re}_{D_h} R_S}$$

L'opérateur [] indique que cette quantité prend le max des deux valeurs entre crochet. Les coefficients de l'équation (III.17) contiennent une combinaison entre les flux convectifs F et diffusifs D aux interfaces des volumes de contrôle. Les valeurs de F et D pour chaque interface e , w , n et s du volume de contrôle sont données par les relations suivantes :

$$F_e = \frac{1}{4R_P} (\Psi_N - \Psi_S + \Psi_{NE} - \Psi_{SE}) \quad F_w = \frac{1}{4R_P} (\Psi_N - \Psi_S + \Psi_{NW} - \Psi_{SW})$$

$$F_n = -\frac{1}{4R_n} (\Psi_E - \Psi_W + \Psi_{EN} - \Psi_{WN}) \quad F_s = -\frac{1}{4R_s} (\Psi_E - \Psi_W + \Psi_{ES} - \Psi_{WS})$$

$$D_e = \frac{\Delta R}{R_e \Delta X} \quad D_w = \frac{\Delta R}{R_e \Delta X} \quad D_n = \frac{\Delta X}{R_e \Delta R} \quad D_s = \frac{\Delta X}{R_e \Delta R}$$

Noter bien que l'équation (III.17) est applicable seulement pour les nœuds internes; pour les nœuds qui coïncident avec les frontières du domaine physique, des conditions aux limites spéciales seront développées.

De même que précédemment, la discrétisation de l'équation (III.12) se fait en l'intégrant sur le volume de contrôle de la variable Ψ :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} dXdR + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} dXdR - \int_w^e \int_s^n \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} dXdR = - \int_w^e \int_s^n R \Omega dXdR \quad (\text{III.18})$$

Ce qui conduit à :

$$\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)_e - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)_w \right) \Delta R + \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)_n - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)_s \right) \Delta X - \frac{\Delta X}{R_P} (\Psi_n - \Psi_s) = -R_P \Omega_P \Delta X \Delta R \quad (\text{III.19})$$

En exprimant les flux aux interfaces avec le schéma en différences finies centré, on obtient après réarrangement :

$$B_P \Psi_P = B_E \Psi_E + B_W \Psi_W + B_N \Psi_N + B_S \Psi_S + S_\Psi \quad (\text{III.20})$$

Où les expressions des coefficients de cette équations sont données par :

$$B_E = \frac{\Delta R}{\Delta X} \quad B_W = \frac{\Delta R}{\Delta X} \quad B_N = \frac{\Delta X}{\Delta R} - \frac{\Delta X}{2R_P} \quad B_S = \frac{\Delta X}{\Delta R} + \frac{\Delta X}{2R_P}$$

$$B_P = B_E + B_W + B_N + B_S \quad S_\Psi = R_P \Omega_P \Delta X \Delta R$$

Passant maintenant aux composantes du vecteur vitesse qui s'expriment chacune dans son propre volume de contrôle décalé, par:

$$U_P = \frac{1}{R_P} \frac{\Psi_n - \Psi_s}{\Delta R} \quad V_P = -\frac{1}{R_P} \frac{\Psi_e - \Psi_w}{\Delta X} \quad (\text{III.21})$$

En utilisant l'écriture indicielle, le système d'équations à résoudre s'écrit comme suit :

$$A_{P_{i,j}} \Omega_{i,j} = A_{E_{i,j}} \Omega_{i+1,j} + A_{W_{i,j}} \Omega_{i-1,j} + A_{N_{i,j}} \Omega_{i,j+1} + A_{S_{i,j}} \Omega_{i,j-1} \quad (\text{III.22})$$

Avec :

$$A_{E_{i,j}} = D_e \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_e}{D_e} \right| \right)^5 \right] + [-F_e, 0]$$

$$A_{W_{i,j}} = D_w \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_w}{D_w} \right| \right)^5 \right] + [F_w, 0]$$

$$A_{N_{i,j}} = D_n \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_n}{D_n} \right| \right)^5 \right] + [-F_n, 0] + \frac{\Delta X}{2\text{Re}_{D_h} R_{j+1}}$$

$$A_{S_{i,j}} = D_s \left[0, \left(1 - 0.1 \left| \frac{F_s}{D_s} \right| \right)^5 \right] + [F_s, 0] - \frac{\Delta X}{2\text{Re}_{D_h} R_{j-1}}$$

$$A_{P_{i,j}} = A_E + A_W + A_N + A_S + F_e - F_w + F_n - F_s - \frac{\Delta X}{2\text{Re}_{D_h} R_{j+1}} + \frac{\Delta X}{2\text{Re}_{D_h} R_{j-1}}$$

$$F_e = \frac{1}{4R_j} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1})$$

$$F_w = \frac{1}{4R_j} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j-1})$$

$$F_n = -\frac{1}{4(R_j + \frac{\Delta R}{2})} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1})$$

$$F_s = -\frac{1}{4(R_j - \frac{\Delta R}{2})} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j-1})$$

$$B_{P_{i,j}} \Psi_{i,j} = B_E \Psi_{i+1,j} + B_W \Psi_{i-1,j} + B_{N_j} \Psi_{i,j+1} + B_{S_j} \Psi_{i,j-1} + S_{\Psi_{i,j}} \quad (\text{III.23})$$

Avec :

$$B_E = \frac{\Delta R}{\Delta X} \quad B_W = \frac{\Delta R}{\Delta X} \quad B_{N_j} = \frac{\Delta X}{\Delta R} - \frac{\Delta X}{2R_j} \quad B_{S_j} = \frac{\Delta X}{\Delta R} + \frac{\Delta X}{2R_j}$$

$$B_{P_j} = B_E + B_W + B_{N_j} + B_{S_j} \quad S_{\Psi_{i,j}} = R_j \Omega_{i,j} \Delta X \Delta R$$

La solution des équations (III.22) et (III.23) nous permet de déduire directement le champs de vitesse définie par :

$$U_{i,j} = \frac{1}{R_j + \frac{\Delta R}{2}} \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}}{\Delta R} \quad V_{i,j} = -\frac{1}{R_j} \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta X} \quad (\text{III.24})$$

VII. Conditions aux limites :

VII.1. A l'entrée du canal :

L'écoulement est supposé établi dynamiquement, donc la vitesse longitudinale a un profil parabolique en r (écoulement de *Poiseuille*), tel que :

$$U = 2 - 8R^2 \quad (\text{III.25})$$

La distribution de la fonction de courant Ψ à l'entrée peut être déterminée en multipliant la relation (III.25) par R , puis intégrant le produit suivant R , avec $\Psi(0) = 0$, on obtient :

$$\Psi = R^2 - 2R^4 \quad \text{ou} \quad \Psi_{1,j} = R_j^2 - 2R_j^4 \quad (\text{III.26})$$

La distribution de la vorticité Ω à l'entrée peut être déterminée, à partir de son expression, en dérivant la relation (III.25) :

$$\Omega = 16R \quad \text{ou} \quad \Omega_{1,j} = 16R_j \quad (\text{III.27})$$

VII.2. Sur l'axe de symétrie :

L'axe de symétrie représente une ligne de courant, donc la fonction de courant prend une valeur constante qui est égale à zéro d'après la condition choisie à l'entrée :

$$\Psi = 0 \quad \text{ou} \quad \Psi_{i,1} = 0 \quad (\text{III.28})$$

Etant donné que sur l'axe de symétrie du canal la vitesse longitudinale U est maximale et la vitesse radiale V est nulle, la vorticité par définition sera nulle sur cet même axe :

$$\Omega = 0 \quad \text{ou} \quad \Omega_{i,1} = 0 \quad (\text{III.29})$$

VII.3. A la sortie du canal :

A la sortie du canal, toutes les propriétés de l'écoulement peuvent être extrapol  es. Si on choisit par exemple un schéma d'extrapolation quadratique, la fonction de courant et la vorticité s'écrivent dans ce plan comme suit :

$$\Psi_{N,j} = 3\Psi_{N-1,j} - 3\Psi_{N-2,j} + \Psi_{N-3,j} \quad (\text{III.30})$$

$$\Omega_{N,j} = 3\Omega_{N-1,j} - 3\Omega_{N-2,j} + \Omega_{N-3,j} \quad (\text{III.31})$$

VII.4. Sur la paroi du canal :

La paroi du canal représente également une ligne de courant, donc sur cette paroi la fonction de courant prend aussi une valeur constante qui peut être déduite de la distribution de la fonction de courant à l'entrée (III.26) en remplaçant par $R = \frac{1}{2}$ ce qui donne :

$$\Psi_{\text{paroi}} = \frac{1}{8} \tag{III.32}$$

En ce qui concerne la vorticité, les conditions aux limites peuvent ˆtre sp cifi es à l'aide du développement en série de Taylor. Tout d'abord, observons le schéma suivant :

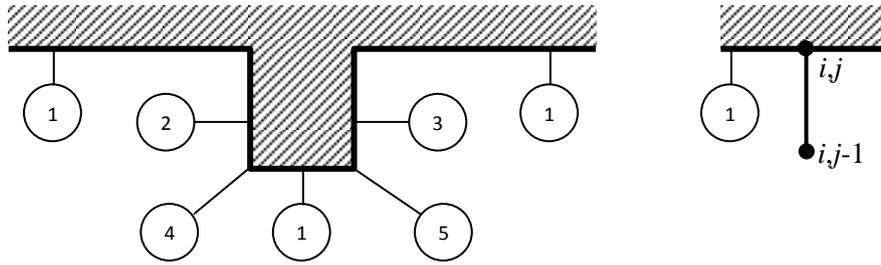


Figure III.4 : Conditions aux limites de la vorticité à la paroi du canal

Etant donné que la vitesse longitudinal et radiale sont nulles sur la paroi du canal, la vorticité s'exprime sur les surfaces d sign es par (1) simplement par :

$$\Omega = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} \quad \text{ou} \quad \Omega_{i,j} = -\frac{1}{R_j} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} \right)_{i,j}$$

Le développement en série de Taylor de $\Psi_{i,j-1}$ au voisinage du nœud (i,j) s'écrit:

$$\Psi_{i,j-1} = \Psi_{i,j} - \frac{\Delta R}{1!} \underbrace{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)_{i,j}}_{=R_j U_{i,j}=0} + \frac{\Delta R^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} \right)_{i,j} + O(\Delta R^3)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, la d riv e seconde de la fonction de courant à la paroi peut ˆtre approxim e par :

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} \right)_{i,j} = \frac{2(\Psi_{i,j-1} - \Psi_{i,j})}{\Delta R^2}$$

En remplaçant par cette approximation dans l'expression de la vorticité, on aura :

$$\Omega_{i,j} = \frac{2(\Psi_{i,j} - \Psi_{i,j-1})}{\Delta R^2 R_j} \tag{III.33}$$

En suivant la mˆme démarche, on trouve les expressions de la vorticité pour les parois (2) et (3) et pour les nœuds (4) et (5) respectivement :

$$\Omega_{ij} = \frac{2(\Psi_{ij} - \Psi_{i-1,j})}{R_j \Delta X^2} \tag{III.34}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{2(\Psi_{ij} - \Psi_{i+1,j})}{R_j \Delta X^2} \quad (\text{III.35})$$

$$\Omega_{ij} = \frac{2(\Psi_{ij} - \Psi_{i-1,j})}{R_{ij} \Delta X^2} + \frac{2(\Psi_{ij} - \Psi_{i,j-1})}{R_{ij} \Delta R^2} \quad (\text{III.36})$$

$$\Omega_{ij} = \frac{2(\Psi_{ij} - \Psi_{i+1,j})}{R_{ij} \Delta X^2} + \frac{2(\Psi_{ij} - \Psi_{i,j-1})}{R_{ij} \Delta R^2} \quad (\text{III.37})$$

VIII. Détermination du champ de pression :

Après avoir déterminé le champ de vitesse, la distribution de pression du fluide en écoulement peut être calculée directement en intégrant sur le volume de contrôle de U et le volume de contrôle de V les équations de Navier-Stokes (III.13) et (III.14) respectivement. La première équation permet de déterminer le gradient de pression axial (suivant X), tandis que la deuxième équation permet de déterminer le gradient de pression radial (suivant R). Donc il suffit d'utiliser l'une de ces équations pour calculer la pression à une position donnée (nœud principal " P "); mais le choix dépend à quel nœud (ouest " W " ou sud " S ") la pression est connue. En commençant par l'équation (III.13), l'intégration donne :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial(UU)}{\partial X} dX dR + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(VU)}{\partial R} dX dR + \int_s^n \int_w^e \frac{VU}{R} dX dR = \\ - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial X} dX dR + \frac{1}{Re_{D_h}} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) dX dR \quad (\text{III.38})$$

De la même manière que pour l'équation (III.15), il en résulte une équation de la forme :

$$P = P_{i-1,j} + \frac{1}{\Delta R} \left(\sum a_{vs} U_{vs} + S_{U_{i,j}} - a_{P_{i,j}} U_{i,j} \right) \quad (\text{III.39})$$

Et après l'intégration de l'équation (III.14), on obtient une équation de la forme :

$$P_{i,j} = P_{i,j-1} + \frac{1}{\Delta X} \left(\sum b_{vs} V_{vs} + S_{V_{i,j}} - b_{P_{i,j}} V_{i,j} \right) \quad (\text{III.40})$$

Où l'indice " vs " réfère aux nœuds voisins du nœud principal. Pour la présente configuration géométrique, en sachant la pression à l'entrée du canal, la pression peut être calculée à partir de l'équation (III.39) dans tous les nœuds internes sauf dans ceux qui se trouvent juste derrière la paroi de l'obstacle où l'équation (III.40) peut être plutôt utilisée.

IX. Algorithme de résolution numérique :

Les ensembles d'équations algébriques (III.17) et (III.20), compte tenu des conditions aux limites présentées dans la section (VII), sont résolus simultanément pour un maillage de $N \times M$ nœuds en utilisant un processus de calcul itératif. Une fois que la solution est obtenue, les composantes de la vitesse peuvent être déterminées directement des

expressions (III.24), puis la distribution de la pression peut être déduite des équations (III.39) et (III.40). De ce fait, l'algorithme qu'on a utilisé peut se résumer par les points suivants selon leur ordre d'exécution :

1. Déclaration des données et estimations initiales;
2. Calculer Ψ à partir de (III.20);
3. Calculer Ω à partir de (III.17);
4. Répéter les étapes précédentes 2 et 3 jusqu'à ce qu'on obtient la solution du problème (associée à une erreur relative inférieure à $\varepsilon = 10^{-5}$);
5. Calculer les composante de la vitesse à partir de (III.24);
6. Calculer la pression à partir de (III.39) et (III.40).

X. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a exposé les différentes étapes de la résolution du problème, puis la discrétisation des équations gouvernantes. On doit résoudre les équations de continuité et de quantité de mouvement, la solution analytique s'avère difficile et très compliquer, donc on va résoudre ces équations numériquement en utilisant la méthode des volumes finis, schéma de loi de puissance et on va développer un algorithme de résolution de ces équations et en va l'implanter dans le logiciel Matlab, pour obtenir la repartions de pression et de vitesse, ce qui feras l'objectif de notre études dans le prochaine chapitre.

Chapitre IV :
Résultats et Discussion

I. Introduction :

La présentation des résultats de cette étude et leurs interprétations feront l'objet de ce chapitre. Ces résultats correspondent à une plaque à orifice concentrique d'arête vive qui est fabriquée en usinant un trou droit précis au milieu d'une plaque métallique mince (Figure IV.1). Ce type de débitmètre se caractérise principalement par un coefficient $0.3 \leq \beta = \frac{d}{D} \leq 0.7$ défini comme étant le rapport du diamètre d'alésage au diamètre intérieur du tuyau [32], et par une épaisseur appropriée $0.005 \leq \frac{e}{D} \leq 0.02$ pour résister aux chocs et aux forces exercés par l'écoulement sur la plaque sans être écrasé ou déformé [33]. Les résultats présentés ci-dessous sont obtenus pour $\frac{L}{D} = 100$, $\beta = 0.3$ à 0.7 , $\frac{e}{D} = 0.02$, $Re_{D_h} = 500$ à 2000 , et pour un maillage uniforme de 5001×21 nœuds.

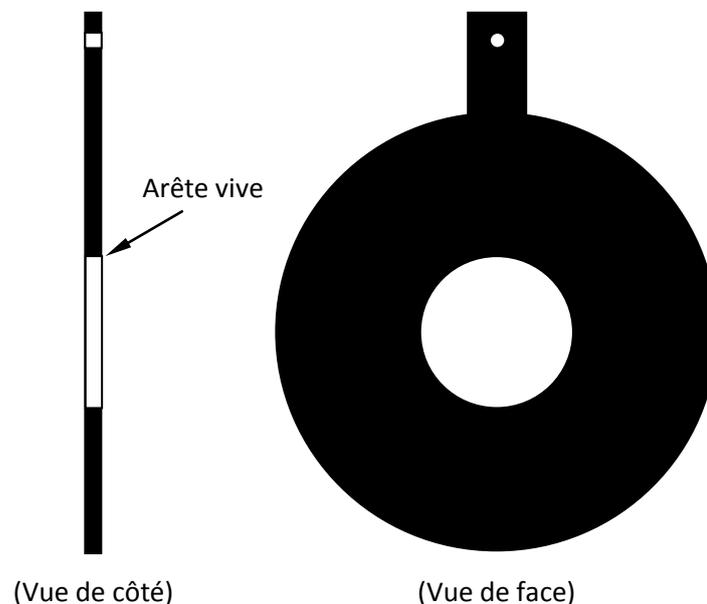


Figure IV.1 : plaque à orifice concentrique - arête vive

II. Interprétation des résultats :

Les figures (IV.2) - (IV.4) représentent les lignes de courant à travers la plaque à orifice pour plusieurs valeurs du coefficient β et du nombre de Reynolds Re_{D_h} . Ces figures montrent que le rétrécissement brusque de la section droite de la conduite entraîne l'apparition d'une zone de recirculation en aval de la plaque, dont les dimensions de cette zone dépendent de β et aussi de Re_{D_h} .

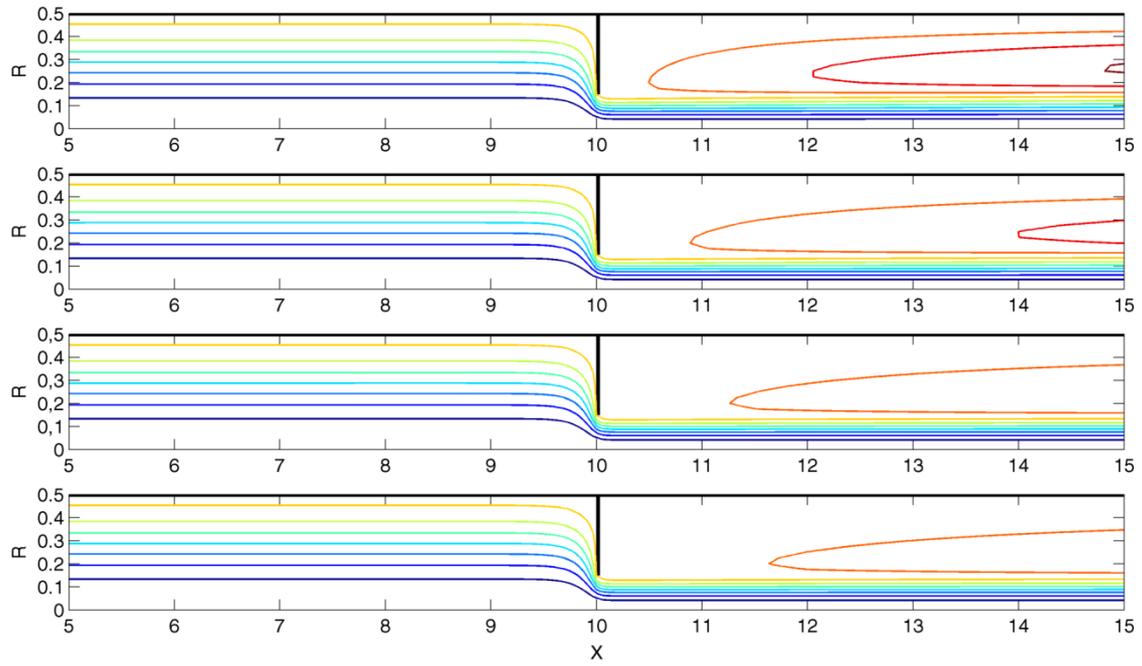


Figure IV.2 : Lignes de courant pour $\beta = 0.3$
 et $Re_{D_h} = 500, 1000, 1500, 2000$ respectivement

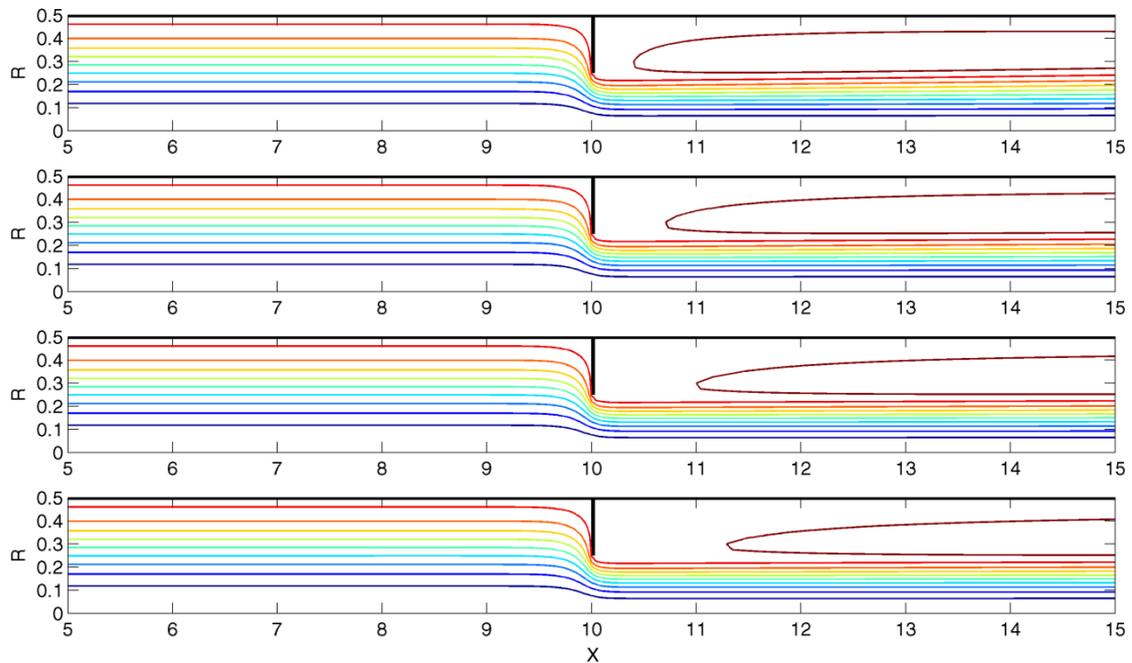


Figure IV.3 : Lignes de courant pour $\beta = 0.5$
 et $Re_{D_h} = 500, 1000, 1500, 2000$ respectivement

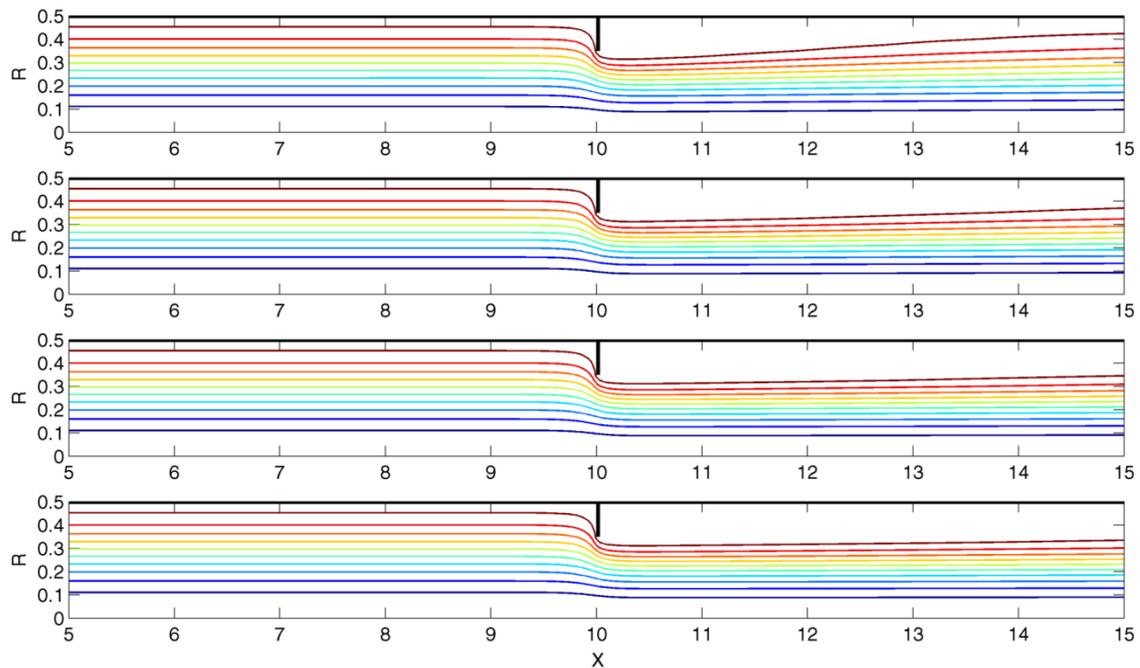


Figure IV.4 : Lignes de courant pour $\beta = 0.7$

et $Re_{D_h} = 500, 1000, 1500, 2000$ respectivement

La figure (IV.5) représente le profil de la vitesse longitudinale à différentes positions sur l'axe des X et pour différentes valeurs du coefficient β . A l'entrée ($X = 0$), le profil de la vitesse est imposé comme étant parabolique du fait que l'écoulement en amont de la plaque à orifice est considéré établi dynamiquement. Au niveau de la plaque à orifice ($X = 10$), la vitesse moyenne de l'écoulement augmente due à la diminution de la section de la conduite telle que s'énonce le principe de conservation de la masse. En aval de la plaque à orifice, une distorsion des profils de la vitesse correspond à l'apparition d'une zone de recirculation peut être observée. Cette distorsion devient de plus en plus marquée et elle se manifeste sur une longueur de plus en plus large à mesure que β diminue.

Bien évidemment, la présence d'une singularité géométrique dans la conduite est responsable de la dissipation de l'énergie mécanique de l'écoulement sous forme de pertes de charge dites "singulières". Plus le coefficient β est petit plus la perte de charge générée est élevée, ce qu'on peut clairement constater à partir de la figure (IV.6) qui représente le gradient axial de la pression moyenne sur une section droite.

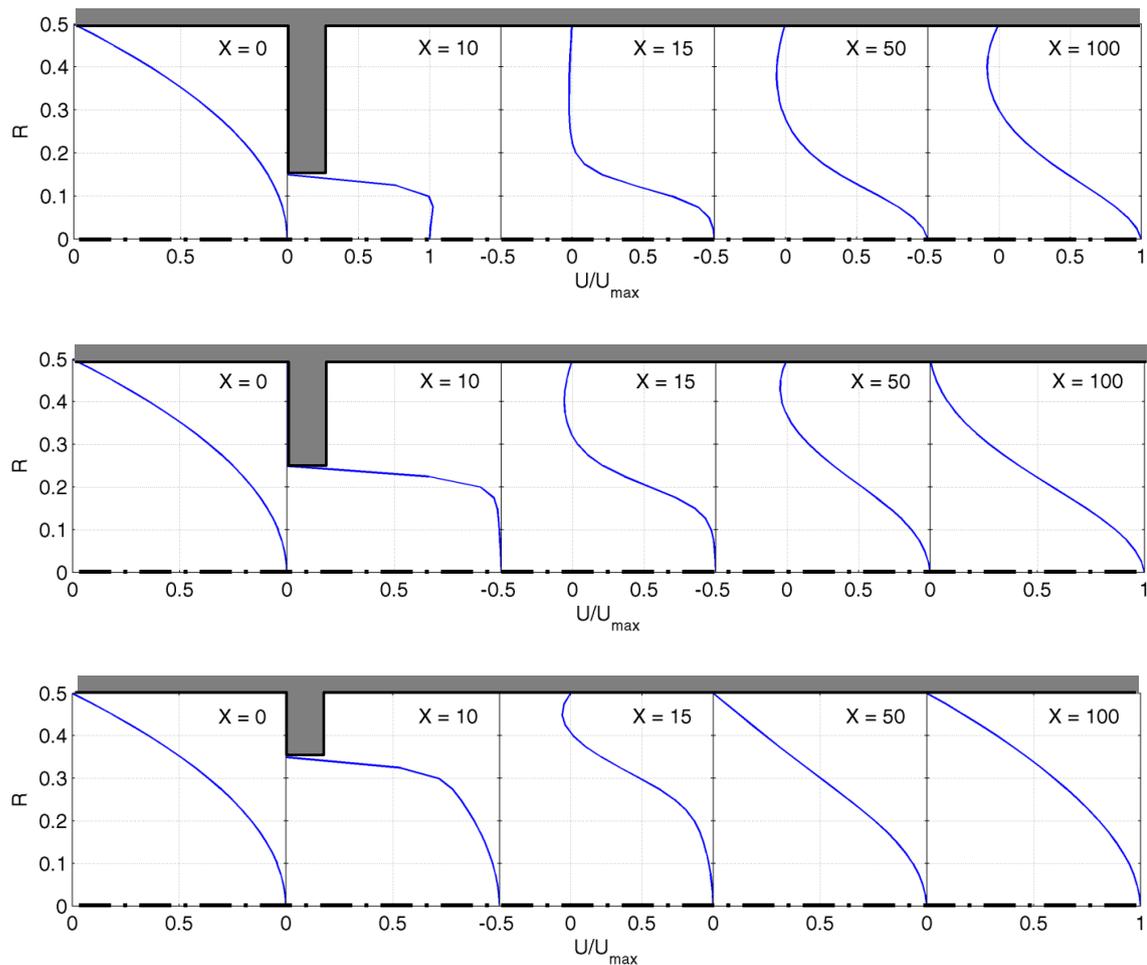


Figure IV.5 : Profil de la vitesse longitudinale à différentes positions sur l'axe des X
pour $Re_{D_h} = 2000$ et $\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ respectivement

En amont de la plaque, la dissipation d'énergie est due au frottement des particules fluides avec la paroi de la conduite et les pertes de charge associées sont appelées pertes de charge "linéaires" du fait que la pression (moyenne) diminue linéairement avec X . Lorsque l'écoulement passe par l'orifice, la pression diminue brusquement à un minimum là où la vitesse de l'écoulement est maximale (effet Venturi). En s'éloignant de l'orifice dans le sens de l'écoulement, la pression augmente progressivement mais elle ne peut jamais atteindre la valeur qu'elle doit avoir en absence de la plaque à orifice; donc une partie de la pression est définitivement perdue (perte de charge permanente). Eventuellement, à une certaine distance plus loin en aval, la pression diminue de nouveau à cause du frottement.

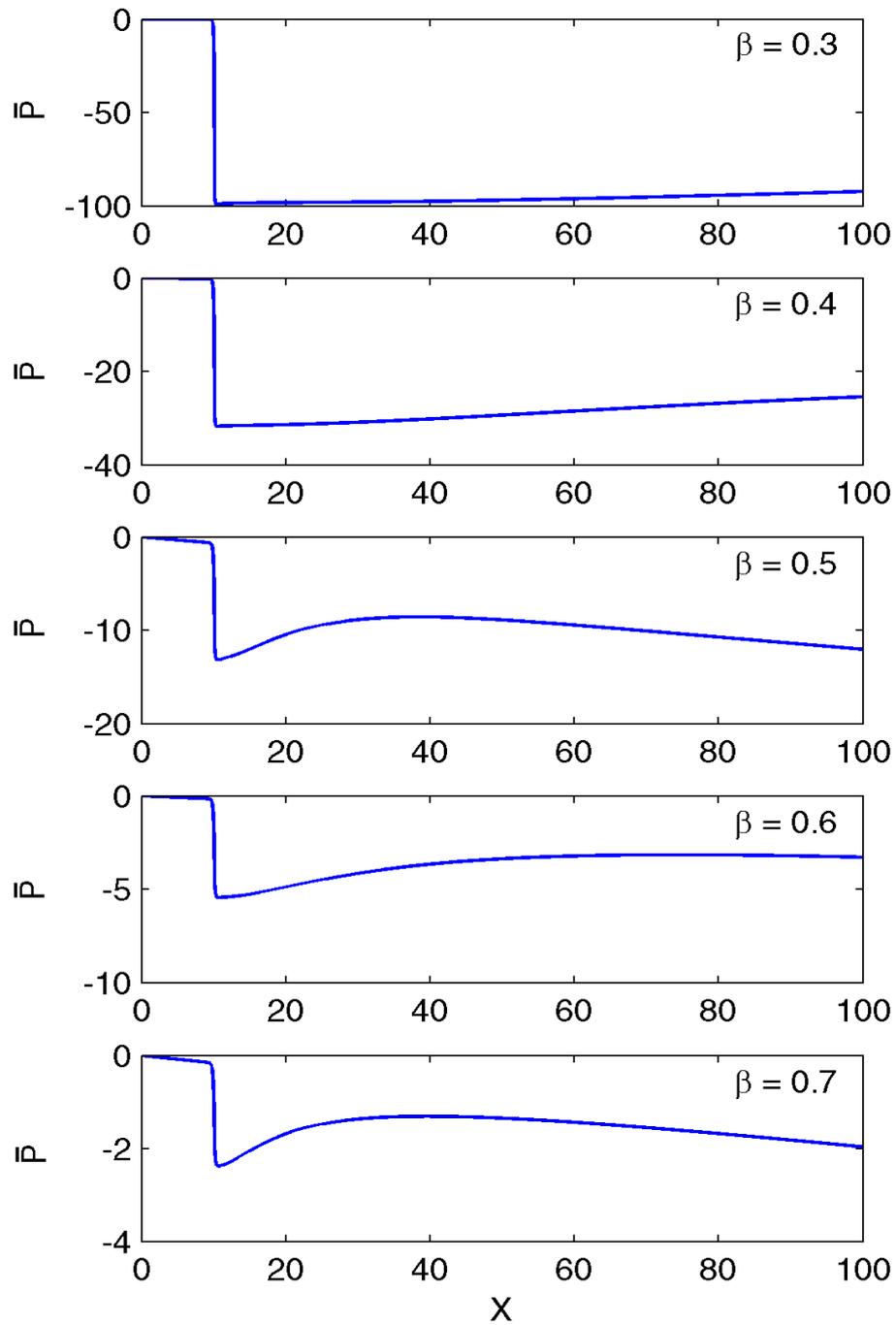


Figure IV.6 : Distribution de la pression moyenne suivant X pour $Re_{D_h} = 2000$

III. Détermination du coefficient de décharge C_d :

Le principe de fonctionnement de tout débitmètre à pression différentielle repose sur le théorème de Bernoulli qui met en relation la vitesse de l'écoulement (ou bien le débit) avec la pression différentielle, et qui s'écrit:

$$\bar{p}_1 + \frac{1}{2}\rho\bar{u}_1^2 = \bar{p}_2 + \frac{1}{2}\rho\bar{u}_2^2 \quad (\text{IV.1})$$

En combinant cette équation avec l'équation de continuité:

$$Q = \bar{u}_1 S_1 = \bar{u}_2 S_2 \quad (\text{IV.2})$$

on obtient la relation entre le débit et la pression différentielle:

$$Q_{thé} = \left(\frac{2\beta^4 \Delta\bar{p}}{1-\beta^4} S_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.3})$$

Jusqu'à maintenant l'effet de viscosité est exclu de l'équation ce qui conduit à des erreurs de calcul; la correction de cette équation peut se faire en remplaçant la pression différentielle avec le débit réel selon le changement de variables (III.9):

$$\frac{\Delta\bar{p}}{\rho} S_1^2 = Q_{réel}^2 \Delta\bar{P} \quad (\text{IV.4})$$

A partir de (IV.3) et (IV.4) on obtient:

$$C_d = \frac{Q_{réel}}{Q_{thé}} = \left(\frac{1-\beta^4}{2\beta^4 \Delta\bar{P}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.5})$$

Donc pour un coefficient β et un débit donnés, on détermine tout d'abord le champ de la vitesse puis le champ de la pression à partir des équations développées dans le chapitre précédent; par la suite, on déduit la chute de la pression moyenne à travers la plaque à orifice où les prises de pression sont considérées placées dans les coins de celle-ci (Corner taps), et finalement, on calcule le coefficient de décharge à partir de la relation (IV.5). Les résultats que nous avons obtenu sont présentés dans le tableau (IV.1), où on peut remarquer que la pression différentielle et par conséquent le coefficient de décharge ne varie pas avec le nombre de Reynolds (la différence qu'on peut voir résulte probablement des erreurs de la simulation); mais au contraire elle varie avec la variation du coefficient β . Sur l'intervalle considéré de β , le coefficient C_d est compris entre approximativement 0.77 et 0.84.

Tableau IV.1 : Coefficient de décharge C_d en fonction du coefficient β

β	Re_{D_h}	$\Delta\bar{P}$	C_d	\bar{C}_d
0.3	500	99.5268	0.7843	0.7862
	1000	99.0469	0.7862	
	1500	98.8735	0.7869	
	2000	98.7856	0.7873	
0.4	500	31.9111	0.7723	0.7747
	1000	31.7024	0.7748	
	1500	31.6322	0.7757	
	2000	31.5942	0.7761	
0.5	500	12.5625	0.7727	0.7727
	1000	12.5625	0.7727	
	1500	12.5625	0.7727	
	2000	12.5625	0.7727	
0.6	500	5.4049	0.7882	0.7930
	1000	5.3441	0.7927	
	1500	5.3165	0.7947	
	2000	5.2956	0.7963	
0.7	500	2.2679	0.8353	0.8388
	1000	2.2560	0.8375	
	1500	2.2403	0.8405	
	2000	2.2328	0.8419	

IV. Conclusion :

Les résultats présentés dans ce chapitre nous ont permis de conclure que seule la géométrie de la plaque à orifice a un effet sur le coefficient de décharge C_d , et que l'erreur relative de calcul du débit résultant de l'utilisation du théorème de Bernoulli, relation (IV.3), est de l'ordre de 20 - 30%.

*Conclusion
générale*

Conclusion générale

Conclusion générale

Le problème envisagé dans ce projet de fin d'étude porte sur l'écoulement visqueux laminaire dans une conduite circulaire équipée avec une plaque à orifice qui sert à générer une pression différentielle à partir de laquelle on peut calculer le débit de l'écoulement. L'objectif de l'étude est de déterminer le coefficient de décharge C_d défini comme étant le rapport du débit réel sur le débit théorique. La simulation de l'écoulement considéré a été réalisée avec la méthode des volumes finies et à l'aide d'un programme de calcul itératif développé sous Matlab. Les principaux résultats obtenus sont récapitulés ci-après:

Les dimensions de la zone de recirculation formée juste derrière la plaque à orifice sont affectées par le coefficient β et le nombre de Reynolds Re_{D_h} ;

La pression différentielle Δp et également le coefficient de décharge C_d dépendent seulement de β et non pas de Re_{D_h} ;

Pour β compris entre 0.3 et 0.7, le coefficient C_d est compris entre 0.77 et 0.84, ce qui correspond à une erreur relative de l'ordre de 20 à 30% produite par la relation du débit (IV.3) issue du théorème de Bernoulli;

En se basant sur les résultats numériques présentés dans le tableau (IV.1) et à l'aide du logiciel OriginPro 8, une relation générale du coefficient de décharge en fonction du coefficient β peut s'exprimer par:

$$C_d = 0.81224 + 0.10031 \times \beta - 1.02214 \times \beta^2 + 1.33333 \times \beta^3$$

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] SAKIR Amiroudine et JEAN-LUC Battaglia, Mécanique des fluides, Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2011, 1-255 pages.
- [2] N.SAD CHEMLOUL, Mécanique des fluides, Exercices corrigés et commentés avec rappel de cours, Presses de Mitidja, Baraki- Alger, 2018, 20 -214 pages.
- [3] KATEB Samir, Cours mécanique des fluides, Université Kasdi Merbeh, Ouargla, 2014-2015, 5 pages.
- [4] Dr.ELGUERRI Mohamed, Mécanique des fluides théories et applications, Université Ibn Khaldoun, Tiaret, M. Elguerri 2015, 5-10pages.
- [5] Méthodologies et Bonnes Pratiques de Simulation Numérique, <https://www.nafems.org/training/courses/methodologies-et-bonnes-pratiques-de-simulation-numerique/>, 27-07-2020.
- [6] Techniques de mesure des débits des fluides industriels, <http://aichouni.tripod.com/mech-elearn/e-maktaba/cherigui-magister/chap2.pdf>, 02/12/2019.
- [7] Mécanique des fluides, Ecoulement visqueux et perte de charge, ISET Nabeul, A.U. : 2013-2014, 29-33 pages.
- [8] K. Saad et T. Ouarda, Calcul de transfert d masse et de chaleur dans un fluide en écoulement dans un conduite coudée 90°, Université Mohamed Khider-Biskra, juin 2003, 8-18 pages.
- [9] Dr.Laid Massaoudi, Dynamique des fluides incompressible, cours pour Masters, Université Hadj Lakhdar, Batna, 19 Septembre 2013, 2-3-9 pages.
- [10] Jimmy ROUSSEL, MÉCANIQUE DES FLUIDES, Cours, 10 septembre 2018, 37 pages.
- [11] INDUSTRIAL INSTRUMENTATION, flow, C-8\N-IND\BOOK1-1, https://www.idconline.com/technical_references/pdfs/instrumentation/Industrial_Instrumentation%20-%20Flow.pdf , 14/10/2019, 4 pages.
- [12] Mitchell Cottrell, Fluid Flow Instrumentation, Missouri University of Science and Technology, Rev 1.0 9/xx/06, 4 pages.
- [13] Pascal BIGOT, LA MESURE DU DEBIT, CIRA-1 LES DIBITS, 10 pages.

Références bibliographiques

- [14] Amor Gharsalli, Mesures et Instrumentations « Mesure de Débit », Ministère de l'Enseignement Supérieur de la Recherche Scientifique, Université Virtuelle de Tunis, 4 pages.
- [15] Mesure de débit, L3_TP,
http://www.meca.universite-paris-saclay.fr/cours/L3_TP_Debit.pdf, 26/11/2019.
- [16] FLOW MEASUREMENT,
<https://amritavidya2.amrita.edu:8444/access/content/user/cb.en.u4mee14150/Instrumentation/Instrumentation%20P2/FLOW%20MEASUREMENT.pdf>, 14/10/2019.
- [17] Chawki Mahboube, Mécanique des fluides approfondi, cours, Université Mohamed Khaider-Biskra, 2018/2019.
- [18] A. Riadh. Développement de méthodes particulières pour la résolution des écoulements à surface libre, école technologie supérieure, (2007), 3 pages.
- [19] Hadjira ELGOUIZI, L'application de la Méthode des Différences Finies au modèle de Barré de Saint-Venant, Université de M'SILA, 2011-2012, 42 pages.
- [20] LIU, Weiye, MA, Youfu, LYU, Junfu, *et al.* Wet gas pressure drop across orifice plate in horizontal pipes in the region of flow pattern transition. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2020, vol. 71, p. 101678.
- [21] SZOLCEK, Max, CIONCOLINI, Andrea, SCENINI, Fabio, *et al.* Effect of thickness to diameter ratio on micro-orifice single-phase liquid flow at low Reynolds number. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2018, vol. 97, p. 218-222.
- [22] Colter L. Hollingshead, DISCHARGE COEFFICIENT PERFORMANCE OF VENTURI, STANDARD CONCENTRIC ORFICE PLATE, V-CONE, AND WEDGE FLOW METERS AT SMALL REYNOLDS NUMBERS, UTAH STATE UNIVERSITY Logan, Utah, 2011.
- [23] J. Kuhnen, D. Scarselli, M. Schaner et B. Hof, Relaminarization by Steady Modification of the Streamwise Velocity Profile in a Pipe, Springer, 2018, n°100, p.919-943.
- [24] Ahmmed Tanvir, Syed Zia Uddin, and M. Mahbubur Razzaque. "Effect of Surface Dimples on the Discharge Coefficient of an Orifice Meter." International Conference on Mechanical Engineering, 2015 (ICME2015) Dhaka, Bangladesh.

Références bibliographiques

- [25] Karthik, G. S. Y., K. J. Kumar, and V. Seshadri. "Prediction of Performance Characteristics of Orifice Plate Assembly for Non-Standard Conditions Using CFD." *Int. J. Eng. Tech. Res.* 3 (2015).
- [26] TUNAY, Tural, SAHIN, Besir, et AKILLI, Huseyin. Investigation of laminar and turbulent flow through an orifice plate inserted in a pipe. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 2004, vol. 28, no 2B, p. 403-414.
- [27] LAKSHMANA RAO, N. S., SRIDHARAN, K., et ALVI, S. H. Critical Reynolds number for orifice and nozzle flows in pipes. *Journal of hydraulic research*, 1977, vol. 15, no 2, p. 167-178.
- [28] JIANHUA, Wu, WANZHENG, Ai, et QI, Zhou. Head loss coefficient of orifice plate energy dissipator. *Journal of hydraulic research*, 2010, vol. 48, no 4, p. 526-530.
- [29] WANG, Lu-Qing, MA, Hong-Hao, SHEN, Zhao-Wu, *et al.* The influence of an orifice plate on the explosion characteristics of hydrogen-methane-air mixtures in a closed vessel. *Fuel*, 2019, vol. 256, p. 115908.
- [30] B. Nabil, SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA COMBUSTION TURBULENTE DANS DES GÉOMÉTRIES COMPLEXES, Université de Batna, 29 Janvier 2008, 56 pages.
- [31] S. Hossem, Simulation numérique d'écoulements bi et tridimensionnels stationnaires de fluide non newtonien en relation avec le procédé d'extrusion, Université de M'sila, 2015-2016, 34 pages.
- [32] Orifice plate flow measurement, Vakratoond-Bit Of Engineering, <http://vakratoond.com/instrumentation/orifice-plates/>, 09-07-2020.
- [33] INSTPEDIA, Instrumentation Engineering Professional Wbsite, Flow Measurement Instrument, <http://www.instpedia.com/Flow-En.php#Flow-2>

ANNEXE

Annexe

Formulation mathématique

Nous partons des équations **Navier-Stokes** pour un écoulement permanent visqueux newtonien incompressible, donné par (en l'absence de gravité) :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2)$$

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

Après la dérivation et la soustraction des deux équations ($\partial/\partial x$ {équation (2)} - $\partial/\partial r$ {équation (1)}) on aura :

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \quad (4)$$

L'équation qui en résulte exprimée avec la vorticité, définie par : $w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{vw}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right) \quad (5)$$

Rappelons que l'expression de la vorticité est donnée par :

$$w = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -rw \quad (6)$$

Afin de rendre les équations mathématiques régissant notre problème sous forme adimensionnelle

$$U = \frac{u}{\bar{u}}; \quad V = \frac{v}{\bar{u}}; \quad X = \frac{x}{D_h}; \quad R = \frac{r}{D_h};$$

Annexe

$$\Psi = \frac{\psi}{\bar{u}D_h^2}; \quad \Omega = \frac{D_h}{\bar{u}}w; \quad P = \frac{p}{\rho\bar{u}^2}$$

On injecte les variables dans les équations (1), (2) et (3) :

Equations de Navier-Stokes :

Suivant X :

$$U \bar{u} \frac{\partial(U \bar{u})}{\partial(X D_h)} + V \bar{u} \frac{\partial(U \bar{u})}{\partial(R D_h)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P \rho \bar{u})}{\partial(X D_h)} + \nu \left(\frac{\partial^2(U \bar{u})}{\partial(X D_h)^2} + \frac{\partial^2(U \bar{u})}{\partial(R D_h)^2} + \frac{1}{R D_h} \frac{\partial(U \bar{u})}{\partial(R D_h)} \right)$$

Faisant un arrangement de l'équation, il vient :

$$\left(\frac{\bar{u}^2}{D_h}\right) U \frac{\partial U}{\partial X} + \left(\frac{\bar{u}^2}{D_h}\right) V \frac{\partial U}{\partial R} = -\left(\frac{\bar{u}^2}{D_h}\right) \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\nu \bar{u}}{D_h^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) \quad (7)$$

Après simplification, l'équation (7) différentielle aux dérivées partielles sur l'axe (\overrightarrow{OX}) se réduit en:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) \quad (8)$$

De la même façon, sur l'axe (\overrightarrow{OR}), on aura :

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial R} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} \right) \quad (9)$$

Equation de continuité :

$$\left(\frac{\bar{u}}{D_h}\right) \frac{\partial U}{\partial X} + \left(\frac{\bar{u}}{D_h}\right) \frac{1}{R} \frac{\partial(RV)}{\partial R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial(RV)}{\partial R} = 0 \quad (10)$$

(8), (9) et (10) sont les équations différentielles aux dérivées partielles adimensionnelles.

Après la dérivation et la soustraction des deux équations ($\partial/\partial X$ {équation (9)} - $\partial/\partial R$ {équation (8)}) on aura :

$$U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + V \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) \left[\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial R} \right] = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) \right] \quad (11)$$

$$U \frac{\partial w}{\partial X} + V \frac{\partial w}{\partial R} - \frac{Vw}{R} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial R} - \frac{w}{R^2} \right) \quad (12)$$

Rappelons que l'expression de la vorticité equation (6) est donn e par :

$$-w = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (13) \text{ ( criture dimensionnelle)}$$

Annexe

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = -R\Omega \quad (14) \text{ (écriture adimensionnelle)}$$

Remplaçons la vorticité (écriture adimensionnelle) dans l'équation (12), on obtient alors :

$$U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{V\Omega}{R} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{\Omega}{R^2} \right) \quad (15)$$

Où :

$$\frac{\partial U\Omega}{\partial X} + \frac{\partial V\Omega}{\partial R} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Omega}{R} \right) \right) \quad (16)$$

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad V = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (17)$$

Les équations (15)-(17) représentent le modèle qu'on doit résoudre pour déterminer le champ de vitesse. Le champ de pression peut être déduit par la suite à partir des équations (1) et (2) qui s'écrivent sous la forme conservative adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial R} + \frac{VU}{R} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re_{D_h}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial R} + \frac{V^2}{R} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{Re_{D_h}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} \right) \quad (19)$$