République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

Bensaadi Abdelbassit

Titre :

Sur l'existence et l'unicité de la solution des EDSRs

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	GHERBEL BOULAKHRAS	UMKB	Président
Dr.	ABBA ABEDELMAJID	UMKB	Encadreur
Dr.	KORICHI FATIHA	UMKB	Examinatrice

JUIN 2021

Dédicace

À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien, et leurs prières tout au long de mes études.

À mes chères soeurs, pour leur encouragements permanents, et leur soutien moral.

À toute ma famille.

Que ce travail soit l'accomplissement de vos voeux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible, Merci d'être toujours là pour moi.

À mes amis, et à la promotion de mathématique 2021.

Je pris Allah de leur accorder longue vie et bonne santé.

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail,

J'exprime mes profondes gratitudes à mes parents,

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur **Dr.ABBA ABEDELMAJID**, de m'avoir proposé le sujet de mon mémoire. je le remercie aussi son suivi permanent de mon travail, ses remarques et suggestions sans les quelles ce mémoire n'aurait pas lieu,

Et je veux exprime tout mon respect aux membres du jury, qui ont acceptés d'évaluer et de juger mon travail,

À tous les proffesseurs qui m'ont appris,

À toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude d'une classe particulière d'équations différentielles stochastiques dont la solution est donnée en temps terminal T . Ce type d'équations est appelé équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs) ou en anglais (BSDE) (backward stochastic differential equations), Les EDSRs ont apparu pour la première fois en (1973) dans un article de Bismut dans le cas où le générateur est linéaire. Cependant le point de départ de la théorie des EDSRs est l'article de Pardoux et Peng dans lequel le générateur est non linéaire.

Le question que suppose est quelle est la signification et la solution de l'EDSR. On défini un mouvement Brownien d-dimensionnel (B_t), soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq T)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien. On considère des EDSR générale de la forme suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)\, dt - Z_t dB_t, \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

ou sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, w, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

telle que :

$f = f(t; w; y; z)$ est le générateur qui est une fonction progressivement mesurable donnée.

* Le condition terminale (finale) $Y_T = \xi$ qui est variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable est de carré intégrable.

Le résoudre de l'équation différentielle stochastique rétrograde c'est trouver un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq T)$, c'est-à-dire ne dépend que de l'information connu jusqu'à l'instant t.

Ce travail est composé de deux chapitres :

premier chapitre :

Dans ce chapitre, on introduit les notions générales du calcul stochastique on définit les processus stochastiques et leurs propriétés et les notions de mouvement brownien et l'espérance

conditionnel, et temps d'arrêt et martingale...etc.On parlait aussi sur les équations différentielles stochastiques (EDS), l'existance et l'unicité de sa solution avec démonstration en détail.

Deuxième chapitre :

nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR dans le cas lipschitzienne dans le cas général et énoncer le théorème de comparaison.

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique et l'EDS

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires à valeur dans un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est indéxée par le temps t. Le paramètre du temps t variant dans I.*

1. *Si t fixe : X_t est un v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeur dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.*
2. *Si ω fixe : X_t appelé la trajectoire de $(X_t)_{t \in T}$ associée à ω.*

Remarque 1.1.1

1. *Si $I \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus a temp discret.*
2. *Si $I \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus a temp continue.*

Définition 1.1.2 (Filtration) *Une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous*

$0 \leq s \leq t$ dans T

1. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.
2. On dit que la filtration est naturelle (ou canonique) de processus X si

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \qquad t \in T,$$

   c'est la plus petite σ-algébre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.
3. On dit qu'une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est continue à droite si

$$\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\mathcal{F}s = \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.3 (Processus adapté) *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.4 (Processus a trajectoire continue) *Un processus (X_t) est a trajectoire continue ou simplement processus continue si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; t \to X_t(\omega) \ \textit{est continue}\}) = 1.$$

Définition 1.1.5 (Processus progressivement mesurable) *Un processus $(X_t)_{t\in I}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$ l'application*

$(s, \omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Définition 1.1.6 (Processus càdlàg) *Un processus X est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et prouvues de limite à gauche pour presque tout ω.*

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors X est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition 1.1.7 (Mouvement Brownien) *on appelle $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifier :*

(i) *Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

(ii) *Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.*

(iii) *Si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0 = X_{t-s}$.*

Définition 1.1.8 (Mouvement Brownien standard) *Soit X un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien standard si :*

$$W_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s, \qquad \mathbb{E}[W_t] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}[W_t^2] = t.$$

Dans ce cas la loi de X_t est une loi normale.

Proposition 1.1.2 *Soit W un mouvement Brownien Standard :*

1. *Pour tout $t \geq 0, X_t = tW_{\frac{1}{t}}$, alors (X_t) est un MB.*
2. *Soit c réel positive $(c > 0)$,on a $Z_t = cW_{\frac{t}{c^2}}$, donc (Z_t) est un mouvement Brownien.*
3. *Pour tout $s > 0, \{W_{t+s} - W_s\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma(W_u, u \leq s)$.*

Théorème 1.1.1 *Un processus W est un mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussien continue centré de fonction de covariance :*

$$cov(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s) = s \wedge t = \min(t, s).$$

Proposition 1.1.3 *Soit W un MB alors presque sûrement on a :*

– *W n'est pas différentiable en aucun point t.*

– *W n'est pas à variation finie en aucun point t.*

Définition 1.1.9 (Temp d'arrêt) *Une variable aléatoire $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+$ est un temp d'arrêt (par rapport a la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ si pour $t \in T$:*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \ / \ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.10 (Martingales) *Un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est dit martingale si :*

1. *pour tout $t \geq 0$, M_t est $\mathcal{F}_t-$adapté ;*
2. *pour tout $t \geq 0$, M_t est intégrable, i.e. $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$;*
3. *pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$*

On définit de manière similaire sur-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s, , \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Et sous-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Proposition 1.1.4 *Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien*

(i) *$W_t^2 - t$ est une martingale.*

(ii) *Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}, \exp(\sigma W_t - \sigma^2 \frac{t}{2})$ est une martingale.*

Remarque 1.1.3 *Le mouvement Brownien standard $(W_t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^B = \sigma(W_s, s \leq t)$.*

Théorème 1.1.2 (Théorème de représentation des martingales) *Soit W_t un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$,et M_t une martingale $\mathcal{F}_t$-adapté. Alors, il existe un processus adapté Z_s tel que :*

$$M_t = M(0) + \int_0^t Z(s)dW_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Définition 1.1.11 (Martingale local) *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté à trajectoire continue à droite. On dit que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale local s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty, \;\; \mathbb{P} - p.s.$ et pour tout n, $M^{\tau_n} 1_{\tau_n > 0}$ est une martingale.*

Définition 1.1.12 (Variation finie, bornée et quadratique) *Soit $[0, T]$ un intervalle et $\pi_n = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$, une subdivision de $[0, T]$ de pas*

$$\|\pi_n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right|.$$

On appelle variation infinitésimal d'ordre p d'un processus X indexé par $[0, T]$ associé a π_n :

$$V_T^p(\pi_n) = \sum_{i=1}^n \left|X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right|^p.$$

Si $V_T^p(\pi_n)$ admet une limite dans (en un certain sens) lorsque $\|\pi_n\|_\infty \to_{n\to\infty} 0$ et la limite ne dépond pas de la subdivision choisie, on appelle $V_T^p = \lim_{\|\pi_n\|_\infty \to 0} V_T^p(\pi_n)$ variation d'ordre p.

a) *Si $p = 1$, la limite V_T^1 est appelée vaiation totale de X*

- *Si $\forall T$, V_T^1 est fini on dit que X est à variation finie.*
- *Si $\forall T$, V_T^1 est borné on dit que X est à variation finie.*

b) *Si $p = 2$, la limite est appelée variation quadratique de X.*

1.2 Calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie de façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), $W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $x : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à W_t, alors l'intégrale d'Itô

$\displaystyle\int_0^T \phi_s dW_s$ est définie par la limite en moyenne quadratique de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et W_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.

l'objectif c'est définir l'intégrale $\int_0^t \phi_s dW_s$ pour des processus ϕ

1. Cas étagé

On dit ϕ est un processus étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables de carré intégrables $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$, soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit

$$\int_0^\infty \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

On sais que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = 0 \text{ et } Var\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = \left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

Alors
$$\int_0^t \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i \wedge t}).$$

2. Cas général

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite).

Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^2) ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dW_s$ de carré intégrable.

On va montrer que
$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dW_s\right] = 0.$$

On a :
$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (W_t) est un processus gaussien alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = 0$ car $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ sont à acroissement indépendantes.

Pour montrer que

$$var[I_t(\phi)] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
var[I_t(\phi)] &= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2) - \mathbb{E}(I_t(\phi))^2,\\
&= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2),\\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 dW_s\right],\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)^2\right],\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 \mathbb{E}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right],\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 (t_{i+1} - t_i),\\
&= \int_0^\infty \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

1.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a quelque propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1. Linéairité :

$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dW_s = a\int_0^t \phi_s^1 dW_s + b\int_0^t \phi_s^2 dW_s.$$

2. Additivité : pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t \phi_v dW_v = \int_s^u \phi_v dW_v + \int_u^t \phi_v dW_v.$$

3. Propriétés de martingale : pour tout processue ϕ les processus :

$$t \to I_t(\phi), \quad \text{et} \quad t \to I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s ds,$$

sont des $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale continues.

$$\mathbb{E}[(I_t(\phi) - I_s(\phi))^2 \mid \mathcal{F}_s^W] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du / \mathcal{F}_s^W\right].$$

4. Si $(x_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}(\int_0^T |x_s|^2 ds) < +\infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^t |x_s|^2 dW_s\right|^2\right] \leq 4\left(\int_0^T |x_s|^2 ds\right),$$

5. Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.2.3 Processus d'Itô

Définition 1.2.1 (processus d'Itô) *Un processus d'Itô est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dW_s \quad \mathbb{P} - p.s,$$

avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^t |\varphi_s| ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \|\theta_s\|^2 ds < +\infty,$$

où le coefficient φ est le drifte ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion.

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = \varphi_s ds + \theta_s dW_s.$$

1.2.4 Formule d'Itô

Théorème 1.2.1 (première formule d'Itô) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)ds,$$

Théorème 1.2.2 (deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction de C^2, on a alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s)\theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds.$$

La notation infinitésimale de cette relation est donc :

$$df(X_t) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Remarque 1.2.1 *La formule dItô s'énonce également dans le cas multidimentionnel (i.e $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $W(t)$ sont des matrices)*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) + \textstyle\int_0^t f_s(s, X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\varphi_s ds \\ + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\theta(s)^T f(s, X(s))\theta(s)\right] + \textstyle\int_0^t f_x(s, X_s)\theta_s dW_s \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 (Formule d'intégration par parties) *Si X et Y sont des processus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.3 Équation différentielle stochastique (EDS)

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation de l'équation différentielle ordinaire (EDO) avec un terme aléatoire modélisant un bruit autour de phénomène déterministe, la parturbation la plus simple est l'ajout d'un Brownien.

Définition 1.3.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) donnée par :*

$$x_t = x + \int_0^t b(s, x_s)ds \ + \int_0^t \sigma(x_s)dW_s,$$

ou sous forme

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t, \\ x_0 = x, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\{W; t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien d-dimensionnel. Le coefficient $b(t, x_t)$ est appelé dérive et le coefficient $\sigma(t, x_t)$ de dW_t est appelé terme de diffusion.

Pour trouver une solution (forte) à l'équation (1.1) signifie trouver une processus stochastique (x_t) $t \geq 0$ continue $\mathcal{F}_t$-adapté qui vérifie :

1. Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b(s, x_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, x_s)dW_s$ sont bien définies :

$$\int_0^t |b(s, x_s)| \, ds < +\infty \text{ et } \int_0^t |\sigma(s, x_s)|^2 \, ds < +\infty, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

2. (x_t), $t \geq 0$ vérifie (1.1) :

$$x_t = x + \int_0^t b(s, x_s)ds \ + \int_0^t \sigma(s, x_s)dW_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

1.3.1 Éxistence et unicité

Le théorème dessous donne les conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat l'existence et l'unicité du solution de l'équation (1.1).

Théorème 1.3.1 (d'éxistence et d'unicité) *Si b et σ sont des fonctions continues telles qu'il existe $k < +\infty$:*

1. *Conditons de lipschitz :* $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k\,|x-y|$.
2. *Conditons de coissance linéaire ;* $|b(t,x) - \sigma(t,x)| \leq k(1+|x|)$.
3. $\mathbb{E}(x^2) < +\infty$.

Alors : pour tout $t \geq 0$ l'équation (1.1) admet solution unique dans $[0,T]$. D'autre part la solution $(x_s)_{0\leq s\leq T}$ vérifie

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2) < +\infty.$$

Preuve. a- Pour démontrer l'existence d'une solution forte, on définit l'espace S_c^2 par :

$$S_c^2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{les processus progressivement mesurables tel que } \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2) < +\infty \text{ continue,} \\ \text{muni de } \|x\| = \mathbb{E}\left(\left[\sup_{0\leq s\leq T} |x_s|^2\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty \right). \end{array} \right\}$$

Pour $x \in S_c^2$ posons, pour tout $t \in [0,T]$

$$\Psi(x_t) = x + \int_0^t b(s,x_s)ds \; + \int_0^t \sigma(s,x_s)dW_s,$$

le processus $\Psi(x)$ est bien définie.et est continu si $x \in S_c^2$.

Soient x et y deux éléments de S_c^2 on utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$|\Psi(x_t)-\Psi(y_t)|^2 \leq 2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (b(s,x_s)ds - b(s,y_s))\,ds\right|^2 + 2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t (\sigma(s,x_s)ds-\sigma(s,y_s))\,dW_s\right|^2.$$

En utilise les propriétés (4 et 5) de l'intégrale stochastique alors on obient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(x_t)-\Psi(y_t)|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u |b(s,x_s)ds - b(s,y_s)|\,ds\right)^2\right]\\ &+ 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s,x_s)-\sigma(s,y_s)|^2\,ds\right].\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(x_t)-\Psi(y_t)|^2\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u |b(s,x_s)-b(s,y_s)|^2\,ds\right]\\ &+ 8\mathbb{E}\left[\int_0^u |\sigma(s,x_s)ds-\sigma(s,y_s)|^2\,ds\right].\end{aligned}$$

Comme les fonction b et σ sont lipschiz

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi(x_t)-\Psi(y_t)|^2\right] \leq 2k^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq r}|x_t-y_t|^2\,dr\right]. \qquad (1.2)$$

De plus, notant 0 le processus nul, on a, comme $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$,

$|\Psi(0)|^2 \leq 3x^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b(s,0)ds\right|^2 + 3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,0)dW_s\right|^2$,

d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de Doob et la croussance linéaire de b et σ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi(0)|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}(x^2)+K^2T^2+4K^2T\right), \qquad (1.3)$$

Les estimations (1.2) et (1.3) montrant alors que le processus $\Psi(x)$ appartient à S_c^2 dés que x appartient à S_c^2.

On définit alors par récurrence une suit de processus de S_c^2 en posant

$$x_0 = 0, \quad \text{et}, \quad x^{n+1} = \Psi(x^n), \ \text{pour } n \geq 0.$$

On obtient (1.2), pour tout $n \geq 0$ notant par C à la place de $2k^2(T+4)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right] \leq \frac{C^n T^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^1\right|^2\right],$$

et notant D le majorant de l'inégalité (1.3),

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right] \leq D\frac{C^n T^n}{n!}.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right\|_{L^1} \leq \sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right\|_{L^2} \leq \sqrt{D}\frac{(CT)^{n/2}}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

Alors le série $\sum_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}-p.s$ et donc, $\mathbb{P}-p.s$, x^n converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus continue. De plus $x \in S_c^2$. On vérifier que x est solution de l'EDS (1.1) en passant à la limite dans la définition $x^{n+1} = \Psi(x^n)$. Si x_t et y_t deux solution de (1.1) dans S_c^2 alors : $x_t = \Psi(x_u)$ et $y_t = \Psi(y_u)$. L'inégalité (1.1) alors donne pour tout $u \in [0T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|x_t - y_t|^2\right] \leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq r}|x_s - y_s|^2\right]dr,$$

le lemme de Gronwall donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x_t - y_t|^2\right] = 0,$$

ce si implique que x et y sont indistinguables i.e. $\mathbb{P}(x_t = y_t, \forall 0 \leq t \leq T)$. ■

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Les équations différentielles de les rétrogrades (EDSRs) sont un nouveau de type de différentiels stochastiques équations (EDS) qui ne peuvent être résolus en utilisant traditionnelles EDS méthodes.L' un des les principales raisons est que le « temps » ne peut pas être inversée.En effet l'appelation "rétrograde" provient de fait que le processus -contraire à d'autres EDS est déterminé à part

Dans ce chapitre on va étudier l'existence et l'unicité des EDSRs classiques.

2.1 Justification de la structure des EDSRs

Sur un intervalle de temps $\mathbb{T} = [0, T]$, on considère un mouvement Brownien d-dimensionnel, $B = (B_t)_{t\in\mathbb{T}}$, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ la filtration engendrée par le brownien et on suppose :

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}^B \tag{2.1}$$

Imaginons à présent que l'on souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{-dY_t}{dt} = g\left(t, Y_t\right), t \in \mathbb{T} \\ Y_T = \zeta \end{cases} \tag{2.2}$$

où ζ est une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$. Supposons pour simplifier que $g \equiv 0$ le problème (2.2) devient alors

$$\begin{cases} \frac{-dY_t}{dt} = 0, t \in \mathbb{T} \\ Y_T = \zeta \end{cases} \tag{2.3}$$

en imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la fltration $\mathbb{F}$.

Puisque l'unique solution de cette EDS est $Y_t = \zeta$, pour tout t, Y est par conséquent n'est pas une solution adapté à (2.3) car ζ n'est pas déterministe (par hypothèse). En supposant

$\zeta \in L^2\left(\mathbb{F}\right)$, la meilleure approximation –disons dans L^2 –adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{F}_t)$ Comme ce terme n'est a priori pas différentiable en temps au sens usuel, nous

utilisons le théorème de représentation des martingales browniennes on peut construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\zeta) + \int_0^t Z_s dB_s$$

Un calcul élémentaire nous donne l'EDSR simple dans sa forme intégrale :

$$Y_t = \zeta - \int_t^T Z_s dB_s \tag{2.4}$$

la forme différentielle de cette équation est :

$$\begin{cases} -dY_t = -Z_t dB_t, t \in [0,T] \\ Y_T = \zeta \end{cases} \tag{2.5}$$

On voit donc apparaître sur la structure de l'équation initiale(2.3) une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté c'est à dire au lieu de regarder seulement Y comme la solution à l'EDSR on peut considérer le couple (Y, Z) comme une solution de (2.3).

Par conséquent, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à g de dépendre du processus Z ; l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dY_t = g\left(t, Y_t, Z_t\right) dt - Z_t dB_t \\ Y_T = \zeta \end{cases} \tag{2.6}$$

ou encore en utilisant la formulation intégrale rétrograde faisant apparaître la condition terminale :

$$Y_t = \zeta + \int_t^T g\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s dB_s 0 \leq t \leq T \tag{2.7}$$

Les données de cette équation sont, d'une part $g$le générateur et d'autre part ζ la condition terminale de l'EDSR. L'inconnu d'une telle équation est le couple de processus $(Y_t, Z_t)_{t \in [0,T]}$
à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$.

Remarque 2.1.1 *-Les intégrales de l'équation (2.7) sont bien définies.*

-Y est une semi-martingale continue et comme Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons travailler sur les hypothèses suivantes :

2.1.1 Hypothèses

1. (2.1) vérifiée ;
2. $g : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ est $\mathbb{F}$-mesurable pour toutes ses variables ;
3. g est uniformément lipschitzienne et continue en (y,z) avec une constante de Lipschitz L ;
4. $\zeta \in L^2\left(\mathcal{F}_T, \mathbb{R}^k\right)$et $g^0 := g(0,0) \in L^{2,1}\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$

Remarque 2.1.2 *-Dans la litérature standard, l'article de Pardoux et Peng [[1]] par exemple, il est requit que $g^0 \in L^2(\mathbb{F})$ .Notre condition est relativement faible.*

-Pour simplifier les notations, on va supposer $k = d = 1$ dans la plupart des preuves.

Lemme 2.1.1 *Soient $Y \in S^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$. Alors $\left\{\int_0^t Y_s.Z_s dB_s, t \in [0,T]\right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. Les inégalités **BDG** donnent

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dB_s\right|\right] \le C\mathbb{E}\left[(\int_0^t |Y_s|^2 |Z_s|^2 ds)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\le C\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|(\int_0^T |Z_s|^2 ds)^{\frac{1}{2}}\right]$$

par suite, comme $ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dB_s\right|\right] \le C'\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Z_s|^2 ds\right)\right]\right)$$

Or cette dernière quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat. ■

2.2 Estimation a priori

Maintenant, on va étudier l'EDSR non linéaire (2.7).

Théorème 2.2.1 *Supposons que les hypothèses (2.1.1) sont vérifiées et que* $(Y, Z) \in L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right) \times L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *est une solution de l'EDSR (2.7). Alors* $Y \in S^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$ *et il existe une constante* C*, qui ne dépend que de* T, L, k *et* d *telle que :*

$$\|(Y,Z)\|^2 := \mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2 + \int_0^T |Z_t|^2\, dt\right] \leq CI_0^2 \tag{2.8}$$

Où

$$Y_T^* := \sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \text{ et } I_0^2 := \mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + (\int_0^T \left|g_t^0\right| dt)^2\right]$$

Preuve. Pour simplifier, on va supposer $k = d = 1$. La démonstration sera faite dans quelques étapes. ■

Étape.1. On montre d'abord que

$$\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2\right] \leq C\int_0^T \left(|Y_t|^2 + |Z_t|^2\right) dt + CI_0^2 \prec \infty \tag{2.9}$$

Or

$$|Y_t| \leq |\zeta| + \int_t^T \left(\left|g_s^0\right| + C\,|Y_s| + C\,|Z_s|\right) ds + \left|\int_t^T Z_s dB_s\right|.$$

Donc,

$$Y_T^* \leq C\left[|\zeta| + \int_0^T \left(\left|g_t^0\right| + C\,|Y_t| + C\,|Z_t|\right) dt + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_t^T Z_s dB_s\right|\right]$$

Par appliquations de l'inégalité de **BDG**,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + (\int_0^T \left|g_t^0\right| dt)^2 + \int_0^T (|Y_t|^2 + |Z_t|^2)dt\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + (\int_0^T \left|g_t^0\right| dt)^2\right] + C\mathbb{E}\left[\int_0^T (|Y_t|^2 + |Z_t|^2)dt\right] \\
&\leq CI_0^2 + C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|Y_t|^2 + |Z_t|^2\right) dt\right]
\end{aligned}$$

Étape.2. Ensuite, on va montrer que, pour tout $\epsilon \geq 0$,

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[|Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t|^2 dt\right] \leq \epsilon\left[|Y_T^*|^2\right] + C\epsilon^{-1}I_0^2 \tag{2.10}$$

Pour ce faire, on applique la formule d'Itô à $|Y_t|^2$

$$d|Y_t|^2 = 2Y_t dY_t + |Z_t|^2 dt = -2Y_t g_t(Y_t, Z_t) dt + 2Y_t Z_t dB_t + |Z_t|^2 dt \tag{2.11}$$

Donc,

$$|Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2 ds = |\zeta|^2 + 2\int_t^T Y_s g_s(Y_s, Z_s) ds + 2\int_t^T Y_s Z_s dB_s \tag{2.12}$$

Par (2.9) et lemme (2.1) on sait que $\int_0^t Y_s Z_s dB_s$ est une martingales. Donc, en prenant l'espérence par les deux côtés de (2.12) et du fait que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2\, ds\right] &= \mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + 2\int_t^T Y_s g_s\left(Y_s, Z_s\right) ds + 2\int_t^T Y_s Z_s dB_s\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + C\int_t^T |Y_s|\left[\left|g_s^0\right| + |Y_s| + |Z_s|\right] ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + CY_T^*\int_0^T \left|g_s^0\right| ds + C\int_t^T \left[|Y_s|^2 + |Y_s Z_s|\right] ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + CY_T^*\int_0^T \left|g_s^0\right| ds + C\int_t^T |Y_s|^2\, ds + \frac{1}{2}\int_t^T |Z_s|^2\, ds\right]
\end{aligned}$$

Ceci nous conduit à

$$\mathbb{E}\left[|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T |Z_s|^2\, ds\right] \leq \mathbb{E}\left[C\int_t^T |Y_s|^2\, ds + |\zeta|^2 + CY_T^*\int_0^T \left|g_s^0\right| ds\right] \tag{2.13}$$

Le théorème de Fubini imlique

$$\mathbb{E}\left[|Y_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + CY_T^*\int_0^T \left|g_s^0\right| ds\right] + C\int_t^T \mathbb{E}\left[|Y_s|^2\right] ds$$

On en déduit alors grâce à l'inegalité de Granwall que

$$\mathbb{E}\left[|Y_s|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + Y_T^*\int_0^T \left|g_s^0\right| ds\right], \forall t \in [0, T] \tag{2.14}$$

Par suite, prenons $t = 0$ et en reportant (2.14) dans (2.13), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2 \, ds\right] \leq C\mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + Y_T^* \int_0^T \left|g_s^0\right| ds\right] \tag{2.15}$$

Étape.3. En reportant (2.10)dans (2.9) ; on trouve

$$\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2\right] \leq C\epsilon\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2\right] + C\epsilon^{-1} I_0^2$$

Où pour $\epsilon = \frac{1}{2C}$,

$$\mathbb{E}\left[|Y_T^*|^2\right] \leq C I_0^2.$$

Ceci, avec(2.10), donne la preuve de (**??**)

Proposition 2.2.1 *Supposons qu'il existe un processus* $(g_t)_{0 \leq t \leq T}$ *positif, appartenant à* $L^2(\mathbb{F}, \mathbb{R})$ *et une constante positive* L *tels que :*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}, |g(t, y, z)| \leq g_t + L(|y| + |z| \tag{2.16}$$

Si $(Y_t, Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une solution de l'EDSR (2.7) telle que $Z \in L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k \times d}\right)$ alors Y appartient à $S^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a, pour tout $t \in [0; T]$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t g(s, Y_s, Z_s) \, ds + \int_0^t Z_s dB_s$$

et par suite, utilisant l'hypothèse sur$g$,

$$|Y_t| = |Y_0| + \int_0^T (g_s + L|Z_s|) \, ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^t Z_s dB_s\right| + L\int_0^t |Y_s| \, ds$$

Posons

$$\zeta = |Y_0| + \int\limits_0^T (g_s + L\,|Z_s|)\,ds + \sup_{0\le t\le T}\left|\int\limits_0^t Z_s dB_s\right|$$

■

Par hypothèse, $Z \in L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$ et donc, via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $(g_t)_{0\le t\le T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit que ζ est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme Y est un processus continu, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité $\sup_{0\le t\le T}|Y_t| \le \zeta e^{LT}$ qui montre que Y appartient à $S^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right)$.

Remarque 2.2.1 *Le résultat du théorème (2.1)est encore valable lorsqu'on remplace la condition (3) dans (2 :1 :1) par la condition de croissance linéaire (2.15)*

Théorème 2.2.2 *Pour $i = 1, 2$, on suppose que (ζ^i, g^i) satisfait les hypothèses (2.1.1) et $(Y^i, Z^i) \in L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right) \times L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$ est une solution de l'EDSR (2.7) avec des coefficients (ζ^i, g^i). Alors*

$$\|(\Delta Y, \Delta Z)\|^2 \le C\mathbb{E}\left[|\Delta\zeta|^2 + \left(\int\limits_0^T \left|\Delta g_t\left(Y_t^1, Z_t^1\right)\right| dt\right)^2\right] \tag{2.17}$$

Où

$$\Delta Y := Y^1 - Y^2,\ \Delta Z := Z^1 - Z^2,\ \Delta\zeta := \zeta^1 - \zeta^2,\ \Delta f_t := g^1 - g^2.$$

Preuve. Toujours pour la simplification, on suppose $d = k = 1$.Or

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= \Delta\zeta + \int\limits_t^T \left[g_s^1\left(Y_s^1, Z_s^1\right) - g_s^2\left(Y_s^2, Z_s^2\right)\right] ds - \int\limits_t^T \Delta Z_s dB_s \\ &= \Delta\zeta + \int\limits_t^T \left[\Delta g_s\left(Y_s^1, Z_s^1\right) + \alpha_s \Delta Y_s + \beta_s \Delta Z_{sz}\right] ds - \int\limits_t^T \Delta Z_s dB_s\end{aligned}$$

Où

$$\alpha_t := \frac{g_t^2(Y_t^1, Z_t^1) - g_t^2\left(Y_t^2, Z_t^1\right)}{\Delta Y_t}\mathbf{1}_{\{\Delta Y_t \neq 0\}},\ \ \beta_t := \frac{g_t^2(Y_t^2, Z_t^1) - g_t^2\left(Y_t^2, Z_t^2\right)}{\Delta Z_t}\mathbf{1}_{\{\Delta Z_t \neq 0\}} \tag{2.18}$$

sont bornés par L. Donc, par le théorème(2.1) on obtient le résultat immediatement.

■

2.3 Existence et unicité

Dans cette section on va étudier quelques résultats de l'existence et l'unicité de l'EDSR (2.7).

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (2.1.1) ; l'EDSR (2.7) admet une unique solution* $(Y, Z) \in L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^k\right) \times L^2\left(\mathbb{F}, \mathbb{R}^{k\times d}\right)$

Preuve.

1. **Unicité** : l'unicité provient directement du théorème(2.1). En particulier, l'unicité veut dire

$$Y_t^1 = Y_t^2, \forall t \in [0, T], \mathbb{P}.p.s \text{ et } Z_t^1 = Z_t^2, dt \times d\mathbb{P}.p.s \tag{2.19}$$

2. **Existance** : Pour l'existence, on utilise l'iteration de Picard avec une approche locale et on suppose que $d = k = 1$.

■

Étape.1. Soit $\delta \succ 0$ une constante qu'on va spécifier plus tard, et supposons que $T \leq \delta$ telque δ ne dépend que la constante de Lipschitz L(et la dimension). En particulier, elle ne dépend pas de la condition finale ζ.

On note $Y_t^0 := 0$, $Z_t^0 := 0$. Pour $n = 1, 2, ...$, soit

$$Y_t^n = \zeta + \int_t^T g_s\left(Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t Z_s^n dB_s \tag{2.20}$$

Supposons que $(Y^{n-1}, Z^{n-1}) \in L^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$. Or

$$\left|g\left(Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1}\right)\right| \leq C\left[\left|g_t^0\right| + \left|Y_t^{n-1}\right| + \left|Z_t^{n-1}\right|\right]$$

Donc, $g_s(Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1}) \in L^{1,2}(\mathbb{F})$. D'après la proposition (2.1) l'EDSR (2.20) détermine $(Y^n, Z^n) \in L^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$ unique, et donc le théorème (2.1) implique que $(Y^n, Z^n) \in S^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$.

Par réccurence on trouve que $(Y^n, Z^n) \in S^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$ pour tout $n \geq 0$.

On note $\Delta Y_t^n := Y_t^n - Y_t^{n-1}$, $\Delta Z_t^n := Z_t^n - Z_t^{n-1}$. Alors,

$$\Delta Y_t^n = \int_t^T \left[\alpha_s^{n-1}\Delta Y_s^{n-1} + \alpha_s^{n-1}\beta\Delta Z_s^{n-1}\right] ds - \int_t^T \Delta Z_s^n dB_s,$$

où α^n,β^n sont définis d'une manière similaire à (2.18) et sont bornés par L.

Par appliquation de la formule d'Itô, on trouve

$$d\left(|\Delta Y_t^n|^2\right) = -2\Delta Y_t^n\left[\alpha_t^{n-1}\Delta Y_t^{n-1} + \beta_t^{n-1}\Delta Z_t^{n-1}\right] dt + 2\Delta Y_t^n \Delta Z_t^n dB_t + |\Delta Z_t^n|^2 dt$$

On sait que $\int\limits_0^t \Delta Y_s^n \Delta Z_s^n dB_s$ est une martingale (d'après lemme(2.1)) et du fait que $\Delta Y_T^n = 0$, On obtient

$$\mathbb{E}\left[|\Delta Y_t^n|^2 + \int\limits_t^T |\Delta Z_s^n|^2 \, ds\right] = \mathbb{E}\left[2\int\limits_t^T \Delta Y_s^n \left[\alpha_s^{n-1}\Delta Y_s^{n-1} + \beta_s^{n-1}\Delta Z_s^{n-1}\right] ds\right] \quad (2.21)$$
$$\leq C\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T |\Delta Y_s^n| \left[\left|\Delta Y_s^{n-1}\right| + \left|\Delta Z_s^{n-1}\right|\right] ds\right]$$

Donc,

$$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T |\Delta Y_t^n|^2 \, dt\right] \leq C\delta\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T |\Delta Y_s^n| \left[\left|\Delta Y_s^{n-1}\right| + \left|\Delta Z_s^{n-1}\right|\right] ds\right]$$
$$\leq C\delta\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \left[|\Delta Y_t^n|^2 + \left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right]$$

On suppose $\delta = \frac{1}{2C}$,donc $1 - C\delta \leq \frac{1}{2}$, Alors,

$$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T |\Delta Y_t^n|^2 \, dt\right] \leq C\delta\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \left[\left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right]$$

De plus, si on prend $t = 0$ dans (**??**), on obtient

$$\mathbb{E}\int\limits_0^T |\Delta Z_t^n|^2 \, dt \leq C\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T |\Delta Y_t^n|^2 \, dt\right] + \frac{1}{8}\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \left[\left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right]$$
$$\leq \left[C\delta + \frac{1}{8}\right]\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \left[\left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right].$$

Donc,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[|\Delta Y_t^n|^2 + |\Delta Z_t^n|^2\right] dt\right] \leq \left[C\delta + \frac{1}{8}\right] \mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right]$$

On prend $\delta = \frac{1}{8}$. Alors,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[|\Delta Y_t^n|^2 + |\Delta Z_t^n|^2\right] dt\right] \leq \frac{1}{4}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\left|\Delta Y_t^{n-1}\right|^2 + \left|\Delta Z_t^{n-1}\right|^2\right] dt\right]$$

Par réccurence, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[|\Delta Y_t^n|^2 + |\Delta Z_t^n|^2\right] dt\right] \leq \frac{C}{4^n}, \forall n \geq 1.$$

Donc, on peut facilement trouver un couple $(Y, Z) \in S^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \|(Y_t^n - Y_t, Z_t^n - Z_t)\| = 0$$

$\Im$

Alors, en laissant $n \to \infty$ dans l'EDSR (2.20) le couple (Y, Z) satisfait l'EDSR (2.7)

.

Étape.2. Maintenant, on va montrer l'existence pour un T arbitraire. Soit $\delta \succ 0$ la constante de l'étape 1. On considère la partition $0 = t_0 \prec ... \prec t_n = T$ telle que : $t_{i+1} - t_i \leq \delta$, $i = 1, ..., n-1$. On définit $Y_{t_n} := \zeta$, et pour $i = n-1, ..., 0$ et $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $(Y_t; Z_t)$ soit la solution de l'EDSR suivante sur $[t_i, t_{i+1}]$:

$$Y_t = Y_{t_{i+1}} + \int_t^{t_{i+1}} g_s(Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^{t_{i+1}} Z_s dB_s, t \in [t_i, t_{i+1}].$$

On a $t_{i+1}-t_i \leq \delta$, donc de l'étape 1 l'EDSR précédente admet une solution. De plus, $(Y,Z) \in L^2(\mathbb{F}) \times L^2(\mathbb{F})$ car n est fini. Alors, ce sont des solutions globales sur toute l'intevalle $[0,T]$

Remarque 2.3.1 *L'article de 1997 de El Karoui, Peng et Quenez [2] propose une autre preuve du théorème (2 :3), avec un argument de point fixe (les espaces en question étant complets), plus en accord avec le fait que les hypothèses sur g nous rappellent le théorème de Cauchy Lipschitz pour les EDO.*

Proposition 2.3.1 *Soient g une fonction qui satisfait les hypothèses (2.1.1), $\tau \in \Im(\mathbb{F})$, et $\zeta \in L^2(\mathcal{F}_\tau)$.*

On considère l'EDSR suivante :

$$Y_t = \zeta + \int_t^T \tilde{g}(Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s dB_s, \tilde{g}(y,z) = g_s(y,z)\,\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) \tag{2.22}$$

Alors $\tilde{g}$ satisfait les hypothèses (2.1.1), et donc l'EDSR (**??**) admet une solution unique.

De plus, comme $\zeta \in \mathcal{F}_\tau$, $Y_s := \zeta$, $Z_s := 0$ satisfaient(**??**) pour $s \in [\tau, T]$. Donc on peut reécrire l'EDSR précédente sous la forme :

$$Y_t = \zeta + \int_t^\tau g_s(Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^\tau Z_s dB_s, 0 \leq t \leq \tau$$

Théorème 2.3.2 ***(Stabilité)*** *Soien (ξ, g) et (ξ_n, g^n), $n = 1, 2, ...,$, des coefficients qui satisfaient les hypothéses (2 :1 :1) avec la méme constante de Lipschitz L,et $(Y,Z),(Y^n,Z^n) \in S^2(F,\mathbb{R}^k) \times L^2(F,\mathbb{R}^{k\times d})$ les solutions correspondants à l'EDSR 2.7 : On note*

$$\triangle Y^n := Y^n - Y, \triangle Z^n := Z^n - Z, \triangle\xi_n := \xi_n - \xi, \triangle f^n := g^n - g.$$

On suppose

$$\lim_{n\to+\infty} E[|\triangle\xi_n|^2 + (\int_0^T |\triangle g_t^n(0,0)|\,dt)^2] = 0 \tag{2.23}$$

et $\triangle g_t^n(y,z) \to 0$ *en mesure* $dt \times dP$*, pour tout* (y,z)*. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty} \|\triangle Y^n, \triangle Z^n\| = 0 \tag{2.24}$$

Démonstration. On a d'aprés(2.17),

$$\begin{aligned}\|\triangle Y^n, \triangle Z^n\| &\leq CE[|\triangle\xi_n|^2 + (\int_0^T |\triangle g_t^n(Y_t,Z_t)|\,dt)^2] \qquad (2.25)\\ &\leq CE[|\triangle\xi_n|^2 + (\int_0^T |\triangle g_t^n(0,0)|\,dt)^2 + (\int_0^T |\triangle g_t^n(Y_t,Z_t) - \triangle g_t^n(0,0)|\,dt)^2]\end{aligned}$$

Or $\triangle g^n(Y,Z) \to 0$ donc

$$|\triangle g_n(t,Y_t,Z_t) - \triangle g_n(t,0,0)| \leq C[|Y_t| + |Z_t|].$$

Par application du théoreme de convergence dominée, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} E[\int_0^T |\triangle g_t^n(Y_t,Z_t) - \triangle g_t^n(0,0)|\,dt)^2] = 0 \tag{2.26}$$

de (2.24),(2.25),(2.25) on obtient le résultat.

Maintenant, on va donner une extention du résultat d'existence et unicité à l'espace $L^p(F)$ pour $p \geq 2$.

Théorème 2.3.3 *On suppose les hypothése (2 :1 :1) sont vérifiés et* $\xi \in L^p(\mathcal{F}_t, \mathbb{R}^k)$, $g^0 \in L^{1,p}(F, \mathbb{R}^k)$ *pour un certain* $p \geq 2$*. Soit* $(Y,Z) \in S^2(F,\mathbb{R}^k) \times L^2(F, \mathbb{R}^{k\times d})$ *l'unique solution de l'EDSR 2.7. Alors,*

$$E[|Y_T^*|^p + (\int_0^T |Z_t|^2\,dt)^{\frac{p}{2}}] \leq C_p I_p^p,\ ou\ I_p^p := E[|\xi|^p + (\int_0^T \left|g_t^0\right|\,dt)^p] \tag{2.27}$$

Démonstration. On suppose que $d = k = 1$ (pour simplifier), on va montrer le résultat en deux étapes.

Etape 1. Premiérement,on montre (2.27),pour $Y \in L^{\infty,p}(F)$.La formule d'Itô nous donne

$$d|Y_t|^2 = -2Y_t g_t(Y_t, Z_t)dt + |Z_t|^2 dt + 2Y_t Z_t dB_t; \tag{2.28}$$
$$d(|Y_t|^p) = d(|Y_t|^2)^{\frac{p}{2}} = -p|Y_t|^{p-2} Y_t g_t(Y_t, Z_t)dt + \frac{1}{2}p(p-1)|Y_t|^{p-2}|Z_t|^2 dt + p|Y_t|^{p-2} Y_t Z_t dB_t$$

et comme dans la démonstration du théoreme (2 :3) étapes 1et 2, on peut facilement trouver que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E[|Y_T^*|^p] \leq C_p \sup_{0\leq t\leq T} E[|Y_t|^p] + C_p E[(\int_0^T |Y_t|^{p-2}|Z_t|^2 dt)] + C_p I_p^p;$$
$$\sup_{0\leq t\leq T} E[|Y_t|^p] + C_p E[(\int_0^T |Y_t|^{p-2}|Z_t|^2 dt)] \leq \varepsilon E[|Y_T^*|^p] + C_p \varepsilon^{-1} I_p^p.$$

Alors, pour un $\varepsilon > 0$ suffisament petit, on obtient

$$E[|Y_T^*|^p] \leq C_p I_p^p. \tag{2.29}$$

Ensuite, Par (2.28),

$$\begin{aligned}\int_0^T |Z_t|^2 dt &= |\xi|^2 - |Y_0|^2 + 2\int_0^T Y_t Z_t dt - 2\int_0^T Y_t Z_t dB_t \\ &\leq C|Y_T^*|^2 + \int_0^T |Y_t|\,[|g_t^0| + |Y_t| + |Z_t|]dt + C\left|\int_0^T Y_t Z_t dB_t\right| \\ &\leq C|Y_T^*|^2 + C(\int_0^T |g_t^0|\, dt)^2 + \frac{1}{2}\int_0^T |Z_t|^2 dt + C\left|\int_0^T Y_t Z_t dB_t\right|.\end{aligned}$$

Alors, de (2.29), et les inégalités de BDG,

$$
\begin{aligned}
E[(\int_0^T |Z_t|^2\, dt)^{\frac{p}{2}}] &\leq C_p I_p^2 + C_p E[|Y_t^*|^p + \left|\int_0^T Y_t Z_t dB_t\right|^{\frac{p}{2}}] \\
&\leq C_p I_p^2 + C_p E[\left|\int_0^T Y_t Z_t dB_t\right|^{\frac{p}{4}} \leq C_p I_p^2 + C_p E[|Y_t^*|^{\frac{p}{2}} + (\int_0^T |Z_t|^2\, dt)^{\frac{p}{4}}] \\
&\leq C_p I_p^2 + C_p E[|Y_T^*|^p] + \frac{1}{2} E[(\int_0^T |Z_t|^2\, dt)^{\frac{p}{2}}] \leq C_p I_p^2 + \frac{1}{2} E[(\int_0^T |Z_t|^2\, dt)^{\frac{p}{2}}]
\end{aligned}
$$

ce qui nous conduit à une estimation de Z, et avec (2.29), ceci montre de plus (2.27).

Etape 2 . Pour tout $n \geq 1$, on note $\xi_n := (-n) \vee \xi \wedge n, g_n := (-n) \vee g \wedge n$. Il est claire que (ξ_n, g^n) satisfait les conditions du théoreme avec la meme constante de lipschitz L, et

$$
(\xi_n, g^n) \to (\xi, g), \;\; |\xi_n| \leq |\xi|\,, |g^n| \leq |g|\,, |\xi_n| \leq n, |g^n| \leq n, \text{ pour tout } (t, w, y, z)
$$

Soit $(Y^n, Z^n) \in S^2(F) \times L^2(F)$ l'unique solution de l'EDSR(2.7) de coefficients (ξ_n, g^n).

Alors

$$
Y_t^n = E[\xi_n + \int_t^T g_s^n(Y_s^n, Z_s^n) ds \backslash \mathcal{F}_t], \int_0^T Z_s^n dB_s = Y_t^n - Y_0^n + \int_0^t g_s^n(Y_s^n, Z_s^n) ds
$$

sont bornés. Ceci implique , en appliquant l'inégalité de BDG, que $Z^n \in L^{2,p}(F)$, Ensuite, il vient de l'étape 1 que

$$
E[|(Y^n)_T^*|^p + (\int_0^T |Z_t|^2\, dt)^{\frac{p}{2}}] \leq C_p E[|\xi_n|^p + (\int_0^T |g_t^n(0,0)|\, dt)^p] \leq C_p I_p^p
$$

maintenant, similaire à l'argument du théoreme (2 :1) ; le théoreme (2 :4) et lemme de Fatou fournit le résultat (2.27),

Théoreme de comparaison

Nous allons maintenant établir un théoreme de comparaison en nous plaçant en dimensien $k = 1$ (mais d reste quelconque). Ce théoreme proposé par S.Peng [4] permet de comparer les solutions de deux EDSR, dés que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs

Théorème 2.3.4 *Soit* $(\xi_i, g^i), i = 1, 2$ *des parametres vérifiant les hypotheses (2 :1 :1) ; et* $(Y^i, Z^i) \in S^2(F) \times L^2(F)$ *les solution des EDSR associées :*

$$Y_t^i = \xi_i + \int_t^T g_s^i(Y_s^i, Z_s^i)ds - \int_t^T Z_s^i dB_s. \tag{2.30}$$

si $\xi_1 \leq \xi_2$ *P.p.s et* $g^1(y, z) \leq g^2(y, z), dt \times dP$ *p.s, pour tout* (y, z)*, alors*

$$Y_t^1 \leq Y_t^2, \; 0 \leq t \leq T, \quad P.p.s \tag{2.31}$$

Démonstration.On pose

$$\Delta Y_t := Y_t^1 - Y_t^2, \; \Delta Z_t := Z_t^1 - Z_t^2, \;\; \Delta\xi := \xi_1 - \xi_2, \; \Delta g := g^1 - g^{2,}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Delta Y &= \Delta\xi + \int_t^T [g_s^1(Y_s^1, Z_s^1) - g_s^1(Y_s^2, Z_s^2)]ds - \int_t^T \Delta Z_s dB_s \\ &= \Delta\xi + \int_t^T [\alpha_s \Delta Y_s + \Delta Z_s \beta_s + \Delta g_s(Y_s^2, Z_s^2)]ds - \int_t^T \Delta Z_s dB_s \end{aligned}$$

ou α et βsont bornés.

.

On se ramene à une solution de l'EDSR linéaire, on défini donc comme (2.11), par (2.10)

$$\Delta Y_t = \Gamma_t^{-1} E[\Gamma_T \Delta\xi + \int_t^T \Gamma_s \Delta g_s(Y_s^2, Z_s^2) ds \backslash \mathcal{F}_t] \tag{2.32}$$

Or $g^1(y,z) \leq g^2(y,z), dt \times dP$ p.s, pour tout (y,z),ce qui implique $\Delta g(Y^2, Z^2) \leq 0, dt \times dP$ p.s,Puisque $\Gamma \geq 0$ et $\Delta\xi \leq 0$, (2.31) provient directement de(2.32).

Conclusion

Le but principal de ce mémoire est étude l'existence *et l'unicité* de solution pour des *équations différentielles stochastiques rétrogrades notées EDSRs.*

Ce travail est divisé en deux chapitre :

Dans le premier chapitre, *Nous commencé par quelques généralité sur le calcul stochastique et l'EDS.*

Dans la deuxième chapitre, *Nous avons étudie les équations différentielles stochastiques rétrogrades et* étudier l'existence et l'unicité des EDSRs classiques.

Bibliographie

[1] El Karoui, N., Peng, S., & Quenez, MC (1997). quations différentielles stochastiques rétrogrades en finance. Finance mathématique , 7 (1), 1-71

[2] GRORUD, A., & PONTIER, M. (1995). Calcul stochastique d'ordre deux et équation différentielle anticipative sur une variété. Japanese journal of mathematics. New series, 21(2), 441-470.

[3] Hamadène, S. (1996). Equations différentielles stochastiques rétrogrades : Le cas localement lipschitzien. In Annales de l'IHP Probabilités et statistiques (Vol. 32, No. 5, pp. 645-659).

[4] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1), 55-61..

[5] Zhang, J. (2017). Equations différentielles stochastiques rétrogrades. Dans les équations différentielles stochastiques en arrière (pp. 79-99). Springer, New York, NY.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$	espace de probabilité filtré.
$(\mathcal{F}_t)$	filtration.
MB	Mouvement Brownien.
$(A.O.A)$	Absence d'opportunités d'arbitrage.
EDS	Equation différentielle stochastique.
$EDSR$	Equation différentielle stochastique retrograde.
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}$.
b	la dérivé (drift).
σ	Terme de diffusion.
$\mathbb{P}-p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathbb{R}^k$	Espace réel euclidien de dimension k .
$\mathbb{R}^{k\times d}$	Ensemble des matrices réelles $k \times d$.
$\mathbf{1}_A$	Indicatrice de A est noté : $\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, \text{si } x \in A \\ 0, \text{ si } x \notin A \end{cases}$

A travers ce modeste travail nous avons essayé déxposer quelques méthodes et exemples sur de l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques rétrogrades,

Dans le premier chapitre, on a donné quelques rappels de base concernant le calcul stochastique et l'EDS,

et dans le deuxième chapitre en voyant les équations différentielles stochastiques rétrogrades.

من خلال هذا العمل المتواضع حاولنا الكشف عن بعض الاساليب و الامثلة عن بعض الطرق الخاصة بالحل العددي لأصناف من المعادلات التفاضلية الستوكاستيكية التراجعية .

في الفصل الأول قدمنا بعض التذكيرات الاساسية حول حساب التفاضل و التكامل الستوكاستيكي, و في الفصل الثاني تطرقنا للمعادلات التفاضلية الستوكاستيكية التراجعية.

Through this modest work we have tried to expose some methods and examples on the numerical resolution of the existence and the uniqueness of the solution of backward stochastic differential equations,

In the first chapter, we gave some basic reminders about the stochastic calculus and the EDS,

and in the second chapter by seeing the backward stochastic differential equations.