République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par :

Baiouch djalal

Titre :

Introduction au mouvement Brownien

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	Bougherara Saliha	UMKB	Président
Dr.	Ben abba Fadhila	UMKB	Encadreur
Dr.	Zouzou Akila	UMKB	Examinateur

Juin. 2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes chers parents, qui ont toujours été à là pour moi,

à l'homme, qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences,

à mon adorable mère, qui je dois ma vie et mon succès.

à mes collègues de la promotion **2021** de la spécialité Mathématiques,

pour leurs soutien moral et leur encouragement.

REMERCIEMENTS

Par ces quelques lignes, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont
participé de près ou de loin au bon déroulement de ce mémoire,
en espérant n'avoir oublié personne...

D'abord à remercier **ALLAH** maître des cieux et de terre, qui nous a permis de mener à bien ce travail de nous avoir donné la fois et de nous avoir permis d'en arriver là.

Je remercie très chaleureusement mon encadreur

‹‹**Dr. Ben abba Fadhila** ››

pour ses conseils et ses commentaires fort utiles qui ont fortement enrichi ma formation,
et pour son précieux encouragement tout au long de ce travail.

Je suis honoré de pouvoir remercier les membres de mon jury d'avoir évalué ce travail

‹‹**Dr. Bougherara saliha**›› et ‹‹**D. Zouzou Akila**››.

Je tiens aussi à remercier notre chef du département de mathématique

‹‹**D. Lakhdari imad eddine**››,

et les enseignant qui ont participés à notre formation,
et tous les enseignants du département de mathématiques de l'université Mohamed Kheider.

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Table des matières **ii**

Table des figures **v**

Introduction **1**

1 Généralités sur les processus stochastiques **3**

1.1 Rappels de probabilités 3

1.1.1 Espace de probabilité 3

1.1.2 Variable aléatoire (v.a) 6

1.2 Processus stochastique 11

1.2.1 Définitions et exemples 11

1.2.2 Processus à accroissements indépendants stationnaires 15

1.2.3 Martingale 17

2 Mouvement Brownien (MB) **20**

2.1 Définitions et propositions du mouvement Brownien 21

2.2 Propriétés du mouvement Brownien 29

2.2.1 Propriètès de mouvement Brownien comme martingale 29
2.2.2 Propriétés des trajectoires du mouvement Brownien 32
2.3 Introduction au MB arithmètique, géométrique, vectoriel et fractionnaire . . 35

Conclusion **39**

Bibliographie **40**

Annexe : Abréviations et Notations **42**

Table des figures

2.1 Robert Brown (1773-1858) 20

2.2 Mouvement Brownien 22

Introduction

Le processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps d'une manière aléatoire. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique, en biologie (évolution génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux de l'internet, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économique et financier.

Le mouvement Brownien, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant.

Le champ d'application du mouvement Brownien est beaucoup plus vaste que l'étude des particules microscopiques en suspension, il permet de décrire le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), il est utilisé aussi dans la modélisation du bruit thermique dans les circuits électriques, etc.

On ne va pas pouvoir tout détailler, parce que le mouvement Brownien occupe aujourd'hui une place centrale en mathématiques et qu'il est lié à la plupart de leurs branches : les équations d'évolution, l'analyse de Fourier, la théorie du potentiel, la théorie des fonctions d'une variable complexe, la géométrie et la théorie des groupes, l'analyse numérique.

L'objectif majeur de cette étude est de démontrer quelques propriétés principales de ce mouvement Brownien. Pour cela, ce travail est contenu de deux chapitres :

◄ Chapitre 1 (**Généralités sur les processus stochastiques**) : Nous présentons rappels de probabilités et des processus stochastiques, par étude succincte de quelque familles importantes : définition de processus stochastique, processus à accroissements indépendants stationnaires (P.A.I.S), martingale et exemples de processus stochastique.

◄ Chapitre 2 (**Mouvement Brownien**) : Nous présentons définition de mouvement Brownien et étude de quelques propriétés de mouvement Brownien

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

On qualifie de processus stochastique tout phénomène d'évolution temporelle dont l'analyse peut être soumise au calcul des probabilités. Du point de vue de l'observation, un processus stochastique est constitué par l'ensemble de ses réalisations.

1.1 Rappels de probabilités

1.1.1 Espace de probabilité

Tribu

Définition 1.1.1 *(tribu) : Soit Ω un ensemble, on appelle tribu (ou σ-algèbre) de parties de Ω, la donnée d'un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω, possédant les propriétés suivantes :*

a) $\Omega \in \mathcal{A}$;

b) $\mathcal{A}$ *est stable par passage au complémentaire* i.e $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

c) *$\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable* i.e *pour tout ensemble* $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, alors :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Proposition 1.1.1 *: Si $\mathcal{A}$ est une σ-Algèbre de parties de Ω, il vient :*

i) $\varnothing \in \mathcal{A}$.

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, on a : $A^c \in \mathcal{A}$.

iii) $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, on a : $\bigcap_{i=0}^{n} A_n \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.1.1 *:*

1. *$\mathcal{P}(\Omega)$ la plus grand tribus est appelé tribu grossière.*
2. *$\{\varnothing, \Omega\}$ la plus petite tribus sur Ω est appelé tribu triviale.*

Proposition 1.1.2 *(* ***Tribu engendré)*** *: Soit Ω un ensemble, et M un ensemble de parties de Ω $(M \subset \mathcal{P}(\Omega))$, l'intersection de toutes les tribus sur Ω contenant M c'est le plus petit des tribus $\mathcal{A}_i$ telles que $M \subset \mathcal{A}_i$ appelés tribu engendrée par M et se note :*

$$\sigma(M) \quad et \quad \sigma(M) = \cap \mathcal{A}_{i\in I}.$$

Exemple 1.1.2 *: $M = (\{A\})$, $A \subset \Omega$, $M \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $\sigma(M) = \{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$.*

Définition 1.1.2 ***(Sous–Tribu)*** *: Une sous-tribu de $\mathcal{A}$ est une tribu $\mathcal{G}$ telle que si $A \in \mathcal{G}$ alors , $A \in \mathcal{A}$ on note $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$*

Exemple 1.1.3 *: Soit $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque de tribus sur Ω Alors $\mathcal{A} = \underset{i\in I}{\cap} \mathcal{A}_i$ est encore une tribu sur Ω*

Définition 1.1.3 ***(Tribu de Borel)*** *: Soit (Ω, T) un espace topologique, on appelle tribu de Borel sur Ω la tribu engendrée par les ouverts de Ω : $\mathcal{A} = \sigma(T)$.*

***Proposition 1.1.3** : La tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ engendrée par l'ensembles des intervalles ouverts, semi -ouvertes, fermés.*

Espace mesurable

Définition 1.1.4 *: On dit que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés les parties mesurables de Ω.*

Définition 1.1.5 ***:*** *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, on appelle mesure positive sur Ω une application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ vérifiant :*

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) *Additivité dénombrable : Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, alors :*

$$\mu\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right).$$

Définition 1.1.6 *: Si (Ω_1, E) et (Ω_2, F) sont deux espaces mesurables, alors une application $f : E \rightarrow F$ est dite mesurable si $f^{-1}(F) \subset E$.*

Définition 1.1.7 ***(mesure de probabilité)*** *: Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P}$: $\mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$, telle que :*

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ *et* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}$ *disjoints (i.e.$A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m$), alors :*

$$\mathbb{P}(\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_n).$$

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1.1.2 Variable aléatoire (v.a)

Un triplet formé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'un ensemble Ω d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω et d'une mesure $\mathbb{P}$ sur cette tribu tel que : $\mathbb{P}(\Omega)$ =1.

Définition 1.1.8 *: Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (E, ε) un espace mesurable. On appelle variable aléatoire de Ω vers E, toute fonction mesurable X de Ω vers E.*

Définition 1.1.9 *(**Loi d'une variable aléatoire**) : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire. On appelle loi de X la fonction $\mathbb{P}_X$ qui à toute partie I de $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles associe :*

$$\mathbb{P}_X(I) = \mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(\{\omega; X(\omega)\} \in I).$$

Proposition 1.1.4 *: L'application $\mathbb{P}_X$ définit une probabilité sur $\mathbb{R}$.*

Définition 1.1.10 *(**Fonction de répartition**) : On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Proposition 1.1.5 *: On a les propriétés suivantes :*

i) $0 \leq F_X \leq 1$,

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$,

iii) *F_X est une fonction croissante et F_X est continue à droite.*

Proposition 1.1.6 *: On a l'identité. Pour tous a, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$,*

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}[a < X \leq b].$$

Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire est dite discrète lorsque l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est fini ou infini dénombrable.

Définition 1.1.11 *: Une variable aléatoire réelle X à valeurs dans un ensemble Ω fini ou dénombrable est appelée variable aléatoire réelle discrète : $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Dans ce cas, la loi de X est déterminée par l'ensemble des probabilités :*

$$\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad x \in \Omega.$$

Ainsi, pour toute partie A de X, on a alors :

a) $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$.

b) $\mathbb{P}_X(\Omega) = \mathbb{P}(X \in \Omega) = \sum_{x \in \Omega} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Exemple 1.1.4 *: Construcation de la variable aléatoire de Bernoulli. Soient :*

- *l'espace des observables :* $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$;
- *la tribu définie sur* $\Omega : \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$;
- *la probabilité* $\mathbb{P}$ *définie sur* $\Omega : \mathbb{P}(\omega_1) = p$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$ *où* $p \in \left]0.1\right[$.

La variable aléatoire de Bernoulli de X de paramètre p est définie par :

- $X(\omega_1) = 1$ *et* $X(\omega_2) = 0$.
- $\mathbb{P}_X(1) = \mathbb{P}(X^{-1}(1)) = \mathbb{P}(\omega_1) = p$ *et* $\mathbb{P}_X(0) = \mathbb{P}(X^{-1}(0)) = \mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$.

Variables aléatoires continues.

Définition 1.1.12 *: Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. On dit que X est une variable aléatoire continue de densité f si pour tout* *intervalle I de $\mathbb{R}$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(X \in I\right) = \int_I f\left(x\right) dx.$$

Remarque 1.1.1 *: La fonction de répartition F_X est continue.*

Définition 1.1.13 *: Une variable aléatoire possède une densité si sa fonction de répartition F est dérivable. La dérivée notée f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.*

Proposition 1.1.7 *:*

i) $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x\right) \geq 0.$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) dx = 1.$

iii) $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f\left(x\right) dx.$

Définition 1.1.14 *: Une variable aléatoire X est dite intégrable si la quantité*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x) dx$$

est converge.

Espérance

Espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est, intuitivement, la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Elle se note $\mathbb{E}\left(X\right)$ et se lit ‹‹ espérance de X ››.

Définition 1.1.15 *:*

a) *Cas discrète : On appelle espérance mathématique ou moyenne d'une variable aléatoire réelle X, la quantité notée $\mathbb{E}(X)$ et définie par :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k p_X\left(k\right),$$

où p_X est la fonction de masse de X.

b) *Cas absolument continue : On appelle espérance mathématique ou moyenne d'une variable aléatoire réelle absolument continue X, quantité notée $\mathbb{E}(X)$ et définie par :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx,$$

où f_X est la fonction de densité de X.

Définition 1.1.16 *: Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle variance de X, la quantité notée $Var(X)$ et définie par :*

a) *Cas discrète : $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - \mathbb{E}(X))^2 p_X(k)$.*

b) *Cas absolument continue :*

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx - (\mathbb{E}(X))^2. \end{aligned}$$

Propriétés de l'espérance Soient X, Y deux v.a. intégrables. On a :

- Linéarité : $\mathbb{E}(cX + Y) = c\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y), c \in \mathbb{R}$.
- Positivité : Si $X \geq 0$ p.s., alors : $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- Positivité stricte : Si $X \geq 0$ p.s. et $\mathbb{E}(X) = 0$, alors : $X = 0$ *p.s.*
- Monotonie : Si $X \geq Y$ p.s., alors : $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

Espérance conditionnelle On définit l'espérance conditionnelle d'une variable X (intégrable) par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$. On la note $\mathbb{E}(X|Y)$. C'est une variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par Y, donc c'est une fonction de Y : il existe ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ borélienne, telle que :

$$\mathbb{E}(X|Y) = \psi(Y).$$

On a :

◀ Cas discret **:** Supposons que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. L'espérance d'une v.a. dont la loi est la loi conditionnelle de X à l'événement $[Y = y_i]$ est appelée espérance conditionnelle de X à l'événement $[Y = y_i]$. Elle est notée :

$$\mathbb{E}(X|Y = y_i) = \sum_j x_j \mathbb{P}\left(X = x_j \mid Y = y_i\right).$$

◀ Cas continu **:** Supposons que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. L'espérance conditionnelle de X à l'événement $[Y = y_i]$ est le reel

$$\mathbb{E}^{Y=y_i}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X^{Y=y_i}(x) dx.$$

L'espérance conditionnelle de X sachant Y est la variable aléatoire réelle :

$$\mathbb{E}^{Y}(X) = \mathbb{E}(X|Y) = h(X),$$

avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = \mathbb{E}^{Y=y}(X)$, $x \in \mathbb{R}$.

Propriétés de l'espérance conditionnelle

Proposition 1.1.8 *: Soient X, Y deux variables aléatoires intégrables :*

i) Linéarité : $\forall b, c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(bX + cY|\mathcal{G}) = b\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + c\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$, *p.s.*

ii) Positivité-monotonie :$X \geq Y$ p.s. $\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) p.s.$

iii) Si Y est G -mesurable : $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

Proposition 1.1.9 *: Soit X une variable aléatoire.*

i) *Si X est G-mesurable :* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$.

ii) *Si X est indépendante de G :* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

1.2 Processus stochastique

Un processus stochastique est une modèle mathématique pour décrire l'état d'un phénomène aléatoire évoluant le temps.

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.2.1 *: Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble $\mathbb{T}$.*

Remarque 1.2.1 *: Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en générale le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.*

1. *Pour $t \in \mathbb{T}$ fixé, $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$.*
2. *Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathbb{T} \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*

Exemple 1.2.1 *: On considère une séquence infinie de tirage (pile ou face) de Bernoulli. Ces tirages sont supposés indépendants. L'ensemble des résultats possibles est :*

$$\mathbf{\Omega} = \left\{ (\omega_1, \omega_2, ...) : \omega_i = \begin{Bmatrix} P, \\ F, \end{Bmatrix} \right\},$$

où $\mathbb{P}(P) = p\,;\ \mathbb{P}(F) = q = 1 - p\,;\ 0 \leq p \leq 1$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit des variables aléatoires X_n comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega = P \\ 0 & \text{si} \quad \omega = F \end{cases},$$

donc : $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est un processus défini par :

- X_1, X_2,..., indépendantes.

- $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = q$, $p + q = 1$.

Définition 1.2.2 *: Un processus stochastique $\{X(t,\omega),\ t \in T\}$ est dit à temps discret (respectivement à temps continu) si T est un ensemble infini dénombrable (respectivement un ou plusieurs intervalles).*

Définition 1.2.3 *: Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs rèelles est continu en probabilité :*

$$\lim_{s\to t} X(s,\omega) = X(t,\omega),\ \ s,t \in \mathbb{R}_+.$$

Et $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{s\to t} \mathbb{P}(\omega \in \Omega : |X(t+h) - X(t+h)| > \varepsilon) = 0.$$

Définition 1.2.4 *: Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit localement continu en probabilité si $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et à tout $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(\omega \in \Omega : |X(t+h) - X(t+h)| > \varepsilon) = 0,$$

i.e.,$\forall t \in \mathbb{R}_+$ et à tout couple $(\varepsilon, \eta) > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : |X(t+h) - X(t+h)| > \varepsilon) \leq \eta.$$

Définition 1.2.5 *: Un processus est dit continu si pour presque tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \longmapsto X_t(\omega)$ est continue (i.e. les trajectoires sont continues).*

Définition 1.2.6 *: Soient $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ des processus stochastiques dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les processus X et Y sont dit indistinguables si et seulement si :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, t \in \mathbb{T}) = 1.$$

Remarque 1.2.2 *: La définition exige que l'ensemble* $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ *est mesurable. Ce n'est pas le cas en général.*

Définition 1.2.7 *: Soient* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *des processus stochastiques dans* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Les processus* X *et* Y *sont dit modification l'un de l'autre si :*

$$\mathbb{P}((X_t) = (Y_t)) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Proposition 1.2.1 *: Si* X *et* Y *sont dit indistinguables alors 'ils sont modification l'un de l'autre. La réciproque n'est pas vraie en général.*

Preuve. Fixons $t \in \mathbb{T}$, on a que :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) \geq \mathbb{P}(X_s = Y_s, s \in \mathbb{T}) = 1$$

■

Définition 1.2.8 *: Un processus* $(X_t)_{t\in T}$ *est dit adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *si pour tout* $t \in T$, X_t *est mesurable par rapport à la tribu* $\mathcal{F}_t$*.*

Remarque 1.2.3 *: Une filtration est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, telle que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ *pour tout* $t \leq s$*.*

Définition 1.2.9 *: Un processus* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dit prévisible pour la filtration* $\mathcal{F}_n$ *ou* $\mathcal{F}_n$*-prévisible si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, X_n *est* $\mathcal{F}_{n-1}$*-mesurable.*

Définition 1.2.10 *: Un processus stochastique* X *est dit* $\mathcal{F}_t$*-prévisible si* X *comme fonction de* $(t, \omega) \in \mathbb{T}\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est mesurable par rapport à la tribu sur* $\mathbb{T}\times\Omega$ *engendrée par les processus adapté et continu à gauche.*

Définition 1.2.11 *: Un processus est dit càdlàg (continu à droit, limité à gauche) si ses trajectoires sont continues à droit, pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.2.12 *: Un processus $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ est dit mesurable si l'ensemble :*

$$\{(t,\omega) \in \mathbb{T}\times\Omega : X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}} \otimes \mathcal{F}, \forall B \in \zeta,$$

c'est à dire l'application :

$$\begin{array}{ccc} (\Omega\times\mathbb{T}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & (\mathbb{E}, \zeta) \\ (\omega, t) & \longmapsto & X(\omega, t) \end{array}$$

est mesurable.

Définition 1.2.13 *: Un processus X est dit progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour tout $t \geq 0$, l'application :*

$$\begin{array}{ccc} (\Omega \times [0,t], \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0,t], \mathbb{P}) & \longrightarrow & (E, \zeta) \\ (\omega, s) & \longmapsto & X(\omega, s) \end{array}$$

est mesurable.

Définition 1.2.14 *: Soit une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est à variation finie si $\mathbb{P}$-presque toutes les trajectoires $t \longmapsto X_t(\omega)$ sont à variation finie. Ou si la variation totale de $(X_t)_{t\geq 0}$ existe et est fini, ie :*

$$V_{[0,T]}(X) = \sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{p_n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right| < +\infty, \ p.s$$

$\Pi_n = \left(t_1^n, t_2^n, ..., t_{p_n}^n\right)$ *une subdivision de* $[0,T]$.

Définition 1.2.15 *: Un processus X est à variation bornée sur $[0,T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{p_n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right| < +\infty, \ p.s$$

Définition 1.2.16 *: Une suite aléatoire (X_n) est dite indépendante si la suite de tribus engendrées $(\sigma(X_n))$ est indépendante.*

Définition 1.2.17 *: Deux suites aléatoires sont dites indépendantes si toutes sous-suites finies extraite sont indépendantes.*

Définition 1.2.18 *: Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est dit processus gaussien si tout les combinaisons linéaires finies de processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ suivent une loi normal, i.e.,$\forall n \geq 1; t_1 < ... < t_n \in \mathbb{R}_+$; $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$:*

$$\alpha_1 X(t_1) + ...\alpha_n X(t_n) \backsim N(\mu(t), K).$$

- Par conséquent, le vecteur aléatoire $X(t) = (X(t_1), ..., X(t_n))^t$ est gaussien, $\forall n \geq 1$ $t = (t_1, ..., t_n)$. densité de probabilité est :

$$f(X(t)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det K}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X(t) - \mu(t))^t K^{-1}(X(t) - \mu(t))\right\},$$

tel que $\mu(t) = (\mu(t_1), ..., \mu(t_n))^t$ où :

$$\begin{cases} \mu_i = \mathbb{E}(X(t_i)) & \text{avec} \quad i = 1, ..., n \\ K = \sigma_{ij} = \mathbb{C}ov\left(X_{t_i}, X_{t_j}\right) & \text{avec} \quad i, j = 1, ..., n \end{cases}$$

1.2.2 Processus à accroissements indépendants stationnaires

Définition 1.2.19 *: Deux processus X et Y sont dit équivalentes s'ils ont la même loi (égalité de toutes les lois fini-dimensionnelles). On écrira $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$.*

Définition 1.2.20 *: Un processus X est dite à accroissements indépendants si on a :*

a) $X_0 = 0$, $p.s$,

b) $\forall n \geq 1, \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, *tel que :* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, *les v.a*

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$$

sont indépendantes.

Définition 1.2.21 *: Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus accroissements indépendants stationnaires si :* $\forall s,\ t \in \mathbb{R}_+$, *tel que* $0 \leq s < t$, *la variable aléatoire $X_t - X_s$ a la même loi que X_{t-s}. Autrement dit :*

$$\forall h \geq 0 \ : \ X_{t+h} - X_{s+h} \overset{\mathcal{L}}{=} X_{t-s}.$$

(notation $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$ ssi X et Y ont la même loi).

Indépendance et stationnarité d'un processus

Définition 1.2.22 *: Un processus X est dite à accroissements indépendants si on a :*

a) $X_0 = 0$, $\mathbb{P}$-*p.s.*

b) $\forall n \geq 1, \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, *tel que :* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, *les v.a* $\left(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$ *sont indépendantes.*

Définition 1.2.23 *: Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus accroissements indépendants stationnaires si :* $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$, *tel que* $0 \leq s < t$, *la variable aléatoire $X_t - X_s$ a la même loi que X_{t-s}. Autrement dit :*

$$\forall h \geq 0 : X_{t+h} - X_{s+h} \overset{\mathcal{L}}{=} X_{t-s}.$$

Lemme 1.2.1 *: Soit $X = (X_t; t \in \mathbb{R}^+)$ un processus à valeurs $\mathbb{R}^d$ tel que $X_0 = 0$. Alors X_t est un processus à accroissements indépendants (P.A.I) ssi pour tous $s < t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\sigma(X_u, u \leq s)$.*

Preuve.

$\Rightarrow$) Si X_t est un **P.A.I**. et si $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n \leq s < t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ donc il est indépendant de $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ et de $\sigma(X_u, u \leq s)$.

$\Leftarrow$) Si, $\forall\ s < t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\sigma(X_u, u \leq s)$, on a pour $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$ et $f_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)\right) &= \mathbb{E}\left(f_n\left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)\right)\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)\right) \\
&= ... \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(f_i\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)\right).
\end{aligned}$$

■

1.2.3 Martingale

On se donne un espace probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\right)$.

Définition 1.2.24 *: Un processus $(X_t, t \in \mathbb{T})$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale si :*

a) *X_t est un processus adapté ;*

b) *$\mathbb{E}|X_t| < \infty$, pour tout $t \in \mathbb{T}$, (le processus X_t est intégrable) ;*

c) *Pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$.*

Remarque 1.2.4 *:*

- *Si on remplace (c) par : (c') Pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$, on dit que X_t est une sur-martingale.*
- *Si on remplace (c) par : (c") Pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$, on dit que X_t est une sous-martingale.*

Définition 1.2.25 *: Soit Y une variable aléatoire intégrable, alors :*

$$(X_t)_{t\in\mathbb{T}} = \mathbb{E}\left(Y \mid \mathcal{F}_t\right)$$

est une martingale.

Définition 1.2.26 *(Inégalité de Doob) : Soit $(X_t)_{t\in[0,T]}$ une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale à trajectoies continues. Alors, pour tout $p \in \,]1,\infty[$:*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right) \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left(|X_t|^p\right).$$

Proposition 1.2.2 *(Décomposition de Doob) : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-sous martingale, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une décomposition unique sous la forme :*

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}} + (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

où $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est processus croissant prévisible et intégrable.

Preuve. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale intgrable. On définit :

$$\begin{cases} A_{n+1} = \; A_n + \mathbb{E}\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \\ A_0 = 0. \end{cases}$$

Par construction $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est processus croissant prévisible et intégrable et

$$(M_n)_{n\in\mathbb{N}} = (X_n) - (A_n),$$

vérifie $\mathbb{E}\left(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (puisque A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable). La décomposition est de plus unique car si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}} + (M_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A'_n)_{n\in\mathbb{N}} + (M'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $A_0 = A'_0 = 0$ et

$$A'_{n+1} - \; A'_n = (X_{n+1} - X_n) - (M_{n+1} - M_n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d'où ; en condition par $\mathcal{F}_n$:

$$A'_{n+1} - \ A'_n = \mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) - X_n = A_{n+1} - \ A_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d'où $A_n = A'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ puis $M_n = M'_n$. ■

Proposition 1.2.3 *:*

i) *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$- martingale alors :*

$$\mathbb{E}\left(X_t\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right), \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

ii) *Si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale alors le processus est complément déterminé par sa valeur terminale car :*

$$\mathbb{E}\left(X_T \mid \mathcal{F}_t\right) = \ X_t \quad , \forall t \in [0, T]\,.$$

iii) *Soit $\left((X_t), (\mathcal{F}_t)\right)_{t\in\mathbb{T}}$ une martingale, φ une fonction convexe, tell que : $\mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(X_t\right)\right|\right) < \infty$, alors $\left(\varphi\left(X_t\right), (\mathcal{F}_t)\right)_{t\in\mathbb{T}}$ est une sous-martingale.*

Chapitre 2

Mouvement Brownien (MB)

On introduit l'objet fondamental du mémoire, à savoir le mouvement Brownien, et étudie ses propriétés élémentaires.

Historique.

◁ Brown aperçut dans le fluide situé à l'intérieur des grains de pollen (le mouvement Brownien n'a pas été observé sur les grains de pollen eux-mêmes comme souvent mentionné), de très petites particules agitées de mouvements apparemment chaotiques. Ceux-ci ne pouvaient s'expliquer par des écoulements, ni par aucun autre phénomène physique connu. Dans un premier temps, Brown les attribua donc à une activité vitale.

Fig. 2.1 – Robert Brown (1773-1858)

$\triangleleft$ Bachelier (1900) et Einstein (1905) ont quantitavement étudié ce mouvement irrégulier, et c'est Wiener qui a établi en 1923 la modalisation mathématique du mouvement Brownien.Paul Lévy (1939,1948) effectué des études approfondies du mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t, t \geq 0)$ en référence à **Wiener** ou $(B_t, t \geq 0)$ en référence à **Brown.**

2.1 Définitions et propositions du mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilitè et $B = (B, t \geq 0)$ un processus stochastique.

Définition 2.1.1 *: On dit que $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (réel, nul en 0), si les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) $B_0 = 0$, *p.s ;*

b) *Pour tout $n \geq 1$, et tous $0 < t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$,*

$$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}$$

sont indépendantes ;

c) *Pour tous $t \geq s \geq 0$, $B_t - B_s$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, t-s)$;*

d) *Les trajectoires $t \mapsto B_t$ sont continues p.s sur $\mathbb{R}_+$.*

Remarque 2.1.1 *: : Pour $t \geq s \geq 0$, on a :*

1. $B_t - B_s \backsim B_{t-s} \backsim \mathcal{N}(0, t-s)$.
2. $\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)\right] = 0$ *et* $\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = t - s$.

Graphique :

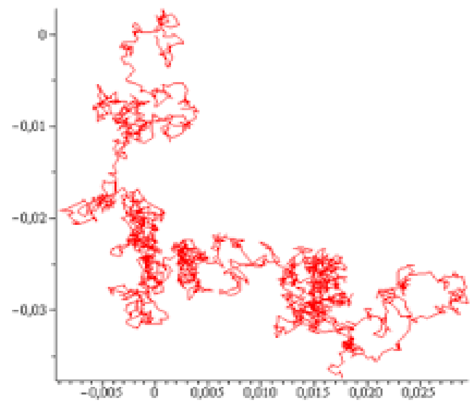

FIG. 2.2 – Mouvement Brownien

Proposition 2.1.1 *: Si $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus mouvement Brownien standard alors :*

i) $\mathbb{E}(B_t) = 0.$

ii) $\mathbb{E}\left((B_t)^2\right) = t.$

iii) $\mathbb{C}ov(B_t, B_s) = \min(t, s) = s \wedge t.$

Preuve.

i) On montre que $\mathbb{E}(B_t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Fixons $t \in \mathbb{R}_+$, on a $B_t = B_0 + (B_t - B_0)$. Alors :

$$\mathbb{E}(B_t) = \mathbb{E}(B_0) + \mathbb{E}(B_t - B_0),$$

d'après les conditions (a) et (c), on a :

$$\mathbb{E}(B_t) = 0.$$

ii) On montre que $\mathbb{E}(B_t^2) = t.$

Fixons $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $B_t^2 = B_0^2 + (B_t - B_0)^2 + 2B_0 (B_t - B_0)$. Alors :

$$\mathbb{E}\left(B_t^2\right) = \mathbb{E}\left(B_0^2\right) + \mathbb{E}\left((B_t - B_0)^2\right) + 2\mathbb{E}(B_0 (B_t - B_0)),$$

d'après d'après (b), on a :

$$\mathbb{E}\left(B_t^2\right) = \mathbb{E}(B_0^2) + \mathbb{E}\left((B_t - B_0)^2\right) + 2\mathbb{E}(B_0)\,\mathbb{E}(B_t - B_0),$$

d'après (a) et (c), on a : $\mathbb{E}\left((B_t)^2\right) = t.$

iii) On montre que $\mathbb{C}ov\,(B_t, B_s) = \min(t, s) = s \wedge t.$

- Si $s < t$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t B_s) &= \mathbb{E}(B_t B_s + B_s^2 - B_s^2) \\ &= \mathbb{E}(B_s (B_t - B_s) + B_s^2) \\ &= \mathbb{E}(B_s (B_t - B_s)) + \mathbb{E}(B_s^2),\end{aligned}$$

d'après (a), (b) et (c), on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t B_s) &= \mathbb{E}(B_s)\mathbb{E}(B_t - B_s) + \mathbb{E}(B_s^2) \\ &= \mathbb{E}(B_s^2) = s.\end{aligned}$$

- Si $t < s$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t B_s) &= \mathbb{E}(B_t B_s + B_t^2 - B_t^2) \\ &= \mathbb{E}(B_t (B_s - B_t) + B_t^2) \\ &= \mathbb{E}(B_t (B_s - B_t)) + \mathbb{E}(B_t^2),\end{aligned}$$

d'après (a), (b) et (c), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t B_s) &= \mathbb{E}(B_t)\mathbb{E}(B_s - B_t) + \mathbb{E}(B_t^2) \\ &= \mathbb{E}(B_t^2) = t.\end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{C}ov\,(B_t, B_s) = \min(t, s) = s \wedge t.$$

■

Proposition 2.1.2 *: Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\begin{cases} 1.\ (B_t; t \geq 0) \textit{ est à accroissements indépenants,} \\ 2.\ \forall 0 \leq s < t,\ B_t - B_s \textit{ suit la loi normale } \mathcal{N}(0, t-s). \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 1.\ \forall t \geq 0, B_t \textit{ suit la loi normale } \mathcal{N}(0, t), \\ 2.\ \forall 0 < s \leq t, B_t - B_s \textit{ et } B_s \textit{ sont indépendants.} \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 1.\ (B_t)_{t \geq 0} \textit{ est un processus gaussien, centré,} \\ 2.\ \forall s, t \in \mathbb{R}^+, cov(B_t, B_s) = \mathbb{E}[B_t B_s] = s \wedge t. \end{cases}$

Exemple 2.1.1 *: Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Pour tout $t \geq 0$, nous posons $X_t = \sqrt{t}Z$. Le processus stochastique $X = \{X_t, t \geq 0\}$ a des trajectoires continues et $\forall t \geq 0$, X_t est de loi $\mathcal{N}(0, t)$. Est-ce que X est un mouvement Brownien ?. Justifiez votre réponse.*

Réponse : Non, puisque pour $0 \leq s \leq t < \infty$:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar\,[X_t - X_s] &= \mathbb{V}ar\left[\sqrt{t}Z - \sqrt{s}Z\right] \\ &= \left(\sqrt{t} - \sqrt{s}\right)^2 \mathbb{V}ar\,[Z] \\ &= t - 2\sqrt{t}\sqrt{s} + s \\ &\neq t - s. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.2 *(Construction d'un M.B par série de fourier) : Soit* $t \in [0, \pi]$, *on pose :*

$$B_t = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \varepsilon_n,$$

où (ε_n) *est une suite de variable aléatoire de loi* $N(0,1)$. *Alors* (B_t) *est une variable aléatoire gaussienne (car c'est une somme de variable aléatoires gassiennes indépendants).*

$$\mathbb{E}(B_t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \mathbb{E}(\varepsilon_n) = 0,$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(B_t) &= \mathbb{E}(B_t^2) \\
&= \frac{8}{\pi} \sum_{n;m=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \frac{\sin(mt)}{n} \mathbb{E}(\varepsilon_n \varepsilon_m) \\
&= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(nt)}{n} \right)^2 \mathbb{E}\left((\varepsilon_n)^2 \right) \\
&= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(nt)}{n} \right)^2 = t.
\end{aligned}$$

Alors B_t *est un mouvement Brownien standard.*

Proposition 2.1.3 *: Soit* $B = (B_t, t \geq 0)$ *un mouvement Brownien, les processus suivants sont aussi des mouvement Brownien.*

i) $X = (-B_t)$.

ii) $X = \left(\frac{1}{\alpha} B_{\alpha^2 t} \right)$ *pour tout* $\alpha \neq 0$.

iii) $X = (B_T - B_{T-t})$, *pour tout* $t \in [0, T]$ *et* $T > 0$.

iv) $X = \left(t B_{\frac{1}{t}} \right)_{t>0}$, *avec* $X_0 = 0$.

Preuve.

i) $X = (-B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien car :

a) $X_0 = -B_0 = 0;$

b) Soit $X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = B_{t_{n-1}} - B_{t_n}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < ... < t_n \in \mathbb{R}_+$, les variables aléatoires :

$$B_{t_1} - B_{t_0},\ B_{t_2} - B_{t_1}, ...,\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes, alors : $\forall 0 \leq t_0 < ... < t_n \in \mathbb{R}_+$ les variables alèatoires :

$$B_{t_0} - B_{t_1},\ B_{t_1} - B_{t_2}, ...,\ B_{t_{n-1}} - B_{t_n}$$

sont indépendantes, alors :

$$X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1}, ...,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

c) $\forall s, t > 0$, tell que $s < t$, $X_t - X_s = B_s - B_t \backsim \mathcal{N}\left(0, t - s\right);$

d) La trajctoire $t \mapsto X_t\left(\omega\right) = -B_t\left(\omega\right)$ est continue puisque $t \mapsto B_t\left(\omega\right)$ est continue.

ii) $X = \left(\frac{1}{\alpha} B_{\alpha^2 t}, t \geq 0\right)$ pour tout $\alpha \neq 0$ est un mouvement Brownien car :

a) $X_0 = \frac{1}{\alpha} B_0 = 0;$

b) Soit $X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = \frac{1}{\alpha}\left(B_{\alpha^2 t_n} - B_{\alpha^2 t_{n-1}}\right)$ et que $\forall 0 \leq t_0 < ... < t_n \in \mathbb{R}_+$, les variables aléatoires :

$$B_{t_1} - B_{t_0},\ B_{t_2} - B_{t_1}, ...,\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes, alors : $\forall 0 \leq \alpha^2 t_0 < ... < \alpha^2 t_n \in \mathbb{R}_+$ les variables aléatoires :

$$\frac{1}{\alpha}\left(B_{\alpha^2 t_1} - B_{\alpha^2 t_0}\right),\ \frac{1}{\alpha}\left(B_{\alpha^2 t_2} - B_{\alpha^2 t_1}\right), ...,\ \frac{1}{\alpha}\left(B_{\alpha^2 t_n} - B_{\alpha^2 t_{n-1}}\right)$$

sont indépendantes, alors :

$$X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1}, ...,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

c) $\forall 0 \leq s < t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}\left(X_t - X_s\right) = \dfrac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(B_{\alpha^2 t} - B_{\alpha^2 s}\right) = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((X_t - X_s)^2\right) &= \frac{1}{\alpha^2}\mathbb{E}\left((B_{\alpha^2 t} - B_{\alpha^2 s})^2\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2 t - \alpha^2 s) \\ &= t - s, \end{aligned}$$

alors :

$$X_t - X_s \backsim \mathcal{N}\left(0, t - s\right).$$

d) La trajectoire $t \mapsto X_t\left(\omega\right) = \dfrac{1}{\alpha}B_{\alpha^2 t}\left(\omega\right)$ est continue puisque $t \mapsto B_t\left(\omega\right)$ est continue.

iii) $X = \left(B_T - B_{T-t}\right)_{t \in [0,T]}$, pour tout $t \in [0, T]$ et $T > 0$ est un mouvement Brownien car :

a) $X_0 = (B_T - B_T) = 0;$

b) Soit $X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = \left(B_{T-t_{n-1}} - B_{T-t_n}\right)$ et que $\forall 0 \leq t_0 < ... < t_n \in [0, T]$, les variables aléatoires :

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes, alors : $\forall 0 \leq T - t_n < ... < T - t_0 \in [0, T]$ les variables aléatoires :

$$\left(B_{T-t_{n-1}} - B_{T-t_n}\right), \ \left(B_{T-t_{n-2}} - B_{T-t_{n-1}}\right), ..., \ \left(B_{T-t_0} - B_{T-t_1}\right)$$

sont indépendantes, alors :

$$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, ..., \ X_{t_1} - X_{t_0}$$

sont indépendantes.

c) $\forall 0 \leq s < t \in [0,T]$, $\mathbb{E}\left(X_t - X_s\right) = \mathbb{E}\left(B_{T-s} - B_{T-t}\right) = \mathbb{E}(B_{T-s}) - \mathbb{E}\left(B_{T-t}\right) = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((X_t - X_s)^2\right) &= \mathbb{E}\left((B_{T-s} - B_{T-t})^2\right) \\ &= ((T-s) - (T-t)) \\ &= t - s, \end{aligned}$$

alors : $X_t - X_s \backsim \mathcal{N}\left(0, t-s\right).$

d) La trajectoire $t \mapsto X_t(\omega) = B_T(\omega) - B_{T-t}(\omega)$ est continue puisque $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

iv) $X = \left(tB_{\frac{1}{t}}\right)_{t>0}$ est un mouvement Brownen car :

a) $X_0 = 0$;

b) Soit $X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = t_n B_{\frac{1}{t_n}} - t_{n-1} B_{\frac{1}{t_{n-1}}}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < ... < t_n \in \mathbb{R}_+$, les variables aléatoires :

$$B_{t_1} - B_{t_0},\ B_{t_2} - B_{t_1}, ...,\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes, alors : $\forall 0 < \dfrac{1}{t_n} < ... < \dfrac{1}{t_0}$ les variables aléatoires :

$$B_{\frac{1}{t_n}} - B_{\frac{1}{t_{n-1}}},\ B_{\frac{1}{t_{n-1}}} - B_{\frac{1}{t_{n-2}}}, ...,\ B_{\frac{1}{t_1}} - B_{\frac{1}{t_0}}$$

sont indépendantes, alors :

$$t_n B_{\frac{1}{t_n}} - t_{n-1} B_{\frac{1}{t_{n-1}}},\ t_{n-1} B_{\frac{1}{t_{n-1}}} - t_{n-2} B_{\frac{1}{t_{n-2}}}, ...,\ t_1 B_{\frac{1}{t_1}} - t_0 B_{\frac{1}{t_0}}$$

sont indépendantes, alors

$$X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1}, ...,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

c) $\forall s,\, t>0$, tell que $0<s<t$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_t-X_s\right) &= \mathbb{E}\left(tB_{\frac{1}{t}}-sB_{\frac{1}{s}}\right)\\ &= t\mathbb{E}\left(B_{\frac{1}{t}}\right)-s\mathbb{E}\left(sB_{\frac{1}{s}}\right)=0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X_t-X_s)^2\right) &= t^2\mathbb{E}\left(\left(B_{\frac{1}{t}}\right)^2\right)+s^2\mathbb{E}\left(\left(B_{\frac{1}{s}}\right)^2\right)-2ts\mathbb{E}\left(B_{\frac{1}{t}}B_{\frac{1}{s}}\right)\\ &= t^2\tfrac{1}{t}+s^2\tfrac{1}{s}-2ts\min(\tfrac{1}{t},\tfrac{1}{s})\\ &= t+s-2ts\tfrac{1}{t}=t-s,\end{aligned}$$

alors : $X_t-X_s\backsim\mathcal{N}\left(0,t-s\right)$.

d) La trajctoire $t\mapsto X_t\left(\omega\right)=tB_{\frac{1}{t}}\left(\omega\right)$ est continue pou tout $t>0$ puisque $t\mapsto B_t\left(\omega\right)$ est continue.

■

2.2 Propriétés du mouvement Brownien

2.2.1 Propriètès de mouvement Brownien comme martingale

Proposition 2.2.1 *: Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien, alors :*

i) *B_t est une martingale.*

ii) *B_t^2-t est une martingale.*

iii) *Pour tout réel α, $\exp\left(\alpha B_t-\frac{\alpha^2}{2}t\right)$ est une martingale.*

Preuve. : On a :

i) B_t est un processus adapté et intégrable, comme il est centré et à accroissements indépendants, alors :

$$\mathbb{E}\left[(B_t-B_s)\mid\mathcal{F}_s\right]=\mathbb{E}\left[B_t-B_s\right]=0.$$

Et

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right] - B_s,$$

alors : $\mathbb{E}\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right] = B_s$. On en déduire le premier point.

ii) Pour démontrer le deuxième, remarquons que :

- **Mesurabilité :** B_t c'est un processus adapté et la fonction qui muni : $B_t \longmapsto {B_t}^2 - t$ est continu alors le processus $({B_t}^2 - t)$ est adapté.

- **Intégrabilité :** $\forall t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|{B_t}^2 - t|\right] &\leq \mathbb{E}\left[{B_t}^2\right] + \mathbb{E}\,|t| \\ &= \mathbb{E}\left[{B_t}^2\right] + t = 2 \times t < \infty. \end{aligned}$$

La dernière condition est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[({B_t}^2 - {B_s}^2) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^{\,2} + 2B_s\left(B_t - B_s\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^{\,2} \mid \mathcal{F}_s\right] + 2B_s\mathbb{E}\left[\,(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right], \end{aligned}$$

mais comme $(B_t)_{t\geq 0}$ est une martingale $\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] = 0$, et donc :

$$\mathbb{E}\left[({B_t}^2 - {B_s}^2) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^{\,2} \mid \mathcal{F}_s\right].$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du mouvement Brownien permettent de plus d'affirmer que : La dernière égalité est due au fait que B_t suit une loi gaussienne centrée de variance t.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^{\,2} \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^{\,2}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[B^2{}_{t-s}\right] = t - s. \end{aligned}$$

iii) On démontrer le dernier point remarquons que :

- **Mésurabilité :** B_t c'est un processus adapté et la fonction qui muni :

$$B_t \longmapsto \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)$$

est continu alors le processus $\left(\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right)$ est adapté.

- **Intégrabilité :** $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right|\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right) dx\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2 + (2t\alpha x) - \alpha^2 t^2}{2t}\right) dx\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-\left(x - (\alpha t)\right)^2}{2t}\right)\right) dx = 1 < \infty.
\end{aligned}$$

Si g est une fonction gaussienne centré réduit, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda g\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\lambda x\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx \\
&= \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

De plus, si $s < t$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(\alpha B_s - \frac{\alpha^2}{2}t\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha\left(B_t - B_s\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right].$$

car X_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable, et comme $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha\left(B_t - B_s\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha\left(B_t - B_s\right)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha B_{t-s}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha g\sqrt{t-s}\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2\left(t-s\right)\right).\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé.

■

2.2.2 Propriétés des trajectoires du mouvement Brownien

Détaillons maintenant les propriétés des trajectoires d'un mouvement Brownien de dimension 1. On sait déjà qu'elles sont continues.

Proposition 2.2.2 *: Si B est un mouvement Brownien, alors presque sûrement :*

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}\sup B_t = +\infty \quad et \quad \lim_{t\longrightarrow+\infty}\inf B_t = -\infty.$$

De plus, la vitesse de convergence est moins grande que celle de t : $\frac{B_t}{t} \longrightarrow 0$, quand $t \longrightarrow +\infty$.

Proposition 2.2.3 ***(Comportement à l'infini) :*** *Si B est un mouvement Brownien, alors presque sûrement*

$$\limsup_{t\longrightarrow+\infty}\frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \quad et \quad \liminf_{t\longrightarrow+\infty}\frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\limsup_t \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty\right\}\right) &\geq \mathbb{P}\left(\left\{\limsup_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{M\in\mathbb{N}}\left\{\limsup_n \frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq M\right\}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\forall M \in \mathbb{N} : \quad \mathbb{P}\left(\left\{\limsup_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq M\right\}\right) \geq \limsup_n \mathbb{P}\left(B_n \geq M\sqrt{n}\right),$$

et

$$\mathbb{P}\left(B_n \geq M\sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(B_1 \geq M\right) > 0.$$

D'autre part $\left\{\limsup \dfrac{B_n}{\sqrt{n}} \geq M\right\}$ est un évènement de la tribu asymptotique des va $(B_n - B_{n-1})_n$ qui sont indépendantes donc a pour probabilité 0 ou 1, et vu ce qui précède cela ne peut être que. ■

Proposition 2.2.4 : *Presque sûrement, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) $\sup_{t\in[0,1]} B_t > 0.$

ii) $\inf_{t\in[0,1]} B_t > 0.$

iii) *Il existe* $t \in \,]0,1[$ *tel que* $B_t = 0$.

Preuve.

◁ Les deux premiers points sont équivalents par symétrie $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(-B)$. S'ils sont faux, ils le sont donc simultanément. Mais alors on aurait $B_t = 0$, cequi est absurde. Ils sont donc vrais.

◁ Par continuité, le troisième est une conséquence du théorème des valeurs intermédaires et des deux premiers points.

■

Proposition 2.2.5 : *Pour tout* $\varepsilon > 0$: B_t *a un zéro ps sur* $]0, \varepsilon[$.

Preuve. Le processus $\tilde{B}_t = \dfrac{B_{\varepsilon t}}{\sqrt{\varepsilon}}$, $t \in [0,1]$ est un mouvement Brownien pour lequel il existe $t_0 \in \,]0,1[$ tel que : $\tilde{B}_{t_1} = 0$, c'est à dire $B(\varepsilon t_0) = 0$. Le point $t_1 = \varepsilon t_0 \in]0, \varepsilon[$ vérifie la proposition. ■

On a une conséquence immédiate de ce résultat :

Proposition 2.2.6 *: Les trajectoires du mouvement Brownien ne sont ps pas dérivables.*

Preuve. Par la propriété de translation, il suffit de montrer la non dérivabilité en 0, c'est à dire montrer que :

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{B_t - B_0}{t-0} = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{B_t}{t}.$$

n'existe pas. Or par retournement du temps $\frac{B_t}{t} = \tilde{B}_{\frac{1}{t}}$ où $\tilde{B}$ est encore un MB. Mais d'après la proposition précédente :

$$\lim_{t\to+\infty}\sup \tilde{B}_s = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty}\inf \tilde{B}_s = -\infty,$$

avec $s = \frac{1}{t}$, ce qui montre que la limite cherchée n'existe pas. ■

Théorème 2.2.1 *: Soit $B = (B)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien, on a : Les trajectoires de B continue en moyenne quadratique mais pas dérivable en moyenne quadratique.*

Preuve.

1) On montre pour $s \to t$, $\mathbb{E}\left((B_t - B_s)^2\right) \to 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to t}\mathbb{E}\left((B_t - B_s)^2\right) &= \lim_{s\to t}\left(\mathbb{E}\left(B_t^2\right) - 2\mathbb{E}\left(B_tB_s\right) + \mathbb{E}\left(B_s^2\right)\right) \\
&= \lim_{s\to t}\left(t - 2\min(t,s) + s\right) \\
&= \lim_{s\to t}|t-s| = 0.
\end{aligned}$$

2) Pour la non-dérivabilité ; il suffit de développer laquantité :

$$\lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left[\left(\frac{B_{t+h} - B_h}{h}\right)^2\right] = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right) = +\infty.$$

■

2.3 Introduction au MB arithmètique, géométrique, vectoriel et fractionnaire

Mouvement Brownien arithmètique

Définition 2.3.1 *: Un processus* $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *est appelé mouvement Brownien avec dérive* μ *et variance* σ^2 *(arithmètique) si :*

a) $X_0 = 0;$

b) $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *a des accroissement indépendants et stationnaires ;*

c) $X_t \backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 t)$,$t \in \mathbb{R}_+$.

Si $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un mouvement Brownien standard, alors :*

$$X_t = \mu t + \sigma B_t.$$

Proposition 2.3.1 *: Soit* $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *mouvement Brownien arithmètique, alors :*

$$\mathbb{E}(X_t) = \mu t + \sigma \mathbb{E}(B_t) = \mu t.$$

$$et$$

$$\mathbb{V}ar(X_t) = \sigma^2 \mathbb{V}ar(B_t) = \sigma^2 t$$

Mouvement Brownien géométrique

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P}\right)$ espace probabilité filtré.

Définition 2.3.2 *: Un mouvement Brownien géométrique de paramètes* (μ, σ) *est un processus* $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$:

$$Y_t = Y_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\},$$

avec Y_0 une varèable alèatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien.

Remarque 2.3.1 *: Ce processus est appellé processus "log-normale :*

$$\ln(Y_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t + \ln(Y_0).$$

est la variable qui est à droite suit une loi normale.

Mouvement Brownien vectoriel

Définition 2.3.3 *: On appelle mouvement Brownien vectoriel standard, un processus à trajectoires continues, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\left(B_t = \left(B_t^1, ..., B_t^d\right), t \geq 0\right)$ tel que :*

a) $B_0 = 0$,

b) *tout accroissement $B_t - B_s$ où $0 \leq s < t$, suit une loi gaussienne sur $\mathbb{R}^d$ centrée et de matrice de covariance $(t - s)\, Id$.*

c) *Pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, les accroissements $B_{ti+1} - B_{ti}$, avec $0 \leq i \leq n$, sont indépendants.*

Remarque 2.3.2 *: Les processus des coordonnées $(B_t^i, t \geq 0)$, $i = 1, ..., d$ sont des mouvements Browniens réels standard indépendants. Réciproquement, des mouvements Browniens standard indépendants engendrent un mouvement Brownien vectoriel.*

Mouvement Brownien Fractionnaire

Définition 2.3.4 *: Le mouvement Brownien fractionnaire B_T^H est un gaussien centré de covariance :*

$$R(s, t) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H}\right).$$

Remarque 2.3.3 *: Si $H = \dfrac{1}{2}$ on est dans le cas du mouvement Brownien classique.*

Proposition 2.3.2 *: Le mouvement Brownien fractionnaire B_T^H est un processus à accroissement stationaire.*

Preuve. Comme B_T^H est un processus gaussien il suffit de verifier que :

$$\mathbb{C}ov\left(B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{s_1}^H - B_{s_0}^H\right) = \mathbb{C}ov\left(B_{h+t_1}^H - B_{h+t_0}^H, B_{h+s_1}^H - B_{h+s_0}^H\right),$$

tel que $s_0 < s_1 < t_0 < t_1$, par simmplification on sa ramène au cas où il y a deux incrèments :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\left(B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{s_1}^H - B_{s_0}^H\right) &= \mathbb{C}ov\left(B_{t_1}^H, B_{s_1}^H\right) - \mathbb{C}ov\left(B_{t_1}^H, B_{s_0}^H\right) - \mathbb{C}ov\left(B_{t_0}^H, B_{s_1}^H\right) + \mathbb{C}ov\left(B_{t_0}^H, B_{s_0}^H\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(t_1^{2H} + s_1^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}\right) - \tfrac{1}{2}\left(t_1^{2H} + s_0^{2H} - (t_1 - s_0)^{2H}\right) \\
&- \frac{1}{2}\left(t_0^{2H} + s_1^{2H} - (t_0 - s_1)^{2H}\right) + \tfrac{1}{2}\left(t_0^{2H} + s_0^{2H} - (t_0 - s_0)^{2H}\right).
\end{aligned}$$

En simplifiant chaque term on obtient :

$$\mathbb{C}ov\left(B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{s_1}^H - B_{s_0}^H\right) = \frac{1}{2}\left((t_1 - s_0)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_0)^{2H}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\left(B_{h+t_1}^H - B_{h+t_0}^H, B_{h+s_1}^H - B_{h+s_0}^H\right) &= \mathbb{C}ov\left(B_{h+t_1}^H, B_{h+s_1}^H\right) - \mathbb{C}ov\left(B_{h+t_1}^H, B_{h+s_0}^H\right) \\
&- \mathbb{C}ov\left(B_{h+t_0}^H, B_{h+s_1}^H\right) + \mathbb{C}ov\left(B_{h+t_0}^H, B_{h+s_0}^H\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((h + t_1)^{2H} + (h + s_1)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}\right) \\
&- \frac{1}{2}\left((h + t_1)^{2H} + (h + s_0)^{2H} - (t_1 - s_0)^{2H}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left((h + t_0)^{2H} + (h + s_1)^{2H} - (t_0 - s_1)^{2H}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left((h + t_0)^{2H} + (h + s_0)^{2H} - (t_0 - s_0)^{2H}\right).
\end{aligned}$$

En simplifiant chaque terme on obtient :

$$\mathbb{C}ov(B_{h+t_1}^H - B_{h+t_0}^H, B_{h+s_1}^H - B_{h+s_0}^H) = \frac{1}{2}\left((t_1 - s_0)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_0)^{2H}\right)$$

Alour Le mouvement Brownien fractionnaire B_T^H est un processus à accroissement stationaire.

■

Proposition 2.3.3 *: Si (X_t) est un processus gaussien stationnaire et $X_0 = 0$ tel que $\mathbb{V}ar\left(X_t\right) = t^{2H}$ alors X_t est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètrev H.*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov(X_t, X_s) &= \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{V}ar\left(X_t\right) + \mathbb{V}ar\left(X_s\right) - \mathbb{V}ar\left(X_{t-s}\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}\right).
\end{aligned}$$

■

Conclusion

Le mouvement Brownien est l'objet central du calcul des probabilités moderne. Il intervient dans de très nombreux modèles en physique, chimie, biologie, sciences économiques et mathématiques financières. Il est tout à la fois une martingale, un processus gaussien, un processus à accroissements indépendants et un processus de Markov. Ces diverses propriétés qui en font le processus stochastique par excellence.

Bibliographie

[1] B. Lapeyre D. Lemberton. Introduction au calcul stochastique applique a la finance Université Paris-Est, Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, France, Université Paris-Est,Professeur à l'École des Ponts ParisTech,France. 2012 Pages 53-54.

[2] H. Guiol. Calcul stochastique avancé. TIMB-TIMC-IMAG 2005.

[3] J. Jacob. Mouvement brownien et calcul stochastique. Université Pierre et Marie Curie 2007-2008.

[4] J. Yves Ouvrard. Probabilités, TOME 2 master agrégation.Université Joseph Fourier de Grenoble 2009.Page 159.

[5] M. Bossy. Introduction à la modèlisation financière en temp continue et calcul stochastique. 16 novembre 2013.

[6] M. Bossy InRia. Introduction à la modélisation financière en temps continue et calcul stochastique. 16 Novembre 2013.

[7] M. Jeanblanc, cours de calcul stochastique. M2IF EVRY septembre2006.

[8] N. Marie. Introduction à la modilisation probabiliste et statistique. Elipses E'dition Marketing S.A.,2018 32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15.(2004).

[9] N. Guillotin-Plantard. Introduction au calcul stochastique. 13 novembre 2009.

[10] O. Lévêque. Cours De Probabilités et calcul stochastiques. Semestre d'hiver 2004-2005.

[11] P. Bougerol. Calcul stochastique, M2-Probabilités et finance. Université Pierre, et Marie, Paris 6 2011-2012.

[12] V. Girardin et N. Limnios. Probabilités processus stochastiqus et applications. 5 allée de la 2^{e} DB,75015 Paris.(2014).

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{N}, \mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres naturelles réels respectivement.
Ω	:	Une ensemble fondamental.
p.s.	:	Presque sur.
$\inf, \sup$	:	inférieur, supérieur.
$\lim$	:	Limite.
$\mathbb{P}$-p.s	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
PAIS	:	Processus accroissements indépendant stationnaires.
v.a.	:	Variable aléatoire.
$X \sim \mathcal{N}(0, t)$	:	Variable X suit la loi normale centrée et de variance t.
$\mathbb{E}(X), Var(X)$	:	L'espèrence et variance de la variable alèatoire X.
$\mathbb{C}ov\,(X, Y)$	:	Covariance des variables alèatoire X et Y.
$\mathbb{E}(X\|Y)$	:	Espèrance conditionnelle X sachant Y.

Résumé

Dans ce mémoire, nous sommes intéressés à étudier le mouvement Brownien et certains propriétés. Pour cela, ce travail est contenu de deux chapitres : Généralités sur les processus stochastiques et mouvement Brownien.

Mots clés. Processus stochastique. Mouvement Brownien. Processus gaussien. Martingale.

Abstract

In this memory, we are interested in the study of Brownian motion and explain the properties. This work is composed of two chapters: Introduction to stochastic processes and Brownian motion.

Key words. Stochastic process. Brownian motion. Gaussian process. Martingale.

الملخص

في عملنا ، نحن مهتمون بدراسة الحركة البراونية و شرح خصائصها. يتكون هذا العمل من فصلين: مقدمة في العمليات العشوائية والحركة البراونية.

الكلمات المفتاحية. العمليات العشوائية. الحركة البراونية. عملية غوس. مارتينغال