République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Mammeri Karima

Titre :

Les équations d'évolution

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Soltani Siham**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Houas Amrane**	UMKB	Président
Dr.	**Ghodjmis Fatiha**	UMKB	Examinateur

Juin 2021

Dédicace

De tout mon coeur je dédie ce modeste travail.

A ma chère mère"**Hafsia**", la lumière qui nous

a guidés vers le chemin de savoir.

A mon cher père"**Mohamed**", pour leur sacrifice.

A mes cheres soeurs : **Yamina, Jamila.**

A mes chers frères : **Ghani, Mabrouk, Rabie,**

Okba, Lakhdar, Sami, Akram.

A mes belles soeurs : **Narimene, Donia, Nour elhouda, Khadija, Warda**

et leurs enfants les plus proche de mon coeur : **Ala Hibet Errahmane,**

Mohamed, Kaouthar, Islam, Ilyas.

A le mari de ma soeur : **Tahar**.et Mon mari : **Noureddine.**

A les parents des mon mari : **Othmane, Khadra**.

A toute ma famille "**Mammeri**".

A mes très chers amis : **Sara, Meriem, Cherifa, Laila, Ghamra,**

Fatma zohra, Meriem, Hayatte.

Karima

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage durant ces langues années d'étude.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur Madame **Soltani Siham**, pour ces conseils et ses orientations qui m'ont été soutenu d'une grande utilité au cous de l'élaboration de mon mémoire.

Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département de Mathématique de l'université de Mohamed Khider, Biskra.

Sans oublier de remercier les nombres de jury qui ont accepter de juger ce travail.

Merci à tout.

Table des matières

Introduction

Le présent travail porte sur l'étude de l'un des outils mathématiques les plus importants dans la résolution de problèmes "bien posés" dans la théorie des équations d'évolution, à savoir les opérateurs m-dissipatifs, et les semi-groupes.

Plusieurs modèles mathématiques qui proviennent de la physique (par exemple : l'équation de diffusion, l'équation des ondes, l'équation de la chaleur), de la chimie, des sciences de l'ingénieur, de la finance, de la biologie, ... etc, mènent à étudier les équations aux dérivées partielles, ce qui a permet aux mathématiciens de décrire le comportement d'une quantité qui dépend de plusieurs variables. Par exemple, la température de l'océan dépend à la fois de l'endroit et du moment où on la mesure. Pour décrire son évolution, les équations qui interviennent naturellement sont appelées EDP car elles font intervenir des variations par rapport aux différentes variables.

Les équations d'évolution sont des équations qui s'écrivent sous la forme :

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

(où $A : D(A) \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ inclus dans un espace de Banach X, et $f : [0, T] \longrightarrow X$, avec la condition initiale $u(0) = x \in X$).

On va introduire dans ce travail des solutions (solutions faibles dans $L^p(0, T; X)$, semi-groupe adjoint, solutions faibles dans $L^p(0, T; (D(A*))'))$.

Ce mémoire est composé d'une introduction et deux chapitres principaux :

Le premier chapitre est consacré aux rappels fondamentaux et les outils nécessaires pour réaliser ce travail. Ils concernent les définitions préliminaires, les opérateurs m-dissipatifs, et les semi-groupes.

Dans le second chapitre, est consacré les équations d'évolution non-homogène, les solutions, et les problèmes semi-linéaires.

Chapitre 1

Opérateurs m-dissipatifs

1.1 Définitions préliminaires

Dans tout ce chapitre, X est un espace de Banach. Sa norme est notée $\|\|$.

Définition 1.1.1 *Un opérateur linéaire dans X est un couple $(A, D(A))$, où $D(A)$ un sous-espace vectoriel de X, et $A : D \longrightarrow X$ est une application linéaire. On dit que A borné si $\|Au\|$ reste borné lorsque $u \in \{x \in D(A), \|x\| \leq 1\}$. Dans le cas contraire, A est dit non borné.*

Définition 1.1.2 *Si $(A, D(A))$ est un opérateur, linéaire dans X, le graphe de A et l'image de A sont les un sous-espace vectoriel $G(A)$ et $R(A)$ de X définis par*

$G(A) = \{(u, f) \in X \times X,\ u \in D(A),\ f = Au\},\ R(A) = A(D).$

Définition 1.1.3 *Soit A un opérateur non borné à domaine dense $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$. On définit l'opérateur adjoint de A qu'on notera A^* par*

$$A^* : D(A^*) \subset X \longrightarrow X.$$

telque :

$$D(A^*) = \{v \in X;\ \exists c \geq 0 \quad telque \ \ |\langle v, Au\rangle| \leq c\,\|u\| \ \ \forall u \in D(A)\}$$

$$G(A^*) = \{(v,\varphi) \in X \times X,\ \forall (u,f) \in G(A),\ \ \langle \varphi, u\rangle = \langle v, f\rangle\}$$

et

$$\langle v, Au\rangle_{X,X} = \langle A^* v, u\rangle_{X,X}$$

Définition 1.1.4 *Soit A un opérateur linéaire dans X, de domaine dense. On dit que A est auto-adjoint (respectivement anti-adjoint) si $A^* = A$ (respectivement $A^* = -A$).*

1.2 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 1.2.1 *Un opérateur linéaire A dans X est dissipatif si.on a*

$$\forall u \in D\left(A\right),\ \forall \lambda > 0,\ \ \|u - \lambda A u\| \geq \lambda \|u\|$$

Définition 1.2.2 *Un opérateur linéaire A dans X est m-dissipatif si*

(i) *A est dissipatif,*

(ii) $\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists u \in D(A) \quad telque \quad u - \lambda A u = f.$

Remarque 1.2.1 *Si A est un opérateur m-dissipatif dans X, il est immédiat, d'après les définitions (1.2.1) et (1.2.2) que pour tout $f \in X$ et tout $\lambda > 0$, l'équation $u - \lambda A u = f$ posséde une unique solution, qui vérifie $\|u\| \leq \|f\|$.*

Théorème 1.2.1 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur dissipatif et de domaine dense dans X. Si A est fermé et A^* est dissipatif alors A est m-dissipatif.*

Définition 1.2.3 *Soit A un opérateur m-dissipatif dans X et $\lambda > 0$. Pour tout $f \in X$, on note $J_\lambda f$ la solution u de l'équation $u - \lambda A u = f$.*

Remarque 1.2.2 *D'après la remarque (1.2.1), on a* $J_\lambda \in L(X)$ *et* $\|J_\lambda\| \leq 1$.

Proposition 1.2.1 *Si* A *est m-dissipatif, alors* $G(A)$ *est fermé dans* X.

Démonstration. Puisque $J_1 \in L(X)$, $G(J_1)$ est fermé. Il en résulte que $G(I-A)$ est fermé, et donc aussi $G(A)$. ■

Proposition 1.2.2 *Si* A *est m-dissipatif et si* $u \in \overline{D(A)}$, *on a* $\lim_{\lambda \downarrow 0} \|J_\lambda u - u\| = 0$.

Démonstration. On a $\|J_\lambda - I\| \leq 2$, et donc par densité, il suffit de considérer le cas $u \in D(A)$. On $J_\lambda u - u = J_\lambda \left[u - (I - \lambda A)\, u\right]$, et donc

$$\|J_\lambda u - u\| \leq \|u - (I - \lambda A)\, u\| = \lambda \, \|Au\| \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \;\; \lambda \downarrow 0.$$

■

Définition 1.2.4 *Si* A *est m-dissipatif, alors pour* $\lambda > 0$, *on note* A_λ *l'opérateur défini par*

$$A_\lambda = AJ_\lambda = \frac{J_\lambda - I}{\lambda}$$

on a $A_\lambda \in L(X)$ *et* $\|A_\lambda\| \leq \dfrac{2}{\lambda}$.

Proposition 1.2.3 *Si* A *est m-dissipatif et si* $\overline{D(A)} = X$, *alors pour tout* $u \in D(A)$, *on a*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \|A_\lambda u - Au\| = 0.$$

Démonstration. Soit $u \in D(A)$. D'après la proposition (1.2.1), on a $J_\lambda Au - Au \longrightarrow 0$, quand $\lambda \downarrow 0$. D'autre part, on vérifie aisément d'après la définition (1.2.4) que $A_\lambda u = J_\lambda Au$. Par suite,

$$\|A_\lambda u - Au\| = \|A_\lambda u = J_\lambda Au\| \longrightarrow 0, \text{ quand } \lambda \downarrow 0.$$

■

1.2.1 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert

Dans cette section nous supposons que X est un espace de Hilbert, donc on note $\langle . \rangle$ le produit scalaire. Si A est un opérateur linéaire dans X, de domaine dense, la formule

$$G(A^*) = \{(\upsilon, \varphi) \in X \times X,\ \forall\, (u, f) \in G(A),\ \ \langle \varphi, u \rangle = \langle \upsilon, f \rangle\}$$

définit un opérateur linéaire A^* (l'adjoint de A), de domaine

$$D(A^*) = \{\upsilon \in X, \exists C < \infty, |\langle Au, \upsilon \rangle| \leq C \, \|u\| \, , \forall u \in D(A)\} \, ,$$

et tel que

$$\langle A^* \upsilon, u \rangle = \langle \upsilon, Au \rangle \, , \ \forall u \in D(A),\ \forall \upsilon \in D(A^*).$$

En effet, la forme linéaire $u \longrightarrow \langle \upsilon, Au \rangle$, définie sur $D(A)$ pour tout $\upsilon \in D(A^*)$, se prolonge de façon unique en $\varphi \in X' \approx X$, et l'on pose $\varphi = A^* \upsilon$.
Il est clair que $G(A^*)$ est toujours fermé. D'autre part, on vérifie aisément que si $B \in L(X)$, alors $(A + B)^* = A^* + B^*$.

Proposition 1.2.4 *A est dissipatif dans X si et seulement si*

$$\forall x \in D(A),\ (Ax, x) \leq 0, \quad \textit{pour tout } x \in D(A).$$

Démonstration. Si A est dissipatif, on a

$$-2\lambda \langle Ax, x \rangle + \lambda^2 \|Ax\|^2 = \|x - \lambda Ax\|^2 - \|x\|^2 \geq 0, \quad \forall \lambda > 0,\ \forall x \in D(A).$$

En divisant par λ et en faisant $\lambda \longrightarrow 0$, il vient

$$\langle Ax, x \rangle \leq 0, \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

Réciproquement, si la condition ci-dessus est vérifiée, on a pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$.

$$\|x - \lambda Ax\|^2 = \|x\|^2 - 2\lambda \langle Ax, x\rangle + \lambda^2 \|Ax\|^2 \geq \|x\|^2 ,$$

et donc A est dissipatif. ■

Corollaire 1.2.1 *Si A est m-dissipatif dans X, alors $D(A)$ est dense dans X.*

Démonstration. Soit z dans l'orthogonal de $D(A)$, et posons $x = J_1 z \in D(A)$. On a

$$0 = \langle z, x\rangle = \langle x - Ax, x\rangle .$$

Par conséquent,

$$\|x\|^2 = \langle Ax, x\rangle \leq 0.$$

Par suite, $x = z = 0$, et donc $D(A)$ est dense dans X. ■

Théorème 1.2.2 *Soit A un opérateur linéaire dissipatif dans X de domaine dense. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A^* est dissipatif et $G(A)$ est fermé.*

Corollaire 1.2.2 *Si A un opérateur auto-adjoint dans X, et si $A \leq 0$ (c'est à dire $\langle Ax, x\rangle \leq 0$, pour tout $x \in D(A)$), alors A est m-dissipatif.*

Démonstration . D'après la proposition (1.2.4), A est dissipatif. Puisque $A^* = A$, A^* est dissipatif. Enfin, $G(A)$ est toujours fermé, donc $G(A)$ est fermé. On conclut avec le théorème (1.2.2). ■

Corollaire 1.2.3 *Si A est un opérateur anti-adjoint dans X, alors A et $-A$ sont m-dissipatifs.*

Démonstration. Soit $u \in D(A)$. On a $\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = -\langle x, Ax\rangle$. Donc $\langle Ax, x\rangle = 0$. D'après la proposition (1.2.4), A et $-A$ sont dissipatif. On conclut comme pour le corollaire (1.2.2). ■

Corollaire 1.2.4 *Soit A un opérateur linéaire dans X, de domaine dense, tel que $G(A) \subset G(A^*)$ et $A \leq 0$. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A est auto-adjoint.*

Corollaire 1.2.5 *Soit A un opérateur linéaire dans X, de domaine dense. Alors A et $-A$ sont m-dissipatif si et seulement si A est anti-adjoint.*

1.2.2 Exemple d'opérateurs m-dissipatifs

L'opérateur des ondes (ou de Klein-Gordon) dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Soit Ω désigne un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$, et $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On peut considérer indifféremment les fonctions à valeurs réelles ou les fonctions à valeurs complexes, mais dans les deux cas X est considéré comme un espace de hilbert réel. On note

$$\lambda = \inf \left\{ \|\nabla u\|_{L^2} \,,\; u \in H_0^1(\Omega), \;\; \|u\|_{L^2} = 1 \right\}. \tag{1.1}$$

(dans le cas où Ω est borné, on rappelle que λ est la premiére valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $\lambda > 0$). Soit $m > -\lambda$, on prut alors équiper X du produit scalaire

$$\langle (u,v)\,, (w,z) \rangle = \int (\nabla u \cdot \nabla w + muw + vz)\, dx,$$

qui induit sur X une norme équivalente à la norme habituelle. On définit l'opérateur linéaire A sur X par

$$D(A) = \left\{ (u,v) \in X, \;\; \triangle\, u \in L^2(\Omega), \; v \in H_0^1(\Omega) \right\},$$
$$A\,(u,v) = (v, \nabla u - mu)\,, \; \forall\, (u,v) \in D(A).$$

Lemme 1.2.1 *Soit $u \in D(B)$, et $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors,*

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v \; dx = -\int_\Omega \nabla\, u \cdot \nabla v \; dx. \tag{1.2}$$

Proposition 1.2.5 *A est anti-adjoint, et en particulier A et $-A$ sont m-dissipatifs avec domaines denses.*

Démonstration. $D(\Omega) \times D(\Omega) \subset D(A)$ et donc $D(A)$ est dense dans X. D'autre part, on a pour tout $[(u,\upsilon), (w,z)] \in D(A)^2$, et d'après(1.2) et comme $A(u,\upsilon) = (\upsilon, \bigtriangledown u - mu)$,

$$\begin{aligned}\langle A(u,\upsilon), (w,z)\rangle &= \int (\bigtriangledown \upsilon \cdot \bigtriangledown w + m\upsilon w + (\Delta u - mu) z)\, dx \\ &= -\int (\bigtriangledown u \cdot \bigtriangledown z + muz + (\Delta w - mw) \upsilon)\, dx \\ &= -\langle (u,\upsilon), A(w,z)\rangle \end{aligned} \tag{1.3}$$

En appliquant (1.3) avec $(u,\upsilon) = (w,z)$, il vient

$$\langle A(u,\upsilon), (u,\upsilon)\rangle = 0.$$

Par suite, A est dissipatif d'après la proposition (1.2.4). Soit maintenant $(f,g) \in X$. L'équation $(u,\upsilon) - A(u,\upsilon) = (f,g)$ est équivalente au système

$$\begin{cases} 2u - \Delta u = f + g, \\ \upsilon = u - f. \end{cases} \tag{1.4}$$

D'après la proposition de le laplacien dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$. On résout ensuite (1.4) et on trouve $\upsilon \in H_0^1(\Omega)$. Donc $(u,\upsilon) \in D(A)$ et $(u,\upsilon) - A(u,\upsilon) = (f,g)$, donc A est dissipatif. on montre de même que $-A$ est aussi m-dissipatif. D'après (1.3), on a $G(A) \subset G(-A^*)$. Le corollaire (1.2.5) montre que A est anti-adjoint. ∎

1.3 Semi-groupes

1.3.1 Semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach

Définition 1.3.1 *Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t\geq 0}$ de $L(X)$ est un semi-groupe fortement continu sur X lorsque les conditions suivantes sont réalisées*

1. $S(0) = I$,
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$ *pourtout* $t \geq 0$ *et tout* $s \geq 0$,
3. $\lim_{t\to 0} \|S(t)x - x\| = 0$ *pourtout* $x \in X$.

Théorème 1.3.1 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X. Alors il existe des constantes $w \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que*

$$\|S(t)\| \leq M \exp(wt) \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Corollaire 1.3.1 *Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X alors, pour tout $x \in X$, l'application*

$$t \longmapsto S(t)x$$

est continue de $[0, \infty)$ dans X.

Démonstration. (1) Soient $t \geq 0$ et $h \geq 0$, nous avons

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \leq \|S(t)\| \, \|S(h)x - x\| \leq M \exp(wt) \|S(h)x - x\|.$$

On a donc

$$\lim_{h \searrow 0} \|S(h)x - x\| = 0.$$

(2) Soient $t > 0$ et $t \geq h \geq 0$, nous avons

$$\|S(t-h)x - S(t)x\| \leq M \exp(w(t-h)) \|x - S(h)x\|.$$

On conclut avec le résultat montré en (1). ■

Définition 1.3.2 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X. On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur non borné $(A, D(A))$ défini par*

$$D(A) = \left\{ x \in X | \quad \textit{la limite } \lim_{t\searrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \textit{existe dans } X \right\},$$

$$Ax = \lim_{t\searrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

Théorème 1.3.2 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *Pour tout $x \in X$, on a*

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x.$$

2. *Pour tout $x \in X$ et tout $t > 0$, $\int_0^t S(s)x\, ds$ appartient à $D(A)$ et*

$$A\left(\int_0^t S(s)x ds\right) = S(t)x - x.$$

3. *Si $x \in D(A)$ alors $S(t)x \in D(A)$ et*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

4. *Si $x \in D(A)$ alors*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AS(\tau)x d\tau$$

Démonstration. (i) Soit $x \in X$. Le résultat (1) découle de la continuité de $\mathbb{R}^+$ dans X de l'application

$$t \longmapsto S(t)x$$

(ii) Utilisant les propriétés de semi-groupe, et le fait que $S(h) \in L(X)$ pour $h > 0$, nous pouvons écrire

$$\frac{S(h)-I}{h}\int_0^t S(s)xds = \frac{1}{h}\int_0^t (S(s+h)x - S(s)x)ds = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t S(s)xds$$
$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h S(s)xds.$$

En passant à la limite quand h tend vers zéro, nous obtenons

$$A\int_0^t S(s)xds = S(t)x - x.$$

(iii) Soit $x \in D(A)$ et $h > 0$, on a

$$\frac{S(h)-I}{h}S(t)x = S(t)\frac{S(h)-I}{h}x.$$

En pssant à la limite quand h tend vers zéro, nous obtenons :

$$AS(t)x = S(t)Ax = \frac{d^+}{dt}S(t)x.$$

En Calculer $\frac{d^-}{dt}S(t)x - S(t)Ax$. Nous avons

$$\frac{1}{h}(S(t)x - S(t-h)x) - S(t)Ax = S(t-h)\frac{S(h)x-x}{h} - S(t)Ax$$
$$= S(t-h)\left(\frac{S(h)x-x}{h} - Ax\right) + S(t-h) - S(t)Ax.$$

Nous pouvons facilement établir que

$$\lim_{h\searrow 0}\|S(t-h) - S(t)\| = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

et $\|S(t-h)\|$ est uniformément borné pour $h \in [0,t]$. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, nous obtenons

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}(S(t)x - S(t-h)x) - S(t)Ax = 0,$$

i.e $\frac{d^-}{dt}S(t)x - S(t)Ax = 0$. (iv) Le résultat s'obtient en intégrant l'identité (iii) entre s et t. ■

1.3.2 Semi-groupes sur un espace de Hilbert

Nous supposons que X est un espace de Hilbert, et nous identions X et X' est le dual topologique de l'espace de Banach X

Théorème 1.3.3 *Soit $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continue sur X, si l'opérateur A est auto-adjoint alors, pour tout $x_0 \in X$; $x(t) = S(t)x_0$ est l'unique solution du probléme*

$$\begin{cases} x \in C([0,+\infty); X) \cap C((0,+\infty); D(A)) \cap C^1((0,+\infty); X), \\ x'(t) = Ax(t) \quad \text{pour tout} \;\; t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

De plus pour tout $t > 0$, on a

$$\|Ax(t)\| \leq \frac{1}{t\sqrt{2}} \|x_0\| \quad et \quad -(Ax(t), x(t)) \leq \frac{1}{2t} \|x_0\|^2,$$

et

$$\|Ax(t)\|^2 \leq -\frac{1}{2t}(Ax(t), x(t)) \qquad si \; x_0 \in D(A)$$

Théorème 1.3.4 *Soit $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X. Si l'opérateur A est anti-adjoint alors le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ s'étend à un groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ tel que* i/ $\forall x_0 \in X,\ S(\cdot)x_0 \in C(\mathbb{R}; X)$,

ii/ $\forall x_0 \in X, \forall t \in \mathbb{R},\ \|S(\cdot)x_0\| = \|x_0\|$,

iii/ $\forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, S(s+t) = S(s)S(t)$,

et pour tout $x_0 \in D(A)$, $x(t) = S(t)x_0$ vérifie

$$\begin{cases} x \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}; X), \\ x'(t) = Ax(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0. \end{cases}$$

1.3.3 Semi-groupes de contractions

Définition 1.3.3 *Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X est un semi-groupe de contractions si*

$$\|S(t)\| \leq 1 \qquad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

Théorème 1.3.5 (Théorème de Hille-Yosida 1) *Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *A est fermé,*
2. *$D(A)$ est dense dans X,*
3. *pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ est une application bijective de $D(A)$ sur X, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X vérifiant*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 1.3.6 (Théorème de Hille-Yosida 2) *Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si A est m-dissipatif et de domaine dense dans X.*

Théorème 1.3.7 (Théorème de Lumer-Phillips) *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X. Si A est fermé et si A et A^* sont dissipatifs alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X.*

Démonstration. Le résultat découle des théorèmes (1.2.1) et (1.3.7).Si $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dans X, nous pouvons définir les puissances de A en tant qu'opérateurs non bornés de la façon suivante :

$$D(A^2) = \{x \in D(A) | Ax \in D(A)\} \quad \text{et} \quad A^2x = A(Ax).$$

De manière itérative, pour tout entier $k \geq 2$, nous posons

$$D(A^k) = \left\{x \in D(A^{k-1}) | Ax \in D(A^{k-1})\right\} \quad \text{et} \quad A^k x = A(A^{k-1}x).$$

Si $(A, D(A))$ est un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X, il est possible de définir de nouveaux opérateurs m-dissipatifs comme suit. Nous définissons $(A_1, D(A_1))$ par

$$D(A_1) = D(A^2) \quad \text{et} \quad A_1 x = Ax \quad \text{pour tout } x \in D(A_1).$$

■

Chapitre 2

Équations d'évolution

2.1 Équations d'évolution non-homogènes

Soit $T > 0$. pour $x \in X$ et $f : [0,T] \longrightarrow X$ donnés, on veut résoudre le problème

$$\begin{cases} u \in C([0,T], X) \cap C^1([0,T], Y); \\ u'(t) = Au(t) + f(t), \quad \forall t \in [0,T]; \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

Comme pour les équations différentielles ordinaires, on a le résultat suivant (formule de variation des constantes).

Lemme 2.1.1 *Soit $x \in D(A)$ et $f \in C([0,T], X)$. On considère une solutoin $u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X)$ du problème (2.1). Alors, on a*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Démonstratoin. Soit $t \in [0,T]$. On pose

$$w(s) = T(t-s)u(s), \quad s \in [0,t].$$

Soit $s \in [0, t]$ et $h \in (0, t-s]$. On a

$$\frac{w(s+h)-w(s)}{h} = T(t-s-h)\left\{\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \frac{T(h)-I}{h}u(s)\right\}$$
$$\longrightarrow_{h\downarrow 0} T(t-s)\left\{u'(s) - Au(s)\right\} = T(t-s)f(s).$$

puisque $T(t-.)f(.) \in C([0,t], X)$, on en déduit que $w \in C^1([0,t], X)$ et

$$w'(s) = T(t-s)f(s), \quad \text{pour tout} \quad s \in [0, t). \tag{2.3}$$

On intégre (2.3) entre 0 et $\tau < t$, puis on fait tendre τ vers t ; on obtient ainsi (2.2). ∎

2.1.1 Solutions faibles dans $\mathbf{L}^p$(0,T ;X)

Dans cette section nous supposons que $f \in L^p(0, T; X)$ avec $1 \leq p < \infty$.

Définition 2.1.1 *Une solution faible de l'équation (2.1) dans $L^p(0, T; X)$ est une fonction $u \in L^p(0, T; X)$ telle que, pour tout $\upsilon \in D(A^*)$, l'application*

$$t \mapsto \langle u(t), \upsilon \rangle$$

appartient à $W^{1,p}(0, T)$ et vérifie

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), \upsilon \rangle = \langle u(t), A^*\upsilon \rangle + \langle f(t), \upsilon \rangle, \text{et} \ \ \langle u(0), \upsilon \rangle = \langle x_0, \upsilon \rangle. \tag{2.4}$$

Nous admettons le lemme suivant dont la preuve n'est pas complique.

Lemme 2.1.2 *Soit $(A, D(A))$ est un opérateur linéaire fermé de domaine dense dans X. Si $u \in X$ et $z \in X$ vérifient*

$$\langle y, u \rangle = \langle A^* y, z \rangle,$$

pour tout $y \in D(A^*)$, alors $z \in D(A)$ et $u = Az$.

Théorème 2.1.1 *Si $x_0 \in X$ et si $f \in L^p(0,T;X)$, alors l'équation (2.1) admet une solution faible unique dans $L^p(0,T;X)$. De plus cette solution appartient à $C([0,T];X)$ et est définie par*

$$u(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \textit{pour tout } t \in [0,T]. \tag{2.5}$$

2.1.2 Semi-groupe adjoint

Théorème 2.1.2 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire de domaine dense dans X. Si $(\lambda I - A)$ est un opérateur bijectif de $D(A)$ sur X, et si $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X)$, alors $(\lambda I - A^*)$ est un opérateur bijectif de $D(A^*)$ sur X_0, $(\lambda I - A^*)^{-1} \in L(X_0)$, et*

$$(\lambda I - A^*)^{-1} = [(\lambda I - A)^{-1}]^*.$$

Démonstration. De la définition de l'adjoint d'un opérateur, nous déduisons que $(\lambda I - A)^* = \lambda I - A^*$. (Dans l'écriture $\lambda I - A^*$, I désigne l'identité dans X', et $(\lambda I - A)$ est ici considéré comme opérateur appartenant à $L(D(A);X)$.). Comme $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X, $[(\lambda I - A)^{-1}]^*$ est un opérateur borné sur X'. Nous allons montrer que $(\lambda I - A^*)$ est inversible et que son inverse est égal à $[(\lambda I - A)^{-1}]^*$. Montrons tout d'abord que $(\lambda I - A^*)$ est un opérateur injectif. S'il existe $y \in X' \neq 0$ tel que $(\lambda I - A^*)y = 0$, alors $\langle(\lambda I - A^*)y, x\rangle = \langle y, (\lambda I - A)x\rangle$ pour tout $x \in D(A)$. Comme $(\lambda I - A)$ est bijectif de $D(A)$ sur X, on a nécessairement $y = 0$ et $(\lambda I - A^*)$ est un opérateur injectif. Pour tout $x \in X$ et tout $y \in D(A^*)$, nous avons

$$\langle y, x\rangle = \left\langle y, (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x\right\rangle = \left\langle(\lambda I - A^*)y, (\lambda I - A)^{-1}x\right\rangle.$$

Par conséquent

$$[(\lambda I - A)^{-1}]^*(\lambda I - A^*)y = y \quad \text{pour tout } y \in D(A^*). \tag{2.6}$$

Pour tout $x \in D(A)$ et tout $y \in X'$, nous avons

$$\langle y, x\rangle = \left\langle y, (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x\right\rangle = \left\langle [(\lambda I - A)^{-1}]^* y, (\lambda I - A)x\right\rangle,$$

d'où l'on déduit

$$(\lambda I - A^*)[(\lambda I - A)^{-1}]^* y = y \quad \text{pour tout } y \in X'. \tag{2.7}$$

De (2.6) et (2.7), nous déduisons que $(\lambda I - A^*)$ est un opérateur bijectif de $D(A^*)$ sur X' et que $(\lambda I - A^*)^{-1} = [(\lambda I - A)^{-1}]^*$. La preuve est complète. ■

Théorème 2.1.3 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire de domaine dense dans X. Si X est réflexif et si A est m-dissipatif alors, $(S(t)^*)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X', ayant $(A^*, D(A^*))$ comme générateur infinitésimal.*

2.1.3 Solutions faibles dans $\mathbf{L}^p$(0,T ;(D(A*))′)

Lorsque les données de l'équation (2.1) sont peu régulières, il est possible d'étendre la notion de solution en utilisant des arguments de dualité. C'est l'objet de cette section. Dans la suite du chapitre, nous nous limitons au cas où X est un espace de Hilbert. (Les résultats présentés peuvent s'étendre sans trop de difficulté au cas où X est un espace de Banach réflexif. Le cas non réflexif a aussi été étudié dans la littérature, mais il est beaucoup plus délicat) Les injections

$$D(A) \hookrightarrow X \qquad \text{et} \qquad D(A^*) \hookrightarrow X'$$

sont continues et à image dense. On en déduit

$$D(A) \hookrightarrow X \hookrightarrow (D(A^*))'$$

L'opérateur $(A, D(A))$ étant le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X, du théorème (2.1.3) il découle que $(A^*, D(A^*))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X'. Notons $(S^*(t))_{t\geq 0}$ ce semi-groupe. Rappelons que l'opérateur $(A_1^*, D(A_1^*))$ défini par

$$D(A_1^*) = D((A^*)^2), \qquad A_1^* y = A^* y \quad \text{pourtout} \;\; y \in D(A_1^*),$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur $D(A^*)$ et que ce semi-groupe $(S_1^*(t))_{t\geq 0}$ vérifie $S_1^*(t)y = S^*(t)y$ pour tout $y \in D(A^*)$.Du théorème (2.1.3) nous déduisons que $((S_1^*)^*(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe sur $(D(A^*))'$ engendré par $(A_1^*)^*$. Nous allons montrer que $(S_1^*)^*(t)$ est l'extension continue de $S(t)$ à $(D(A^*))'$.Plus précisément nous avons le.

Théorème 2.1.4 *L'adjoint de l'opérateur non borné $(A_1^*, D(A_1^*))$ dans $D(A^*)$ est l'opérateur $((A_1^*)^*, D((A_1^*)^*))$ défini par*

$$D((A_1^*)^*) = X, \qquad \langle (A_1^*)^* x, y\rangle = \langle x, A_1^* y\rangle \qquad \textit{pour tout } x \in X \quad \textit{et tout } y \in D(A_1^*).$$

De plus, $(A_1^*)^* x = Ax$ pour tout $x \in D(A)$. Le semi-groupe $((S_1^*)^*(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe sur $(D(A^*))'$ engendré par $(A_1^*)^*$ et

$$(S_1^*)^*(t)x = S(t)x \qquad \text{pour tout } x \in X \quad \text{et tout } t \geq 0.$$

Démonstration. On Montre que $D((A_1^*)^*) = X$. Pour tout $x \in X$ et tout $y \in D(A_1^*)$, on a

$$\left| \langle x, A_1^* y\rangle_{(D(A^*))', D(A^*)} \right| = \left| \langle x, A_1^* y\rangle_{X,X} \right| \leq \|x\|_X \, \|y\|_{D(A^*)} \,.$$

Par conséquent

$$X \subset D((A_1^*)^*). \tag{2.8}$$

Montre l'inclusion inverse. Soit $x \in X$, et soit $y_x \in X'$ tel que

$$\|x\|_X = \sup_{y \in X'} \frac{\langle x, y\rangle_{X,X'}}{\|y\|_{X'}} = \frac{\langle x, y_x\rangle_{X,X'}}{\|y_x\|_{X'}}$$

On a

$$\|x\|_X = \frac{\langle x, (I - A_1^*)(I - A_1^*)^{-1} y_x\rangle_{X,X'}}{\|y_x\|_{X'}} = \frac{\langle x, (I - A_1^*) z_x\rangle_{X,X'}}{\|z_x\|_{D(A^*)}}$$

avec $z_x = (I - A_1^*)^{-1} y_x$. Étant donné que

$$\|x\|_{D((A_1^*)^*)} = \sup_{z \in D(A^*)} \frac{\langle x, (I - A_1^*) z\rangle_{X,X'}}{\|z\|_{D(A^*)}},$$

On a

$$\|x\|_{D((A_1^*)^*)} \leq \|x\|_X . \tag{2.9}$$

L'égalité $D((A_1^*)^*) = X$ découle de (2.8) et (2.9). Pour tout $x \in D(A)$, et tout $y \in D(A_1^*)$, nous avons

$$\langle (A_1^*)^* x, y\rangle = \langle x, A_1^* y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \langle Ax, y\rangle .$$

Par conséquent, $(A_1^*)^* x = Ax$ pour tout $x \in D(A)$. Du théorème (2.1.3) nous déduisons que $((S_1^*)^*(t))_{t \geq 0}$ est le semi-groupe sur $(D(A^*))'$ engendré par $(A_1^*)^*$. Pour montrer que $(S_1^*)^*(t)x = S(t)x$ pour tout $x \in X$ et tout $t \geq 0$, il suffit de remarquer que

$$\langle (S_1^*)^*(t)x, y\rangle = \langle x, S_1^*(t) y\rangle = \langle x, S^*(t) y\rangle = \langle S(t)x, y\rangle ,$$

pour tout $x \in X$, tout $y \in D(A^*)$, et tout $t \geq 0$. ■

2.1.4 Le lemme de Gronwall

Dans ce paragraphe un résultat qui est très utile dans l'étude des problèmes semi-linéaires, aussi bien pour montrer l'unicité des solutions que pour établir des propriétés de bornage.

Lemme 2.1.3 (lemme de Gronwall) *Soit $T > 0$, $\lambda \in L^1(0,T)$, $\lambda \geq 0$ p.p. et C_1, $C_2 \geq 0$. Soit $\varphi \in L^1(0,T)$, $\varphi \geq 0$ p.p., tel que $\lambda\varphi \in L^1(0,T)$ et*

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds, \quad \textit{pour presque tout } t \in (0,T).$$

Alors on a

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)ds\right), \quad \textit{pour presque tout } t \in (0,T).$$

Démonstration. On pose

$$\psi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds, \quad \text{pour } t \in [0,T].$$

ψ est dérivable presque partout (car absolument continue), et on a

$$\psi'(t) \leq C_1\lambda(t)\varphi(t)\psi(t) \leq C_2\lambda(t)\psi(t) \text{ p.p. sur } (0,T).$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dt}\left\{\psi(t)_1 \exp\left(-\int_0^t C_2\lambda(s)ds\right)\right\} \leq 0,$$

et donc

$$\psi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)ds\right), \quad \text{pour presque tout } t \in (0,T).$$

D'où le résultat, puisque $\varphi \leq \psi$ p.p.. ■

Remarque 2.1.1 *En particulier, si $C_1 = 0$, on a $\varphi = 0$ p.p..*

2.2 Problèmes semi-linéaires

Définition 2.2.1 *On dit qu'une fonction $F : X \longrightarrow X$ est lipschitzienne sur les bornés de X si pour tout $M > 0$, il existe une constante $K(M)$, telle que*

$$\|F(y) - F(x)\| \leq K(M)\,\|y - x\|\,, \quad \forall x, y \in B_M,$$

où B_M est la boule de centre 0 et de rayon M.

Dans tout le paragraphe, $F : X \longrightarrow X$ est une fonction lipschitzienne sur les bornés de X. On note $K(M)$ la constante de lipschitz de F sur B_M, pour $M > 0$. En particulier, $K(M)$ est une fonction croissante de M. Etant donné $x \in X$, on cherche $T > 0$ et une solution u du problème

$$\begin{cases} u \in C([0,T]\,, X) \cap C^1\left([0,T]\,, Y\right); \\ u'(t) = Au(t) + F(u(t)), \quad \forall t \in [0,T]\,; \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{2.10}$$

Nous considérerons aussi une forme affaiblie du problème précédent. En effet, d'après le lemme (2.1.1), toute solution u de (2.10) est du problème suivant

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds, \quad \forall t \in [0,T]\,. \tag{2.11}$$

Notons enfin que pour tout $u \in C([0,T]\,, X)$, (2.11) est équivalent au problème

$$\begin{cases} u \in C([0,T]\,, X) \cap C^1\left([0,T]\,, Y\right); \\ u'(t) = Au(t) + F(u(t)), \quad \forall t \in [0,T]\,; \\ u(0) = x. \end{cases}$$

2.2.1 Un résultat d'existence locale

Nous commençons avec un résultat d'unicité.

Lemme 2.2.1 *Soit $T > 0$, $x \in X$, et u, $\upsilon \in C([0,T],X)$ deux solution du problème (2.11). Alors $u = \upsilon$.*

Démonstration. On pose

$$M = \sup_{t\in[0,T]} \max\left\{\|u(t)\|, \|\upsilon\|\right\}.$$

On a alors

$$\|u(t) - \upsilon(t)\| \leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(\upsilon(s))\|\, ds \leq K(M)\int_0^t \|u(s) - \upsilon(s)\|\, ds, \forall$$

On conclut en appliquant la remarque (2.1.1). Posons $T_M = [2K(2M + \|F(0)\|) + 2]^{-1} > 0$, pour $M > 0$. On peut établir un premier résultat d'existence locale. ∎

Proposition 2.2.1 *Soit $M > 0$ et $x \in X$ tel que $\|x\| \leq M$. Alors, il existe une unique solution $u \in C([0,T_M],X)$ de (2.11) avec $T = T_M$.*

Démonstration. Le lemme (2.2.1) montre l'unicité. Soit $x \in X$, et $M \geq \|x\|$. On note $L = 2M + \|F(0)\|$ et

$$E = \left\{u \in C([0,T_M],X),\ \ \|u(t)\| \leq L,\ \forall t \in [0,T_M]\right\},$$

et on équipe E de la distance d induite par la norme de $C([0,T_M],X)$, soit

$$d(u,\upsilon) = \max_{t\in[0,T_M]} \|u(t) - \upsilon(t)\|,\ \text{pour } u,\upsilon \in E.$$

Puisque $C([0,T_M],X)$ est un espace de Banach, (E,d) est un espace métrique complet. Pour tout $u \in E$, on définit $\Phi_u \in C([0,T_M],X)$, par

$$\Phi_u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds, \ \forall t \in [0,T_M].$$

Notons que pour $s \in [0,T_M]$, on a $F(u(s)) = F(0) + (F(u(s)) - F(0))$, et donc

$$\|F(u(s))\| \leq \|F(0)\| + LK(L) \leq (M + \|F(0)\|)/T_M.$$

Il en résulte que

$$\|\Phi_u(t)\| \leq \|x\| + \int_0^t \|F(u(s))\| ds \leq M + (M + \|F(0)\|)\, t/T_M \leq L, \ \forall t \in [0,T_M].$$

Par conséquent, on a $\Phi : E \longrightarrow E$. De plus, pour tout $u, v \in E$, on a

$$\|\Phi_u - \Phi_v\| \leq K(L) \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds \leq T_M K(L)\, d(u,v) \leq \frac{1}{2} d(u,v), \ \forall t \in [0,T_M].$$

Donc, Φ est une contraction de rapport $\dfrac{1}{2}$ sur E, et donc Φ possède un point fixe $u \in E$, qui vérifie les conclusions de la proposition (2.2.1). ■

Conclusion

Ce travail est une étude sommaire des outils mathématiques intervenant dans la théorie des semi-groupes et ses applications dans le cadre des équations d'évolution ordinaires et aux dérivées partielles, par l'utilisation de l'opérateur de Hille-Yosida qui montrer l'existence des solutions (solutions faibles dans $L^p(0, T; X)$, semi-groupe adjoint, solutions faibles dans $L^p(0, T; (D(A^*))'))$ des équations d'évolution non-homogène.
Ce qui a consisté d'abord, à introduire et étudier les notions fondamentales de la théorie, et d'obtenir ainsi des résultats généraux et un bagage mathématique utile dans différents domaines.
Comme application, on traite en détails quelques équations d'évolution qui sont au fond de l'un des domaines les plus fertiles de la recherche mathématique actuelle, en donnant quelques exemples illustratives à quelques EDP.

Bibliographie

[1] J. Pierre Raymond, Équations d'évolution. Résumé de la première partie du cours du module A0 du DEA de Mathématiques Appliquées. Université Paul Sabatier.

[2] T. Cazenave, A. Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires, Ellipses, 1990.

[3] F. Dardalhon, Federico Verga, Le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires, juin 2006.

[4] B. Moussa, M. T. , & Youkana, A, Amar. Existence globale et comportement a l'infini des solutions d'un systeme de reaction-diffusion (doctoral dissertation).

[5] Ibeghouchene, A (2016). La Stepanov-pseudo presque périodicité et applications (Doctoral dissertation, UMMTO).

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$L(X,Y)$	Ensemble des applications linéaires continues de X dans Y.
$D(A)$	Le domaine de l'opérateur linéaire A.
X	Espace de de Banach.
X'	Le dual topologique de l'espace de Banach X.
$L^1(0,T;X)$	L'espace de fonctions intégrables sur $[0,T]$ à valeurs dans X.
$L^p(0,T;X)$	L'espace des fonctions mesurables est intégrable sur $[0,T]$.
$\|.\|$	Norme de X.
$S(t)$	Semi-groupe.
A^*	Adjoint de l'opérateur A.
Ω	Un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$\overline{D(A)}$	l'adherence de l'ensemble $D(A)$.
$H_0^1(\Omega)$	L'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
I	L'opérateur identité sur X.
Δ	Opérateur de Laplacien.
∇	Opérateur gradient.
$\|.\|$	La norme d'opérateurs.
J_λ	résolvante de l'opérateur A.

Résumé :

Dans ce travail on étudie les équations d'évolution. La première classe est consacrée à l'étude des opérateurs m-dissipatifs et semi-groupes.les démonstrations sont basées sur les théorèmes de Hille-Yosida ,et de Lumer-Phillips. Dans la deuxième classe on étudie les équations d'évolution non-homogènes qui basée sur les solutions faibles et le semi-groupe adjoint, et on étudie aussi les problèmes semi-linéaires. Le but de ce travail est de poser une petite explication sur les équations d'évolution non-homogènes.

Mots clés : les équations d'évolution non-homogènes, les opérateurs m-dissipatifs, semi-groupes, problèmes semi-linéaires.

Abstract:

In the present work, we study the equations of evolution. The first class is devoted to the study of m-dissipative and semi-group operators. The proofs are based on Theorems: of Hille-Yosida, and of Lumer-Phillips. In the second class, we study the non-homogeneous evolution equations based on weak solutions and the adjoining semi-group, and wealso study the semi-linear problems. The purpose of this thesis is to provide a small explanation on non-homogeneous evolution equations.

Keywords: non-homogeneous evolution equations, m-dissipative operators, semi-groups, semi-linear problems.

ملخص:

ندرس في هذا العمل معادلات التطور. الصف الأول مكرس لدراسة العوامل المشتتة وشبه المجموعة و تستند البراهين للنظريات: هيل-يوسيدا ولومر-فيلبيس.

في الفصل الثاني ندرس معادلات التطورغيرالمتجانسة المبنية على الحلول الضعيفة وشبه المجموعة المجاورة كما ندرس المشاكل شبه الخطية، الهدف من هذا العمل هو تقديم شرح مبسط على معادلات التطورغيرالمتجانسة.

الكلمات المفتاحية:معادلات التطورغيرالمتجانسة،عوامل التبديد، شبه المجموعات،المشاكل شبه الخطية.