République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

BEN GHERBAL Chaima

Titre :

Une application des copules en finance

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**ABDELLI Jihane**	UMKB	Encadreur
Pr.	**BENATIA Fatah**	UMKB	Président
Dr.	**BERKANE Hassiba**	UMKB	Examinateur

Juin 2021

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mes très chers parents,

A mon cher mari,

A mon fils, Adem

A mon frère et mes soeurs,

A ma belle-mère,

A mes collègues de mathémaiques 2020-2021

A tous ceux qui me sont chères.

CHAIMA

REMERCIEMENTS

Au début et avant tout, je rends grâce à **Dieu ALLAH** le tout puissant pour ce parcours.
patience et le courage durant ces langues années d'étude.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur "Dr. **ABDELLI Jihane"** pour sa précieuse orientation, ses explications et sa patience.

Mes précieux remerciments vont au président et membres de jury : "Pr. **BENATIA Fatah"** et "Dr. **BERKANE Hassiba"** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger mon travail.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Le mot "Copule" vient du mot latin "Copulae" qui désigne le lien ou la connexion entre les parties. Ce mot à été adopté dans la statistique pour désigner une classe de fonctions permettant de construire et de modéliser les distributions multivariées de manière simple.

Bien que les termes corrélation et dépendance soient souvent utilisés. Le problème de la modélisation des structures de dépendance est que cette caractéristique ne ressort pas toujours de la fonction de répartition conjointe considérée. Il serait utile de séparer les propriétés statistiques de chaque variable de leur structure de dépendance.

Les marchés financiers sont complexes, difficiles à comprendre et impossibles à prévoir. Ce mémoire explore le potentiel d'applications de la théorie des copules à la finance de marché. Nous démontrons que la théorie des copules doit être appliquée à la finance de marché.

Chapitre 1. Dans le premier chapitre on présente les principales définitions et propriétés de copules, avec le théorème de Sklar et quelques modèles de copules bivariées dans la première section. Dans la deuxième section on donne le cas multivarié de copules suivant l'organisation du cas bivarié.

Chapitre 2. Dans Ce chapitre, nous allons présenter un exemple d'une application des copules en finance, dans cet exemple nous introduisons des notions de base sur les risques financiers et des mesures de risque univariées. En particulier, nous examinerons des exemples de calcul desdites mesures seront effictués et ce, en faisant référence aux modèles probabilistes les plus utilisés.

Chapitre 1

Sur la théorie des copules

La copule est un moyen efficase de mesurer la dépendance même dans les cas extremes permet de coupler les lois marginales des variables afin d'obtenir une loi jointe.

Dans ce chapitre, nous introduisons les principales définitions relatives aux copules ainsi que les propriétés les plus importantes de la fonction de copule, le théorème de sklar est énoncé et quelques exemples de copules usuelles.

1.1 Copules bivariée

Définition 1.1.1 *Une copule bi-dimonsionnelle (bivariées) est une fonction C de $I^2 = [0,1]^2$ dans I vérifiant les propriétés suivantes :*

i) La copule C est attachée (grounded), c'est -à-dire :

$$c(u,0) = c(0,v) = 0, \ \forall u,v \in I.$$

ii) Les marges sont uniformes, c'est à dire :

$$c(u,1) = u \text{ et } c(1,v) = v, \ \forall u,v \in I.$$

iii) La copule C est 2 -croissantes :

$$\forall u_1, v_{1,} u_{2,} v_2 \, \epsilon I \ tq : u_1 \leq u_2 \text{ et } v_1 \leq v_2$$

$$c\left(u_2, v_2\right) - c\left(u_2, v_1\right) - c(u_{1,} v_2) + c(u_1, v_1) \geq 0.$$

1.1.1 Exemples des copules

Copule produit

Une copule produit est définie par :

$$C\left(u, v\right) = \Pi(u, v) = uv, \ \forall u, v \in I$$

cette copule vérifiée (i) et (ii) tq :

$$C\left(0, v\right) = \Pi(0, v) = 0v = 0 \text{ et } C(u, 0) = \Pi(u, 0) = u0 = 0.$$

$$C\left(1, v\right) = \Pi(1, v) = 1v = v \text{ et } C(u, 1) = \Pi(u, 1) = u.$$

pour la propriété (iii) on a :

$$\begin{aligned} C\left(u_2, v_2\right) - C(u_2, v_1) - C(u_{1,} v_2) + C(u_{1,} v_1) &= \Pi(u_2, v_2) - \Pi(u_2, v_1) - \Pi(u_1, v_2) + \Pi(u_1, v_1) \\ &= u_2 v_2 - u_2 v_1 - u_1 v_2 + u_1 v_1 \geq 0, \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} u_2 v_2 \geq u_1 v_2, \\ u_2 v_1 \geq u_1 v_1, \end{cases} \quad \text{Si } u_2 \geq u_1.$$

Copule min

Cette copule est définie par :

$$M(u,v) = min(u+v-1,0),\ \forall u,v \in I.$$

En effet :

1. $\forall u, v \in I, \min(u,0) = 0 = \min(0,u)$, donc la propriété (i) est vérifiée.
2. $min(u,1) = u$ et $min(1,v) = v$, donc la propriété (ii)) est vérifiée.
3. De même :

$\forall u, v, u', v' \in I$ avec $u \leq v$ et $u' \leq v'$, on a :

$$min(u',v') \geq \min(u',v)$$

et

$$min(u,v') \geq \min(u,v).$$

Par concéquent M est une copule.

Copule max

La Copule max est définie par :

$$W(u,v) = max(u+v-1,0),\ \forall u,v \in I.$$

1.1.2 Théorème de Sklar

La grande majorité de la théorie des copules repose sur ce théorème qui permet de représenter toute fonction de répartition à l'aide d'une copule, il s'agit du résultat le plus important pour l'étude des copules.

Théorème 1.1.1 (Sklar,1959) *: soit H la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire (X_1, X_2). Si F_1et F_2 sont les marges de H, alors il existe une copule C telle que :*

$$H(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)). \tag{1.1}$$

Réciproquement, si C est une copule et F_1 et F_2 sont des fonctions de répartition alors la fonction F est une fonction de répartition conjointe avec les marges F_1, F_2. Si F_1, F_2 sont continues, alors C est unique. Sinon, C est unique seulement aux supports des marges. Dans le cas de la continuité des marges, on peut extraire l'unique copule associée à H en posant :

$$u = F_1(x) \Longrightarrow F_1^{-1}(u) = x,$$

et

$$v = F_2(y) \Longrightarrow F_2^{-1}(v) = y.$$

Ainsi, la relation 1.1 devient

$$C(u, v) = H(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)).$$

Théorème 1.1.2 *(Bornes de Fréchet) Soit H une fonction de répartition conjointe d'un vecteur aléatoire (X, Y) de fonctions de répartition marginales F et G .Pour toute copule bivariée C associée à H et $\forall(u, v) \in I^2$, on a :*

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v).$$

1.1.3 Propriétés des copules

La continuité

On note que les copules sont des fonctions continues. plus précisément, elles vérifiant la condition de Lipschitz, $\forall u_{1,}u_2, v_1, v_2 \in I$ on a

$$|C\left(u_2, v_2\right) - C\left(u_1, v_1\right)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \, .$$

La symétrie

On dit que C est symétrique si :

$$\forall (u, v) \in I^2 : C\left(u, v\right) = C\left(v, u\right).$$

La croissance

C est 2-croissante : $\forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in I^2$ vérifiant $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$ on a

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

L'ordre

On dit que C_1 est plus petite que C_2 et inversement si

$$\forall (u, v) \in I^2 : C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$$

1.1.4 Densité de la copule

Supposons que les distributions marginales F_1, F_2 et la copule C sont différentiables, alors la densité jointe notée f de la variable aléatoire $X\left(x_1, x_2\right)$ prend la forme suivante :

$$f(x_1, x_2) = C(F_1(x), F_2(x))f_1(x_1), f_2(x_2)$$

où,pour $1 \leq k \leq 2$,f_k et la densité de probabilité de X_k ,et c est la densité de la copule C est définie par :

$$c = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}.$$

1.1.5 Modèles de copules

Nous présentons dans cette partie les principaux types de copules fréquemment utilisées dans la pratique, ainsi que leurs propriétés.

Copules d'indépendance.

La copule d'indépendance aussi appelée copule produit Π est définie par :

$$\Pi(u_1, ..., u_d) = u_1 \times u_2 \times ... \times u_d.$$

Copules elliptiques

Les copules elliptiques sont définies à partir des lois elliptiques, sont faciles à silmuler, elles sont symétriques. Les deux classes les plus utilisées de copules elliptiques sont les copules gaussiennes et les cupules de Student.

Copule Gaussienne La copule gaussienne bivariée est définie de la façon suivante :

$$c\left(u, v\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi-1(v)} \exp\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dxdy,$$

le coefficient de corrélation ϕ est

$$\phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz.$$

Copule de Student Soit $T_V(v)$ est la fonction de répartition bivariée de la loi de student à V degrés de libertés :

$$T_{\rho,v}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left(1+\frac{s^2+t^2-2\rho st}{v(1-\rho^2)}\right)^{\frac{-v+2}{2}}dsdt$$

La copule de student de paramètre ρ et v est :

$$C_{\rho,v}^{t}(u,v)=\int_{-\infty}^{T_v^{-1(u)}}\int_{-\infty}^{T_v^{-1}(v)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}(1+\frac{s^2+t^2-2\rho st}{v(1-\rho^2)})^{\frac{-v+2}{2}}dsdt,$$

et la densité de la copule de student $c_{\rho,v}^{t}$est donnée par l'équation :

$$C_{\rho,v}^{t}(u,v)=\rho^{\frac{-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)\Gamma(\frac{v}{2})}{\Gamma(\frac{v+2}{2})^2}.\frac{(1+\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2-2\rho\varepsilon_1\varepsilon_2}{v(1-\rho^2)})^{-\frac{(v+2)}{2}}}{\prod_{j=1}^{2}(1+\frac{\varepsilon_i^2}{v})^{-\frac{(v+1)}{2}}}.$$

avec $\varepsilon_1=T_v^{-1}(u)$ et $\varepsilon_2=T_v^{-1}(v)$.

Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes présente un role très important dans la théorie des statistiques paramétriques, dans laquelle on retrouve plusieurs copules souvent utilisées en pratique comme les modèles de Clayton, Frank et Gumbel.

Définition 1.1.2 *Les copules archimédiennes sont définies de la manière suivante :*

$$C\left(u_1,u_2\right)=\begin{cases}\varphi^{-1}(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)), & si \qquad \varphi(u_1)+\varphi(u_2)\leq\varphi(0),\\ 0 & sinon\end{cases}$$

avec φ vérifiant $\varphi(1)=0$, $\varphi^{-1}(u)<0$ et $\varphi''(u)>0$ pour tout $0\leq u\leq 1$. φ est appelée la fonction génératrice de la copule.

Propriétés des copules archimédiennes

– La copule C est symétrique, c'est à dire $C\left(u_{1,}u_{2}\right) = C\left(u_{2,}u_{1}\right).$

– La copule C est associative, c'est à dire $C\left(u_{1,}C\left(u_{2,}u_{3}\right)\right) = C(C(u_{1,}u_{2}), u_{3}).$

Par la suite nous présentons les trois familles de copule archimédiennes les plus utilisées en pratique .

Copule de Clayton La copule de Clayton, s'appelle aussi la copule de Cook et Johnson (1981) et d'abord étudié par Kimeldorf et Sampson (1975), elle est définie par :

$$C\left(u_{1}, u_{2}, \theta\right) = \left(u_{1}^{-\theta} + u_{2}^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Où le générateur est défini ,pour $\theta \in [-1, 0[\cup]0, \infty[$ et pour $u \in]0, 1]$ par :

$$\varphi(u) = \theta^{-1}(u^{-\theta} - 1).$$

Copule de Frank La générateur de copule Frank est donnée par :

$$\varphi(u) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right), \ \theta \in \mathbb{R}^{*}.$$

La copule est définie par :

$$C\left(u_{1,}u_{2}, \theta\right) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_{1}} - 1)(e^{-\theta u_{2}} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)}\right).$$

Copule de Gumbel La dernière copule archimédienne présenté ici est la copule de Gumbel, parfois appelée Gumbel-Hougaard, dont la fonction génératrice est

$$\varphi(u) = (-\ln(u))^{\theta},$$

avec $\theta \geq 1$ et $u \in [0,1]$, la copule est définie par l'expression suivante :

$$C(u_1, u_2) = \exp(-(\tilde{u}_1^{-\theta} + \tilde{u}_2^{-\theta})^{\frac{1}{\theta}}),$$

où $\tilde{u} = -\ln u$.

Copules Archimax

Cette nouvelle famille a l'avantage d'englober un grand nombre de copules.

Définition 1.1.3 *Une fonction bidimensionnelle est une copule Archimax est de la forme suivante :*

$$C_{\varphi,A}(u_1, u_2) = \varphi^{-1}\left[(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))A(\frac{\varphi(u_1)}{\varphi(u_1) + \varphi(u_2)})\right],$$

pour tout $u_1 \geq 0 \leq$ et $u_2 \leq 1,$ avec :

1. $A : [0,1] \longrightarrow \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *tel que* $\max(t, t-1) \leq A(t) \leq 1$ *pour tout* $0 \leq t \leq 1$.
2. $\varphi : (0,1] \longrightarrow [0, \infty)$ *est une fonction convexe,décroissante qui vérifie* $\varphi(1) = 0$.

1.2 Copules multivariées

Du fait que la théorie multivariée est une extension du cas bivariée, nous étudions la théorie des copules bivariées, ensuite nous passons au cas multivarié pour généraliser les résultats ainsi obtenus.

Définition 1.2.1 *Une copule de dimension d est une fonction définie de I^d dans I telle que :*

1. *Pour tout vecteur aléatoire $u = (u_1, ..., u_d) \in [0,1]^d$ tel que si, au moins une composante de u est nul, alors $C(u) = 0$.*

2. *pour tout* $i \in \{1, ..., d\}$, $\forall u_i \in [0, 1]$ *on a*

$$C(1, ..., 1, u_i, 1, ..., 1) = u_i.$$

3. C *est d-croissante ,c'est-à-dire,pour tout* $u = (u_1, ..., u_d)$ *et* $v = (v_1, ..., v_d) \in [0, 1]^d$ *tels que* $u_i < v_i$, *pour* $i = 1, ..., d$, *on a*

$$\sum_{i_1=1}^{2} ... \sum_{i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+...+i_d} C(x_{1i_1}, ..., x_{di_d}) \geq 0,$$

où $x_{1j} = u_j$ *et* $x_{2j} = v_j$, $\forall j \in \{1, ..., d\}$.

1.2.1 Théorème de Sklar

Soit H une fonction de répartition à d dimension de marges $F_1, F_2, ..., F_d$, alors, il existe une copule C, telle que

$$H(x_1, x_2, ..., x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_d(x_d)).$$

Si les marges $F_1, F_2, ..., F_d$ sont continues, alors la copule C est unique. Sinon, si C est une copule et $F_1, ..., F_d$ sont les fonctions de répartition, alors la fonction F définie par l'équation est une fonction de répartition conjointe des marges $F_1, ..., F_d$.

Corollaire 1.2.1 *Si* F *est une fonction de répartition conjointe de marge* $F_1, ..., F_d$ *de fonction inverses respectivement* $F_1^{-1}, ..., F_d^{-1}$, *alors pour tout* $(u_1, ..., u_d)$ *appartient au domaine de* C *on a*

$$C(u_1, ..., u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), ..., F_d^{-1}(u_d)).$$

Si $X \backsim F$ *et* F *est continue alors :*

$$(F_1(x_1), ..., F_d(x_d)) \backsim C,$$

et si $U \backsim C$ *alors :*

$$(F_1^{-1}(u_1), ..., F_d^{-1}(u_d)) \backsim F.$$

1.2.2 Densité d'une copule multivariée

La densité c associée à la copule C est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^d C(F(x_1), ..., F_d(x_d))}{\partial F_1(x_1), ..., \partial F_d(x_d)} &= \frac{h(x_1, ..., x_d)}{f_1(x_1), ..., f_d(x_d)} \\ &= \frac{h(F_1^{-1}(u_1), ..., F_d^{-1}(u_d))}{\Pi_{i=1}^d f_i(F_i^{-1}(u_i))}. \end{aligned}$$

1.2.3 Bornes de Fréchet-Hoeffding

Etant donné une d-copules C, pour tout $u \in [0, 1]$, toute copules multivariées satisfait l'inégalité suivante :

$$\max(u_1 + ... + u_d - 1, 0) \leq C(u) \leq \min(u_1, ..., u_d).$$

1.2.4 Propriétés d'une copule multivariées

Continuité uniforme

Une copule C est uniformément continue sur son domaine. En particulier, pour tout u, v dans $[0, 1]^d$ nous avons

$$\left| C(u) - C(v) \leq \sum_{i=1}^{n} |v_k - u_k| \right|$$

Invariance

Soit $(X_1, ..., X_d)$ un vecteur de variables aléatoires continues, de fonction de répartition F associée à une copule C et $(\alpha_1, ..., \alpha_d)$ une suite de fonctions strictements croissantes. Alors la fonction de répartition jointe du vecteur aléatoire $(\alpha_1(X_1), ..., \alpha_d(X_d))$ et aussi associée à la même copule C

$$C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_d(X_d)} = C_{X_1,\ldots,X_d}(u)$$

Dérivées partielles

Soit C une copule. les dérivérées partielles de C existent prèsque surment, pour tout $i = 1, ..., d$ et pour tout $u \in [0,1]^d$, nous avons

$$0 \leq \frac{\partial C(u)}{\partial u_i} \leq 1,$$

de plus, les fonctions $u \rightarrow \frac{\partial C(u)}{\partial u_i}$ sont non décroissantes p.p.

1.2.5 Familles de copules

Copule d'indépendance

La fonction $\Pi : [0,1]^d \longrightarrow [0,1]$ donnée par :

$$\Pi(u_1, ..., u_d) = u_1, ..., u_d,$$

est dite copule d'indépendance.

Copules elliptiques

Copule Gaussienne La copule Gaussienne est définie par :

$$C_R(u) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), ..., \Phi^{-1}(u_d)),$$

où Φ^{-1} est l'inverse généralisé de la fonction de répartition standard normale univariée, et Φ_R une distribution normale standard multivariées, avec R une matrice de corrélation.

Copule de Student Soit $T_{R,v}$ une fonction de répartition multivariées de la loi student, et une matrice de corrélation R,$T_{R,v}$ est définie par :

$$T_{R,v} = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_d} \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma(\frac{v}{2})(2\pi)^{\frac{d}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{(X-\mu)^t R^{-1}(X-\mu)}{v}\right)^{-\frac{v+d}{2}} dx_1 ... dx_d.$$

tq : $X = (x_1, ..., x_d)$. Alors la copule de Student est définie par :

$$C_{v,R}^{d,T}(u) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} ... \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)(2\pi)^{\frac{d}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{(X-\mu)^t R^{-1}(X-\mu)}{v}\right)^{-\frac{v+d}{2}} dx_1 ... dx_d,$$

telle que t_v^{-1} est l'inverse généralisé de la fonction de répartition de la loi de Student univariée de v degré de liberté.

La densité de $C_{v,R}^{d,T}(u)$ est donnée par :

$$C_{v,R}^{d,T}(u) = |R|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(\frac{\Gamma(\frac{v}{2})}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}\right)^d \left(\frac{(1 + \frac{1}{v}\varsigma^t R^{-1} \varsigma)^{\frac{-v+d}{2}}}{\Pi_{j=1}^d \left(1 + \frac{\varsigma_j^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}}\right),$$

où $\varsigma_j^2 = t_v^{-1}(u_j)$.

Copule Archimédienne

L'importance de cette classe de copule réside dans le fait qu'elle englobe très grand nombre de copules tout en jouissant d'un certain nombre de propriétés intéressantes.

Les aventages de cette classe sont :

- Facilité dans la construction.
- Grande variété de familles de copules appartenant à cette classe.
- Possibilité de réduction de l'étude d'une copule multivariée a une seule fonction univariée.

Une copule archimédienne est construire à l'aide d'une génératrice. On dit que φ est la fonction génératrice d'une copule à d dimensions si

1. $\varphi : [0,1] \to [0, \varphi(0)]$ est décroissante avec $\varphi(1) = 0$ et si $\varphi(0) = \infty$, φ sera une fonction génératrice stricte.
2. Pour tout $0 < s < \varphi(0)$ et pour tout $1 \leq j \leq d$

$$(-1)^j \frac{\partial^j}{\partial s^j} \varphi^{-1}(s) > 0.$$

La forme générale de cette famille de copules est définie par :

$$C(u) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\sum_{i=1}^d \varphi(u_i)), & \text{Si } \sum_{i=1}^d \varphi(u_i) < \varphi(0), \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

On va présenter quelques types archimédiennes multivariées.

Copule de Clayton La famille de Clayton est donnée par :

$$C(u) = \left(\sum_{i=1}^{d} u_i^{-\theta} - d + 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

La fonction génératrice est

$$\varphi(u) = u^{-\theta} - 1,$$

et son inverse

$$\varphi^{-1}(s) = (s+1)^{\frac{-1}{\theta}}.$$

Copule de Frank Considérons la fonction génératrice

$$\varphi(u) = -\ln(\frac{\exp(-\theta u) - 1}{\exp(-\theta) - 1}),$$

et son inverse

$$\varphi^{-1}(s) = -\frac{1}{\theta} \ln(1 + \exp(-s)(\exp(-\theta) - 1)).$$

Alors la copule associée sera, avec $\theta > 0$

$$C(u) = -\frac{1}{\theta}\ln(1 + \frac{\prod_{i=1}^{d}(\exp(-\theta u_i) - 1)}{(\exp(-\theta) - 1)^{d-1}}).$$

Copule de Gumbel Cette copule est définie par

$$C(u) = \exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^{d}(-\ln u_i)^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}\right).$$

La fonction génératrice $\varphi(u) = (-\ln u)^{\theta}$ et son inverse

$$\varphi - 1(s) = \exp(-s^{\frac{1}{\theta}}).$$

Copule de valeurs extremes

Les copules extremes jouent un role important dans la théorie des extremes multivariés. Deheuvels (1979) a fait usage de cette famille pour obtenir une solution au problème de convergence de types de $\left\{\sup_{1\leq i\leq N} X_i(1), ..., \sup_{1\leq i\leq N} X_i(n)\right\}$, où $\{X_i(1), ..., X_i(n),\ i \geq 1\}$ désigne une suite de vecteurs aléatoires indépendants, de même loi à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Deheuvels (1978,1979) a déterminé, de manière exhaustive, les lois limites possibles par une représentations explicite et a fourni des conditions simples de convergence de cette limite. Deheuvels (1978,1979) a également obtenu des résultats permettant de caractériser le comportement asymptotique des extremes multivariés, même lorsqu'il n' y a pas loi de limite.

Définition 1.2.2 *(Copule de valeur extreme) Une copule C^* est une copule de valeur extreme s'il existe une copule C telle que*

$$C_*(u, v) = \lim_{n\to\infty}^{n} C(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}),$$

Pour tout $u, v \in [0,1]$, en outre on dit que C appartenir au domaine d'attraction de C_*.

Théorème 1.2.1 *Une copule max-stable ssi elle est une copule de valeur extrême.*

Nous présentons maintenant la représentation de Pickands en (1981) pour construire des copules de valeur extrême (ou équivalent max-stable) qui est maintenant largement utilisée. Il assume des marges exponentielles standard alors les fonctions du survie de X et Y sont

$$F(x) = e^{-x}, \ x > 0,$$

et

$$F(y) = e^{-y}, \ y > 0.$$

donc la fonction de survie conjointe est donnée par

$$H(x,y) = \exp\left[-(x+y)A(\frac{x}{x+y})\right].$$

Pour une fonction continue, non négative $A : [0,1] \to [1/2, 1]$ définie par

$$A(t) = -\ln C(e^{-(1-t)}, e^{-t}),$$

A doit satisfait les conditions suivantes :

1. $A(0) = A(1) = 1.$
2. $Max\{t, 1-t\} \leq A(t) \leq 1.$
3. A est convexe.

La copule de valeur extrême a la forme suivante :

$$C(u,v) = \exp\left\{\ln(uv)A(\frac{\ln(v)}{\ln(uv)})\right\}$$

Copule de Gumble-Hoggard est définie par

$$C_{\theta}^{*}(u) = \exp\left\{-((-\ln u_1)^{\theta} + ... + (\ln u_d)^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}\right\},\ \theta \geq 1.$$

Chapitre 2

Exemple d'une application des copules en finance

Nous avons analysé 500 observations de quatre séries de retour d'indices boursiers européens calculées par $\log(X_{t+1}/X_t)$ pour la période de 1991 à novembre 1992 (voir figure 2.1), disponible dans les packages "QRM et data sets" du logiciel R, il contient les cours de clôture quotidiens des principaux indices boursiers européens : Allemagne DAX (Ibis), Suisse SMI, France CAC et Royaume Uni FTSE.

Les données sont échantillonnées en temps ouvrable, c'est-à-dire que les week-ends et les jours fériés sont omis.

Le tableau 2.1 résume le tau de Kendall entre les quatre rendements de l'indice de marché.

Variable	DAX	SMI	CAC	FTSE
DAX	1.0000	0.4087	0.3695	0.2913
SMI	0.4087	1.0000	0.3547	0.4075
CAC	0.3695	0.3547	1.0000	0.3670
FTSE	0.2913	0.4075	0.3670	1.0000

TAB. 2.1 – Estimations de la matrice Tau de Kendall à partir des rendements de quatre indices boursiers européens

La distribution Levy-stable offre une amélioration raisonnable des distributions alternatives, chaque distribution stable $S_\gamma(\sigma; \beta; \mu)$ a l'indice de stabilité γ qui peut être traité comme le paramètre principal, lorsque nous prenons une décision d'investissement, paramètre d'asymétrie β dans l'intervalle $[-1, 1]$, le paramètre d'échelle σ et le paramètre de décalage μ. Dans les modèles utilisant des données financières, on suppose généralement que $\gamma \in (1, 2]$.

	DAX	SMI	CAC	FTSE
γ	1.6420	1.8480	1.6930	1.8740
β	0.1470	0.1100	−0.0380	0.9500
σ	0.0046	0.0046	0.0062	0.0054
μ	−0.0002	0.0006	0.0004	−0.0005

TAB. 2.2 – L'ajustement du maximum de vraisemblance d'une distribution stable à quatre paramètres à quatre indices boursiers européens renvoie des données

En utilisant le package «fBasics» dans le logiciel R, basé sur les estimateurs du maximum de vraisemblance pour ajuster les paramètres d'un df des quatre rendements de l'indice de marché, les résultats sont résumés dans le tableau 2.2. La distribution Levy-stable a des queues de type Pareto, c'est comme une fonction de puissance, c'est-à-dire que F varie régulièrement (à l'infini) avec l'indice $(-\gamma)$, signifiant que $\overline{F}(x) = x^{-\gamma}L(x)$ lorsque x devient grand, où $L \succ 0$ est une fonction variant lentement, qui peut être interprétée comme plus lente que n'importe quelle fonction de puissance.

Dans le tableau 2.3, nous montrons les résultats des tests d'ajustement bivariés pour quatre familles de copules différentes, deux elliptiques : la gaussienne et Student t avec 1 degré de liberté, et deux copules d'Archimède : les copules de Clayton et de Gumbel. Pour chacun des cas précédents, les copules ne sont symétriques en réflexion que dans deux dimensions. Toutes les simulations de copule sont obtenues en utilisant le package copula R.

Pour la majorité des paires comparées au test de qualité d'ajustement sont rejetées dans les cas de copules de Gumbel and Clayton et acceptées par la copule gaussienne et la t-copule, si l'on compare avec la plus grande p-value proche de 1 on choisit la t-copule.

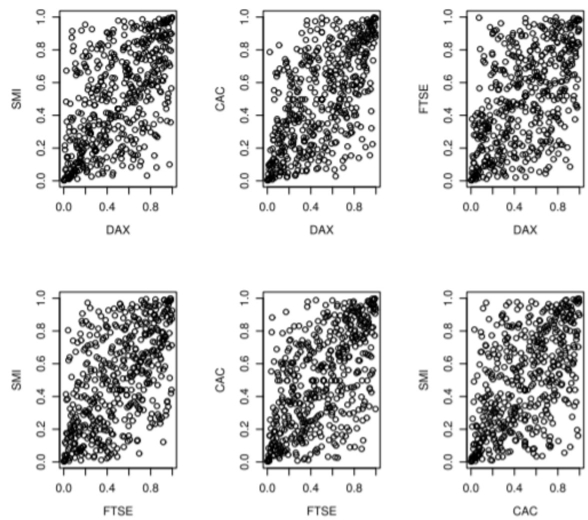

FIG. 2.1 – Nuage de points de 500 pseudo-observations tirées de quatre rendements d'indices boursiers européens.

Ensuite, nous considérons les quatre rendements de l'indice de marché ajustés par la t-copule donnée par :

$$C_{\rho,v}(u,v) = t_{\rho,v}(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(v))$$

où v est le paramètre de degré de liberté, t_v^{-1} est l'inverse de la norme univariée Student-t df, et est la distribution standard bivariée de Student-t paramétrée par le paramètre de corrélation ρ et v . La densité de la t-copule bivariée est donnée par :

$$C_{\rho,v}(u,v) = \frac{v}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\Gamma(v/2)^2}{\Gamma((v+1)/2)^2} \frac{\left(1 + \frac{x^2+y^2-2\rho xy}{v(1-\rho^2)}\right)^{-(v+2)/2}}{\left(\left(1+\frac{x^2}{v}\right)\left(1+\frac{y^2}{v}\right)\right)^{-(v+1)/2}},$$

où $x = t_v^{-1}(u), y = t_v^{-1}(v)$ et Γ est la fonction Gamma.

En supposant que la t-copule représente notre structure à quatre dépendances, nous obtenons les paramètres de dépendance ajustés des six dfs conjoints bivariés, présentés dans le tableau 2.4 .

Variable	SMI	FTSE	CAC	Copula
DAX	0.0019	0.0015	0.0005	Gumbel
	0.0004	0.0005	0.0004	Clayton
	0.1543	0.2572	0.2662	Gaussian
	0.4381	0.2942	0.3302	t
SMI	-	0.0004	0.0004	Gumbel
	-	0.0004	0.0004	Clayton
	-	0.4071	0.2283	Gaussien
	-	0.3390	0.5220	t
FTSE	-	-	0.0394	Gumbel
	-	-	0.0004	Clayton
	-	-	0.3941	Gaussien
	-	-	0.5230	t

TAB. 2.3 – valeur p du test de qualité d'ajustement basé sur le bootstrap de Gumbel, Clayton,Copule gaussienne et t de dimension 2, avec 'method' = "Sn", 'estim.method' = "itau"

Variable	DAX	SMI	CAC	FTSE
DAX	∞	0.5945	0.6344	0.5498
SMI	0.5945	∞	0.5610	0.5781
CAC	0.6344	0.5610	∞	0.5974
FTSE	0.5498	0.5781	0.5974	∞

TAB. 2.4 – t-copule ajusté correspondant au tau de Kendall et $\nu = 1$

Conclusion

Le but de ce mémoire était d'analyser l'expansion phénoménale de l'intérêt pour les copules, et ce, particulièrement en finance.Nous avons vu que les copules apportent beaucoup à la finance de marché.ses utilisations sont nombreuses, utilisé comme outils pour mesurer la dépendance entre les actifs ou les marchés ; les méthodes de simulations avec les copules comme base pour la valorisation d'options sur plusieurs sous-jacents, leurs utilisés dans les fonds de couverture.

Le mémoire était structuré comme suit. en premier chapitre, sur la théorie des copules dans les deux cas bivariées et multivariées, leurs généralités et propriétés son d'amentales,ainsi que les principales théorèmes liés à cette théorie, en particulier le théorème de Sklar.De même on présente les types de copules, à commencer par les grandes familles qui sont les copules usuelles et elliptiques, Archimédiennes,...etc.Dans le deuxième chapitre exemple d'une application des copules en finance.

Les copules peuvent être utilisées pour mesurer les risques et elles permettent la modélisation de plusieurs phénomènes financiers qui impliquent plusieurs marchés.

Bibliographie

[1] Belguise,O. (2001).Etude de dépendances entre les branches Auto et Incendie avec la théorie des copulas. Mémoire de Stage de troisième année.Université Louis Pasteur Strasbourg.

[2] Bentoumi,R. (2011) .Étude et estimation de certaines mesures de risque multivariées avec applications en finance. Mémoire. Université du Québec.

[3] Betteka, S. (2017) . Les valeurs extrêmes bivariées. thèse de doctorat. Université Mohamed khider, Biskra.

[4] Bouvier, P. (2011). Applications des copules à la finance de marché. Thèse de doctorat de l'université Québec à Montréal.

[5] Brahimi, B. (2017). Copula conditional tail expectation for multivariate financial risks. Original article.Laboratory of applied Mathematics, Mohamed Khider university, Biskra, Algeria.

[6] Chabot, M. (2013). Concepts de dépendance et copules . Département de mathématiques, Université de Sherbrooke. Courriel : Myriam. Chabot@USherbrooke.ca.

[7] Cherubini, U., Luciano, E. and vecchiato, w. (2004).Copula methods in finance. Wiley Finance Series.

[8] Chine, A. (2011) . Test d'ajustement des copules paramétriques. Mémoire de Magister. Université Mohamed Khider, Biskra.

[9] Kadi, N. (2014) . Estimation non-paramétrique de la distribution et densité de copules. Mémoire de Magister. Département de mathématiques, Faculté des sciences Université de Sherbrooke.

[10] Lounas,F. (2011) .Modélisation de la dépendance par les copules et applications. Mémoire de magister. Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou.

[11] Nelsen, R.B. (2006). An introduction to copulas. Second ed. Spring, New York.

[12] Pierre,B. (2010) . Application des copules à la finance de marché. Thèse présentée comme exigence partielle du programme conjoint de doctorat en administration. Université du Québec à montréal.

[13] Planchet, F. (2010 − 2011). Dépendance stochastique. Introduction à la théorie des copules. Support de cours.

[14] Rachelle,B. (2012) . Distributions méta-elliptiques :inférence statistique et applications. Mémoire.Université du Québec.

[15] Zari, T. (2010) . Contribution à l'étude du processus empirique de copule. Thèse de doctorat de l'université Paris 6.

Résumé

L’objectif de ce travail est de montrer l’importance et l’utilité de la théorie mathématique que les copules apportent à la finance. Les copules reposent sur un cadre mathématique formel qui en permet l’application. D’après ce qu’ils ont trouvé, nous savions que les copules font l’application à la valorisation de titres dont les valeurs marchandes dépendent de plusieurs actifs financiers, nous exposons aussi comment la théorie des copules vient en aide aux gestionnaires d’actifs d’une caisse de retraite dans le choix des titres et la composition d’un portefeuille.

Mots clés : Copules archimédiennes ;Théorème de Sklar ;Copules elliptiques ; Tau de Kendall.

Abstract

The aim of this work is to show the importance and usefulness of the mathematical theory that copulas bring to finance. Copulas are based on a formal mathematical framework that allows their application. From what they found, we knew that copulas apply the valuation of securities, whose market values depend on several financial assets,we also show how copula theory helps pension fund asset managers in selecting securities and building a portfolio.

Keywords: Archimedean copulas, Sklar theorem, Elliptical copulae, Kendall’s Tau.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو إظهار أهمية وفائدة النظرية الرياضية التي تجلبها دالة الإرتباط إلى التمويل. تعتمد دالة الإرتباط على إطار رياضي رسمي يسمح بتطبيقها. من خلال ما وجدوه ، علمنا أن هذا النوع من الدوال تنطبق على تقييم الأوراق المالية التي تعتمد قيمها السوقية على العديد من الأصول المالية ، كما نناقش كيف تأتي نظرية دالة الإرتباط لمساعدة مديري الأصول. الأوراق المالية وتكوين المحفظة.

الكلمات المفتاحية:دالة الإرتباط أرخميدس، نظرية سكلار، دالة الإرتباط بيضاوية، تاو كيندال.