

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

ZAID Ferdous

Titre :

Sur les Bifurcations Locales

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Fatima OUAAR	UMKB	Président
Dr. Baya LAADJAL	UMKB	Encadreur
Dr. Assia SENOUCI	UMKB	Examineur

Juin 2021

Résumé :

Dans cette étude, j'ai présenté les notions de bases concernant les systèmes dynamiques et les bifurcations, j'ai concentré mes études sur la dynamique des systèmes discrets dépendant de paramètre et les différents comportements asymptotiques des solutions. Et enfin j'ai établi une étude analytique et numérique du système de Burgers en tant que système discret bidimensionnel.

Mots clés : Systèmes dynamiques, bifurcation, chaos.

المُلخَص :

في هذه الدراسة ، قدمت أهم المفاهيم الأساسية للأنظمة الديناميكية والتشعبات ، وركزت دراساتي على ديناميكا الأنظمة المنفصلة المتعلقة بوسيط و مختلف والسلوكيات المقاربة للحلول. وأخيرًا أعددت دراسة تحليلية وعددية لنظام برجر كنظام منفصل ثنائي الأبعاد.

الكلمات المفتاحية: الجمل الديناميكية، التشعب، الفوضى

Abstract :

In this study, I presented the most important basic concepts of dynamical systems and bifurcation, I focused my studies on the dynamics of discrete system dependent on a parameter and the different asymptotic behaviors of solutions. And finally I established an analytical and numerical study of the Burgers system as a two-dimensional discrete system.

Key words: Dynamical system, bifurcation, chaos.

DÉDICACE

Je dédie ce prodigieux travail :

A mes chers parents, je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

A mes chers et adorables frères **SABER** et **MAHDI** et ma sœur **NARIMAN**.

A toute ma famille, Je n'oublie pas surtout mon cher oncle **Islam** qui m'a tellement soutenu, et ne m'a jamais quitté.

A tous mes amis, qui de près ou de loin m'ont supporté.

ferdous

REMERCIEMENTS

Avant tous propos, je tiens rendre grâce à "*ALLAH* " qui ma guidé sur la bonne voie

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...

Tous les mots ne sauraient exprimer la statitue, la reconnaissance...

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et remerciement envers ma directrice de mémoire de Master, *Бага Садажа*, Docteur à l'université de *MOHAMED KHIDER, BISKRA*. Effectuée ce travail sous sa direction fut pour moi un grand honneur et un réel plaisir. Ses conseils et ses encouragements ont guidé et stimulé mon travail. Sa rigueur et sa culture scientifique en ont été les modèles.

J'adresse également mes remerciements aux membres du jury (*Dr : Fatima OUAR* et *Dr : Assia SEMOUÇI*) d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je profite l'occasion pour remercier le chef du département de mathématique *Dr : Saïdari Im ad* ce qui créé les bonnes conditions pour que nous étudions.

Tous les enseignants qui m'ont enseigné au cours de mon parcours universitaire.

Enfin, Je voudrais associer à mes remerciements toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Merci à tout

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction générale	1
1 Définitions et Notions de base	3
1.1 Système dynamique	3
1.1.1 Système dynamique continu	4
1.1.2 Système dynamique discret	6
1.1.3 Représentation graphique de l'orbite	7
1.1.4 Comportement local des systèmes discrets	8
1.2 Variétés invariantes	11
1.3 Bifurcation	14
1.3.1 Bifurcation fold	16
1.3.2 Bifurcation fourche	17
1.3.3 Bifurcation flip	17
1.3.4 Bifurcation de Neimark-Sacker	19

1.3.5	Technique de la variété centrale	21
1.4	Caractéristiques du chaos	22
2	Structures de bifurcation du système de Burgers	25
2.1	Introduction	25
2.2	Calcul des points fixes	26
2.3	Stabilité des points fixes	27
2.3.1	Stabilité de $E_0(0, 0)$	27
2.3.2	Stabilité de $E_1(-\mu, \sqrt{\mu\nu})$	28
2.4	Bifurcations des points fixes	29
2.4.1	Bifurcation de $E_0(0, 0)$	29
2.4.2	Bifurcation du point fixe $E_1(-\mu, \sqrt{\mu\nu})$	32
2.5	Simulations numériques	36
	Conclusion	43
	Bibliographie	44
	Annexe A : Les exposants de Lyapunov	46
	Annexe B : Abréviations et Notations	48

Table des figures

1.1	Représentation graphique de l'orbite	9
1.2	Quelques attracteurs étranges	24
2.1	Diagramme de bifurcation dans le plan $(\mu - x)$ pour $\nu = 1$	37
2.2	Zoom de la figure (2.1).	38
2.3	La première Bifurcation Neimark- Sacker pour $\mu = 0.5$	38
2.4	Courbe invariante fermée autour du point fixe E_1 créé via la bifurcation Neimark-Sacker pour $\mu = 0.52$	39
2.5	La répartition de la courbe fermée invariante pour $\mu = 0.7$	39
2.6	Attracteur chaotique double lorsque $\mu = 0.83$	40
2.7	Attracteur chaotique double lorsque $\mu = 0.88$	41
2.8	Disque invariant (chaos pleinement développé) pour $\mu = 0.999$	41
2.9	Exposants maximaux de Lyapunov correspondant au figure (2.1).	42

Introduction générale

La théorie des systèmes dynamiques est une branche fondamentale des mathématiques introduite par Newton vers **1665**. Il fournit des modèles mathématiques pour des systèmes qui évoluent avec le temps et suivent des règles généralement exprimées sous forme analytique sous la forme d'un système ordinaire d'équations différentielles. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus. Dans les années **1980**, Poincaré trouva commode de remplacer certains systèmes dynamiques par des systèmes dynamiques discrets.

Certains modèles des processus dynamiques contenaient un ou plusieurs paramètres, cependant le changement des paramètres pouvait provoquer des changements qualitatifs et quantitatifs de ses propriétés, ce changement produit un phénomène que nous appellerons bifurcation, et lorsque la dynamique du système devient sensible aux conditions initiales où l'évolution du système ne peut plus être prédit sur le long terme, tout en restant dans un intervalle fini, alors le système est dit système chaotique. La prochaine question qui vient naturellement en essayant de comprendre les systèmes chaotiques, quelles sont les causes des mouvements chaotiques.

Comme il apparaît que les bifurcations se produisant dans l'espace des paramètres déclenchent la transition de et vers les dynamiques chaotiques, ils sont devenus d'un intérêt majeur. Les types de bifurcation sont déterminés par leur effet sur le système, ils peuvent également être regroupés par la façon dont ils se produisent, ce qui est généralement lié à leurs causes. Notons que le groupe considéré dans ce travail est le groupe des bifurcations locales,

Le but de ce travail est d'étudier la dynamique d'un système dynamique modélisé par une transformation de dimension 2 dépendant d'un paramètre et les différents comportements asymptotiques des solutions. Le travail est organisé comme suit :

Le premier chapitre : nous allons rassembler les notions nécessaires pour ce travail concernant les systèmes dynamiques discrets et la théorie de bifurcation, ainsi que les caractéristiques du chaos.

La deuxième chapitre : nous allons établir l'étude analytique et numérique du système Burger. D'abord déterminer les points fixes et examinez leur stabilité, ensuite analyser les types de bifurcation du système et déterminé les conditions suffisantes d'existence pour les bifurcations de fourche, flip et de Neimark-Sacker en utilisant la technique de la variété centrale. Et nous terminons par des simulations numériques pour valider les résultats obtenus.

Chapitre 1

Définitions et Notions de base

1.1 Système dynamique

Définition 1.1 On appelle système dynamique un triplet (X, T, f) où X est un espace (généralement $X \subseteq \mathbb{R}^n$), T est l'ensemble \mathbb{R} , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} , et f une application continue de $X \times T$ dans X vérifiant :

$$\begin{cases} f(x, 0) = x, \forall x \in X \\ f(f(x, t), \tau) = f(x, t + \tau), \forall t, \tau \in T; \forall x \in X \end{cases}$$

X : espace des phases ou espace d'états.

T : espace temporel.

f : flot du système dynamique ou fonction d'évolution.

La fonction f décrit la façon dont le système évolue au cours du temps. L'espace temporel T dépend en général du phénomène que l'on souhaite modéliser. Si $T = \mathbb{R}$, le système (X, T, f) est dit continu, et si $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Z}$, le système (X, T, f) est dit discret..

QUELQUES NOTIONS SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

1. **Système autonome** : un système dynamique est dit autonome lorsque la fonction

f ne dépend pas explicitement du temps.

2. **Trajectoire de phase** : est une trajectoire représentée sur l'espace des phases et qui décrit l'évolution du système au cours du temps pour des conditions initiales données.
3. **Portrait de phase** : est constitué par l'ensemble des trajectoires de phase possibles d'un système dynamique.
4. **Attracteur** : est une forme géométrique de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires de phase.

1.1.1 Système dynamique continu

Un système dynamique continu peut être représenté par une équation différentielle de première ordre où le temps est la variable décrivant l'évolution du système du type :

$$\frac{dx}{dt}(t) = F(x(t), t) \quad (1.1)$$

avec :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt}(t) \end{pmatrix}.$$

La donnée d'une condition initiale $x(t_0) = x_0$ définit une unique solution du système (1.1) où l'existence et l'unicité de la solution est assuré par le théorème suivant :

Théorème 1.1 *Considérons le système différentiel soumis à une condition initiale du*

type :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = F(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad \text{où } x_0, x(t) \in U \subset \mathbb{R}^n, \text{ et } t, t_0 \in I \subset \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Si la fonction F est continue de $U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ et K -lipschitizienne en x :

$$\exists k > 0 / \forall (x, t) \in U \times I, \forall (y, t) \in U \times I, \quad \|F(x, t) - F(y, t)\| \leq k \|x - y\|,$$

alors il existe une seule solution $x(t, x_0)$ du système 1.2 définie pour tout $t \in J, J \subset I$ étant un intervalle centré sur t_0 , vérifiant la condition initiale donnée .

Ce théorème est à rapprocher de la notion de déterminisme en physique classique :si un système suit une loi d'évolution donnée (l'équation différentielle), les mêmes causes (les conditions initiales) produisent les mêmes effets.

Définition 1.2 *L'espace des phases*

L'ensemble ouvert U où évolue l'état x s'appelle l'espace des phases (ou espace des états) du système.

Définition 1.3 *Le Flot*

Le flot du système dynamique est la famille à un paramètre d'application $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de U dans lui même définies par :

$$\phi_t(x_0) = x(t, x_0), \quad x_0 \in U.$$

où $x(t, x_0)$ est l'unique solution du système (1.2).

Nous notons que (dans son domaine de définition) ϕ_t satisfait les propriétés du groupe :

- (i) $\phi_0 = id$,
- (ii) $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$,
- (iii) $\phi(x_0, 0) = x_0$ tel que $x_0 \in U$.

La solution d'équation différentielle est vérifié les condition du système dynamique. Alors on peut dire que l'équation (1.2) est système dynamique.

1.1.2 Système dynamique discret

Définition 1.4 *On appelle système dynamique discret autonome de dimension m et d'ordre 1, l'équation aux différences suivante :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ x_0 = x(0) \text{ donnée,} \end{cases} \quad (1.3)$$

où: $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable et $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ est une valeur initiale, $x_n \in U$ est le vecteur des états du système.

De plus :

- $x_1 = f(x_0)$.est appelée première itération de x_0 par la fonction f .
- $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$.est appelée seconde itératrion de x_0 par la fonction f .
- $x_n = f^n(x_0)$ où $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ est appelée $n^{\text{ième}}$ itération de x_0 par la fonction f .

Donc le triplet (U, \mathbb{N}, φ) définit un système dynamique discret autonome, où φ est donné par :

$$\varphi(x_0, n) = f^n(x_0).$$

Définition 1.5 :

1. Si la fonction f dépend de l'état x_n , et de la variable du temps n , alors le système $x_{n+1} = f(n, x_n)$, s'appelle système dynamique discret non autonome.
2. Si l'équation aux différences est d'ordre $p \geq 2$ autonomes ou non i.e : $x_{n+p} = f(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p-1})$, alors le système s'appelle système dynamique discret d'ordre p .

1.1.3 Représentation graphique de l'orbite

Définition 1.6 (Orbite) *Etant donné le point initiale x_0 , on appelle orbite (ou trajectoire) du système dynamique discret d'ordre 1 de la forme (1.3)*

la suite :

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), \dots, x(n+1) = f(x(n))\}.$$

Exemple 1.1 *Soit un système dynamique discret en dimension 1 défini par la fonction :*

$f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, +\infty)$:

Prenons pour condition initial $x_0 = \frac{1}{2}$: L'orbite correspondante est :

$$x(0) = x_0 = \frac{1}{2}, x(1) = f(x(0)) = \frac{1}{4}, x(2) = f(x(1)) = \frac{1}{16} \dots$$

On remarque que quand $n \rightarrow \infty$:

$$x(n) = f(x(n-1)) = f^n(x(0)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \rightarrow 0.$$

Prenons un autre point initial, $x_0 = 3$ Alors l'orbite correspondante est :

$$x(0) = 3, x(1) = f(x(0)) = 9, x(2) = f(x(1)) = 81 \dots$$

Dans ce cas on a aussi, quand $n \rightarrow \infty$ on a :

$$x(n) = f(x(n-1)) = f^n(x(0)) = 3^{2n} \rightarrow \infty$$

Et enfin, si l'on choisit pour point initial $x_0 = 1$, on voit que :

$$O(x_0) = \{1, 1, x(n) = 1^{2n} = 1, \dots\}.$$

On observe donc ici trois comportements différents du même système en fonction du point initial choisi. Ainsi nous pouvons parler des propriétés d'un système, en décrivant toutes ses orbites possibles.

Dans le cas où f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} (c-à-d le système (1.3) est de dimension 1), on peut représenter sur le plan (x, y) l'évolution d'une orbite $O(x_0)$ qui commence dans le point $(x_0; 0)$ en suivant ces étapes (voir figure (1.1)) :

Etape 1 : Tracer la courbe représentant la fonction f et la droite $y = x$.

Etape 2 : Placer le point de coordonnées $(x_0; 0)$:

Etape 3 : Chercher le point d'ordonnée $f(x_0)$, on l'obtient en traçant une droite verticale passant par $(x_0; 0)$ et en cherchant son intersection avec la courbe de la fonction f . Ce point a comme ordonnée $f(x_0)$, ce qui correspond à x_1 (puisque $x_1 = f(x_0)$).

Etape 4 : Projeter horizontalement le point de coordonnées $(x_0; x_1)$ sur la droite $y = x$ pour obtenir le point de coordonnées $(x_1; x_1)$, une projection verticale permet ensuite de reporter le point $(x_1; 0)$ sur l'axe des ordonnées. Réaliser ensuite pour x_1 les mêmes opérations que pour x_0 afin d'obtenir x_2 et ainsi de suite pour les termes de rang suivant.

1.1.4 Comportement local des systèmes discrets

Définition 1.7 (Point fixe) *Un point $x_s \in D$ est dit point fixe du système (1.3) si :*

$$f(x_s) = x_s.$$

Définition 1.8 (Point périodique) *Soit $r \in \mathbb{N}$. Un point $x_p \in X$ est dit r -périodique du système (1.3) si :*

$$f^{(r)}(x_p) = x_p. \tag{1.4}$$

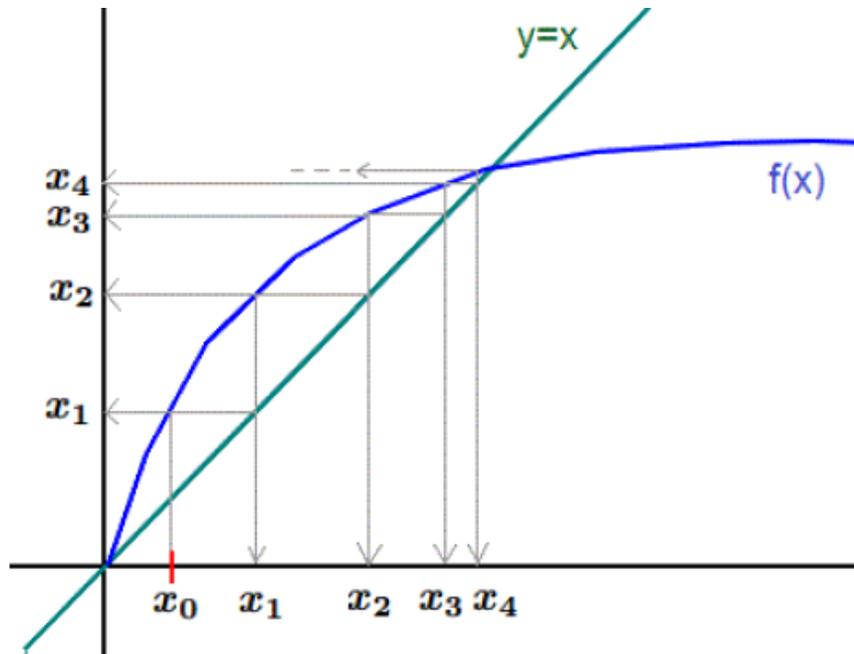


FIG. 1.1 – Représentation graphique de l'orbite

On dit aussi que $x_p \in X$ est un point périodique pour f s'il est r -périodique pour un certain $r \in \mathbb{N}$.

Dans ce paragraphe nous intéressons au comportement local des systèmes du type (1.3) autour de leurs points fixes.

Considérons le système dynamique discret (1.3). Supposons qu'il possède un point fixe $x_s \in \mathbb{R}^m$ et que la fonction f est dérivable au point x_s . Supposons que le point initial x_0 d'une orbite est proche du point fixe x_s . Alors nous pouvons, au moins pour les premières itérations, remplacer la fonction f par son approximation du premier ordre :

$$x_{n+1} = f(x_n) \approx f(x_n - x_s + x_s),$$

d'où

$$x_{n+1} \approx f(x_s) + J(x_s) \cdot (x_n - x_s) = x_s + J(x_s) \cdot (x_n - x_s),$$

on obtient

$$x_{n+1} - x_s \approx J(x_s).(x_n - x_s). \quad (1.5)$$

Le dernier système approximatif (1.5) est linéaire avec la matrice $M = J(x_s)$, en notant $y_n = x_n - x_s$ on peut écrire :

$$\begin{cases} y_{n+1} = J(x_s)y_n \\ y_0 = x_0 - x_s. \end{cases} \quad (1.6)$$

Le point fixe $y = 0$ de ce dernier système correspond au point fixe x_s du système (1.5). alors il est possible d'analyser le comportement des orbites du système (1.3) autour du point fixe x_s , en étudiant les caractéristiques du point fixe $y = 0$ du système linéaire (1.6).

Définition 1.9 Soit x_s un point fixe d'un SDD (1.3) dans \mathbb{R}^m .

1. On dit que x_s est un point fixe attractif ssi : $\exists \varepsilon > 0 \forall x_0$ point initial :

$$\|x_0 - x_s\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x_s.$$

2. On dit que x_s est un point fixe répulsif ssi : $\exists \varepsilon > 0 \forall x_0$ point initial :

$$\|x_0 - x_s\| < \varepsilon, \exists n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \|x(n) - x_s\| > \varepsilon.$$

Théorème 1.2 Soient $U \in \mathbb{R}^m$ un ensemble ouvert et $f : U \rightarrow U$ une application continue sur cet ensemble. Supposons que le système dynamique défini par la fonction f possède un point fixe $x_s \in U$, et qu'il existe un voisinage $U(x_s)$ du point fixe tel que la fonction $f \in C^1(U(x_s))$.

Alors :

1. Si toutes les valeurs propres de la matrice $J(x_s)$ sont de module inférieur à 1, le point x_s est un point fixe attractif.
2. Si une des valeurs propres de la matrice $J(x_s)$ est de module supérieur à 1, le point x_s est un point fixe répulsif.

Remarque 1.1 *Dans le cas d'un système linéaire si zéro est un point répulsif toutes les orbites tendent nécessairement vers l'infini et si le système est non-linéaire cela n'est pas toujours vrai puisque la propriété de répulsion est locale.*

Définition 1.10 *Soit x_s un point fixe d'un système dynamique discret, les valeurs propres de la matrice jacobienne $J(x_s)$, sont appelées multiplicateurs de f en x_s .*

Définition 1.11 *Le point fixe x_s est dit hyperboliques si tout les multiplicateurs caractéristiques ont module différent de 1.*

Définition 1.12 (Point selle) *On dit que x_s est un point-selle si dans le spectre de la matrice Jacobienne $J(x_s)$ de la fonction f une partie des valeurs propres sont de module inférieure à 1 et les autres sont de module supérieure à 1.*

Les orbites d'un système non-linéaire dans un voisinage d'un point-selle se comportent approximativement comme les orbites du système linéaire gouverné par la matrice $J(x_s)$.

1.2 Variétés invariantes

On considère le système dynamique donné comme suit :

$$x_{n+1} = f(x_n) = Ax_n + \tilde{f}(x_n), \quad (1.7)$$

où $x_n \in \mathbb{R}^n$ et $f \in C^k(\mathbb{R}^m)$, ($k \geq 1$), $f(0) = 0$, $A = Jf(0)$, $\tilde{f}(0) = 0$, et $J\tilde{f}(0) = 0$.

Définition 1.13 *Un sous espace $W \subset \mathbb{R}^m$ est dit une variété invariante si pour tout $x \in W$, $f^n(x) \in W$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times m}$, soient :

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \{\lambda \in Sp(A) / |\lambda| < 1\}. \\ \gamma_i &= \{\lambda \in Sp(A) / |\lambda| > 1\}. \\ \gamma_c &= \{\lambda \in Sp(A) / |\lambda| = 1\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Et posont

$$\text{Card}(\gamma_s) = m_s, \quad \text{Card}(\gamma_i) = m_i, \quad \text{Card}(\gamma_c) = m_c. \quad (1.9)$$

On peut définir les espaces suivants :

Définition 1.14 :

1. *L'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de A de valeur propre de module inférieur à 1 est appelé l'espace stable associé à A au point fixe 0 et on le note par $E^s(0)$.*
2. *L'espace instable associé à A au point fixe 0 est l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de A de valeur propre de module supérieur à 1, on le note par $E^i(0)$.*
3. *L'espace central associé à A au point fixe 0 est l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de A de valeurs propres de module égal à 1, on le note par $E^c(0)$.*

d'après la définition (1.14), on peut obtenir la décomposition de \mathbb{R}^m en somme directe :

$$\mathbb{R}^m = E^s(0) \oplus E^i(0) \oplus E^c(0).$$

Les notions d'espaces stable, instable et central peuvent se généraliser en termes de variétés, et on peut donné une définition formelle aux variétés invariantes.

Définition 1.15 (Variétés invariantes) : *Supposons que l'application f a un point selle, $x_s = 0$ et qu'elle est inversible. Notons par g l'application inverse : $g = f^{-1}$.*

1. *On appelle **variété stable** l'ensemble W^s de tous les vecteurs initials x_0 tel que*

$$f^{(n)}(x_0) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

2. *On appelle **variété instable** l'ensemble W^i de tous les vecteurs initials x_0 tel que*

$$g^{(n)}(x_0) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

3. On appelle **variété centrale** W^c toute variété invariante de dimension m_c où son graphe est tangent à E^c à l'origine.

Noton que la stabilité sur la variété centrale n'est pas connue.

Théorème 1.3 *Pour tout système de la forme (1.7), où $f \in C^k(\mathbb{R}^m)$, ($k \geq 1$), ils existent une variété stable W^s et une variété instable W^i de classe C^k tangentes aux sous espaces E^s et E^i respectivement au point $x = 0$ et une variété centrale W^c de classe C^{k-1} , tangente à E^c au point $x = 0$. De plus ces variétés sont invariantes.*

Puisque E^s, E^i, E^c sont A -invariantes c-à-d : $A(E^{s,i,c}) \subset (E^{s,i,c})$, on définit :

$$A_{s,i,c} = A|_{E^{s,i,c}}$$

Donc l'équation (1.7) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} y_{n+1} = A_c \cdot y_n + \tilde{f}_c(y_n, z_n, t_n), \\ z_{n+1} = A_s \cdot z_n + \tilde{f}_s(y_n, z_n, t_n), \\ t_{n+1} = A_i \cdot t_n + \tilde{f}_i(y_n, z_n, t_n), \end{cases} \quad y_n \in E^c, z_n \in E^s, t_n \in E^i. \quad (1.10)$$

Théorème 1.4 (Réduction du flot sur la variété centrale) *Pour tout système du type (1.10), il existe variété centrale tangente à $\{(y, z, t) \in \mathbb{R}^{m_c} \times \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}^{m_i} \mid z = 0, t = 0\}$, qui peut être représentée localement par le graphe d'une fonction $h = (h_s, h_i) : \mathbb{R}^{m_c} \rightarrow \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}^{m_i}$ tel que*

$$W^c = \{(y, z, t) \in \mathbb{R}^{m_c} \times \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}^{m_i} \mid z = h_s(y), t = h_i(y), h(0) = (h_s(0), h_i(0)) = (0, 0), J(h) = 0, |y| < \delta \text{ pour } \delta \text{ suffisamment petit.}\}.$$

De plus, la dynamique réduite sur la variété centrale est donnée localement par l'équation

$$y_{n+1} = A_c \cdot y_n + \tilde{f}_c(y_n, h_s(y), h_i(y)), \quad y_n \in \mathbb{R}^{m_c}. \quad (1.11)$$

Le comportement local au voisinage du point fixe du système (1.11) est le même à celui du système (1.10).

Théorème 1.5 *Supposons que $\gamma_i = \emptyset$. Si $y = 0$ est un point fixe du système (1.11) attractif (répulsif), alors le point fixe $(y, z, t) = (0, 0, 0)$ du système (1.10) est attractif (répulsif).*

Substituons $z_n = h_s(y_n), t_n = h_i(y_n)$ dans le système (1.10), on obtient

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= A_c \cdot y_n + \tilde{f}_c(y_n, h_s(y_n), h_i(y_n)), \\ z_{n+1} &= h_s(y_{n+1}) = h_s \left(A_c \cdot y_n + \tilde{f}_c(y_n, h_s(y_n), h_i(y_n)) \right), \\ t_{n+1} &= h_i(y_{n+1}) = h_i \left(A_c \cdot y_n + \tilde{f}_c(y_n, h_s(y_n), h_i(y_n)) \right). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= A_s \cdot h_s(y_n) + \tilde{f}_s(y_n, h_s(y_n), h_i(y_n)), \\ t_{n+1} &= A_i \cdot h_i(y_n) + \tilde{f}_i(y_n, h_s(y_n), h_i(y_n)), \end{aligned}$$

Alors les équations de la variété centrale sont :

$$\begin{aligned} h_s \left(A_c \cdot y_n + \tilde{f}_c(y_n, h_s(y_n), h_i(y_n)) \right) &= A_s \cdot h_s(y_n) + \tilde{f}_s(y_n, h_s(y_n), h_i(y_n)), \\ h_i \left(A_c \cdot y_n + \tilde{f}_c(y_n, h_s(y_n), h_i(y_n)) \right) &= A_i \cdot h_i(y_n) + \tilde{f}_i(y_n, h_s(y_n), h_i(y_n)). \end{aligned}$$

Via la difficulté de trouver une expression explicite de h et puisque nous intéressons au comportement local du système, nous étudions dans la pratique le développement de Taylor comme approximation de la fonction h .

1.3 Bifurcation

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de "Bifurcation". La théorie de bifurcation s'intéresse aux familles des systèmes dynamiques (continu ou discret) dépendant d'un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$. Cette théorie renvoie à l'étude des

changements de comportement d'un système lorsque les paramètres de ce dernier changent. Pour étudier ce phénomène on s'intéresse aux familles des systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre réel $\mu \in \mathbb{R}$:

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{R}^m.$$

Définition 1.16 *Une bifurcation est un changement de type topologique du système(changement qualitatif et quantitatif) lorsque le paramètre μ passe à travers une valeur critique. $\mu = \mu_0$ appeler valeur de bifurcation.*

Définition 1.17 (Branche de point fixe) :

1. On définit branche de points fixes toute application continue $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui vérifie la condition :

$$f(\mu, \gamma(\mu)) = \gamma(\mu), \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

2. On définit branche des points r -périodiques toute application continue $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui vérifie la condition :

$$f^{(r)}(\mu, \gamma(\mu)) = \gamma(\mu), \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.18 *Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire x_s du système en fonction du paramètre du contrôle μ . Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée.*

Il existe plusieurs types de bifurcations si $\mu \in \mathbb{R}$, qui correspondent tous à des comportements génériques. dans ce travail on s'intéresse aux bifurcations locales des systèmes dynamiques de dimension 1et 2 dépendant d'un paramètre réel.

1.3.1 Bifurcation fold

Cette bifurcation nommée aussi noeud-col correspond à la situation où l'une des valeurs propres est égale à $+1$. Ce type de bifurcation donne naissance à deux points périodiques en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable .

Théorème 1.6 *Soit une famille de fonctions $f(\mu, x)$ tel que $x \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il exist un couple (μ_0, x_0) tel que le système : $x_{n+1} = f(\mu_0, x_n)$ admet un point fixe en x_0 :*

$$f(\mu_0, x_0) = x_0 \quad \text{et que} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_0, x_0) = 1.$$

Supposons de plus $f'_\mu(\mu_0, x_0) \neq 0$ et $f''_{xx}(\mu_0, x_0) \neq 0$.

*Alors le système subit au point μ_0 une bifurcation de type **noeud-col**.*

Propriété 1.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe un voisinage du couple (μ_0, x_0) : $V = \{(\mu, x) / \mu \in J \ni \mu_0, x \in I \ni x_0\}$ tel que :*

1. *Si $f'_\mu(\mu_0, x_0) \cdot f''_{xx}(\mu_0, x_0) < 0$ les assertions ci-dessus sont vérifiées :*

1.A *Il n'existe aucun point fixe dans le voisinage V quand $\mu < \mu_0$.*

1.B *Pour $\mu > \mu_0$ il existe exactement deux branches de points fixes $\gamma_1(\mu) > \gamma_2(\mu)$.*

1.C $\gamma_1(\mu_0) = \gamma_2(\mu_0) = x_0$.

1.D *La branche supérieure γ_1 est attractive et la branche inférieure γ_2 est répulsive.*

2. *Si $f'_\mu(\mu_0, x_0) \cdot f''_{xx}(\mu_0, x_0) > 0$ les assertions ci-dessus sont vérifiées :*

2.A *Il n'existe aucun point fixe dans le voisinage V quand $\mu > \mu_0$.*

2.B *Pour $\mu < \mu_0$ il existe exactement deux branches de points fixes $\gamma_1(\mu) > \gamma_2(\mu)$.*

2.C $\gamma_1(\mu_0) = \gamma_2(\mu_0) = x_0$.

2.D *La branche supérieure γ_1 est répulsive et la branche inférieure γ_2 est attractive.*

1.3.2 Bifurcation fourche

Théorème 1.7 Soit une famille de fonction $f(\mu, x)$ tel que $x \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un couple (μ_0, x_0) tel que le système $x_{n+1} = f(\mu_0, x_n)$ admet un point fixe en x_0

$$f(\mu_0, x_0) = x_0 \quad \text{et que} \quad f'_x(\mu_0, x_0) = 1.$$

Supposons de plus que $f'_\mu(\mu_0, x_0) = f''_{xx}(\mu_0, x_0) = 0$, $f''_{\mu x}(\mu_0, x_0) \neq 0$ et $f'''_{xxx}(\mu_0, x_0) \neq 0$.

Alors le système subit au point μ_0 une bifurcation de type fourche.

Propriété 1.2 Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe un voisinage du couple (μ_0, x_0)

$$V = \{(\mu, x) / \mu, \mu_0 \in J, x, x_0 \in I\}$$

tel que trois branches différentes de points fixes sont définies dans ce voisinage et se croisent dans le point (μ_0, x_0) . Plus précisément il existe une branche de point fixe $\gamma_1(\mu)$ qui passe par le point (μ_0, x_0) de telle façon qu'elle est attractive pour les valeurs $\mu < \mu_0$ et répulsive pour $\mu > \mu_0$, Si $f''_{\mu x} > 0$. Si $f''_{\mu x} < 0$ ces propriétés de stabilité sont renversées par rapport au point μ_0 . Il existe deux autres branches $\gamma_2(\mu)$ et $\gamma_3(\mu)$ qui prennent origine au point (μ_0, x_0) et sont tangentes de la ligne verticale $\mu = \mu_0$. Elles sont définies pour $\mu < \mu_0$ si $f''_{\mu x} \cdot f'''_{xxx} > 0$ et pour $\mu > \mu_0$ si $f''_{\mu x} \cdot f'''_{xxx} < 0$. (Ainsi dans le voisinage V il ya exactement trois points fixes pour chaque valeur de $\mu > \mu_0$ si $f''_{\mu x} \cdot f'''_{xxx} < 0$). les deux branches $\gamma_2(\mu)$ et $\gamma_3(\mu)$ sont attractives si $\mu < \mu_0$ et $f''_{\mu x} < 0$ ou $\mu > \mu_0$ et $f''_{\mu x} > 0$. Sinon elles sont répulsives.

1.3.3 Bifurcation flip

Cette bifurcation nommée aussi doublement de période a lieu lorsqu'un cycle d'ordre r stable a un multiplicateur qui passe par la valeur $\mu = -1$. Ce cycle devient alors instable et donne naissance à un cycle d'ordre $2r$.

Théorème 1.8 *Soit une famille de fonctions $f(\mu, x)$. Supposons qu'il existe un couple (μ_0, x_0) tel que le système $x_{n+1} = f(\mu_0, x_n)$, admet un point fixe en x_0 :*

$$f(\mu_0, x_0) = x_0, \quad \text{et que} \quad f'_x(\mu_0, x_0) = -1.$$

Supposons aussi :

$$\beta_1(\mu_0, x_0) = 2f''_{\mu x}(\mu_0, x_0) + f'_\mu(\mu_0, x_0) \cdot f''_{xx}(\mu_0, x_0) \neq 0, \quad (1.12)$$

ainsi que :

$$\beta_2(\mu_0, x_0) = \frac{1}{2} \left(f''_{xx}(\mu_0, x_0) \right)^2 + \frac{1}{3} f'''_{xxx}(\mu_0, x_0) \neq 0. \quad (1.13)$$

Alors le système subit au point λ_0 une bifurcation de doublement de période (flip).

Propriété 1.3 *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe un pavé $V = J \times I$ contenant (μ_0, x_0) tel que trois branches différentes de points fixes sont définie dans ce voisinage et se croisent dans le point (μ_0, x_0) :*

1. *Il existe une branche de point fixe $\gamma_1(\mu)$ qui passe par le point (μ_0, x_0) telle que :*
 - 1.A** *Si $\beta_1(\mu_0, x_0) < 0$, la branche des points fixes $\gamma_1(\mu)$ attractive pour les valeurs $\mu < \mu_0$ et répulsive pour $\mu > \mu_0$.*
 - 1.B** *Si $\beta_1(\mu_0, x_0) > 0$, la branche des points fixes $\gamma_1(\mu)$ attractive pour les valeurs $\mu > \mu_0$ et répulsive pour $\mu < \mu_0$.*
2. *Il existe deux branches de points périodiques de période 2, $\gamma_{21}(\mu)$ et $\gamma_{22}(\mu)$ qui prennent début au point (μ_0, x_0) telle que :*
 - 2.A** *Si $\beta_1\beta_2 > 0$, les branches $\gamma_{21}(\mu)$ et $\gamma_{22}(\mu)$ sont définies pour $\mu < \mu_0$.*
 - 2.B** *Si $\beta_1\beta_2 < 0$, les branches $\gamma_{21}(\mu)$ et $\gamma_{22}(\mu)$ sont définies pour $\mu > \mu_0$.*
3. *L 'orbite péroïdique qui bifurque est attractive si elle coexiste avec un point fixe répulsif et vice versa.*

1.3.4 Bifurcation de Neimark-Sacker

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude d'une famille de systèmes dynamiques dans le plans \mathbb{R}^2 dépendant d'un paramètre réel μ c-à-d :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(\mu, x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(\mu, x_n, y_n) \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Comme pour les systèmes de dimension 1 nous intéressons aux changements de dynamique en fonction du paramètre μ , un phénomène nouveau inexistant en dimension 1 peut arriver quand la jacobienne a deux valeurs propres complexes conjuguées sur le cercle unité.

Supposons que le système (1.14) possède une branche de points fixes $\gamma(\mu)$ défini sur un intervalle I qui contient un point μ_0 . On considère $J(\mu, \gamma(\mu))$ (la jacobienne du système évalué aux branche de points fixes), et on suppose que $\forall \mu \in I$, la jacobienne a deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mu) &= \alpha(\mu).e^{i\theta(\mu)} = \alpha(\mu).(\cos(\theta(\mu)) + i \sin(\theta(\mu))), \\ \lambda_2(\mu) &= \alpha(\mu).e^{i\theta(\mu)} = \alpha(\mu).(\cos(\theta(\mu)) - i \sin(\theta(\mu))), \end{aligned}$$

où $\alpha(\mu) = |\lambda_1(\mu)| = |\lambda_2(\mu)|$ et $\theta(\mu) = \arg \lambda_1(\mu)$

Soit $\mu_0 \in I$ tel que :

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) &< 1, \forall \mu \in I \quad \text{et} \quad \mu < \mu_0, \\ \alpha(\mu_0) &= 1, \\ \alpha(\mu) &> 1, \forall \mu \in I \quad \text{et} \quad \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

C-à-d quand le paramètre μ passe par la valeur μ_0 les deux valeurs propres $\lambda_1(\mu)$ et $\lambda_2(\mu)$ croisent le cercle C_1 .

On suppose que :

- (i) $\frac{d}{d\mu}\alpha(\mu_0) > 0$ (les deux valeurs $\lambda_1(\mu)$ et $\lambda_2(\mu)$ croisent le cercle unité avec une vitesse non-nulle).
- (ii) $\theta(\mu_0) = \omega \cdot \pi$ où ω est irrationnel ou rationnel : $\omega = \frac{2p}{q}$ avec p et q relativement premiers et $q \neq 3, 4$.

Alors on dit que le système subit au point (μ_0, x_0) une bifurcation de Neimark-Sacker nommé aussi bifurcation de Hopf Cette bifurcation a les propriétés suivantes :

1. Pour $\mu < \mu_0$ le point fixe $\gamma(\mu)$ est attractif et il n'y a pas d'autres points fixes ou périodiques.
2. Pour $\mu > \mu_0$ le point fixe $\gamma(\mu)$ devient répulsif et un cycle limite attractif apparaît. Ce cycle est une orbite périodique de période fondamentale q si $\omega = \frac{2p}{q}$ ou une courbe elliptique si ω est irrationnel.

Pour étudier la bifurcation Neimark-Sacker du point fixe dans un système discret, nous avons le théorème suivant.

Théorème 1.9 (Bifurcation Neimark-Sacker) Soit F_μ , être une famille d'application dépendantes d'un paramètre μ :

1. $F_\mu(0) = 0$ pour μ un proche de 0 ;
2. $DF_\mu(0)$ a deux valeurs propres complexes $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$ pour μ un proche de 0 avec $|\lambda(0)| = 1$;
3. $\left. \frac{\partial |\lambda(\mu)|}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} > 0$;
4. $\lambda = \lambda(0)$ n'est pas une racine m -ième de l'unité pour $m = 1, 2, 3, 4$;

Alors ,il ya a un changement de variables dépendant de μ où F_α peut être sous la forme :

$$F_\mu(X) = G_\mu(U) + O(|U|^5) \quad \text{pour } U = (u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } G = (g_1, g_2).$$

De plus,

1. Si $\mu > 0$ suffisamment petit et $l(0) < 0$ alors F_α a une corbe invariante attractive.
2. Si $\mu < 0$ suffisamment petit et $l(0) > 0$ alors F_α a une corbe invariante répulsivee.

Où $l(0)$ est donné par la formule suivante :

$$l(0) = -\operatorname{Re}\left[\frac{(1-2\lambda)\bar{\lambda}^2}{(1-\lambda)}\gamma_{20}\gamma_{11}\right] - \frac{1}{2}|\gamma_{11}|^2 - |\gamma_{02}|^2 + \operatorname{Re}(\bar{\lambda}\gamma_{21}), \quad (1.15)$$

et

$$\begin{cases} \gamma_{20} = \frac{1}{8}[(g_{1uu} - g_{1vv} + 2g_{2uv}) + i(g_{2uu} - g_{2vv} - 2g_{1uv})], \\ \gamma_{11} = \frac{1}{4}[(g_{1uu} + g_{1vv}) + i(g_{2uu} + g_{2vv})], \\ \gamma_{02} = \frac{1}{8}[(g_{1uu} - g_{1vv} - 2g_{2uv}) + i(g_{2uu} - g_{2vv} + 2g_{1uv})], \\ \gamma_{21} = \frac{1}{16}[(g_{1uuu} + g_{1uvv} + g_{g_{2uu}v} + g_{2vvv}) + i(g_{2uuu} + g_{2uvv} - g_{1uuv} - g_{1vvv})]. \end{cases} \quad (1.16)$$

1.3.5 Technique de la variété centrale

Une des méthodes utiliser pour l'étude du bifurcation est la technique de la variété centrale qui permet d'isoler la partie hyperbolique du système dynamique discret

Considérons le système dynamique discret dépendant d'un paramètre μ de la forme suivant :

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n), \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^m \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

Supposons qu'il exist un couple (μ_0, x_0) tel que le système : admet un point fixe en x_0 :
 $f(\mu_0, x_0) = x_0$.

La technique de le variété centrale se repose sur les étapes suivantes :

1. Poser $\sigma_n = \mu$ et appliquer le théorème de la variété centrale sur le système étendu

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(\sigma_n, x_n), \\ \sigma_{n+1} = \sigma_n. \end{cases}$$

2. Ecrire le système dynamique discret dépendant d'un paramètre précédent de la forme

suivante :

$$\begin{cases} y_{n+1} = A_c(\sigma_n) \cdot y_n + \tilde{f}_c(y_n, z_n, t_n, \sigma_n), \\ z_{n+1} = A_s(\sigma_n) \cdot z_n + \tilde{f}_s(y_n, z_n, t_n, \sigma_n), \\ t_{n+1} = A_i(\sigma_n) \cdot t_n + \tilde{f}_i(y_n, z_n, t_n, \sigma_n), \\ \sigma_{n+1} = \sigma_n \end{cases} \quad (y, z, t, \sigma) \in \mathbb{R}^{m_c} \times \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}^{m_i} \times \mathbb{R}$$

Où $A_{s,i,c} = A|_{E^{s,i,c}}$ et m_c, m_s, m_i sont donné par les formules (1.8) et (1.9).

3. Les fonctions de la variété centrale s'écrit de la forme :

$$z = h_s(x, \sigma), \quad t = h_i(x, \sigma).$$

Notons la dimension de la variété centrale est donc $m_c + 1$.

4. Le système réduit sur la variété centrale est

$$y_{n+1} = A_c(\mu) \cdot y_n + \tilde{f}_c(y_n, h_s(x, \sigma), h_i(x, \sigma), \mu).$$

1.4 Caractéristiques du chaos

Définition 1.19 *Un système chaotique est un système dynamique déterministe non linéaire qui se distingue par son imprévisibilité due à son extrême sensibilité aux conditions initiales.*

Il existe un ensemble des propriétés qui résument les caractéristiques observées dans les systèmes chaotiques. Elles sont considérées comme des critères mathématiques qui définissent le chaos. Les plus connues sont :

Non linéarité : L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarités. Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire, ne peut pas être chaotique.

Non périodicité : Un système présentant un comportement chaotique évolue dans une orbite qui ne se répète jamais sur elle-même. C'est à dire, les orbites ne sont jamais périodiques.

Sensibilité aux conditions initiales : Ce phénomène explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entrainer des résultats imprévisibles sur long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système.

Déterminisme : Le déterminisme signifie que le système est non aléatoire et ne possède aucun paramètre ou entrée stochastique. Cette propriété est propre à tous les systèmes dont l'évolution est définie par un ensemble d'équation différentielles ou d'équations aux différences. Dans les phénomènes aléatoires, il est impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. À l'opposé, et bien qu'ils paraissent, à première vue, aléatoires, les systèmes dynamiques chaotiques sont régis par certaines équations rendant compte du phénomène, mais dont les solutions sensibles aux conditions initiales.

Attracteur étrange : L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définitions qui on trouve dans la littérature sont restrictives. voir figure (1.2)

Exposants de Lyapunov : En analysant les exposants de Lyapunov d'un système, nous pouvons conclure sur le type du comportement de ce système comme suit :

1. **Si** $\lambda_m \leq \dots \leq 0$, il existe des point fixes asymptotiquement stables.
2. **Si** $\lambda_1 = 0, \lambda_m \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$, l'attracteur est un cycle limite asymptotiquement stable.
3. **Si** $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0, \lambda_m \leq \dots \leq \lambda_{n+1} < 0$, l'attracteur est un tore de dimension k , c'est-à-dire quasi-periodique.
4. **Si** $\lambda_1 > 0, \sum_i \lambda_i < 0$, l'attracteur est chaotique.

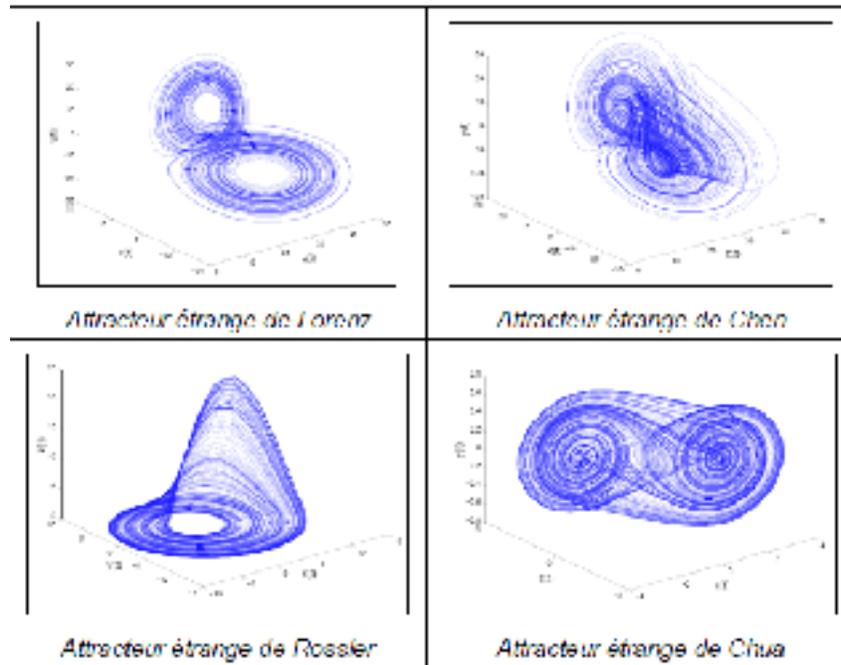


FIG. 1.2 – Quelques attracteurs étranges

5. Si $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$, $\sum_i \lambda_i < 0$, l'attracteur est hyperchaotique.

Chapitre 2

Structures de bifurcation du système de Burgers

2.1 Introduction

Le modèle de Burgers est une discrétisation d'un système différentiel bidimensionnel couplé qui a été utilisée par Burgers pour illustrer la pertinence du concept de bifurcation pour l'étude des écoulements hydrodynamiques. Ce système est en effet une sorte de modèle de Lorenz (cas continu); étant en deux dimensions, ils ne peuvent pas présenter de complexes trajectoires.

L'application de Burgers est définie de la manière suivante [4] :

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \nu)x_n - y_n^2 \\ y_{n+1} = (1 + \mu)y_n + x_n y_n \end{cases} \quad (2.1)$$

R. R. Whitehead, N. MacDonald ont prouvé numériquement que le modèle de Burgers produit un ensemble très riche de comportements dynamiques complexes que ceux observés dans le cas continu [5]. Néanmoins, ils n'ont pas donné d'analyse théorique.

Dans ce chapitre, nous étudions les comportements dynamiques du système de Burgers

en tant que systèmes discrets en utilisant l'analyse qualitative, nous déterminons d'abord l'existence des points fixes du système (2.1), puis nous étudions la stabilité en calculant les valeurs propres de la matrice jacobienne de l'application (2.1) au point fixe. De plus, nous analysons les types de Bifurcations, et nous déterminons les conditions suffisantes d'existence pour les bifurcations de fourche, flip et de Neimark-Sacker en utilisant la technique de la variété centrale Enfin nous caractérisons les attracteurs et leurs bassins d'attraction..

2.2 Calcul des points fixes

Proposition 2.1 :

1. Si $\mu\nu \leq 0$, le système (2.1) admet un point fixe $E_0(0, 0)$.
2. Si $\mu\nu > 0$, le système admet trois points fixes $E_0(0, 0)$, $E_1(-\mu, \sqrt{\mu\nu})$, $E_2(-\mu, -\sqrt{\mu\nu})$.

Preuve. Pour obtenir les points fixes du système, il faut résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x = (1 - \nu)x - y^2 \\ y = (1 + \mu)y + xy \end{cases}$$

d'après la deuxième équation on trouve que $y = 0$, où bien $x = -\mu$.

En substitutions dans la première équation on trouve

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0, & \text{ toujours existe.} \\ \text{et} \\ x = -\mu \Rightarrow y = \pm\sqrt{\mu\nu}, & \text{ existe si } \mu\nu > 0. \end{cases}$$

Ce qui termine la preuve. ■

2.3 Stabilité des points fixes

La dynamique locale du système (2.1) au voisinage d'un point fixe dépend des valeurs propres de la matrice jacobienne J de(2.1).

La matrice jacobienne de l'application(2.1) au point (x, y) est donnée par :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 - \nu & -2y \\ y & 1 + \mu + x \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Pour calculer les valeurs propres de J , nous résolvons l'équation $\det (J-\lambda I) = 0$, où I est la matrice identité, on obtient le polynôme caractéristique suivant

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (2 + x + \mu - \nu) \lambda + (1 - \nu)(1 + \mu + x) + 2y^2 = 0$$

Alors les valeurs propres (multiplicateurs) de l'application de Burgers sont les racines de $P(\lambda)$.

2.3.1 Stabilité de $E_0(0, 0)$

La matrice jacobienne correspondante au point E_0 s'écrit :

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 1 - \nu & 0 \\ 0 & 1 + \mu \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique

$$\det(J(E_0) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \nu - \lambda & 0 \\ 0 & 1 + \mu - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \nu - \lambda)(1 + \mu - \lambda) = 0$$

donc on a deux valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \nu \\ \lambda_2 = 1 + \mu \end{cases}$$

De ce qui précède, on peut tirer le résultat suivant :

Propriété 2.1 :

1. Lorsque $0 < \nu < 2$ et $-2 < \mu < 0$, E_0 est un point fixe attractif.
2. Lorsque ($\nu > 2$ ou $\nu < 0$) et ($\mu > 0$ ou $\mu < -2$), E_0 est un point fixe répulsif.
3. Lorsque ($\nu > 2$ et $-2 < \mu < 0$) ou ($0 < \nu < 2$ et $\mu > 0$) ou ($0 < \nu < 2$ et $\mu < -2$) ou ($\nu < 0$ et $-2 < \mu < 0$), E_0 est un point selle.
4. Lorsque $\nu = 0$ ou 2 et $|\lambda_2| \neq 1$ ou $\mu = -2$ ou $\mu = 0$ et $|\lambda_1| \neq 1$, E_0 est un point fixe non hyperbolique.

2.3.2 Stabilité de $E_1(-\mu, \sqrt{\mu\nu})$

La matrice jacobienne évalué au point E_1 est :

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 1 - \nu & -2\sqrt{\nu\mu} \\ \sqrt{\nu\mu} & 1 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \det(J(E_1) - \lambda I_2) = (1 - \nu - \lambda)(1 - \lambda) + 2\nu\mu = \lambda^2 - (2 - \nu)\lambda + (1 - \nu + 2\nu\mu).$$

Donc les deux valeurs propres sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(2 - \nu \pm \sqrt{\nu^2 - 8\nu\mu}) \in \mathbb{R} \text{ si } \begin{cases} \nu > 0 \text{ et } 0 < \mu \leq \frac{\nu}{8}, \\ \text{ou} \\ \nu < 0 \text{ et } \frac{\nu}{8} \leq \mu < 0, \end{cases}$$

ou bien

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(2 - \nu \pm i\sqrt{8\mu\nu - \nu^2}) \in \mathbb{C} \text{ si } \begin{cases} \nu > 0 \text{ et } \mu \geq \frac{\nu}{8}, \\ \text{ou} \\ \nu < 0 \text{ et } \mu \leq \frac{\nu}{8}, \end{cases} \quad (2.3)$$

et

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{1 - \nu + 2\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Remarque 2.1 *Nous n'avons pas besoin d'étudier le comportement du système au voisinage du point fixe E_2 , puisque E_1 et E_2 , sont des points fixes de coordonnées symétriques et ils ont les mêmes structures.*

2.4 Bifurcations des points fixes

2.4.1 Bifurcation de $E_0(0, 0)$

Pour analyser les bifurcations de E_0 , considérons μ le paramètre de bifurcation, alors E_0 est un point fixe non hyperbolique pour $\mu = 0$ ou $\mu = -2$.

La bifurcation fourche Si $\mu = 0$, alors $J(E_0)$ a deux valeurs propres $\lambda_1 = 1 - \nu$ et $\lambda_2 = 1$, alors on a la proposition suivante.

Proposition 2.2 *Si $\mu = 0$ et $\nu \neq 0$, L'application (2.1) subit une bifurcation de fourche en E_0 .*

Preuve. Soit $\sigma_n = \mu$, tel que le paramètre σ_n est une nouvelle variable dépendante,

l'application (2.1) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \sigma_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ \sigma_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_n^2 \\ 0 \\ x_n y_n + \sigma_n y_n \end{pmatrix}.$$

On utilisant la théorie de la variété centrale, Il existe une variété centrale de l'application(2.1),qui peut s'exprimer localement comme suit :

$$W^c(E_0) = \{(x, y, \sigma) \in \mathbb{R}^3 \mid x = h(y, \sigma), w(0, 0) = Dh(0, 0) = 0, |x| < \varepsilon, |y| < \delta\}.$$

Prenons $w(y, \sigma)$ de la forme :

$$x_n = h(y_n, \sigma_n) = a_1 y_n^2 + a_2 y_n \sigma_n + a_3 \sigma_n^2 + o((|\sigma_n| + |y_n|)^3),$$

qui doit saisfait

$$h(y + y_n w + y_n \sigma_n, \sigma_{n+1}) = (1 - \nu)h - y_n^2,$$

ainsi, nous pouvons obtenir

$$a_1 = \frac{-1}{\nu} \quad \text{et} \quad a_2 = a_3 = 0.$$

Par conséquent,nous avons $x_n = h(y_n, \sigma_n) = -\frac{1}{\nu}y_n^2$,et la restriction de l'application (2.1) sur la variété centrale est donnée par

$$f_1 : y_{n+1} = y_n + \sigma_n y_n - \frac{1}{\nu}y_n^3 - o((|y_n| + |\sigma_n|)^4).$$

Puisque $\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_n \partial \sigma_n} \Big|_{(0,0)} = 1 \neq 0$, $\frac{d^3 f_1}{dy_n^3} \Big|_{(0,0)} = -6/\nu \neq 0$ et $\tilde{f}_1(y, \sigma) = y + \sigma y - \frac{1}{\nu}y^3$ est une fonction impaire pour y , alors l'application(2.1) subit une bifurcation de type fourche au point E_0 . ■

La bifurcation flip Si $\mu = -2$, alors $J(E_0)$ a deux valeurs propres $\lambda_1 = 1 - \nu$ et $\lambda_2 = -1$, alors on a la proposition suivante.

Proposition 2.3 Si $\mu = -2$ et $\nu \neq 0$, L'application (2.1) subit une bifurcation de type flip en E_0 .

Preuve. Soit $\sigma_n = \mu + 2$, tel que le paramètre σ_n une nouvelle variable dépendante, l'application (2.1) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \sigma_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \nu & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ \sigma_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_n^2 \\ 0 \\ x_n y_n + \sigma_n y_n \end{pmatrix}.$$

Supposons que $h(y, \sigma)$ a la forme suivante :

$$x_n = h(y_n, \sigma_n) = b_1 y_n^2 + b_2 y_n \sigma_n + b_3 \sigma_n^2 + o((|y_n| + |\sigma_n|)^3).$$

Elle doit satisfaire

$$h(-y_n + y_n w + \sigma_n y_n, \sigma_{n+1}) = (1 - \nu)h - y_n^2.$$

Ainsi, nous pouvons obtenir que

$$b_1 = -\frac{1}{\nu} \quad \text{et} \quad b_2 = b_3 = 0.$$

Donc, nous avons $x_n = h(y_n, \sigma_n) = -\frac{1}{\nu} y_n^2$, et la restriction de l'application (2.1) sur la variété centrale est donnée par

$$f_2 : y_{n+1} = -y_n + \sigma_n y_n - \frac{1}{\nu} y_n^3 - o((|\sigma_n| + |y_n|)^4).$$

Puisque

$$\beta_1 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_n} \frac{\partial^2 f_2}{\partial y_n^2} + 2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial y_n \partial \sigma_n} \right) \Big|_{(0,0)} = 2 \neq 0,$$

$$\beta_2 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_n^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 f_2}{\partial y_n^3} \right) \Big|_{(0,0)} = -\frac{2}{\nu} < 0,$$

Alors l'application (2.1) subit une bifurcation de type flip au point E_0 . ■

2.4.2 Bifurcation du point fixe $E_1(-\mu, \sqrt{\mu\nu})$

Dans certaines condition, on peut vérifier que le système (2.1) subit des bifurcations de type fourche, flip et Neimark-Sacker au point $E_1(-\mu, \sqrt{\mu\nu})$. Ceci sera montré par les trois propositions ci-dessous .

Proposition 2.4 *Si $\nu^2 - 4\mu\nu > 0$ et $\mu = 0$, l'application (2.1) subit une bifurcation fourche au point E_1 .*

Preuve similaire à celle de la proposition (2.2).

Proposition 2.5 *Si $\nu^2 - 4\mu\nu > 0$ et $\mu = \frac{\nu - 2}{\nu}, \nu \neq 2$, l'application(2.1) subit une bifurcation de type flip au point E_1 .*

Preuve. Pour $\mu = \frac{\nu - 2}{\nu}$, les deux valeurs propres de la matrice jacobienne en E_1 deviennent :

$$\lambda_1 = 3 - \nu \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -1.$$

Soit

$$\zeta_n = x_n + \nu, \quad \eta_n = y_n - \sqrt{\nu\mu}, \quad \sigma_n = \sqrt{\mu} - \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}},$$

où σ_n est un nouveau paramètre, l'application (2.1) devient :

$$\begin{pmatrix} \zeta_{n+1} \\ \sigma_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & -2\sqrt{\nu-2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{\nu-2} & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{\nu}\sigma_n\eta_n - \eta_n^2 \\ 0 \\ \sqrt{\nu}\sigma_n\zeta_n + \zeta_n\eta_n \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Soit

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\sqrt{\nu-2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{\sqrt{\nu-2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Par la transformation suivante :

$$\begin{pmatrix} \zeta_n \\ \sigma_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} u_n \\ \delta_n \\ \vartheta_n \end{pmatrix},$$

l'application(2.5) devient

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \delta_{n+1} \\ \vartheta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\nu & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ \delta_n \\ \vartheta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi(u_n, \delta_n, \vartheta_n) \\ 0 \\ \phi(u_n, \delta_n, \vartheta_n) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

où

$$\begin{cases} \psi(u_n, \delta_n, \vartheta_n) = \frac{4\sqrt{\nu}\sqrt{\nu-2}}{\nu-4}\delta_n u_n - \frac{\nu\sqrt{\nu}}{\nu-4}\delta_n \vartheta_n + \frac{3\sqrt{\nu-2}}{\nu-4}u_n^2 - \frac{2(\nu-1)}{\nu-4}u_n \vartheta_n + \frac{(\nu-2)\sqrt{\nu-2}}{\nu-4}\vartheta_n^2. \\ \phi(u_n, \delta_n, \vartheta_n) = \frac{2\nu\sqrt{\nu}}{\nu-4}\delta_n u_n - \frac{4\sqrt{\nu}\sqrt{\nu-2}}{\nu-4}\delta_n u_n + \frac{2(\nu-1)}{\nu-4}u_n^2 - \frac{(\nu+2)\sqrt{\nu-2}}{\nu-4}u_n \vartheta_n + \frac{3(\nu-2)}{2(\nu-4)}\vartheta_n^2. \end{cases}$$

On considère

$$u_n = w(\vartheta_n, \delta_n) = c_1\vartheta_n^2 + c_2\vartheta_n\delta_n + c_3\delta_n^2 + o((|\vartheta_n| + |\delta_n|)^3)$$

telle que

$$u_n = w(-\vartheta_n + \varphi(w(\vartheta_n, \delta_n), \delta_n, \vartheta_n)) = (3 - \nu)w(\vartheta_n, \delta_n) + \varphi(w(\vartheta_n, \delta_n), \delta_n, \vartheta_n),$$

donc on obtient

$$c_1 = \frac{\sqrt{\nu - 2}}{\nu - 4}, c_2 = -\frac{\nu\sqrt{\nu}}{(\nu - 2)(\nu - 4)} \text{ et } c_3 = 0.$$

La restriction de l'application (2.1) sur la variété centrale est donnée par :

$$\begin{aligned} f_3 : \vartheta_{n+1} = & -\vartheta_n - \frac{4\sqrt{\nu}\sqrt{\nu-2}}{\nu-4}\vartheta_n\delta_n + \frac{3}{2}\frac{(\nu-2)}{(\nu-4)}\vartheta_n^2 + \frac{\nu(2\nu-4+(\nu+2)\sqrt{\nu})}{(\nu-4)^2\sqrt{\nu-2}}\vartheta_n^2\delta_n \\ & - \frac{2\nu^3}{(\nu-2)(\nu-4)}\vartheta_n\delta_n^2 - \frac{(\nu^2-4)}{(\nu-4)^2}\vartheta_n^3 + o((|\vartheta_n| + |\delta_n|)^4). \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \beta_1 = & \left(\frac{df_3}{d\delta_n} \frac{d^2 f_3}{d\vartheta_n^2} + 2 \frac{d^2 f_3}{d\vartheta_n d\delta_n} \right) |_{(0,0)} = -\frac{8\sqrt{\nu}\sqrt{\nu-2}}{\nu-4} \neq 0 \text{ pour } \nu \neq 2, 4 \\ \beta_2 = & \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f_3}{d\vartheta_n^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{d^3 f_3}{d\vartheta_n^3} \right) |_{(0,0)} = \frac{\nu^2 - 36\nu + 68}{4(\nu-4)^2} \neq 0 \text{ pour } \nu \neq 2, 4 \end{aligned}$$

Il est clair que $\beta_2 > 0$ lorsque $\nu < 2$ et $\beta_2 < 0$ lorsque $\nu > 2$, alors l'application(2.1) subit une bifurcation flip au point fixe E_1 . Ceci complète la démonstration. ■

Maintenant nous discutons la bifurcation Neimark-Sacker pour le point fixe $E_1(-\mu, \sqrt{\mu\nu})$ dans le cas $\mu \geq \frac{\nu}{8}$, $\nu > 0$, en utilisant le théorème (1.9).

Proposition 2.6 *Si $\mu_0 = \frac{1}{2}$, $\nu \neq 4$, l'application (2.1) subit une bifurcation de Neimark-Sacker au point fixe $E_1(-\mu, \sqrt{\mu\nu})$. De plus si $\nu > \frac{1}{2}$, on a l'apparition d'une courbe fermée invariante attractive.*

Preuve. Posons $\mu_0 = \frac{1}{2}$, alors

$$|\lambda_{1,2}(\mu_0)| = 1, \text{ et } \frac{\partial(|\lambda_{1,2}|)}{\partial\mu} |_{\mu=\mu_0} = \nu.$$

Donc, la bifurcation Neimark-Sacker existe lorsque $\nu > 0$, et $|\lambda_{1,2}(\mu_0)| = 1$ et $\lambda_{1,2}(\mu_0) = \frac{1}{2}(2 - \nu \pm i\sqrt{4\nu - \nu^2})$, et $\lambda_{1,2}^m \neq 1$ pour $m = 1, 2, 3, 4$.

On utilisant la transformation suivante : $\zeta_n = x_n + \mu$, $\eta_n = y_n - \sqrt{\mu\nu}$, l'application (2.1) devient

$$\begin{cases} \zeta_{n+1} = (1 - \nu)\zeta_n - 2\sqrt{\mu\nu}\eta_n - \eta_n^2, \\ \eta_{n+1} = \sqrt{\mu\nu}\zeta_n + \eta_n + \zeta_n\eta_n. \end{cases} \quad (2.7)$$

Soit

$$\begin{pmatrix} \zeta_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u_n \\ \vartheta_n \end{pmatrix},$$

où

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{\nu}}{4\sqrt{\mu}} & \frac{\sqrt{8\mu\nu - \nu^2}}{4\sqrt{\mu\nu}} \end{pmatrix},$$

alors l'application (2.7) devient :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vartheta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\nu}{2} & -\frac{\sqrt{8\mu\nu - \nu^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{8\mu\nu - \nu^2}}{2} & 1 - \frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ \vartheta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(u_n, \vartheta_n) \\ g_2(u_n, \vartheta_n) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

où

$$\begin{aligned} g_1(u_n, \vartheta_n) &= -\frac{\nu}{16\mu}u_n^2 + \frac{\sqrt{8\mu\nu - \nu^2}}{8\mu}u_n\vartheta_n - \frac{8\mu\nu - \nu^2}{16\mu\nu}\vartheta_n^2, \\ g_2(u_n, \vartheta_n) &= -\frac{16\mu\nu + \nu^2}{16\sqrt{8\mu\nu - \nu^2}}u_n^2 + \left(1 + \frac{\nu}{8\mu}\right)u_n\vartheta_n - \frac{\sqrt{8\mu\nu - \nu^2}}{8}\vartheta_n^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Notons que (2.8) est exactement sous la forme de la variété centrale.

On utilisant les relations (1.16) et (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma_{20} \Big|_{\mu_0=\frac{1}{2}} &= \frac{3}{8\sqrt{4\nu - \nu^2}} \left(\sqrt{4\nu - \nu^2} - \nu i \right); \\ \gamma_{11} \Big|_{\mu_0=\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{4\sqrt{4\nu - \nu^2}} \left(\sqrt{4\nu - \nu^2} + 3i \right); \\ \gamma_{02} \Big|_{\mu_0=\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{8\sqrt{4\nu - \nu^2}} \left((\nu + 1)\sqrt{4\nu - \nu^2} + (\nu^2 - \nu)i \right); \\ \gamma_{21} \Big|_{\mu_0=\frac{1}{2}} &= 0.\end{aligned}$$

et on remplaçant dans (1.15), nous pouvons obtenir :

$$l = -\frac{(3\nu^3 - 6\nu^2 - 24\nu - 27)}{32(\nu^2 - 4\nu)} < 0, \quad \nu \neq 4.$$

Ce qui termine la preuve. ■

2.5 Simulations numériques

Dans cette section, nous présentons quelques simulations numériques pour valider les résultats analytiques précédents et obtenir la dynamique du modèle du Burger (2.1) et montrer de nouveaux comportements dynamiques complexes intéressants. Ainsi nous utilisons les diagrammes de bifurcation, les portraits de phase, les exposants de Lyapunov . Les paramètres de bifurcation sont considérés comme suit :

Fixons $\nu = 1$, et faire varier le paramètre μ dans l'intervalle $]-0.1, 1[$ on trouve :

Le diagramme de bifurcation de x par rapport à μ est représenté par la figure (2.1). : cette figure montre que la bifurcation de fourche se produit à $\mu = 0$, et par l'augmentation du paramètre $0 < \mu < \frac{1}{2}$, le point fixe stable $E_0(0, 0)$ perd sa stabilité et donne naissance a deux points fixes E_1, E_2 . La bifurcation Neimark-Sacker se produit à $\mu = \frac{1}{2}$, les points fixes E_1 et E_2 du système 2.1 perdent leurs stabilité, Donc il ya apparition d'une courbe fermée invariante quand $\mu > \frac{1}{2}$.

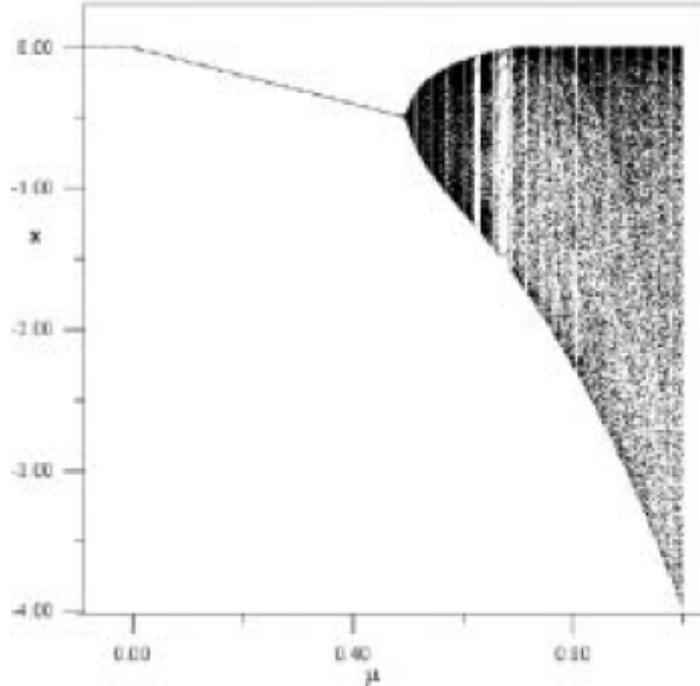


FIG. 2.1 – Diagramme de bifurcation dans le plan $(\mu - x)$ pour $\nu = 1$.

La figure (2.2) représente les bifurcations dans une partie du plan (μ, x) pour $\mu \in [0.68, 0.72]$ où on remarque que les comportements dynamiques du système 2.1 deviennent complexes.

Le portait de phase

Si $\mu = \frac{1}{2}$ et $\nu = 1$: le point fixe E_1 se produit à $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0.707$ et la paire associée des valeurs propres conjuguées complexes est $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ avec $|\lambda_{1,2}| = 1$, Ce qui montre que la bifurcation Neimark-Sacker se produit $\mu = \frac{1}{2}$ comme le montre la figure (2.3).

Si on continue le même processus en augmentant μ , Nous voyons que pour $\mu = 0.52$ et $\nu = 1$. On peut voir que le point fixe E_1 est devenu instable et qu'une courbe fermée invariante s'est créée autour du point fixe E_1 , comme le montre la figure (2.4).

Si $\mu = 0.7$ et $\nu = 1$: la décomposition de la courbe fermée invariante autour du point fixe E_1 est montré dans la figure (2.5).

D'autres augmentations produisent un attracteur chaotique double présenté à la figure (2.6), Avec $\mu = 0.83$ et $\nu = 1$, un attracteur chaotique autour du point fixe E_1 et l'autre

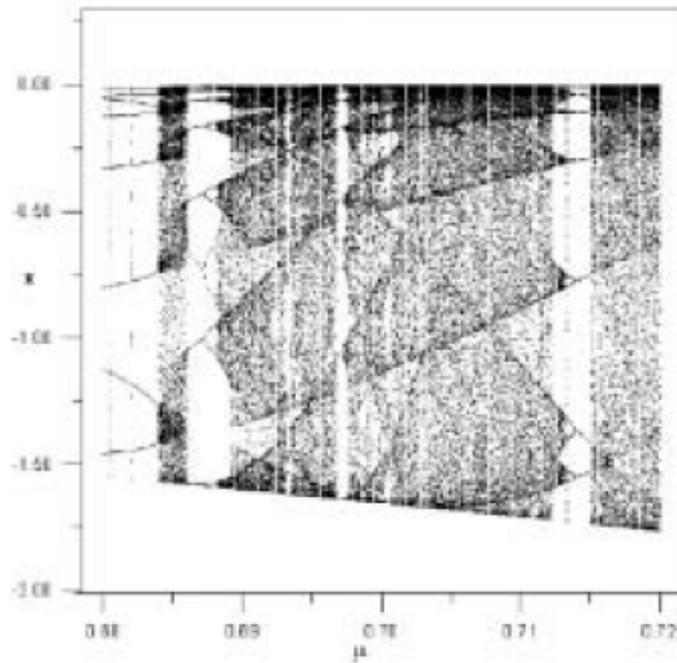


FIG. 2.2 – Zoom de la figure (2.1).

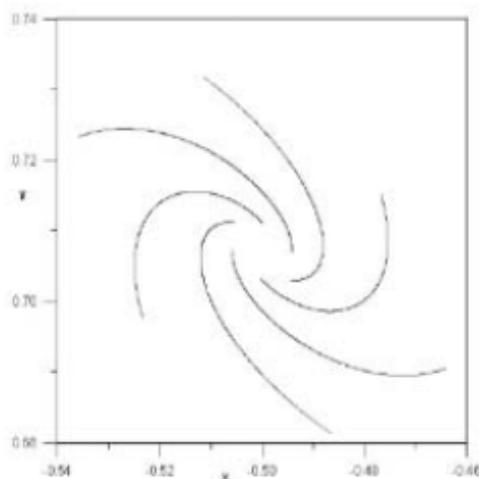


FIG. 2.3 – La première Bifurcation Neimark- Scacker pour $\mu = 0.5$.

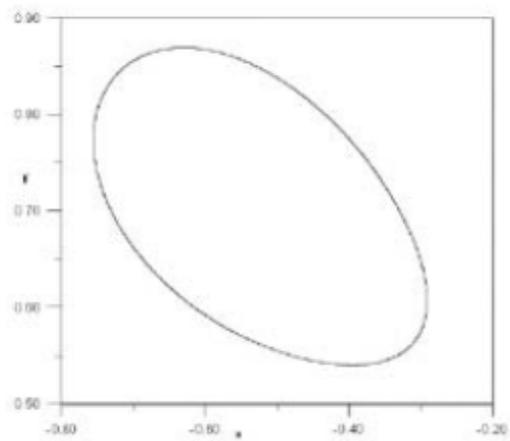


FIG. 2.4 – Courbe invariante fermée autour du point fixe E_1 créé via la bifurcation Neimark-Sacker pour $\mu = 0.52$.

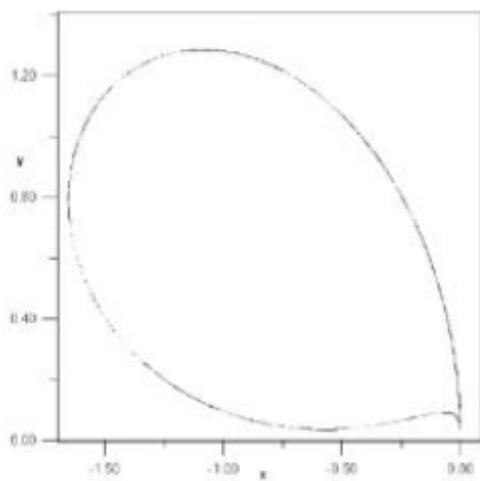


FIG. 2.5 – La répartition de la courbe fermée invariante pour $\mu = 0.7$.

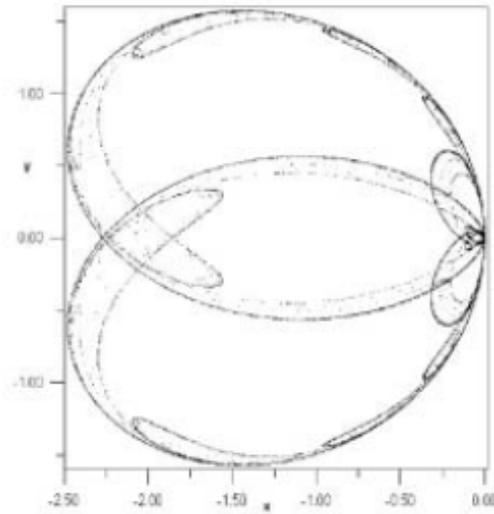


FIG. 2.6 – Attracteur chaotique double lorsque $\mu = 0.83$.

autour E_2 .

Lorsque $\mu = 0.88$ et $\nu = 1$: on a des attracteurs chaotiques doubles plus complexes (voir la figure (2.7)).

Lorsque $\mu = 0.9999$ et $\nu = 1$: un disque invariant apparaîtra en raison d'une bifurcation de contact entre l'attracteur et la frontière de son bassin d'attraction (voir Figure (2.8)).

Les exposants de Lyapunov : afin d'analyser l'ensemble de paramètres pour caractériser le comportement stable, périodique et chaotique du système on doit calculer les exposants maximaux de Lyapunov par rapport au paramètre μ . D'après ce qui précèdent pour les points fixes stables, les exposants maximaux de Lyapunov sont négatifs. Pour une courbe fermée quasi-périodique invariante, les exposants maximaux de Lyapunov sont zéro. Pour un comportement chaotique, les exposants maximaux de Lyapunov sont positifs.

D'après la figure (2.9), on peut voir que les exposants maximaux de Lyapunov sont au voisinage de zéro pour $\mu \in [0, 0.65]$, ce qui correspond à des points fixes ou à des courbes invariantes fermés. Lorsque $\mu \in (0.65, 1)$, les exposants de Lyapunov maximaux sont positifs, ce qui correspond à un comportement chaotique.

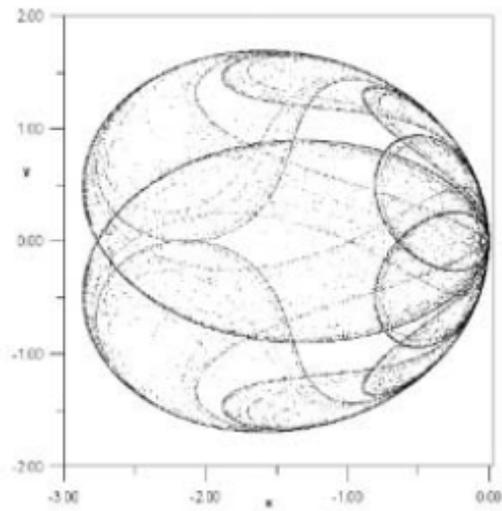


FIG. 2.7 – Attracteur chaotique double lorsque $\mu = 0.88$.

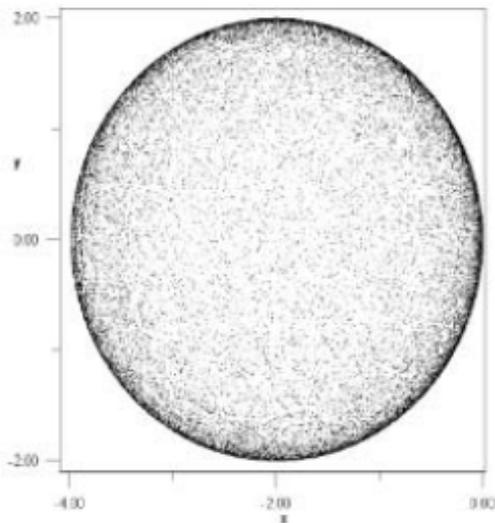


FIG. 2.8 – Disque invariant (chaos pleinement développé) pour $\mu = 0.999$.

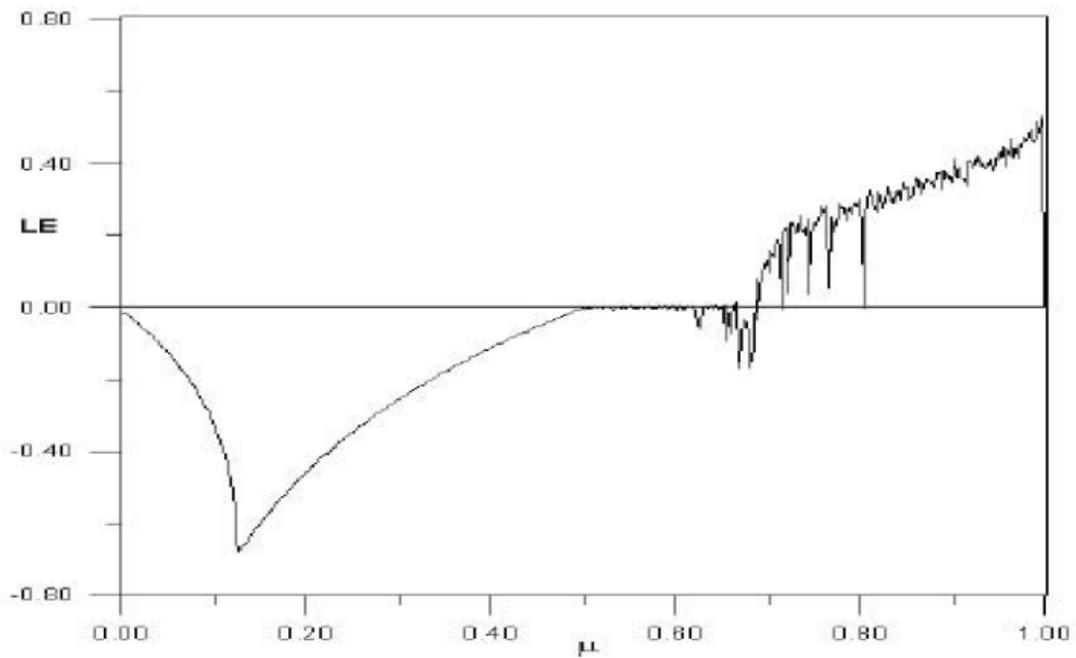


FIG. 2.9 – Exposants maximaux de Lyapunov correspondant au figure (2.1).

Conclusion

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les systèmes dynamiques discrets dépendant de paramètres et de divers comportements asymptotiques des solutions, et nous avons fourni les notions de base et les outils mathématiques nécessaires pour étudier ce type des systèmes, ainsi que la théorie de bifurcation et certaines caractéristiques de la dynamique chaotique. Ce travail s'accompagnait d'une étude analytique et numérique d'un exemple célèbre « *le modèle de Burger* » et les principaux résultats se résument comme suit :

- Nous avons déterminé les points fixes du système et étudié leurs stabilité en calculant les valeurs propres de la matrice jacobienne au point fixe indiqué.
- Nous avons déterminé les conditions suffisantes d'existence pour les bifurcations de fourche, flip et de Neimark-Sacker en utilisant la technique de la variété centrale.
- Nous avons effectué des simulations numériques pour valider les résultats analytiques obtenus.

De cette étude, nous pouvons déduire que le système de Burgers possède une dynamique non linéaire très riche à cause de la variations de ses paramètres.

Bibliographie

[Livres]

- [1] Désilles, A. 24 septembre 2003, Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret.
- [2] Kuznetsov.Y.A, (1998). Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition. Springer-Verlag New York, Inc.
- [3] Verhulst, F. (1989). Nonlinear Differential Equations And Dynamical Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[Articles]

- [4] Elabbasy, E. M., Agiza, H. N., El-Metwally, H., & Elsadany, A. A. (2007). Bifurcation analysis, chaos and control in the Burgers mapping. International Journal of Nonlinear Science, 4(3), 171-185.
- [5] Whitehead.R. R. , MacDonald.N. (1985). Introducing students to nonlinearity : computer experiments with Burgers mappings. Eur. J. Phys. 6 :143-147.

[Mém et thès]

- [6] Bessam, A. Etude d'un système dynamique chaotique.Mémoire de MASTER Université MOHAMED KHIDER BISKRA , Juin 2020.

- [7] Masri S. (Juin 2019). Systèmes dynamiques discrets Mémoire de MASTER Université MOHAMED KHIDER BISKRA.
- [8] Ouannas.Adel. (2015). Sur la synchronisation des systèmes chaotiques à temps discret, Thèse de Doctorat université Frères Mentouri à Constantine
- [9] Talbi.I. Mémoire de Magistère en Mathématiques : Systèmes Dynamiques Non Linéaires et Phénomènes de Chaos.Université Mentouri de Constantin Faculté des Sciences Exactes 29/06/2010.
- [10] Yahiaoui, Y.(2009). Sur certains aspects des systèmes dynamiques discrets bidimensionnels. Mémoire de magister. Université A. MIRA – Béjaia.

Annexe A : Les exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov servent à mesurer la divergence possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines et permettent de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre des exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases. Soit SDD le système dynamique non linéaire discret suivant avec $x_n \in \mathbb{R}^m$. Nous supposons que la trajectoire émanant d'un état initial x_0 atteint un attracteur. x_n est ainsi bornée à l'intérieur de l'attracteur. Nous choisissons deux conditions initiales très proches, noté x_0 et x'_0 et ne regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. En supposant que les deux trajectoires x_n et x'_n s'écartent exponentiellement, après n il vient :

$$|x'_n - x_n| = |x'_0 - x_0| e^{\lambda n}.$$

λ_l indique le taux de divergence par itération des deux trajectoires dont l'expression est la suivante :

$$\lambda_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x'_n - x_n}{x'_0 - x_0} \right|,$$

cela donne :

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x'_n - x_n}{x'_{n-1} - x_{n-1}} \times \frac{x'_{n-1} - x_{n-1}}{x'_{n-2} - x_{n-2}} \times \dots \times \frac{x'_1 - x_1}{x'_0 - x_0} \right|. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{x'_{i+1} - x_{i+1}}{x'_i - x_i} \right|. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{F(x'_i) - F(x_i)}{x'_i - x_i} \right|.\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\lambda_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right|,$$

λ_l , appelé exposant de Lyapunov, mesure le taux moyen de divergence de deux trajectoires distinctes, à partir de deux conditions initiales très proches. Dans le cas d'un système de dimension $m > 1$ il exist m exposant de Lyapunov $\lambda_l^{(j)}$, ($j = 1, 2, 3, \dots, m$), chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes de l'espace de phase. Pour le calcul de l'exposant de Lyapunov, nous partons d'un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^m$, pour caractériser le comportement infinitésimal autour du point x_n par la première matrice dérivée $Df(x_i)$:

$$Df(x_i) = \begin{pmatrix} \frac{df_1(x_i)}{dx_1(i)} & \dots & \frac{df_1(x_i)}{dx_n(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n(x_i)}{dx_1(i)} & \dots & \frac{df_n(x_i)}{dx_n(i)} \end{pmatrix}$$

Notons :

$$J_n = DF(x_{n-1}) \dots DF(x_0), \quad \text{avec } J_0 = DF(x_0).$$

L'exposant de Lyapunov est calculé par l'expression suivante :

$$\lambda_l^{(j)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda_i(J_n \dots J_1)|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Annexe B : Abréviations et Notation

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

\mathbb{R}^n	vecteur des réels de dimension n .
\mathbb{R}	l'ensemble des nombre réels.
x_s	point fixe.
$\det J$	determinant de une matrice jacobienne J .
E^s	espace stable.
E^i	espace instable.
E^c	espace central.
γ	Branche de point fixe.
SSD	Le système dynamique non linéaire discret.
$p(\lambda)$	Le polynome caractéristique.
$J(E_0)$	La matrice jacobienne correspondante du point E_0 .
$J(E_1)$	La matrice jacobienne correspondante du point E_1 .
\sum	la somme algébrique.
$ \cdot $	valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.