République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique.**

Par

LACHI Meriem

Titre :

Classification des marchés financiers

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**BRAHIMI Brahim**	UMKB	Président
Dr.	**TOUBA Sonia**	UMKB	Encadreur
Dr.	**BERKANE Hassiba**	UMKB	Examinateur

Juin 2021

Dédicace

Je dédie cette Mémoire

À *ma mère et mon père,*

qui étaient m'encourager

Malgré les difficultés des dernières années

À prendre cette étape dans ma vie.

REMERCIEMENTS

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux.

Je tiens a remercier "**ALLAH**" le tout puissant pour toute la volonté et le courage qu'il m'a donné pour l'achèvement de ce travail.

Je tiens d'abords à exprimer toute ma reconnaissance à ce qui a encadré cette Mémoire. C'est donc un grand merci que j'addresse à mon directeur de mémoire, **Dr.TOUBA Sonia,** Docteur à l'Université Mohamed Khider Biskra, pour m'avoir guidé jusqu'au terme de ma mémoire je souhaite lui exprimer ma gratitude.

Je remercie vivement Monsieur **HAFAIED Mokhtar.** Professeur à l'Université de Biskra, chef du département de Mathématiques, pour ses encouragements, ses suggestions et son dynamisme.

Je remercie Monsieur **LAKHDARI Imadeddine.** Docteur à l'Université de Biskra**,** chef actuel du département de mathématiques de son aide et de son écoute.

Je remercie évidemment **Pr.BRAHIMI Brahim** d'avoir bien voulu participer à ce jury et d'en avoir été le président.

Je souhaite remercier vivement **Dr.BERKENE Hassiba** d'avoir accepté d'être examinateur, malgré leurs nombreuses charges respectives.

Je remercie aussi **Dr.DJABRANE Yahia**, Professeur l'Université de Biskra pour sa l'aide et sa patience.

Un grand merci à ma famille, ma soeur **Imane**, ma petite **Somoud** pour son soutien constant et chaleureux pendant toute la réalisation de ce travail.

Et pour finir, je remercie tous mes amis et collègues, et je remercie spécialement à mon amie **Chahla**, qui m'a aidé et encouragé à la fin.

"MERCI"

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Dans notre vie quotidienne il y-a beaucoup de risques nous avons rencontrons que ce soit dans le segment pratique ou scientifique où des accidents liés à l'activité humaine. Prenons par exemple sur les marchés financiers comme (les banques et les compagnes d'assurence, établissements d'électronique, entreprises internationales...etc.)cherchent toujours à trouver des règles idéales pour évaluer les risques et équilibrer l'investissement et le risqué.

Les mesures du risque le plus populaires qui quantifient les données financières sont les mesures de distorsion introduites par *Wang* [31] ; cette dernière, comme la mesure de risque à deux déviations (TSD), cela nous à conduit a lancer notre problématique :

Peut-on envisager d'avoir un bon candidat pour la modélisation des rendements des actifs financiers ? peut-on établir un estimateur pour la mesure du risque financièrs (TSD) ?, à partir de ces questions, nous formulons les chapitres de recherche comme suit :

Le chapitre 01 : Dans le premier chapitre nous avons présenté quelques définitions sur les marchés financiers et leurs propriétés , nous parlons du travail de *B.Mandelbort* [18] et d'autres auteurs tels que *Fama* et *Rolle* [10]. Ils se attachér à démontrer que les queues de distribution d'une loi normale ne rendent pas compte de façons suffisamment réaliste de survenance de variations de grandes amplitudes brusques et instantantées. En particulier, les séries financières où la variance empirique se déclare très grande, donc dans le cadre des distributions à variance infinie prenons les lois $\alpha-$stable qui abordent quelques définitions de ce candidat idéal pour Modéliser les rendements des marchés financiers.

Le chapitre 02 : Il parle spécifiquement des risques à deux déviations. Dans la première nous allons définir le risque comme étant un outil de mesure du risque tel que nous allons présenter ces types avec plus de conceptualisation aux risques financiers, et ses propriétés en général tout en déterminant l'estimateur approprié pour elle.

Le chapitre 03 : Ce chapitre a un cote pratique avec logiciel R , dont la tache est d'illustrer la méthode d'estimation et simulation de résultat pour la (TSD) appliquées aux données financièrs. La première section traite descriptive des rendements d'actifs des indices boursiers de CAC40, S&P500 et Nasdaq. La deuxième section on a appliqué les résultats sur les données réelles déscuter dans la première section.

Chapitre 1

Les marchés financiers

Fig. 1.1 – Une image montrant le rendement des opérations sur les marchés financiers.

Lorsque les mathématiques interviennent dans l'économie, le concept à long terme. Il est limité à quelques codes cassés et suffisamment divise pour trouver la solution, et également confiné au marché financier qui incite la méthode mathématique à trouver une solution pour réduire le risque causé par la négociation[1] ou pour acheter une marchandise sur le marché et l'éviter.

Dans ce chapitre, nous découvrirons le modèle «lois stables ou les lois Pareto stables» pour représenter la loi des rendements financiers.

[1]la négociation : Opération d'achat et de vente portant sur un effet de commerce.

1.1 Définition du marché financier

Définition 1.1.1 «Un marché financier» *ou bien* «Bourse des valeurs» *est un marché dans lequel des titres peuvent être négociés par des individus, des entreprises privées ou des institutions publiques aux niveaux national et mondial, y compris des stocks de titres et des obligations que les investisseurs ou les commerçants achètent et les vendent aux bénéfices potentiels pour une tentative de rester limitée (évitement des dangers). De nombreux commerçants ont également tendance à se concentrer sur un marché financier, par exemple des contrats boursiers et des contrats de différence (contrats d'échange pour la différence de prix de la valeur initiale de la durée d'ouverture jusqu'à ce qu'ils soient fermés).*

Définition 1.1.2 *Les marchés financiers ne varient pas sur d'autres marchés réguliers, où des biens et des produits sont achetés, mais au lieu d'échanger des vêtements, des appareils électroménagers et d'autres personnes dans la monnaie locale ou nationale, les marchés se concentrent sur l'achat, la vente et l'acquisition de titres et d'instruments financiers sous leurs différentes formes. D'autre part sert un but important de l'économie d'une part.*

Sélectionnez le prix et les valeurs.

Augmentation et capital d'investissement.

Fournir des liquidités.

Fournir des informations sur le flux d'argent (Système de bilan[2]).

Réduire les risques.

Les actifs et les passifs totaux des secteurs financiers et non financiers apparaissent.

Efficacité (coûts tels que les coûts de transaction).

[2]Le bilan : est la photographie en fin d'exercice de la situation patrimoniale de l'entreprise.

1.2 propiétés

1.2.1 L'efficience des marchés

Nous avons choisi l'hypothèse des marchés financiers pour connaître l'ampleur de l'efficacité du marché selon les normes et les perspectives des chercheurs.

La théorie de l'efficience développée par *Eugene* [9], et selon *Lacaze* [16] stipulé que les cours des actions sur le marché boursier reflètent les informations disponibles liées au marché, c'est-à-dire le résultat des opinions des investisseurs l'hypothèse conclut donc que les cours des actions sont ordonnés et équitables, et qu'il est donc impossible de surmonter le marché en continu sans aléatoires.

Types de l'efficience :

Il y a trois (03) catégories d'efficience :

1. L'efficience au sens faible : Ce type se traduit par la possibilité d'obtenir des bénéfices par la voie technique qui dépend de l'étude des prix des actions à venir quotidiennement et de tous les investisseurs[3] à des prix historiques et date des échanges.
2. l'efficience au sens semi-fort : Attentes futures de la performance des sociétés cotées en bourse avec accès aux bénéfices grâce à une analyse fondamentale et à des informations correctes pour tous les investisseurs, en plus des cours historiques des actions et de l'historique des transactions.
3. l'efficience au sens fort : Les bénéfices de ce type sont réalisés en obtenant des informations internes auprès des entreprises (informations publiques ou privées) et en les mettant à la disposition de tous les investisseurs du marché.

[3] l'investisseur :est un particulier qui investi sur le marché financier ou une personne morale qui apporte des capitaux stables à une entreprise et il se positionne généralement à long terme.

1.2.2 L'hypothèse de stabilité

En début lorsque nous travaillons sur des marchés «fractals », nous remplaçons l'hypothèse d'efficience des marchés par l'hypothèse de stabilité, l'hypothèse des marché s'appelée aussi l'hypothèse des marchés fractals. Cette hypothèse introduite par *Peters* [24], prend en compte l'impact de l'information et des horizons d'investissements sur le comportement des investisseurs.

L'hypothèse du marché fractal est basée sur les points suivants :

T_1 : Les marchés sont constitués d'investisseurs qui ont des aspirations différentes de liquidités suffisantes pour le commerce.

T_2 : L'information a un impact différent selon l'horizon d'investissement, car le trader est plus intéressé par l'information technique, en revanche ; les investisseurs ont tendance à prêter attention aux informations de base et à les mettre en parallèle avec les informations techniques.

T_3 : La stabilité du marché est en grande partie une question de liquidité, les marchés cessent de se stabiliser lorsque les investisseurs ne négocient pas pendant une longue période ou que les horizons d'investissement sont raccourcis, ce qui entraîne un manque de liquidité.

T_4 : Les prix reflètent un mélange d'échanges à court et à long terme(Les variations de prix à court terme sont plus volatiles que les variations à long terme).

T_5 : Si le cycle économique n'a aucun effet sur la sécurité, alors il n'a pas de direction (si le marché suit la croissance économique à long terme, les risques diminueront avec le temps).

À cet égard, nous pouvons utiliser des fractales pour savoir comment travailler dessus, c'est- à-dire ; Notre travail a pour objectif initial de dé couvrir et comprendre le fonctionnement des fractales, en particulier dans le domaine la finance. Nous consacrons ensuite notre étude à un modèle fractal particulier : les lois stables appelées aussi lois de *Pareto-Lévy*, lois stables de *Pareto*, lois Lévy stable ou lois α-stables(elles sont également applées dans quelques cas distributions fractales). Nous restreignons notre étude des portefeuilles et du risque au cas où le paramètre a est compris entre 1 et 2.

1.2.3 La naissance des fractales

En (1975), le mathématicien *Benoît Mandelbort* a développé la théorie des objets fractaux, de sorte que la théorie affirme que nous ne pouvons pas en mathématiques simplifier la réalité au point de décrire le nuage comme une boule, la montagne par le cône, les croniques financières avec des droites montantes ou descendantes repré sent des«tendances», après que ce mathématicien de sa vie ait étudié les objets irréguliers dans divers domaines tels que l'astronomie (répartition des galaxies dans l'univers) et aussi dans le domaine de la finance, son étude l'amené à dire que les fractales quant à elles gardent leur aspect irrégulier quelle que soit l'échelle à laquelle nous les observons. Lorsque nous augmentons le grossissement, nous découvrons toujours des irrégularités nouvelles.

Les fractales quant à elles gardent leur aspect irrégulier quelle que soit l'échelle à laquelle nous les observons. Lorsque nous augmentons le grossissement, nous découvrons toujours des irrégularités nouvelles.

Pour décrire ces objets irréguliers, *Benoît Mandelbrot* a inventé deux mots :

*l'adjectif fractal qui vient de l'adjectif latin « fractus » qui signifie irrégulier ou brisé .

*le nom féminin fractale.

La mise en place de la théorie fractale fait naître un espoir pour décrire des formes si irrégulière que les modèles continus parfaitement homogènes ne peuvent pas approcher.

1.3 Le modèle de marché idéal avec les lois stables

Le premier modèle de *Benoît Mandelbrot* [18] traite uniquement des discontinuités et fait l'hypothèse que les données sont indépendantes. Nous avons montré la présence non négligeable de grandes fluctuations des prix et l'existence d'une valeur de *Kurtosis* très supérieure à 3, il faut donc travailler avec une loi qui a des queues de distribution lourdes. De plus, la variance ne se stabilise pas. Était donné que quelle que soit la taille de l'échantillon la variance continue à varier considérablement, il est impossible d'estimer cette variance. Comme la variance étudiée ne tend pas vers une valeur- limite, nous disons que la variance est infinie, bien qu'en réalité nous puissions la calculer pour une taille donnée. Pour ces raisons(et d'autres que nous verront au fur et à mesure), *Benoît Mandelbrot* utilise les lois stables.

1.3.1 définition de stabilité au sens $\alpha-$ stable

Les lois Pareto-stables, appelées aussi lois Lévy-stables ou tout simplement lois stables, ont été introduites par *Paul Lévy* en (1924, [17]).

Selon TCL généralisé, si la somme de variables aléatoires $(i.i.d)$ a une fonction de distribution limite quand le nombre de variables sommées tend vers l'infini, alors la distribution limite est un membre de la famille des lois stables [17]. Cette propriété de stabilité par addition a incité de nombreux chercheurs à utiliser les lois stables pour représenter la loi des rendements financiers [30]. Pour se rapprocher du théorème de la limite centrale et afin d'avoir une forme explicite de la fonction caractéristique, nous allons définir une famille de lois dont les propriétés seront intéressantes.

Définition 1.3.1 *(variable aléatoire stable) : Soit une v.a.r Y a une distribution stable si et seulement si pour tout k et tout famille $Y_1, ..., Y_k$ i.i.d de même loi que Y, il existe $a_k > 0$ et b_k ; deux réels, tel que :*

$$Y_1 + \ldots + Y_k \stackrel{d}{=} [4] a_k Y + b_k.$$

Lorsque $b_k = 0$, on parle de distribution est strictement stable.

Remarque 1.3.1 *Il montré dans (*Feller *[11], page170/171), qu'il existe une constante réelle α, $0 \prec \alpha \preceq 2$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = k^{\frac{1}{\alpha}}$.*

Théorème 1.3.1 *Une variable aléatoire réelle Y est la limite en distribution des v.a.r .*

$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n - b_n}{a_n}, \ a_n > 0.$$

Si et seulement si Y stable.

La théorème est demontrée par détaille dans *Shirayev* [29].

Définition 1.3.2 *(*Samorodnistsky *and* Taqqu *[27],* Weron *[36]) Une variable aléaoire Y est dite stable, notée $Y \backsim S_\alpha\left(\beta, \gamma, \delta\right)$, si sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme :*

$$\Phi_Y(t) = \exp \begin{cases} i\delta t - \gamma\left|t\right|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\mathrm{sign}(t))\,\mathrm{In}\left|t\right|\right] & \alpha = 1, \\ i\delta t - \gamma^\alpha \left|t\right|^\alpha \left[1 - i\beta(\mathrm{sign}(t))\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right] & \alpha \neq 1. \end{cases} \qquad (*)$$

tel que,

$$\mathrm{sign}(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \succ 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t \prec 0 \end{cases}$$

[4] $\stackrel{d}{=}$: égale en distribution.

avec les contraintes pour les paramètres $\alpha \in \left]0;2\right[$, $\beta \in \left]-1;1\right[$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\delta \in \mathbb{R}$ et sign la fonction signe.

Remarque 1.3.2 *On notera, $Y \backsim S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$ une variable aléatoire distribuée selon une loi stable de paramètres α, δ, β et γ.*

Définition 1.3.3 *(La fonction caractiristique) On dit que $Y \backsim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0, 0)$ si la fonction caractéristique de Y est définit comme :*

$$\Phi_Y(t) = \exp \begin{cases} i\delta_0 t - \gamma\,|t| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi}(\mathrm{sign}(t))(\ln|t| + \ln\gamma)\right] & \alpha = 1, \\ i\delta_0 t - \gamma^\alpha\,|t|^\alpha \left[1 + i\beta(\mathrm{sign}(t))(\tan\frac{\alpha\pi}{2})((\gamma\,|t|)^{1-\alpha} - 1)\right] & \alpha \neq 1. \end{cases} \tag{**}$$

En fonctions caractéristiques (*) et (**) les parametres α, β, γ sont les mêmes, d'où ; les parametres de position sont reliés comme suivant :

$$\delta = \begin{cases} \delta_0 - \beta\frac{2}{\pi}\gamma\ln\gamma & \alpha = 1, \\ \delta_0 - \beta(\tan\frac{\alpha\pi}{2})\gamma & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

On peut interpréter les 4 paramètres précédents de la manière suivante :

Paramètre α

Le paramètre α est applé l'exposant caractéristique ou l'indice de stabilité qui n'est rien d'autre qu'un coeffcient d'aplatissement *(Kurtosis)*, aussi bien pour le mode que pour les queues $(0 < \alpha < 2)$. $\alpha = 2$ correspond a un loi stable particulière : La trés célèbre loi de Gauss ou loi normale.

Remarquant bien que, plus le paramètre est petit, plus la courbe de la densité est pointue et a des queues de distribution épaisses.

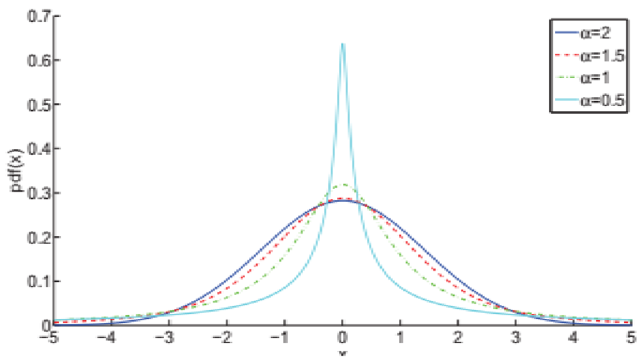

FIG. 1.2 – Influence du paramètre α sur la densité de probabilité pour $\beta = 0, \gamma = 1$ et $\delta = 0$.

Paramètre β

Le paramètre β : est donne de l'asymétrie ou mesurant le degré d'asymétrie de la distribution $(-1 \leq \beta \leq 1)$. Si β est égale à -1(resp.$+1$) la distribution et totalement asymétrique à gauche (resp.à droite). Lorsque β vaut zéro alors la distribution est asymétrique.

Lorsque β est positif(resp.négatif) le mode est à gauche (resp.à droite) de la moyenne.

Lorsque β est positif, le queue de distribution est plus épaisse à droite(resp.à gauche).

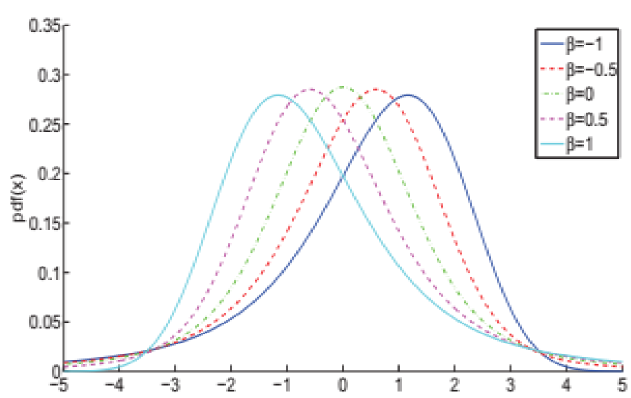

FIG. 1.3 – Influence du paramètre β sur la densité de probabilité pour $\alpha = 1.5, \gamma = 1$ et $\delta = 0$

Paramètre δ

Le paramètre de location ou bien de translation δ, traduisant la position de la moyenne lorsque $\alpha > 1$, $\delta \in \mathbb{R}$. Si, $\beta = 0$ alors δ est la médiane. Dans les autres cas le paramètre δ ne peut pas être interprété.

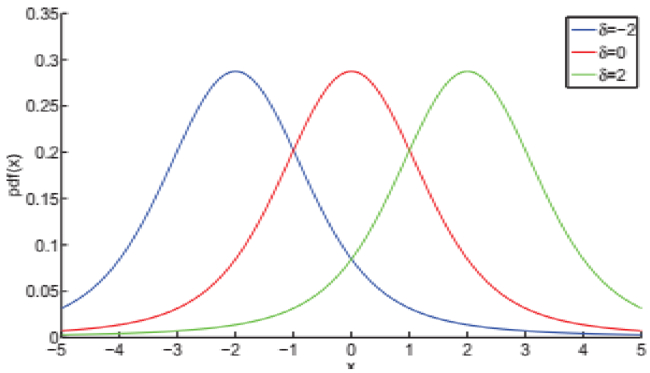

FIG. 1.4 – Influence du paramètre δ sur la densité de probabilité pour $\alpha = 1.5, \beta = 0$ et $\delta = 0$.

Paramétre γ

γ est le paramètre d'échelle auquel on fait jouer le role d'une mesure de dispersion quelque fois, $\gamma \geqslant 0$, plus est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre γ permet de cintrer plus ou moins le corps de la distribution.

Théorème 1.3.2 *(Théorème de limite centrale généralisé) : Soit* $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$*une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Il existe une suite* $a_n > 0$ *est une suite* $b_n \in \mathbb{R}$ *tels que la quantité :*

$$\frac{(Y_1 + \ldots + Y_n)}{a_n} + b_n. \tag{1.1}$$

converge en loi vers une loi stable.

Remarque 1.3.3 *La propriété de stabilité des lois stables entraîne qu'elles sont les*

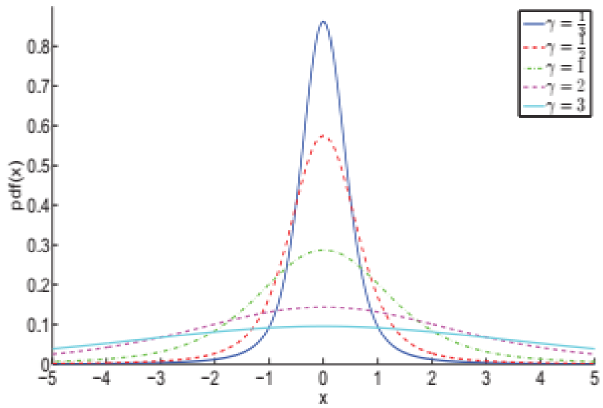

FIG. 1.5 – Influence du paramètre γ sur la densité de probabilité pour $\alpha = 1.5, \beta = 0$ et $\gamma = 1$.

seules limites possibles à une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cette remarque définit le théorème de la limite centrale généralisé 1.1. Il a été formalisé dans [3].

1.3.2 Cas symétrique

Nous pour suivons à présent la description de la loi stable dans le cas particulier où les paramètres β et δ sont nuls, on appelle alors cette loi loi symétrique par rapport à β et δ et nous noterons alors $Y \backsim S\alpha S$ pour indiquer que Y suit une loi stable symétrique $S_\alpha(0,0,\gamma)$. Nous obtenons alors une expression simple de la fonction caractéristique de paramètre γ d'après *Samorodnitsky* [27]

$$\Phi(t) = \exp\left(-\gamma^\alpha |t|^\alpha\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas où on a $\gamma = 1$ alors la variable aléatoire est dite $S\alpha S$ standard.

Pour plus de détails sur les lois stables, voir [30], [20].

Chapitre 2

La mesure de risque à deux déviations

Le risque ou le danger joue un rôle dans tous les domaines et est un facteur qui s'en soucie dans toutes les interprise. Par exemple, pour éviter des risques importants des diverses natures lequel exposé à cela les sociétés financieres, les banques et les compagnies d'assurance. Dans les marchés financiers la valeur des actifs transigés varie dans le temps d'une manière imprévisible, c'est-ce qu'on appelle flux d'investissement d'un actif. L'incertitude reliée à cette variation dans la valeur des actifs au futur est modélisée par une variable aléatoire X.

Ce chapitre est consacré à l'étude du risque de marché d'un portefeuille dont les rendements suivent une loi α-stable. La variance étant infinie pour une loi stable de paramètre a inférieur à 2, nous ne pouvons plus définir le risque avec la variance. Les mathématiciens proposent d'utiliser le paramètre d'échelle pour estimer le risque sur un marché stable. Nous allons vérifier si cette mesure de risque est cohérente et nous allons apprécier la qualité des estimateurs proposés.

2.1 Notations et définitions

2.1.1 Définition de risque"danger"

Il y a plusieurs définitions de risque selon le domaine et l'application, nous représenterons l'essentiel dans ce qui suit.

Dans le dictionnaire de *Larousse*, définit le risque comme se dit de quelqu'un, d'un groupe se trouve prédisposé à certains inconvénient (accident, maladie, délinquance,ect.), se dit de quelque chose dont l'utilisation, la continaution ect,expose a un danger, a une perte, a un échec : capitaux a risque, grossesse a risque, et ainsi de suite, tout les autre dictionnaire ont des définitions qui ne sont pas suffisamment précises pour évaleur le risque. La littérature scientifique et professionnelle propose plusieurs définitions différentes [23], par exemple :

Définition 2.1.1 *(Risque en littérature) : Le risque est la prise en compte par une personne de la possibilité de réalisation d'un évènement contraire à ses attentes ou à son intérêt, il est alors la probabilité objective que les résultats réels de l'événement différent de manière significative du revenu prévu c'est une perte potentielle, identifiée et quantifiable. Par abus de langage, le risque peut aussi désigner à la fois l'évènement considéré et la probabilité de sa survenue. Il est alors la réunion d'ensembles de triplets comprenant : Un scénario (c'est-à-dire un événement), une probabilité et une conséquence de cet événement.*

Définition 2.1.2 *(Risque en mathématiques) : Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable telle que Ω représente l'esemble de tous les scénarios possibles (espace de résultats) et $\mathcal{F}$ est une tribu. Un risque est une variabe aléatoire (v.a) définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ désigne par X telle que :*

$X \in \chi$. ou χ est l'ensemble des (v.a) de perte réelles définies sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.

pour un scénario $\omega \in \Omega$, la position $X(\omega)$ s'interpréte comme une perte (si $X(\omega) < 0$, alors $[-X(\omega)]$ s'interpréte comme un gain). Par exemple dans les opérations bancaires on utilise des (v.a) de gain positives alors les résultats de la perte X seraient alors des (v.a) négatives, mais dans le domaine de l'assurance, il est habituellement approprié (cependant non essentiel) de supposer que la perte X est positif.

2.1.2 Types de risque

En générale le risque est classé par trois(03) catégories éssentielle :

Risque de marché ou volatilité : C'est le risque de perte qui peut résulter des fluctuations des prix des instruments financiers qui composent un portefeuille. Le risque peut porter sur le cours des actions, les taux d'intérêt, les taux de change, les cours de matières premières, etc. Par extension, c'est le risque des activités économiques directement ou indirectement liées à un tel marché (par exemple un exportateur est soumis aux taux de change, un constructeur automobile au prix de l'acier...). Il est dû à l'évolution de l'ensemble de l'économie, de la fiscalité, des taux d'intérêt, de l'inflation, et aussi du sentiment des investisseurs vis-à-vis des évolutions futures, Il affecte plus ou moins tous les titres financiers. Dans la théorie moderne du portefeuille, ce risque est généralement mesuré par la volatilité du marché, une donnée statistique.

Risque de crédit : Il s'agit du risque de non-remboursement d'une dette par un emprunteur (cela vaut aussi pour les titres de dettes telles que les obligations souveraines ou bonds du trésor public). Autrement dit ; C'est le risque pour un créancier de perdre définitivement sa créance dans la mesure où l'emprunteur ne peut pas, même en liquidant l'ensemble de ses avoirs, rembourser la totalité de ses engagements. Les traders parlent de « risque de contrepartie ». Le risque de contrepartie est une notion semblable.

Risque de liquidité : C'est le risque sur la facilité à acheter ou à revendre un actif. Si un marché n'est pas liquide, vous risquez de ne pas trouver d'acheteur quand vous le voulez ou de ne pas trouver de vendeur quand vous en avez absolument besoin. C'est un risque lié à la nature du sous-jacent (de la marchandise) mais aussi à la crédibilité de l'acheteur-vendeur. En effet, il est facile d'acheter ou de vendre un produit courant à une contrepartie de confiance, mais plus difficile avec un produit très spécialisé. C'est la liquidité de ce produit. De plus, si l'acheteur/vendeur n'est pas crédible, le risque de contrepartie pour les éventuels fournisseurs/clients les dissuade de traiter.

2.1.3 Fonction de perte et risque

En statistique inférentielle, on souhaite prendre une décision en se basant sur un critère inconnue θ. Mais que l'on peut estimer [15].

Pour jouger de la pertinence de la prise de décision, on se donne classiquement une fonction coût,

$$\begin{aligned} L: \quad \Theta \times D &\to \mathbb{R} \\ (\theta, d) &\to L(\theta, d) \end{aligned}$$

Elle est définie selon le problème étudie et constitue l'armiture du problème statistique.

Définition 2.1.3 *(Fonction de risque) : Pour $(\theta, d) \in (\Theta, D)$, la fonction de risque est définie par :*

$$R(\theta, d) = \mathbb{E}(L(\theta, d)) = \int L(\theta, d) f_\theta(x) dx.$$

Où le règle de décision est $d(x)$ pour chaque résultat d'une expérience aléatoire .

2.2 Mesure de risque

On donne la définition d'une mesure de risque et les propriétés associées, puis on présentera les principales mesures de risque.

2.2.1 Définitions

Définitions :

Une mesure de risque est un moyen défini pour permettre d'évaluer de degré d'une telle exposition pour objectif de quantifier ces pertes selon les types de risque. Il est un problème actuariel important basé sur de divers systèmes d'axiomes.

Pour chaque type d'activité, elle peut déterminé les mesures du risque les plus convenables, alors il existe de nombreuses façons de mesurer le risque par exemple : la variance, Value-at-Risk (VaR) et Conditional Value-at-Risk ($CVaR$) qui sont basées sur l'éspérance, le quantile et sur l'éspérance conditionelle respectivement [2].

Définition 2.2.1 *(Une mesure de risque) : Est une fonction définie sur l'espace des variable χ à valeur dans l'ensemble des nombre réels, et la note par R.*

$$\begin{aligned} R: \quad \chi \quad &\rightarrow \mathbb{R} \\ X \quad &\rightarrow R(X) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Remarque 2.2.1 *X désigner un montant de perte, et $R(X)$ est capital à déternir pour faire face aux perte X.*

$\Longrightarrow R(X)$ est grand indiqueront que X est "dangereux".

Définition 2.2.2 *(Chargement des sécurité) : Une mesure de risque contient un chargement de sécurité si pour tout risque X on a, $R(X) \geq \mathbb{E}(X)$.*

2.2.2 Mesures du risque de distorsion

La mesure du risque est une méthode d'évaluation du degré de risque visant à identifier les risques associés à la répartition des pertes selon leurs types. Dans la littérature beaucoup des mesures de risque appliquées en finance et en assurances. La première utilisation de ces dernières a été le développment des principes de calcul de prime. Ils ont été appliqué à la distribution de perte pour déterminer une prime adéquate pour charger le risque (i.e. avoir un chargement de sécurité positif) et définit comme 2.1, en détails dans [26].

Quelques mesure de risque classiques [30]

Définition 2.2.3 *(La moyenne) : La mesure de risque définit par :*

$$R(X) = (1+\alpha)\mathbb{E}(X), \quad \text{pour quelques } \alpha \geq 0,$$

ou α et $\mathbb{E}(X)$ sont chargements de sécurité.

Définition 2.2.4 *(La déviation standard)* **:** *Valeur de la mesure de la volatilité des marchés. Cet mesure décrit la gamme de fluctuations des prix qui a été largement utilisé dans l'économie financière est la déviation standard du rendement d'un portefeuille. D'où elle été considéré par* Markowitz *[19]. L'écart type est une "standard" mesure de déviation par rapport à la moyenne si la variable sous-jacente a une distribution normale. Donc la mesure de risque de la déviation standard est définie comme suivant :*

$$R(X) = \mathbb{E}(X) + \alpha\sqrt{V(X)}, \quad \text{pour quelques } \alpha \geq 0.$$

Remarque 2.2.2 $V(X)$ *désigne la variance de la variable aléatoire de perte.*

Définition 2.2.5 *(La variance) : Nous pouvons généralement définit la variance comme une mesure de risque par :*

$$R(X) = \mathbb{E}(X) + \alpha V(X), \quad \text{pour quelques } \alpha \geq 0.$$

La variance est facile à calculer, sauf que pas une bonne mesure du risque pour évenements de grandes pertes avec des distributions asymétriques. C'est à dire la variance et la déviation standard ne fournissent pas beaucoup d'informations sur le risque extrême, i.e. ne prennent pas suffisamment en compte les pertes réelles, le cas des queues épaisses. En effet, une mesure de risque actuellement utilisé est la valeur en risque (Value-at-Risk).

Définition 2.2.6 *(Valeur en Risque) : L'une de plus populaires mesures de risque est la value-at-Risk (VaR), appelée également "Valeur a risque".*

►On appelle Value-at-Risk de niveau $\alpha \in (0,1)$ le quantile de niveau[1] α,

$$R(X) = VaR\,[X] = x_\alpha \quad \text{où} \quad P(X \leq x_\alpha) = \alpha,$$

où encore

$$R(X) = Q_\alpha = \min\{Q : \Pr[X \leq Q] \geq \alpha\},$$

i.e, la VaR est le seuil minimum exédé par X avec la probabilité tout au plus $1 - \alpha$.

Définition 2.2.7 *(Mesures de Distorsion du Risque) : Sont définies comme l'espérance distordue de toute variable aléatoire X non-négative de perte en utilisant la fonction de survie (fonction de distribution décumulative),*

[1] Quantile d'ordre α :soit X est une v.a et F sa fonction de répertition, on appelle quantile (fractile) de niveau α.le nombre x définie par :$x_\alpha = Q\alpha = \{x \in \mathbb{R}/F(x) \geq \alpha\}$ avec $\alpha \in [0,1]$,si F est continue et strictement croissante alors $x_\alpha$est l'unique point tq : $F(x_\alpha) = \alpha \Longleftrightarrow x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ inverse).

$$S(X) = 1 - F(X) = P(X > x) = \overline{F}(X).$$

Alors, une mesure de distorsion du risque est celle qui peut être exprimée sous la forme :

$$R_g(X) = \int_0^{\infty} g(S(x))dx, \tag{2.2}$$

où La fonction $g(S(x))$ est une fonction de servie ajustée du risque.

Définition 2.2.8 *La fonction* $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ *est une fonction de distorsion avec :*

1. $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

2. $g(\cdot)$ est croissante et continue.

2.3 Propriétés

Les propriétés des mesures du risque de distorsion correspondent aux suivants résultats standard [6] :

► Invaraince par translation *:* $\forall k \in \mathbb{R}, R_g(X+k) = R_g(X) + k.$

► Homogénéité positive *:* $R_g(\lambda X) = \lambda R_g(X)$, pour tout $\lambda \geq 0$.

► Si $X \geq 0$, alors $R_g(X)$ monotonie.

► Si une variable aléatoire X_n a un nombre fini des valeurs$\left(i.e\ X_n \overset{\omega}{\rightarrow} X\right)$ et $R_g(X)$ existe, alors $R_g(X_n) \rightarrow R_g(X)$. Cette propriéte implique qu'il suffit de prouver l'état des variables aléatoires discrètes, puis reporter le résultat au cas général continu.

► $R(-X) = -R_{\widetilde{g}}(X)$, où $\widetilde{g}(x) = 1 - g(1-x)$.

► Comonotone additivité *:* Si X et Y sont des risques comonotones, prenant des valeurs positives et négatives, alors :

$$R_g(X+Y)=R_g(X)+R_g(Y).$$

▶ Dans le cas généralisé, les mesures de distorsion de risque ne sont pas additives.

$$R_g(X+Y)\neq R_g(X)+R_g(Y).$$

▶ Les mesures de distorsion du risque sont sous-additive si et seulement si la fonction de distorsion $g(x)$ est concave.

$$R_g(X+Y)\leq R_g(X)+R_g(Y). \tag{2.3}$$

par conséquent, les mesures de distorsion de risque concave sont des mesures de risque cohérente.

▶ Pour une fonction de distorsion non-décroissante g, la mesure de risque associée $R_g(X)$ est consistance, avec la domination stochastique d'ordre 1.

$$X\leq_1 Y\Rightarrow R(X)\leq R(Y).$$

▶ Pour une fonction de distorsion concave non-décroissant g, la mesure de risque associée $R_g(X)$ est consistante avec la domination stochastique d'ordre 2.

$$X\leq_2 Y\Rightarrow R_g(X)\leq R_g(Y). \tag{2.4}$$

En conséquence, toutes mesures de distorsion de risque cohérente est consistante avec le respect de la domination stochastique du deuxième ordre.

▶ Pour une fonction de distorsion strictement concave g, la mesure de risque associée R_g est strictement consistante à la domination stochastique d'ordre 2.

$$X <_2 Y \Rightarrow R_g(X) < R_g(Y). \tag{2.5}$$

► Cohérence des mesures de distorsion de risque est cohérente si et seulement si la fonction de distortion g est concave.

Pour les propriétés 2.3 et 2.5, 2.4 la preuve est donnée dans [37].

Artzner et *al* ([1], 1999) analysé les mesures de risque et énoncé un ensemble des axiomes qui devraient être souhaitables pour toute mesure de risque. Toute mesure de risque qui satisfait ces axiomes est dite cohérente.

Mesure de risque cohérente et convexe.

Le concept de mesure de risque cohérente a été abordé pour la première fois par *Artzner* et *al* [1].

Définition 2.3.1 *une mesure du risque $R(X)$ est dit cohérente, si elle vérifie les propriétés suivantes :*

Inverse par translation : Cet axiome signifie que l'addition(ou la soustraction) d'une montant initial sûr a un portefeuille initiale r et son inevstissement X dans l'actif de référence décroît (accroit). On constate que l'addition d'un montant initial égal au $R(X)$ réduit le risque à 0 soit ;

$$R(X + rR(X)) = R(X) - R(X) = 0.$$

r est le prix a la date T de la'actif de référence sans risque.

Sous-additivité : Le raisonnement derière de cet axiome est d'intégrer l'idée de diversification la mesure de risque d'une somme de deux portefeuilles est inférieure à la somme des mesures de risque de ces deux portefeuilles. Ce résultat est dû a la corrélation qui peut exister entre ces derniers. Cet axiome est le plus connu parce que le VaR ne satisfait pas cette condition dans certaines situations.

Homogénétie positive : Cet axiome signifie que la multiplication de chaque risque d'une portefeuille par un scalaire augmente la mesure de risque par le même scalaire. Cette propriété généralement justifiée par des considérations de liquidité un investissement(λX) pourrait etre moins liquide, et donc plus risqué que le totale (λX)de λ plus petits investissement X. Elle est donc un cas limite de la propriété de sous-additivité qui présente l'absence de diversification.

La monotonie : L'axiome de monotonie est intuitif et exprime une exigence minimale, pour tous X et Y portefeuilles des risque avec $X \leq Y$:

$$R(X) \leq R(Y).$$

cette propriété nous indique que nous associons un plus gros risque a un perte plus élevée lorsque la prtefieulle X est toujours plus grande que celle de la portefeuille Y. alors le risque de portefeuille X est également plus grand.

Remarque 2.3.1 *(La value-At-Risque) : Bien que trés lagement utilisée en finance, n'est pas une mesure de risque cohérente car elle n'est pas sous-additive de même pour la variance.*

Définition 2.3.2 *(Mesure de risque convexe) : Une mesure de risque est dite convexe*[2] *si elle est monotone, invariante par translation et convexe.*

Corollaire 2.3.1 *(Cohérence) : Une mesure de risque de distorsion est cohérente si et seulememnt si la fontion de distorsion g est concave*[3].

[2] convexe : une fonction f est convexe sur un intervalle I si, pour tous$x$ et y de$I$,pour tout t$\in [0,1]$; $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$.

[3] concave : une fonction f est concave si $-f$ est convexe, c'est -à-dire si pour tous x et y de I et t$\in [0,1]$; $f\,(tx+(1-t)\,y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$.

Mesure de risque à deux déviations

Définition 2.3.3 *(Mesure de risque Dual-power) : Ou aussi Risk* Two-sided Deviation *proposé par* Wang *[32] a défini la mesure de risque à deux déviations par :*

$$\Delta_r(x) := \int_0^1 J_r(s)Q(s)ds, \quad 0 < r < 1,$$

avec

$$J_r(s) := (r/2)\frac{s^{1-r} - (1-s)^{1-r}}{s^{1-r}(1-s)^{1-r}}, \quad 0 < s < 1.$$

2.4 Estimation Empirique des mesures de risque

Dans [22], Les *L-Fonctinnelles* résument de nombreux paramètres statistiques et mesures actuarielles du risque. Leurs estimateurs d'échantillon sont des combinaisons linéaires de statistiques d'ordre*(L-statistiques)*. Il existe une classe de distributions à queue lourde pour laquelle la normalité asymptotique de ces estimateurs ne peut être obtenue par des résultats classiques. Dans cet article, nous proposons, au moyen de la théorie des valeurs extrêmes, des estimateurs alternatifs pour les fonctionnels et établissons leur normalité asymptotique. Nos résultats peuvent être appliqués pour estimer les moments réduits et les mesures du risque financier pour les distributions à queue lourde.

2.4.1 L-Fonctionelles

Définition 2.4.1 *Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r) avec une fonction de distribution continue (df) ,* L-Fonctionnelles *correspondante sont définies par :*

$$L(J) := \int_0^1 J(s)Q(s)ds, \tag{2.6}$$

où

$$Q(s) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\} \quad ,0 < s \leq 1.$$

avec la fonction de quantile associeé à F, et J est une fonction mesurable définie sur $[0, 1]$, (voir [28]).

Elamir et *Seheult* [7] ont défini les *TL-moments* pour répondre à certaines questions concernant les distributions à queue lourde dont les moyens n'existent pas donc la méthode du *L-moments* ne peut pas être appliquée. Dans le cas où le paramètre de coupe (tronqué) est égale à 1, les quatre premiers théoriques *TL-moments* sont :

$$m_i := \int_0^1 J_i(s)Q(s)ds, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

où

$$J_i(s) := s(1-s)\phi_i(s), \quad 0 < s < 1, \tag{2.7}$$

avec ϕ_i polyňome de dégré $(i-1)$.

L-Fonctionnelles ont aussi de nombreuses applications pour des mesures de risque actuarielles *Wang* [31], [32], [33]. Comme exemple, si $X \geq 0$ représente une perte d'assurance, la prime de risque distordue est définie par :

$$\Pi(X) := \int_0^\infty g(1-F(x))dx,$$

où g est une fonction concave non-décroissante avec $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, et changement de variables et intégration par parties. $\Pi(X)$ peut etre réécrite par :

$$\Pi(X) = \int_0^1 \acute{g}(1-s)Q(s)ds,$$

où $\acute{g}$ désigne la dérivée de lebsgue de g. Pour des montants réclamés à queues lourdes, l'estimation empirique avec des intervalles de confiance pour $\Pi(X)$ a été discuté dans [20] et [21], si $X \in \mathbb{R}$ représentes les données financières tels que les rendements logarithmique d'actifs, les mesures de distorsion de risque sont définis par :

$$H(X) := \int_{-\infty}^0 (g(1-F(x)) - 1)dx + \int_0^\infty g(1-F(x))dx,$$

De même, avec une intégration par parties, il est démontré que :

$$H(X) = \int_0^1 \acute{g}(1-s)Q(s)ds.$$

Wang [32] et *Jones* et *Zitikis* [14] ont défini la mesure de risque de la queue à deux déviations par :

$$\Delta_r(X) := \int_0^1 J_r(s)Q(s)ds, \quad 0 < s < 1,$$

avec

$$J_r(s) := (r/2)\frac{s^{1-r} - (1-s)^{1-r}}{s^{1-r}(1-s)^{1-r}}, \quad 0 < s < 1. \tag{2.8}$$

$\Pi(X)$, $H(X)$ et $\Delta_r(X)$ sont des *L-Fonctionnelles* avec des fonctions de poids spécifiques [30].

2.4.2 Estimation emprique des L-Fonctionelles

Dans la suite $\xrightarrow{P}$ et $\xrightarrow{D}$ sont respectivement la convergence en probabilité et la convergence en distribution et $N(0, \sigma^2)$ désigne la distribution normale de moyenne 0 et variance σ^2. Les estimateurs naturels de la quantité $L(J)$ sont des conbinaisons linéaires de statistiques d'ordre appelé *L-statistiques*. En effe, soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille $n \geq 1$ d'une v.a X avec *df* F , alors l'estimateur de $L(J)$ est :

$$\hat{L}_n(J) := \int_0^1 J(s) Q_n(s) ds,$$

où

$$Q(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq s\}, \quad 0 < s \leq 1,$$

est la fonction de quantile empirique qui correspod à la fonction de distribution empirique ;

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum \mathbf{1} \{X \leq x\}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R},$$

concernant à l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ avec $\mathbf{1}_{(\cdot)}$ désignant la fonction indicatrice. Il est clair que $\hat{L}_n(J)$ écrire comme

$$\hat{L}_n(J) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} X_{i,n},$$

où

$$a_{i,n} := \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} J(s) ds, \quad i = 1, \ldots, n$$

et $X_{1,n} \leq \ldots \leq X_{n,n}$ désigne la statistiques d'ordre basée sur l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$. Le premier théorème général sur la normalité asympotique de $\hat{L}_n(J)$ est établie par [5]. Aprés, un grand nombre d'auteurs ont étudié le comportement asympotique de

L-Statistiques. En effet , nous avons

$$\sqrt{n}\left(\hat{L}_n(J) - L(J)\right) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_n^2(J)), \quad \text{quand } n \to \infty, \tag{2.9}$$

à condition que :

$$\sigma_n^2(J) := \int_0^1 \int_0^1 (\min(s,t) - st) J(s) J(t) dQ_n(s) dQ_n(t) < \infty. \tag{2.10}$$

En d'autres termes, pour une fonction donnée J, cet condition exclut la classe des distributions F dont $\sigma_n^2(J)$ est infinie. Par exemple, si l'on prend $J = 1$, $L(J)$ est égale à la valeur de l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et donc l'estimateur naturelle de $\hat{L}_n(J)$ est la moyenne de l'échantillon $\overline{X}$. Dans ce cas, le résultat 2.9 correspond à la théorème central limite classique qui n'est valable que lorsque la variance de F est finie. Comment construire alors des intervalles de confiance pour la moyenne d'une fonction de distributionquand sa variance est infinie ? Cette situation survient lorsque df F appartient au domaine d'attraction de la loi $\alpha-$stable (à queue lourde) avec un indice de stabilité $\alpha \in\,]1, 2[$. La remarque 2.4.1 ci-dessous montre que cette situation se pose également pour les *L-moments* tronqués m_i lorsque $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$ et pour la mesure de queue à deux déviations $\Delta_r(X)$ lorsque $\frac{1}{r+1/2} < \alpha < \frac{1}{r}$ pout tout $0 < r < 1$. Pour résoudre ce problème dans un cadre plus général, *Necir* et *Meraghni* [22] ont proposé, via la théorie des valeurs extremes, des estimateurs asymptotiquement normaux des *L-fonctionnelles* pour les distributions à queue lourde pour lesquelles $\sigma^2(J) = \infty$.

2.4.3 Estimation des L-Fonctionnelles quand $F \in D(\alpha)$

Estimation des Quentiles Extrêmes

Les quantiles extrêmes à droite et à gauche de niveau t suffisamment petit de la fonction df F sont respectivement deux réels x_R et x_L définis par $1 - F(x_R) = t$ et $F(x_L) = t$, c'est $x_R = Q(1-t)$ et $x_L = Q(t)$. L'estimation des quantiles extrême pour les distributions à queue lourde a une grande importance. Par l'approche des quantiles, plusieurs estimateurs ont été conçus, citons les plus connues comme, l'estimateur basée sur *Hill.* Après, nous introduisons l'un de ses estimateurs des quantiles extrême le plus célèbre. Soit $\ell = \ell_n$ et $m = m_n$ deux séquences de nombres entiers satisfaisant :

$$1 < \ell < n, \ 1 < m < n, \ \ell \to \infty, \ \frac{\ell}{n} \to 0 \ et \ \frac{m}{n} \to 0 \ , \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.11}$$

Les estimateurs des quantiles extrêmes x_R et x_L sont définis, respectivement, par :

$$\widehat{x}_L = Q_L^W(t) := -(nt/\ell)^{-1/\widehat{\alpha}_L^H} X_{\ell,n},$$

et

$$\widehat{x}_R = Q_R^W(1-t) := (nt/m)^{-1/\widehat{\alpha}_R^H} X_{n-m,n}, \text{ quand } t \downarrow 0,$$

où

$$\widehat{\alpha}_L^H = \widehat{\alpha}_L^H(\ell) := \left(\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \log^+(-X_{i-1,n}) - \log^+(-X_{\ell,n}) \right)^{-1}, \tag{2.12}$$

et

$$\widehat{\alpha}_R^H = \widehat{\alpha}_R^H(m) := \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \log^+(-X_{n-i+1,n}) - \log^+(-X_{n-m,n}) \right)^{-1}, \tag{2.13}$$

où $\hat{\alpha}_L^H$ et $\hat{\alpha}_R^H$ sont deux formes de l'estimateur de *Hill* [13] de l'indice de stabilité α, basés sur la queue à gauche et la queue à droite respectivement de la distribution, et qui peut être estimé, utilisant les statistiques d'order $Z_{1,n} \leq \ldots \leq Z_{n,n}$ associée à l'échantillon$(Z_1, \ldots, Z_n)$ de Z, comme suivant :

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}(k) := \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log^+ \left(Z_{n-i+1,n} \right), \log^+ \left(Z_{n-k,n} \right) \right)^{-1}. \tag{2.14}$$

où $k = k_n$ est une séquence intermédiaire a les mêmes conditions que m et ℓ.

Quelques hypothèses de régularité pour J

Pour les application, nous mentionnons quelques hypothèses importantes de régularité suivantes sur la fonction J :

H1 J est différentiable sur $(0, 1)$,

H2 $\lambda := \lim_{s \downarrow 0} \dfrac{J(1-s)}{J(s)} < \infty$.

H3 Les deux fonctions $J(1-s)$ et $J(s)$ sont à variation régulière en 0 avec un indice commun $\beta \in \mathbb{R}$.

H4 Il existe une fonction $a(\cdot)$ ne charge pas de signe près de zéro de telle sorte que ;

$$\lim_{x \to 0} (J(xt)/J(t) - x^\beta)/a(t) = x^\beta \frac{x^\omega - 1}{\omega}, \quad \text{pour tout } x > 0,$$

où $\omega \leq 0$ est le paramètre de seconde order.

Remarque 2.4.1 *Les* L-Fonctionnelles $L(J)$ *existent pour tout* $0 < \alpha < 2$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *de telle sorte que* $1/\alpha - \beta < 1$*. Cependant, le lemme 4 (dans* Necir *et* al *[22]). Montre que, pour* $1/\alpha - \beta > 1/2$ *nous avons* $\sigma^2(J) = \infty$*. Ensuite, rappelons 2.7, lorsque* $1/2 < \alpha < 2/3$ *les* L-moments *existent cependant* $\sigma^2(J_i) = \infty$*,* $i = 1, \ldots, 4$*. De même, rappelons 2.8, où* $1/r + \frac{1}{2} < \alpha < 1/r$ *la mesure de queue à deux déviations*

$\Delta_r(X)$ *existe quand* $\sigma^2(J_r) = \infty$.

Estimateur $\hat{\Delta}_{r,n}$ de la mesure TSD

Définition *Wang* [32] a proposé la queue à deux déviations qu'elle semble d'être une mesure appropriée lorsqu'il s'agit des données financières (telles que les rendements logarithmiques), dénotée par Δ_r pour $(0 < r < 1)$ et définie comme la moyenne de la queue à déviation à droite et la queue à déviation à gauche telque;

$$D_r^R[X] := \int_{-\infty}^{\infty} \left([1 - F(x)]^r - [1 - F(x)]\right) dx,$$

et

$$D_r^L[X] := D_r^R[-X] = \int_{-\infty}^{\infty} \left([F(x)]^r - F(x)\right) dx,$$

donc

$$\Delta_r = \Delta_r[X] := \frac{1}{2}(D_r^L[X] + D_r^R[X]), \quad 0 < r < 1 \ .$$

Par un changement de variables et une intégration par parties donnent l'expression suivante pour Δ_r;

$$\Delta_r = \int_0^1 J_r(s)Q(s)ds, \quad 0 < r < 1, \tag{2.15}$$

où

$$J_r(s) := \frac{r}{2}\left((1-s)^{r-1} - s^{r-1}\right), \quad 0 < s < 1,$$

est une fonction de poids spécifique et $Q(s) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}, \quad 0 < s < 1$, est la fonction quantile concernant F, et pour $t \downarrow 0$, le quantile $Q(1-t)$ est appelé quantile extrême.

La représentation 2.15 indique que la mesure de TSD est sous une forme *L-fonctionnelle*.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une echontillon de taille $n \geq 1$, établi à partir d'un v.a $X \sim S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$ et soit $X_{1,n} \leq \ldots \leq X_{n,n}$ les statistiques d'ordre correspondantes. L'estimateur non-paramètrique de Δ_r, noté par $\Delta_{n,r}$, est obtenue en remplaçant $Q(s)$ dans 2.15 par son estimateur empirique ;

$$Q_n(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq s\}, \quad 0 < s \leq 1,$$

correspondant à la fonction de distribution empirique $F(x) := n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(X_i \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ avec $\mathbf{1}_{(\cdot)}$ désignant la fonction indicatrice, c'est

$$\Delta_{n,r} := \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}^{(r)} X_{i,n},$$

où, pour $i = 1, \ldots, n$,

$$a_{i,n}^{(r)} := \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^r - \left(1 - \frac{i}{n}\right)^r + \left(\frac{i-1}{n}\right)^r - \left(\frac{i}{n}\right)^r\right].$$

Soit $b_{n,r}$ et $e_{n,r}$ représentent, respectivement le biais et l'erreur moyenne quadratique $(RMSE)$ de $\Delta_{n,r}$. C'est ;

$$b_{n,r} := \mathbb{E}\left[\Delta_{n,r} - \Delta_r\right] \quad \text{et} \quad e_{n,r} := \sqrt{\mathbb{E}\left[\Delta_{n,r} - \Delta_r\right]^2},$$

Le lemme et sa preuve dans [30] , nous avons :

$$b_{n,r} = 0 \quad \text{et} \quad e_{n,r} = \frac{\delta_r}{\sqrt{n}}, \quad \text{pour } 0 < r < 1, \tag{2.16}$$

où

$$\delta_r^2 := \int_0^1 \int_0^1 (\min(s,t) - st) J_r(s) J_r(t) dQ(s) dQ(t). \tag{2.17}$$

Cela implique que, pour tout $0 < r < 1, \Delta_{n,r}$ est un estimateur sans biais de Δ_r, avec une erreur quadratique moyenne asymptotiquement négligeable (ce qui est la déviation standard dans ce cas), de taux de convergence $n^{\frac{-1}{2}}$, à condition que $\delta_r < \infty$. Mais, c'est une condition très restrictive dans le contexte des distributions de Lévy-stables. En effet, dans [30], nous avons montrons que $\delta_r = \infty$ pour tout $1 < \alpha < 2$ et $0 < r < 1$. Il est claire que la $RMSE$ $e_{n,r}$ est infinie. Par conséquence, nous devons chercher une autre approche pour estimer Δ_r et d'avoir traiter le cas.

Plusieurs autres auteurs discuté l'estimation empirique de *L-fonctionnelles* dans le cas restrictive des variances finies. Exploitant la théorie des valeurs extrêmes, *Necir* et *Meraghni* [22] ont proposé une autre méthode d'estimation qui prolonge les résultats existants pour le cas plus important où les variances sont infinies, ce qui est plus pertinent pour des risques dangereux dans les domaines de la finance et d'assurance. Ils ont proposé des estimateurs qui sont asymptotiquement normaux quelle que soit la forme des queues de distribution. Ensuite, nous présentons les éléments qui sont nécessaires à la définition de l'estimateur de la mesure TSD sur la base de la théorie des valeurs extrêmes [22], après avoir constaté que la normalité asymptotique de $\Delta_{n,r}$ n'est pas garanti pour les distributions avec des variances infinies, *Necir* et *Meraghni* [22] ont utilisé la théorie des valeurs extremes pour introduire un estimateur asymptotiquement normal pour Δ_r lorsque F appartient au domaine d'attraction de la distribution de Lévy stable. L'estimateur semi paramétrique proposé $\tilde{\Delta}^*_{n,r}$ est construit comme suivant :

$$\tilde{\Delta}^*_{n,r} = \int_0^{\ell/n} J_r(s) Q_L^W(s)ds + \int_{\ell/n}^{\frac{1-m}{n}} J_r(s) Q_n(s)ds + \int_{\frac{1-m}{n}}^{1} J_r(s) Q_R^W(s)ds, \qquad (2.18)$$

où

$$Q_L^W(t) := -(nt/\ell)^{-1/\widehat{\alpha}_L^H} X_{\ell,n} \quad \text{et} \quad Q_R^W(1-t) := (nt/m)^{-1/\widehat{\alpha}_R^H} X_{n-m/n}, \quad \text{comme } t \downarrow 0,$$

sont les estimateurs de *Weissman* [34] des quantiles extrêmes à gauche et à droite respectivement. Notez que les deux fonctions $s \to J_r(s)Q_L^W(s)$ et $s \to J_r(s)Q_R^W(s)$ sont à variation régulière avec les indices de queue $r-1-1/\widehat{\alpha}_L^H$ et $r-1-1/\widehat{\alpha}_R^H$ respectivement,pour tout n grand ; nous avons ;

$$\int_0^{\ell/n} J_r(s)Q_L^W(s)ds = -(1+o(1))\frac{(\ell/n)\,J\,(\ell/n)}{r-1/\widehat{\alpha}_L^H}X_{\ell,n},$$

et

$$\int_{1-m/n}^{1} J_r(s)Q_R^W(s)ds = (1+o\,(1))\,\frac{(m/n)\,(1-m/n)}{r-1/\widehat{\alpha}_R^H}X_{m,n},$$

à condition que

$$r-1/\widehat{\alpha}_L^H > 0 \quad \text{et} \quad r-1/\widehat{\alpha}_L^H > 0. \tag{2.19}$$

D'autre part, pour tout n grand, nous avons :

$$J(\ell/n) = -(1+o(1))\frac{r}{2}(\ell/n)^{r-1} \quad \text{et} \quad J(1-m/n) = (1+o(1))\frac{r}{2}\,(m/n)^{r-1}.$$

Alors au lieu de $\tilde{\Delta}_{n,r}^*$, nous pouvons utiliser

$$\hat{\Delta}_{n,r} := \frac{r}{2}\frac{(\ell/n)}{r-1/\widehat{\alpha}_L^H}X_{\ell,n} + \sum_{j=\ell+1}^{n-m-1} a_{j,n}^{(r)}X_{j,n} + \frac{r}{2}\frac{(m/n)^r}{r-1/\widehat{\alpha}_L^H}X_{n-m,n}. \tag{2.20}$$

Théorème 2.4.1 *suppose que $F \in D(\alpha)$ avec $0 < \alpha < 2$ tel que $1/(r+1/2) < \alpha < 1/r$ pour toute $0 < \alpha < 1$. Alors, pour toute suite d'entiers m et ℓ tel que $1 < m < n$, $1 < \ell < n$, $m \to \infty$, $\ell \to \infty$, $m/n \to 0$ et $\ell/n \to 0$, $\ell/m \to \theta < \infty$ et $\sqrt{k}a(m/n)A(m/n) \to 0$ comme $n \to \infty$, on a, $n \to \infty$,*

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\Delta}_{n,r}(X) - \Delta_r(X))}{(\ell/n)^{r-1/2}X_{\ell,n}} \xrightarrow{D} N(0, V_r^2),$$

où

$$V_r^2 := \frac{r^2}{4}(1+(q/p)^{2/\alpha}\theta^{2/\alpha-2r+1}).\left(\frac{2\alpha^2+(r\alpha-\alpha-1)^2+2\alpha(r\alpha-\alpha-1)}{2(r\alpha-1)^4}+\frac{1}{r\alpha-1)}\right)+1. \tag{2.21}$$

Chapitre 3

Une Classification des Marchés Financiers Via la Mesure TSD

Dans ce chapitre, nous allons appliquer l'estimateur de mesure du risque TSD sur quelques marchés financiers. Nous allons également introduire trois indices boursiers CAC40 et S&P500, Nasdaq sur lequel nous allons mener notre simulation. Nous commençons d'abord par introduire simulation les résultats et quelques notions importantes des statistiques descriptives de notre série financière afin d'aboutir aux résultats souhaités.

3.1 Analyses déscriptive des données

3.1.1 Les indices boursiers (Nasdaq et S&P500, CAC40)

Cette section consacrée pour analyser les données financières en particulier le rendement journalier de l'indice boursier. Comme application nous allons utiliser les indices boursiers connus dans le marché financier est qui sont CAC40 et S&P500, Nasdaq, ils sont disponibles sur le site web :

"https ://fr. finance.yahoo.com".

Définitions :

Définition 3.1.1 (*Nasdaq*) : *Est l'acronyme de "National Association of Securities Dealers Automated Quotations". C'est le plus grand marché électronique d'actions du monde. Il a été fondé le 4 février 1971 par la « National Association of Securities Dealers (NASD)». Le NASDAQ est principalement composé d'entreprises de technologie, d'internet et de telecoms, Le NASDAQ (ou indice NASDAQ), est aussi l'indice boursier qui mesure la performance de ce marché.*

Définition 3.1.2 (*S & P500*) *: Est un indice boursier basé sur 500 grandes sociétés cotées sur les bourses aux Etats-Unis (NYSE ou Nasdaq) "américains". Créé du 4 mars 1957, il doit son nom à l'agence de notion finacière standard & poor'se qui le gère, il couvre environ 80% du marché bourcier américain par sa capitalisation*[1].

Définition 3.1.3 (*CAC 40*) : *Le sigle CAC correspond a cotation Assistée en continu, créé 1987, le CAC40 est le principal indice boursier de la place de paris. C'est un panier composé de 40 valeurs de sociétés français, ces sociétés sont choisies parmi les 100 sociétés françaises dont les volumes d'échanges de titres sont les plus importants , chaque société a un poids déterminé par rapport à sa capitalisation sur Euronext.*

3.1.2 Rendement D'actif

Les travaux empiriqueq sur la distribution des rendements financiers est généralement basés sur le logarithme du rendement, qui garantit que les prix sont toujours > 0, $\forall R_{t,t+\Delta t}$, ou log return $R_{t,t+\Delta t}$ de temps t vers $t+\Delta t$, est définie par :

$$R_{t,t+\Delta t} = \log P_{t+\Delta t} - \log P_t. \tag{1}$$

[1]La capitalisation boursière : est la valorisation au prix du marché de l'ensemble des actions en circulation d'une société par actions.

où P_t est le prix d'un actif a l'instant t , i.e, un stock, un indice de marché, où un taux de change, et dans de nombreuses études économétriques, Δt est la rémunération générée par l'actif entre les dates t et $(t+T)$ dont les rendements sont calculés, par exemple, un jour, semaine ou mois. Pour un investisseur, le rendement d'un actif est plus important que le prix lui -même car il lui donne une information directe surr les profits (ou pertes) qui peut réaliser.

L'ensemble de données est composé de 5397 observations des prix de cloture journaliers $(P_t)_{t=0}$, du CAC40 entre le (02/06/2000) et (01/06/2021) prises de site Web *"www.finance.yahoo.com"*, voir la figure 3.1.

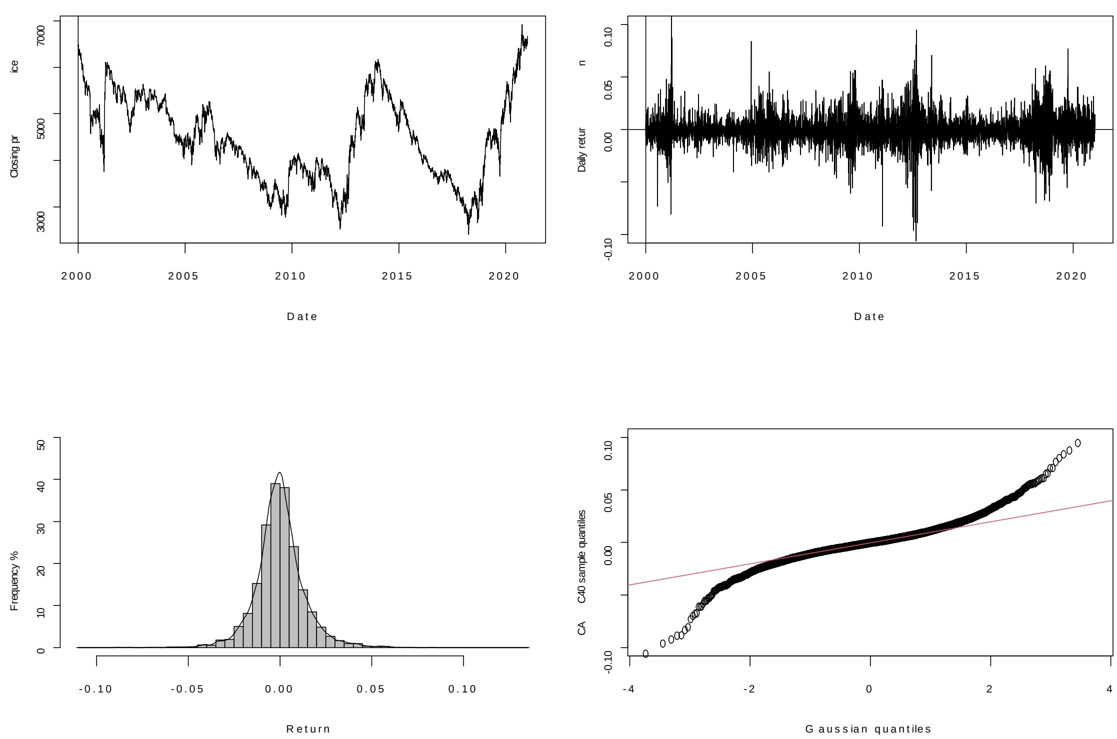

FIG. 3.1 – La représentation des caractéristiques de l'indice boursier CAC40.

L'ensemble de données est composé de 259 observations des prix de cloture journaliers $(P_t)_{t=0}$, du S&P500 entre le (02/06/2000) et (01/06/2021). Les 259 rendements sont distribués comme la figure 3.2 montre et caratérisés dans le tableau 3.1 :

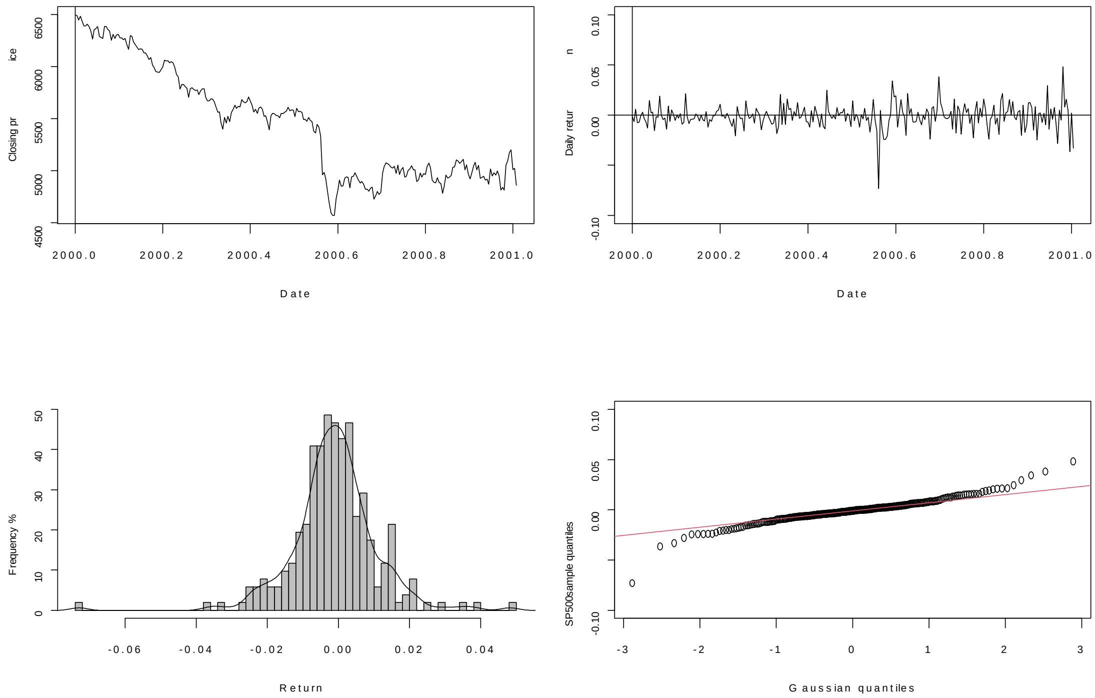

Fig. 3.2 – La représentation des caractéristiques de l'indice boursier S&P500.

L'ensemble de données est composé de 5283 observations des prix de cloture journaliers $(P_t)_{t=0}$, du $Nasdaq$ entre le (02/06/2000) et (01/06/2021) . Les 5283 rendements sont distribués comme la figure 3.3 montre et caratérisés dans le tableau 3.1 :

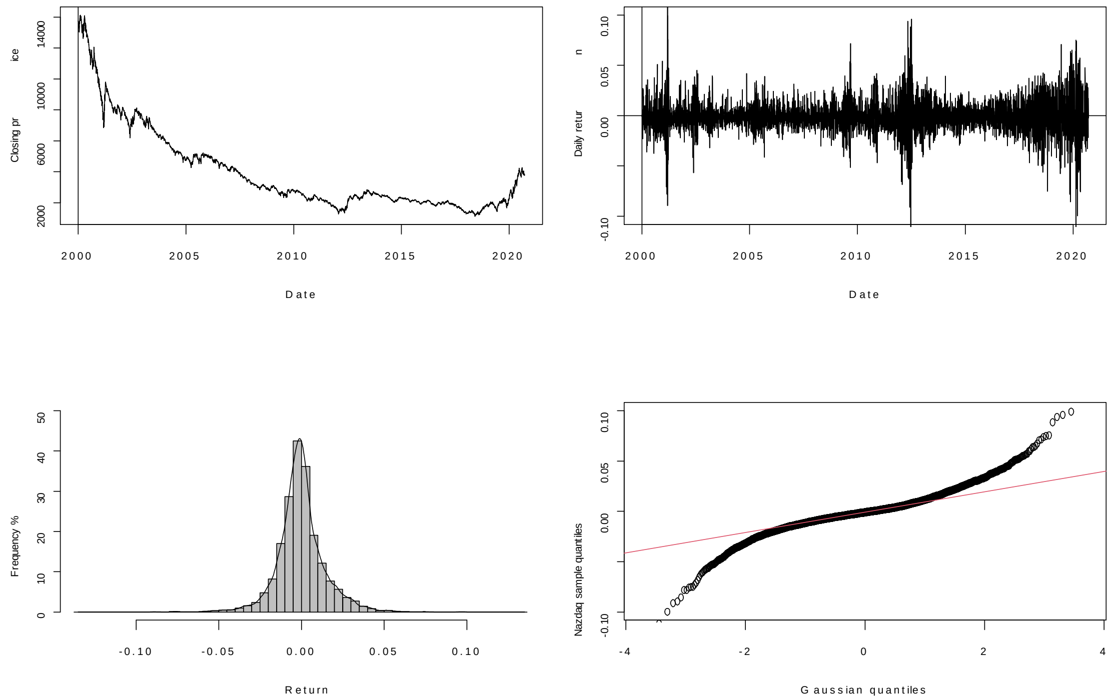

FIG. 3.3 – La représentation des caractéristiques de l'indice boursier Nasdaq.

Paramètre	$Nasdaq$	$CAC40$	$S\&P500$
Kurtosis	9.9018883	9.6317155	8.9717218
Skcwness	0.0849347	0.1999400	-0.4862722
Variance	0.0002373	0.0002046	0.0001424
Min	-0.1325464	$-1.059e-01$	-0.0729531
1st quantile	-0.0074500	$-6.952e-03$	-0.0065444
Médiane	-0.0009202	$-3.486e-04$	-0.0009686
Moyenne	-0.0002427	$5.220e-06$	-0.0011310
3rd quantile	0.0061385	$6.512e-03$	0.0044258
Max	0.1314916	$1.310e-01$	0.0482046

TAB. 3.1 – Statistiques des rendements des l'indices boursiers(Nasdaq, SP500, CAC40) de la période allant du 02/06/2000 au 01/06/2021.

Définition 3.1.4 ***(Rendement logarithme d'un instrument financir)*** *:On appelle rendement logarithmique continu journalier des actif* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$*tel que :*

$$X_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right).$$

L'unité à représente un jour. Les rendements financiers sont la base de l'étude de la gestion de risque. C'est à partir de ces derniers que nous déterminons les variations du marché financier.

3.1.3 Non normalité des rendements

Le modèle suppose que les variations des prix suivent une loi normale alors que les prix suivent une loi $\alpha-$stable, la distribution de *Lévy* est dissymétrie par rapport à la moyenne.

Cette distribution en considération les événements rares. Ces événements rares sont plus fréquents que ne le support une distribution normale, pour plus détails voir [30].

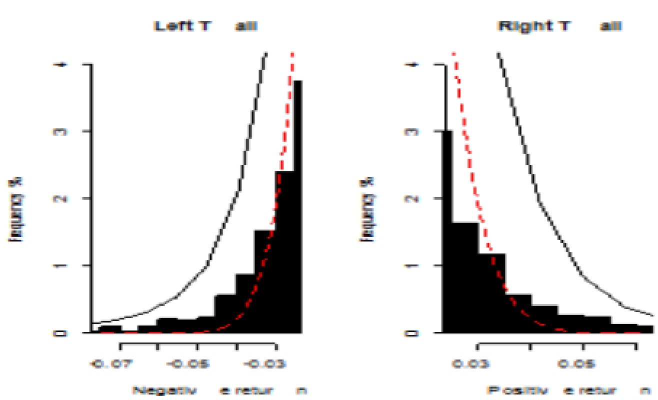

FIG. 3.4 – Modèle $\alpha-$stable contre modèle normale pour les queues de rendement de l'indices boursiers.

Commentaire :

Dans les figures 3.3, 3.2 et 3.1 le graphique désigne de QQ-plot ; quantiles normaux contre quantiles empiriques des rendements des l'indices boursiers

3.2 Méthode d'application à l'estimation de TSD

En finance de marché, il est essentiel d'estimater les mesures de risque afin de modéliser le rendements futur.

3.2.1 Simulation des Résultats

En se basant sur cet résultat et on cherchera à évaluer et étudier le comportement de la mesure de risque à deux déviations estimées. Les résultats numériques et les représentations graphiques sont obtenus au moyen du logiciel de traitement et analyse statistiques R (voir l'annex A). A cet effet, la distribution de probabilité considérée est une loi stable non normale, qui présente l'inconvénient de ne pas toujours avoir de forme analytique. Ce manque de formalisme rend toute manipulation plus complexe d'autant plus que l'évauation numérique de ces fonctions de densité reste une question ouverte. Cependant, la connaissance de quatre coefficients α, β, σ et μ permet de les paramétrer de façon à les approcher numériquement au moyen de l'outil informatique et en obtient la densité stable théorique estimée ainsi que la mesure de risque théorique estime. Les résultats théoriques de la mesure de risque à deux déviations Δ_r , ont été calculés pour $r = 0.93, 0.95, 0.97$ en utilisant l'équation 2.6 avec $J_r(s)$ donné l'équation 2.8, sont présentés au tableau ci- dessons :

r	Δ_r
0.93	0.406
0.95	0.305
0.97	0.175

TAB. 3.2 – Estimation théorique de la mesure de risque a deux déviations pour differentes valeurs de r.

Par la suite, on proposera une procédure computationnelle des bornes de confiance de cette mesure de risque sous le modèle $\alpha-$stable. En effet, la forme de la variance asymptotique V_r^2 dans 2.21 suggère que, dans le but de construire des intervalles de confiance pour Δ_r, une estimation de p est également nécessaire. Utilisant la statistique d'order intermédiaire $Z_{n-k,n}$ estimateur consistant de p comme suivant ;

$$\widehat{p}_n = \widehat{p}_n(k) := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\left\{X_i > Z_{(n-k,n)}\right\}, \tag{3.1}$$

où $k = k_n$ est une séquence de nombres entiers satisfaisan $1 < k < n$, $k \to \infty$ et $k/n \to 0$ quand $n \to \infty$ (le même que celui utilisé dans 2.11).

Soit J la fonction de poids définie dans 2.8 satisfaisant les hypothèses de régularité $(H1)$-$(H4)$ avec les deux constantes $\beta = r-1$ et $\lambda = -1$. Supposons que, pour n assez grand, nous avons une réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ pour une variable aléatoire X d'une fonction de distribution F du loi $\alpha-$stable remplissant toutes les hypothèses du théorème précédent. Le$(1-\xi)$ intervalle de confiance pour r sera obtenu via les étapes suivantes :

Étape 1 : Sélectionner les nombres optimaux m , ℓ et k des statitistiques d'order supérieur, inférieur et intermédiaire utilisées dans 2.12, 2.13 et 2.14.

Étape 2 : Déterminer $X_{\ell,n}$, X_{n-m-1}, $J(m/n)$; $J(1-m/n)$ et $\theta = m/\ell$.

Étape 3 : Calculer, en utilisant 2.12 et 2.13 , $\widehat{\alpha}_L := \widehat{\alpha}_L(\ell)$ et $\widehat{\alpha}_R := \widehat{\alpha}_R(m)$. Puis en déduire, par 2.20 l'estimation de $\hat{\Delta}_r$.

Étape 4 : Utiliser 2.14 et 3.1 pour calculer $\widehat{\alpha} := \widehat{\alpha}(k)$ et $\widehat{p}_n(k) := \widehat{p}_n(k)$. Puis en déduire par 2.21 l'écart type asympotique.

$$V := \sqrt{V^2\left(\widehat{\alpha},\, \beta,\, \lambda,\, \theta,\, \hat{p}_n\right)},$$

$$\hat{\Delta}_{n,r} - z_{\zeta/2}\frac{\sqrt{\ell} V X_{n-\ell^*,n} J(1-\ell/n)}{n},$$

et

$$\hat{\Delta}_{n,r} + z_{\zeta/2}\frac{\sqrt{\ell} V X_{n-\ell^*,n} J(1-\ell/n)}{n},$$

où $z_{\zeta/2}$ est le quantile d'odre $(1-\zeta/2)$ de la distribution gaussienne standard $N\,(0.1)$ avec $0<\zeta<1$.

On a, Les deux tableaux ci-dessous confirme la bonne performance de cette mesure quelque soit la valeur de $r\,(0<r\leq 0.99)$. De plus, les estimations s'améliorent lorsque n croit. D'autre part, on peut signaler que cet estimateur est converge avec un grand biais même pour des valeurs de n peu élevées.

r	$\left(\hat{\Delta}_{n,r}, \Delta_r\right)$	MSE	ERR	$RELERR$
0.93	(0.300; 0.406)	0.011	0.106	0.260
0.95	(0.235; 0.28)	0.004	0.044	0.158
0.97	(0.131; 0.16)	0.001	0.031	0.191

Tab. 3.3 – Estimation empirique de la mesure de risque a deux deviations pour 0.83< r <0.99, alpha=1.2 et une taille d'échantion n=100000.

r	$\left(\hat{\Delta}_{n,r}, \Delta_r\right)$	MSE	ERR	$RELERR$
0.93	$(0.28; 0.406)$	0.024	0.11	0.28
0.95	$(0.18; 0.28)$	0.01	0.09	0.32
0.97	$(0.11; 0.16)$	0.003	0.04	0.29

Tab. 3.4 – Estimation empirique de la mesure de risque a deux deviations pour 0.83 $<$ r $<$ 0.99, alpha=1.2 et une taille d'échantion n=5000.

Les valeurs de la mesure estimée dépendant des valeurs des statistiques d'ordre extrêmes, donc plus ces statistiques sont grandes, la mesure est grande ce qui peut être vu logique puisque de les quelles on cherche à couvrir ces risques extrêmes, d'autre part d'après les visualisations graphiques la mesure est bien encadrée par les deux bornes de l'intervalle confiance, permet au décideur de choisir la mesure estimée adéquate en fixant les différents paramètres qui influent sur la mesure.

3.2.2 Mesure TSD réduit en finance

Dans les transactions financières, il est important de disposer des critères nécessaires pour mieux définir les risques liés aux fluctuations de prix.

Mandelbrot [18] a proposé les distributions non normal stable, qui ont des queues de type Pareto avec un indice $\alpha < 2$, comme un modèle alternatif attractif particulier des rendements d'actifs.

L'indice de stabilité de queue c'est le paramètre le plus important car c'est lui qui indique si la variance est finie ou non. Il semble donc de pouvoir l'estimer de la manière la plus correcte qui soit. *Hill* [13] a proposé le plus populaire estimateur robuste, basésur le comportement asymptotique des valeurs extrêmes [30].

figure 3.5 est une répresentation de l'estimateur de Hill de l'indice de stabilité α.

Commentaire :

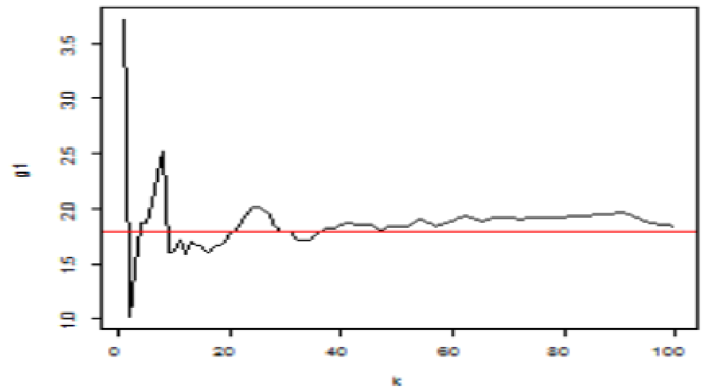

FIG. 3.5 – L'estimateur de Hill de l'indice de stabilité α.

La figure 3.5 basé sur des échantillons de taille 1000 contre le nombre de statistique d'ordre supérieur k pour $\alpha = 1.8$ avec un changement simple d'échelle. La ligne horizental représente la vraie valeur de α.

3.2.3 Résultat

Les rendements d'actifs financiers sont le résultat cumulatif d'un grand nombre des décisions individuelles qui ont toujours lieu dans le temps. Selon le théorème central limité généralisé, si la somme d'un grand nombre de variables aléatoires $i.i.d$ à une distribution limite après un changement d'échelle et une translation simple, la distribution limite doit être un membre de la classe Lévy stable voir [38].

Donc il est naturel de supposer que les rendements d'actifs sont au moins approximativement gouvernés par une distribution stable si l'accumulation est additive, ou par une distribution log-stable si l'accumulation semble être multiplicative. En conséquence, nous utilisons notre nouvelle mesure de risque bilatérale TSD pour calculons les valeurs correspondant à indices boursiers.

	$r = 0.6$	$r = 0.7$
	$\left(\tilde{\Delta}_r, \widehat{\alpha}\right)$	$\left(\tilde{\Delta}_r, \widehat{\alpha}\right)$
Nasdaq (02/06/200) $\rightarrow$ (01/06/2021)	$(1.46, 1.7)$	$(0.84, 1.7)$
S&P500 (02/06/200) $\rightarrow$ (01/06/2021)	$(1.22, 1.74)$	$(0.72, 1.74)$
CAC40 (02/06/200) $\rightarrow$ (01/06/2021)	$(1.06, 1.75)$	$(0.62, 1.75)$

TAB. 3.5 – Estimation empirique de la mesure de risque bilatérale pour quelques indices boursiers pour différentes valeurs de r.

Ces résultats prouvés que nous avons pu valider nos résultats dans le contexte des applications avec des données réelles après avoir centrer ces dernières autour de ça moyenne. Car si on travail avec la même variable des variations d'actifs sans faire ce changement on obtient des mauvaises estimations (la nouvelle mesure s'approche de 0 pour tout les indices précité au-dessus). Alors, nous invitons les investisseurs de prendre une décision à l'investissement dans l'un des marchés financiers à travers cette nouvelle mesure de risque.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons atteint que le meilleur modèle pour servir les rendements d'actifs est les lois stables comme spécifie dans *Lévy* [17], cette propriété de stabilité par addition a incité de nombreux chercheurs à utiliser les lois stables pour représenter la loi des rendements financiers pour se rapprocher du théorème de la limite centrale et afin d'avoir une forme explicite de la fonction caractéristique. Nous avons également parlé de certains résultats aux mesures de risque et les qualités que devait avoir une bonne mesure de risque. Ensuite nous avons introduit de la mesure de distorsion et de son intérêt pour quantifier le risque, nous nous concentrons sur la mesure de la queue à deux déviations introduite par *Wang* [32] comme une moyenne de la mesure de queue à déviation droite et la mesure de queue à déviation à gauche d'où elle peut s'écrire comme une L-fonctionnelle. Par la suite, nous exposons le récent travail de *Necir* et *al* [22] concernant l'estimation des *L-fonctionnelles* dans un cadre plus général, où les distributions sont à queues lourdes, via l'approche des valeurs extrêmes, et qui peuvent être appliqués pour certaines mesures de risque. En effet, la première application a été fait dans le même travail de *Necir* et *al* [22] pour la mesure de risque (TSD). En conclusion, nous avons suggéré une procédure computationnelle des bornes de confiance de cette mesure pour des distributions appartenant au domaine d'attraction de Lévy stable dont les résultats sont validés par des simulations et justifiés par des données réelles en l'appliquant aux rendements des marchés financiers.

Bibliographie

[1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., Heath, D., 1999. *Coherent measures of risk*. Mathematical Finance, 203–228.

[2] Benbraika, Gh., 2009. *Dependance des risques et application*. Mémoire de Magistère, Universite Biskra.

[3] Breiman, L., April 1992. *Probability (Classics in Applied Mathematics)*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[4] Charpentier, A., 2010. *Mesures de risque. Journées d'études Statistique*, Luminy, Université Rennes 1, France.

[5] Chernof, H., Gastwirth, J. L., Johns, M. V., 1967. *Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation*. Annals of Mathematica.

[6] Denneberg, D., 1994. *Non-additive Measure and Integral*. Dordrecht, Kluwer.

[7] Elamir, E. A. H., Seheult, A. H., 2003. *Trimmed L-moments*. Computational Statistics and Data Analysis 43, 299-314.l Statistics 38, 52-72.

[8] Estelle, A, promotion 2000-2001. *L'analyse fractale des marchés financiers*.

[9] Fama, F., 1970. *Efficient Capital Markets : A Review of Theory and Empirical Work*, journal of finance.

[10] Fama, E. F., Roll, R., 1971. *Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions*. Journal of the American Statistical Association, 66, 331-338.

[11] Feller, W., 1971. *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. II, Wiley, New York.

[12] Fiche, A., 2013. *Distributions alpha-stable pour la caractérisation de phénomènes aléatoires observés par des capteurs placésdans un environnement maritime.* Hal archives-ouvertes.fr.

[13] Hill, B. M., 1975. *A simple approach to inference about the tail of a distribution.* Ann. Statist. 3, 1136-1174.

[14] Jones, B. L., Zitikis, R., 2003. *Empirical estimation of risk measures and related quantities.* North American Actuarial Journal. 7(4), 44-54.

[15] Kenioua. Z., 2017. *Sur les mesures de risques et leurs applications.* Thése de doctorat, Université Biskra.

[16] Lacaze X., 1995. *Le Dictionnaire Encyclopédique de la Finance 1995-1996*,Volume 1. Paris, 1993. Eugene.

[17] Lévy P, 1925. *Calcul des probabilités.* Paris, Gauthier-Villars.

[18] Mandelbrot B, 1963. *The variation of certain speculative prices.* The journal of Business, volume 36, Issue 4 (Oct., 1963), 394-419.

[19] Markowitz, H., *Portfolio selection : Efficient diversification of investments.* John Weley & Sons, New York, 1959.

[20] Necir, A., Meraghni, D., Meddi, F., 2007. *Statistical estimate of the proportional hazard premium of loss.* Scand. Actuar. J, no. 3, 147–161.

[21] Necir, A., Meraghni, D., 2009. *Empirical estimation of the proportional hazard premium for heavy-tailed claim amounts.* Insurance Math. Econom. 45, no. 1, 49–58.

[22] Necir, A., Meraghni, D., 2010. *Estimating L-functionals for Heavy-tailed Distributions and Applications.* Journal of Probability and Statistics. Volume 2010.

[23] Ouaar. F., 2010. *Estimation empirique de la mesure sepctrale des risques financiers*. Mémoire de Magistère, Universite Biskra.

[24] Peters. E. E., 1994. *Fractal market analysis : applying chaos theory to investment and economics*. New York, J. Wiley.

[25] Rafal., Weron., 2001. *Lévy-stable revisited : tail index >2 does not exclude the Lévy-stable regime*. International Journal of Modern Physics C 12(2), 209-223, [Cond-mat/0103256].

[26] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J., 1999. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley and Sons, New York.

[27] Samorodnitsky, G., Taqqu, M. S., 1994. *Stable non-Gaussian random processes : Stochastic models with infinite variance*. Chapman & Hall, New York.

[28] Serfling, R. J., 1980. *Approximation theorems of mathematical statistics*. Wiley, New York. Singh, K., 1981.

[29] Shiryayev A. N., 1984. *Probability*, volume 95 of Graduate Texts in Mathematics.Springer-Verlag.

[30] Touba, S., 2012. *Sur l'estimation des parametre des lois stables. Thése de doctorat*, université mohamed khider, Biskra.

[31] Wang, S. S., 1996. *Ordering of risks under PH-transforms*. Insurance Mathematics and Economics 18, no. 2, 109-114.

[32] Wang, S., 1998. *An actuarial index of the right-tail risk*. North American Actuarial Journal. 2(2), 88–101.

[33] Wang, S.S., 2000. *A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks*. Journal of Risk and Insurance 167(1), 15-36.

[34] Weissman, I., 1978. *Estimation of parameters and large quantiles based on the k largest observations*. Journal of American Statistical Association. 73, 812–815.

[35] Weron, A., Weron, R., 1995. *Computer simulation of Lévy stable variables and processes*. Lecture Notes in Physics, 457, 379-392.

[36] Weron, R., 2004. *Computationally intensive value at risk calculations*. In J. E. Gentle, W. Hardle, Y. Mori (eds). Handbook of computational statistics. Springer, Berlin, 911-950.

[37] Wirch, J. L., Hardy, M. R., 2000. *Ordering of risk measures for capital adequacy.*

[38] Zolotarev, V. M., 1986. *One-dimensional Stable Distributions. American Mathematical Society*. Providence, Rhode Island.

Annexe A : Logiciel R

Fig. 3.6 – L'icone de logiciel R

• R est un système, communément appelé langage et logiciel, qui permet de réaliser des analyses statistiques. Plus particulièrement, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les calculs et les représentations graphiques. R a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fichiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques appelées paquets. Ces derniers permettent de traiter assez rapidement des sujets aussi variés que les modèles linéaires (simples et généralisés), la régression (linéaire et non linéaire), les séries chronologiques, les tests paramétriques et non paramétriques classiques, les différentes méthodes d'analyse des données. Plusieurs paquets, tels $ade4$, $FactoMineR$, $MASS$, $multivariate$, $scatterplot3d$ et rgl entre autres sont destinés à l'analyse des données statistiques multidimensionnelles.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

Symbole		*Signification*
$\mathbb{R}$	:	Ensembles des nombres réeels.
$\mathbb{N}^*$	:	Ensemble des nombres naturels positive.
TCL	:	Théorème centrale limite.
TSD	:	queue à deux déviations .
VaR	:	valeur en Risque.
$i.i.d$	:	indépandantes identiquement distribuées.
df	:	fonction de distribution.
$v.a.r$	:	variable aléatoire réelle.
$CVaR$	:	Conditional VaR.
$i.e$	:	en d'autre terme.
$RMSE$	:	racine carré de l'erreur moyenne.
ERR	:	erreur.
$RELERR$	:	erreur relative.
MSE	:	erreur moyenne quadratique.
$\overset{d}{=}$	:	égale en distribution.

Résumé

Notre objectif dans ce memoire est d'utiliser le nouvel estimateur de la mesure de deviation bilaterale de ***Wang*** (Tow sided deviation *TSD*) sous le modèle alpha stable, avec les estimateurs à biais réduits des quantiles extrêmes proposés par ***Li*** et ***al*** (2010) pour faire une classification des marchés financiers via cette nouvelle mesure pour quelques indices boursiers d'où les investisseurs peuvent prendre une décision à l'investissement.

Mots –clés : Marché financier ; Lois alpha-stables ; La mesure de risque à deux déviations (*TSD*).

Abstract

Our objective in this thesis is to apply the new estimator of the measure of ***Wang***'s bilateral deviation (Tow sided deviation *TSD*) under the stable alpha model, with the reduced bias estimators of the extreme quantiles proposed by ***Li*** et ***al*** (2010) for classify the financial markets via this new measure for a few stock market indices from which investors can make an investment decision.

The-Key-words: Financial market; Alpha-stable laws; The risk measure has two deviations (*TSD*).

ملخص

هدفنا في هذه الأطروحة هو تطبيق المقدر الجديد لمقياس الانحراف الثنائي ***لوانغ*** (انحراف جانبي) تحت نموذج ألفا المستقر، مع تقديرات التحيز المخفضة للكميات القصوى التي اقترحها ***Li*** et ***al*** في(2010) , لتصنيف الأسواق المالية من خلال هذا المقياس الجديد لعدد قليل من مؤشرات سوق الأوراق المالية التي يمكن للمستثمرين من خلالها اتخاذ قرار استثماري.

الكلمات المفتاحية : سوق المال; قوانين ألفا المستقرة; مقياس المخاطر له انحرافان.