

<

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la

VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

Souidi Kamel

Titre :

**Quelques applications de l'intégrale aux sciences physiques**

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	KACI FATIMA	UMKB	Président
Pr.	HOUAS AMRANE	UMKB	Encadreur
Dr.	LAIADI ABDELKADER	UMKB	Examineur

Juin 2021

## Dédicace

*Je dédie ce humble travail À*

Ma profonde gratitude et raison de ma vie, symbole de sacrifice

A mes très chers parents ma mère et mon père,

pour l'éducation qu'ils m'ont prodigué,

avec tous le moyens et l'amour sans limite qu'ils ont consentis à mon égard,

pour le sens du devoir .

Je ne parviendrais à dédommager toutes les peines et souffrantes qu'ils ont

endurées pour m'élever

A mes chères sœurs

A mon chère frère

A toute ma famille ; mes cousins

A mes amis les plus proches

Tous mes collègues de la même spécialité

Toutes les personnes qui ont participé à la réalisation de ce travail.

A tous ceux qui aiment ce pays.

## REMERCIEMENTS

*Je tiens tout d'abord à remercier le Dieu tout puissant de nous avoir donné la force, le courage, la patience, la volonté pour terminer ce travail.*

*Je remercie nos familles pour leurs aides au cours de mon étude et leurs soutiens.*

*J'offre un grand merci au Mr " HOUAS AMRANE" pour avoir accepté*

*l'encadrement*

*scientifique de ce travail, et de l'avoir suivi minutieusement jusqu'à sa fin, et aussi pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à succès de notre travail.*

*Je tiens à vous remercier également, les membres du jury pour avoir à la réussite de ce sujet et pour leur aide de ce travail.*

*Je remercie également les responsables de bibliothèque au niveau de département de science exacte de l'université de Biskra, pour l'aide de moi ont apporté dans notre travail .*

*Enfin, nous remercions toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de cette modeste étude*

# Table des matières

# Introduction

Dans ce mémoire, nous avons essayé d'éclairer d'une façon générale la notion d'intégrale de Riemann est d'une grande importance pour les mathématiques. L'émergence de cette notion, tout d'abord implicite dans les calculs d'aire et de volume, a dû attendre Cauchy (1823) puis Riemann (1854) pour devenir un véritable savoir mathématique. En effet, la formalisation de cette notion nécessite à la fois celle de fonction et celle de limite. Ceci permet d'entrevoir pourquoi son enseignement débute tardivement dans les deux pays concernés, la France et le Vietnam (à la fin du lycée) puis se prolonge au niveau universitaire. Or de nombreux travaux sur l'enseignement de l'Analyse (comme par exemple, ceux d'Artigue 1998, Bloch 2000, Legrand M. 1993, Schneider 2001) ont mis en avant les difficultés inhérentes à ce champ des mathématiques, qu'est l'Analyse et dont un élément central est la notion d'intégrale. « La théorie de l'intégration joue en mathématique un rôle extrêmement important. C'est une théorie riche et complexe. » (Revuz 1996, Encyclopédia universalis, corpus 12, p. 406) Pour Bloch (2000), « l'intégrale de Riemann, les primitives ; fonctions rationnelles et leurs primitives ; les fonctions logarithmes et exponentielle ; les fonctions usuelles [...] » font partie des « objets institutionnels prégnants » de l'Analyse, au moins au niveau des premières années d'Université .

## Outils théoriques et problématique

A la lumière de ce cadre théorique, nous pouvons à présent reformuler en termes de l'intégral et quelques-unes des questions posées au début :

Quels sont les définitions de l'intégrale? à l'objet de savoir .....? Quelles sont leurs méthodes d'intégration? Quelles sont les classes de l'intégrale et leur domaine d'utilisation du l'intégrale?

# Chapitre 1

## Approximation a l'aide d'une somme

La deuxième composante majeure du calcul est appelée intégration. Cela peut être introduit comme un moyen de trouver des zones en utilisant la sommation. Nous adopterons cette approche dans la présente Unité. Dans les unités ultérieures, nous verrons également comment l'intégration peut être liée à la différenciation. Afin de maîtriser les techniques expliquées ici, il est essentiel que vous entrepreniez de nombreux exercices pratiques afin qu'ils deviennent une seconde nature. Après avoir lu ce texte et/ou visionné le didacticiel vidéo sur ce sujet, vous devriez être capable de :

- trouver, en utilisant des rectangles au-dessus et au-dessous de la courbe, l'aire entre le graphique d'une fonction quadratique, l'axe des  $X$  et deux lignes verticales ;
- utiliser la notation intégrale pour certains types d'aire.

### 1.1 introduction

Dans cette unité, nous allons voir comment trouver la zone sous le graphique d'une fonction.

La technique que nous allons utiliser s'appelle l'intégration. L'idée derrière cela est que nous pouvons trouver l'aire d'une forme en la divisant en petites formes dont les aires sont plus faciles à calculer. Nous avons ensuite additionner les zones des petites formes. Dans la plupart des cas, nous ne pouvons pas faire la division exactement, et nous estimons donc en utilisant une zone légèrement plus grande ou légèrement plus petite. Comme les petites formes deviennent plus petites et plus petit, nos estimations s'améliorent de plus en plus.

## 1.2 Subdivision de formes

Supposons que nous souhaitions trouver l'aire d'une forme pour laquelle il n'y a pas de formule exacte. Nous pouvons aborder un tel problème en divisant la forme en morceaux plus simples, où nous connaissons une formule pour le surface de chaque pièce. Par exemple, nous pourrions trouver l'aire de cette forme, La forme est maintenant composée de rectangles et d'un triangle. Il existe une formule pour l'aire d'un rectangle et une autre formule pour l'aire d'un triangle.

Nous pouvons donc utiliser ces formules pour travailler. Par exemple, nous pourrions trouver l'aire de cette forme :

les zones individuelles des petites formes, et donc la zone de la forme entière.

De même, pour un cercle, il existe une formule pour l'aire,  $A = \pi r^2$

Mais supposons que nous ne connaissions pas le formule pour l'aire d'un cercle. Que pourrions-nous faire ?

Une façon pourrait être de placer une grille de carrés sur le cercle. Ensuite, nous pourrions travailler sur la zone de chaque carré, et additionner toutes ces zones

ensemble. Cependant, certains des carrés ne coïncideront pas complètement avec le cercle. Comptons-nous ces carrés ou les omettons-nous ?

Si nous additionnons tous les carrés qui contiennent une partie quelconque du cercle, nous arriverons à une surestimation de l'aire du cercle. Si nous ignorons tous ces carrés qui ne coïncident pas complètement avec le cercle, on obtiendra une sous-estimation de l'aire du cercle.

Cependant, nous avons maintenant deux limites sur l'aire du cercle, une supérieure et une inférieure.

« piéger » l'aire du cercle de plus en plus étroite entre une limite supérieure et une limite inférieure, nous besoin de rendre les carrés de la grille de plus en plus petits. Ensuite, les pièces qui ont été incluses ou rejetés seraient, au total, de plus en plus petits.

### **1.2.1 la zone sous le graphique d'une fonction quadratique.**

Nous allons maintenant appliquer ce procédé à une aire dont une arête est définie par une courbe dont l'équation,  $y = f(x)$ , est connue. Nous commençons par examiner un cas précis, la zone contenue par l'axe des  $x$  de  $x = 0$  à  $x = a$ , la courbe  $y = x^2$ , et la ligne  $x = a$ . la zone sous le graphique d'une fonction quadratique :

Comment peut-on calculer cette superficie ? Une première tentative pourrait être faite en prenant deux rectangles, de largeur égale  $a/2$ , et hauteurs correspondant aux valeurs  $y$  des coordonnées  $x$  qui s'étendent au-dessus de la courbe.

Donc la hauteur du premier rectangle sera un  $a^2/4$ , et la hauteur du deuxième le rectangle sera un  $a^2$  Ces deux rectangles comprennent plus d'aire que celle contenue entre les courbe et l'axe des abscisses, et nous avons donc une surestimation de la

zone.

L'aire sous la courbe,  $A$ , est inférieure à l'aire totale des deux rectangles. Donc

$$A < \left(\frac{a}{2} \times \frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{a}{2} \times a^2\right)$$

Nous prenons maintenant un rectangle qui ne contient que l'aire entre la courbe et l'axe des  $x$ .

$$\left(\frac{a}{2} \times \frac{a^2}{4}\right) < A$$

C'est On peut combiner ces deux inégalités en une seule formule en écrivant le rectangle dont la limite supérieure est marquée par une ligne pointillée, et vient en dessous de la courbe.

$$\left(\frac{a}{2} \times \frac{a^2}{4}\right) < A < \left(\frac{a}{2} \times \frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{a}{2} \times a^2\right)$$

Son la hauteur est un . Son aire fournit une sous-estimation de l'aire sous la courbe. D'où dans chaque cas, nous pouvons trouver la hauteur d'un rectangle en regardant le coin où le rectangle rencontre la courbe, et en prenant la coordonnée  $y$ . Prenons d'abord les rectangles « au-dessus » de la courbe.

La largeur de chaque rectangle est  $a/4$ . La hauteur du premier rectangle est un  $a^2/16$ , la hauteur du la seconde vaut

$2^2 a^2/16$ .

$$A < \left(\frac{a}{4} \times \frac{a^2}{16}\right) + \left(\frac{a}{4} + \frac{2^2 a^2}{16}\right) + \left(\frac{a}{4} + \frac{3^2 a^2}{16}\right) + \left(\frac{a}{4} + \frac{4^2 a^2}{16}\right).$$

En additionnant les aires des quatre rectangles, on voit que le l'aire  $A$  satisfait l'inégalité et on peut retirer les facteurs  $a/4$  et  $a^2/16$  sur le côté droit pour réécrire ceci comme

$$A < \frac{a}{4} \times \frac{a^2}{16} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$

Encore une fois, nous pouvons retirer les facteurs de  $a/4$  et  $a^2/16$  à droite pour donner

$$\left(\frac{a}{4} \times \frac{a^2}{16}\right) + \left(\frac{a}{4} + \frac{2^2 a^2}{16}\right) + \left(\frac{a}{4} + \frac{3^2 a^2}{16}\right) < A$$

Encore une fois, nous pouvons combiner ces deux inégalités pour obtenir,

$$\frac{a}{4} \times \frac{a^2}{16} \times (1^2 + 2^2 + 3^2) < A < \frac{a}{4} \times \frac{a^2}{16} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$

Supposons maintenant que nous divisons l'axe des  $x$  entre  $x = 0$  et  $x = a$  en  $n$  bandes égales, chacune de largeur  $a/n$ , et regardez l'aire du  $r$ -ième rectangle qui vient "au-dessus" de la courbe :

La hauteur du  $r$ -ième rectangle « au-dessus » de la courbe est la coordonnée  $y$  du coin supérieur droit coin, et c'est  $\left(\frac{ra}{n}\right)^2$ . L'aire du  $r$ -ième rectangle est donc

$$\frac{a}{n} \times \frac{r^2 a^2}{n^2}$$

et nous pouvons ranger cela jusqu'à donner

$$\frac{a^3}{n^3} \times r^2$$

Donc, si nous écrivons  $\blacksquare A$  pour l'aire sous la courbe dans cette petite bande, nous aurons

$$\blacksquare A < \frac{a^3}{n^3} \times r^2$$

L'addition des aires de tous ces rectangles extérieurs donnera une surestimation de l'aire totale  $A$

sous la courbe, donc que :

$$A < \sum_{r=1}^n \frac{a^3}{n^3} \times r^2$$

Regardons maintenant le  $r$ -ième rectangle "sous" la courbe. La hauteur du  $r$ -ième rectangle est la  $y$  du coin supérieur gauche, et c'est  $\left(\frac{(r-1)a}{n}\right)^2$  Donc l'aire du  $(r-1)$ -ième

le rectangle est

$$\frac{a}{n} \times \frac{(r-1)^2 a^2}{n^2}$$

et nous pouvons ranger cela pour donner

$$\frac{a^3}{n^3} (r-1)^2$$

L'aire de ce rectangle est inférieure à  $\blacksquare A$ , de sorte que

$$\frac{a^3}{n^3} (r-1)^2 < A$$

L'addition des aires de tous ces rectangles intérieurs donnera une sous-estimation de l'aire totale  $A$

sous la courbe, de sorte que

$$\sum_{r=1}^n \frac{a^3}{n^3} (r-1)^2 < A$$

Ainsi la zone  $A$  est contenue entre les deux estimations,

$$\frac{a^3}{n^3} \sum_{r=1}^n (r-1)^2 < A < \frac{a^3}{n^3} \sum_{r=1}^n r^2$$

Il existe maintenant une formule pour la somme des carrés des  $n$  premiers entiers.

La somme est donnée par la formule

$$\sum_{r=1}^n r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

# Chapitre 2

## Intégrale et méthodes fondamentales d'intégration

Dans la première partie de ce chapitre ainsi que dans nos incursions précédentes dans le domaine de l'intégration, nous nous sommes uniquement intéressés au calcul exact d'intégrales. Mais si vous demandez à votre calculatrice préférée (en supposant qu'elle n'est pas trop calée en calcul formel) de vous donner la valeur d'une intégrale, elle va procéder de façon bien différente.

Les méthodes d'intégration numérique ont pour but de créer des suites approchant la valeur d'une intégrale donnée, en maîtrisant l'erreur commise (si on ne connaît pas l'erreur, le calcul ne sert à rien), et de préférence avec le moins de calculs possibles. Le but de ce chapitre est de donner des méthodes permettant de calculer des valeurs approchées d'intégrales. En effet, le nombre de fonctions dont on sait calculer une primitive est en fait très faible. Par ailleurs la connaissance d'une primitive  $F$  ne suffit pas lorsque l'on ne sait pas calculer les valeurs de  $F$ .

Soit l'intégral  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$  avec  $b > a$ . Nous souhaitons trouver une valeur approchée de cette intégrale au moyen d'une somme finie. Pour cela, nous allons chercher à construire des formules quadrature.

**Définition 2.0.1** on appelle formule de quadrature à  $n + 1$  points une formule du type :

$$I_{n+1}(f) = \sum A_k^n f(x_k).$$

où les coefficients  $A_k^n$  sont indépendants de la fonction  $f$ , et les points  $x_k$  sont des points de l'intervalle  $[a, b]$ .

on note  $E_{n+1}(f) = I(f) - I_{n+1}(f)$  l'erreur de l'approximation de  $I(f)$  par  $I_{n+1}(f)$ .

**Définition 2.0.2** on dit que la formule de quadrature est de degré  $n$  si  $E_{n+1}(p) = 0$  pour tout polynôme  $p$  de degré inférieur ou égal à  $n$ .

## 2.1 Formule de quadrature du type interpolation

### 2.1.1 Formule globales :

Nous avons vu au chapitre précédent que nous pouvons approcher une fonction  $f$  par un polynôme d'interpolation

$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$ . L'idée va donc être de remplacer le calcul de  $I(f)$  par  $\int_a^b p_n(x) dx$ . Cela se justifie pour les deux raisons suivantes.

- l'intégration de polynôme est très simple, et ne nécessite que les quatre opérations élémentaires,
- dans la pratique, assez souvent, on ne connaît pas la forme analytique de  $f$ , mais seulement sa valeur en certains points  $x_k$ .

**Définition 2.1.1** on appelle formule de quadrature de type interpolation la formule obtenue par le calcul de  $\int_a^b p_n(x) dx$  pour approcher  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $p_n(x)$  étant un polynôme d'interpolation de  $f$ .

**Proposition 2.1.1** une formule de quadrature à  $n + 1$  points est de degré au moins  $n$  si et seulement si elle est de type interpolation à  $n + 1$  points.

Preuve : Si la formule est du type interpolation à  $n + 1$  points , alors  $\forall P \in P_n$ . (espace des polynômes de degré  $n$ ) ,  $P$  est égal à son polynôme d'interpolation à  $n+1$  points. Donc  $E_{n+1}(p) = 0$  ,  $\forall P \in P_n$ . Réciproquement , si la formule est de degré au moins  $n$  , on a :

$$\sum_{k=0}^n A_k^n = b - a$$

$$\sum_{k=0}^n A_k^n \varkappa_k = \int_a^b \varkappa \partial \varkappa$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\sum_{k=0}^n A_k^n \varkappa_k^n = \int_a^b \varkappa^n \partial \varkappa$$

C'est un système à  $n + 1$  équations et  $n + 1$  inconnues qui admet une solution unique (matrice de Vandermonde de déterminant non nul) , et les coefficients  $A_k^n = \int_a^b L_k(\varkappa) \partial \varkappa$  ,  $k = 0, \dots, n$  constituent une solution.

**Exemple 2.1.1** *Les formules de newton-cotes.*

On construit  $n + 1$  points équidistantes en posant :

$$h = \frac{b-a}{n} : \varkappa_0 = a , \varkappa_1 = a + h, \dots, \varkappa_n = b.$$

on obtient alors les formules de newton-cotes fermées. (Si on exclut les extrémités  $a$  et  $b$  et on pose  $h = \frac{b-a}{n+2}$ , on obtient alors les formules dites ouvertes).

Formules de newton-cotes fermées de degré 1 et 2 :

$$\int_a^b f(\varkappa) \partial \varkappa = (b - a) \left[ \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right] \quad (\text{formule des trapèzes})$$

$$\int_a^b f(\varkappa) \partial \varkappa = (b - a) \left[ \frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right] (\text{formule de simpson})$$

**Théorème 2.1.1** *Estimation de l'erreur pour les formules de newton-cotes .*

Si  $f \in C^l([a, b])$  avec  $l = n + 2$  si  $n$  est pair et  $l = n + 1$  si  $n$  est impair , alors il existe  $C \in [a, b]$  .

t.q :

$$E_{n+1} = \frac{1}{(n+2)!} \int_0^n t \prod_{j=0}^n (t-j) \partial t \quad h^{n+3} f^{(n+2)}(C), \text{ si } n \text{ est pair.}$$

$$E_{n+1} = \frac{1}{(n+2)!} \int_0^n t \prod_{j=0}^n (t-j) \partial t \quad h^{n+2} f^{(n+1)}(C), \text{ si } n \text{ est impair.}$$

ormule de quadrature basée sur l'interpolation peut présenter les mêmes problèmes lorsque l'intervalle est grand (phénomène de Runge). On peut éviter cela en utilisant des formules d'interpolation locales. On choisit un degré d'interpolation faible qu'on utilise sur chaque segment  $[\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$ .

### 2.1.2 Formule globales :

**polynôme de degré 1 (formule des trapèzes) :**

sur chaque segment  $[x_k, x_{k+1}]$  on écrit une formule d'interpolation de degré 1, puis on fait la somme sur tous les segments .

Soit  $P_1(x)$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1 sur l'intervalle  $[\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$  :

$$P_1(\varkappa) = f(x_k) \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1}) \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

on calcule l'intégrale de  $P_1(\varkappa)$  sur l'intervalle  $[x_k, x_{k+1}]$  :

$$\begin{aligned} I_{1,k} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_1(x) \partial x \\ &= (x_{k+1} - x_k) \left( \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right) \end{aligned}$$

Puis on effectue la somme de tous les segments :

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n-1} I_{1,k} = h \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{f(\varkappa_k) + f(\varkappa_{k+1})}{2} \right)$$

Si :  $h = \varkappa_{k+1} - \varkappa_k, \forall k$  .

**calcul de l'erreur :**

Il suffit d'intégrer l'erreur d'interpolation correspondante et de faire la somme sur tous les segments de l'intervalle .

Sur  $[\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$ , On a  $f(\varkappa) - p_1(\varkappa) = \frac{1}{2}(\varkappa - \varkappa_k)(\varkappa - \varkappa_{k+1}) f^{(2)}(C_k)$ . Cela entraîne :

$$I - I_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(2)}(C_k) \int_{\varkappa_k}^{\varkappa_{k+1}} (\varkappa - \varkappa_k)(\varkappa - \varkappa_{k+1}) \partial \varkappa$$

On effectue alors un changement de variable  $\varkappa = \varkappa_k + t(\varkappa_{k+1} - \varkappa_k)$  :

$$\begin{aligned} I - I_1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(2)}(C_k) \int_0^1 t(t-1) h^3 \partial t \\ &= -\frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(2)}(C_k). \end{aligned}$$

On obtient donc une majoration de l'erreur :

$$|I - I_1| \leq (b - a) \frac{h^2}{12} \max_{\varkappa \in [a, b]} |f'(\varkappa)|.$$

### Polynômes de degré 2 (formule de Simpson) :

On note  $\varkappa_{k+1} + \frac{1}{2}$  le point milieu de l'intervalle  $[\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$ . Soit  $p_2(\varkappa)$  le polynôme d'interpolation de degré 2 sur l'intervalle  $[\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$  de longueur  $h$  :

$$p_2(\varkappa) = 2f(\varkappa_k) \frac{(\varkappa - \varkappa_{k+1/2})(\varkappa - \varkappa_{k+1})}{h^2} - 4f(\varkappa_{k+1/2}) \frac{(\varkappa - \varkappa_k)(\varkappa - \varkappa_{k+1})}{h^2} + 2f(\varkappa_{k+1}) \frac{(\varkappa - \varkappa_k)(\varkappa - \varkappa_{k+1/2})}{h^2}.$$

On calcule alors l'intégrale de  $p_2(\varkappa)$  :

$$\begin{aligned} I_2, k &= \int_{\varkappa_k}^{\varkappa_{k+1}} p_2(\varkappa) \\ &= 2f(\varkappa_k) \int_0^1 (t - 1/2)(t - 1) h \partial t - 4f(\varkappa_{k+1/2}) \int_0^1 t(t - 1) h \partial t \\ &\quad + 2f(\varkappa_{k+1}) \int_0^1 t(t - 1/2) h \partial t \\ &= \frac{h}{6} (f(\varkappa_k) + 4f(\varkappa_{k+1/2}) + f(\varkappa_{k+1})). \end{aligned}$$

On déduit ensuite l'intégrale totale :

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=0}^{n-1} I_2, k \\ &= h \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(\varkappa_k) + 4f(\varkappa_{k+1/2}) + f(\varkappa_{k+1})}{6}. \end{aligned}$$

On effectue alors l'évaluation de l'erreur de la même manière que pour la formule des trapèzes, et on trouve la majoration de l'erreur suivante :

$$|I - I_2| \leq (b - a) \frac{h^2}{2880} \max_{\varkappa \in [a, b]} |f^{(4)}(\varkappa)|.$$

On gagne donc alors un ordre de grandeur dans l'erreur en utilisant  $n = 2$  au lieu de  $n = 1$ .

**Théorème 2.1.2** *Si le nombre de points d'interpolation est  $n + 1$ , dans les formules de Newton-Cotes fermées composites avec  $n$  pair, alors l'erreur est en  $h^{n+2}$ . Par contre, si  $n$  est impair, l'erreur est en  $h^{n+1}$ .*

# Chapitre 3

## Intégrale multiple

### 3.1 Définition et propriétés de l'intégrale

Maintenant qu'on dispose de la mesure de Lebesgue, on peut définir l'intégrale d'une fonction de  $N$  variables exactement comme on l'a fait dans le troisième chapitre pour le cas " $N = 1$ " : il suffit de remplacer l'aire, i.e. la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle, par la mesure de Lebesgue  $(N + 1)$ -dimensionnelle. On va donc aller vite dans la présentation de l'intégrale.

#### 3.1.1 Fonctions positives.

soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $I$  une partie de  $\mathbb{R}^N$ . Une fonction  $f$  définie sur  $I$  est dite positive si elle prend ses valeurs dans  $[0, \infty]$ . Le sous-graphe d'une telle fonction  $f$  au dessus de  $I$  est défini par

$$SG(f, I) = \{(\varkappa, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; \varkappa \in I \text{ et } 0 \leq \lambda < f(\varkappa)\}.$$

Ce sous-graphe est une partie de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{N+1}$ , donc il a une mesure  $(N + 1)$ -dimensionnelle. L'intégrale de  $f$  sur  $I$  est défini par  $\int_I f = \lambda_{N+1}(SG(f, I))$ .

NOTATION .

On utilise indifféremment les notations suivantes pour désigner l'intégrale de  $f$  sur  $I$  :

$$\int_I f, \int_I f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N, \int_I f(x) dx, \int_I f(x) d\lambda_N(x).$$

Bien entendu, pour une fonction de 2 variables on écrit plutôt  $\int_I f(x, \gamma) dx d\gamma$ , et

pour une fonction de 3 variables on écrit plutôt  $\int_I f(x, \gamma, z) dx d\gamma dz$ .

Mais si les variables s'appelaient par exemple  $(u, v)$  ou  $(u, v, w)$  il vaudrait

mieux écrire  $\int_I f(u, v) du dv$  ou  $\int_I f(u, v, w) du dv dw$ .

**Exemple 3.1.1** (*intégrale d'une constante*)

soit  $f$  est une fonction constante,  $f(x_1, \dots, x_N) \equiv C \geq 0$ .

pour tout ensemble  $I \in \mathbb{R}^N$ , on a  $\int_I C dx_1 \dots dx_N = C \times \lambda_N(I)$ .

En particulier,  $\lambda_N(I) = \int_I dx_1 \dots dx_N$ .

**Remarque 3.1.1** *On rappelle que par convention, on a  $\infty \times 0 = 0 = 0 \times \infty$ .*

DÉMONSTRATION. On a  $SG(f, I) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; x \in I \text{ et } 0 \leq \lambda < C\}$ ,

autrement dit  $SG(f, I) = I \times [0, C[$ . Il s'agit donc de montrer que pour tout

ensemble  $I \subset \mathbb{R}^N$ , on a  $\lambda_{N+1}(I \times [0, C[) = C \times \lambda_N(I)$ .

Supposons d'abord  $C < \infty$ . Alors le résultat est évident si  $I$  est un pavé  $\Pi$  car alors

$\Pi \times [0, C[$  est aussi un pavé et donc :

$$\lambda_{N+1}(\Pi \times [0, C[) = \text{vol}(\Pi \times [0, C[) = \text{vol}(\Pi) \times \text{vol}([0, C[).$$

D'autre part, si on pose :

$\mu_1(I) = C \times \lambda_N(I)$ , et  $\mu_2(I) = \lambda_{N+1}(I \times [0, C[)$ , on vérifie très facilement que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des mesures sur  $\mathbb{R}^N$ .

D'après le lemme d'unicité, on a donc  $\mu_1 = \mu_2$ , ce qui est le résultat souhaité.

Supposons maintenant  $C = \infty$ . Soit  $(C_n)$  une suite croissante de nombres réels tendant vers  $\infty$ .

Si  $I \subset \mathbb{R}^N$ , on a  $\lambda_{N+1}(I \times [0, C_n]) = C_n \times \lambda_N(I)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  d'après le cas " $C < \infty$ ".

Comme la suite d'intervalles  $([0, C_n])$  est croissante et que  $\lambda_N$  sont des mesures, on en déduit :

$$\lambda_{N+1}(I \times [0, C]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{N+1}(I \times [0, C_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_n \times \lambda_N(I)) = \infty \times \lambda_N(I).$$

Le lemme suivant sera parfois utile.

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  et soit  $f$  une fonction positive définie sur  $I$ .

(1) si  $\int_I f < \infty$  alors  $f(x) < \infty$  pour presque tout  $x \in I$ .

(2) On a  $\int_I f = 0$  si et seulement si  $f(x) = 0$  pour presque tout  $x \in I$

DÉMONSTRATION.

(1) En (1) En posant :

$Z = \{x \in I ; f(x) = \infty\}$ , on a  $\infty > \int_I f \geq \int_Z f = \infty \times \lambda_N(Z)$ , et donc  $\lambda_N(Z) = 0$ .

(2) si  $f(x) = 0$  presque partout sur  $I$  et si on pose  $E = \{x \in I ; f(x) \neq 0\}$  alors  $\int_E f = 0$  car  $0 \leq \int_E f \leq \lambda_N(E) \times \infty = 0 \times \infty = 0$ . Comme de plus  $\int_I f = \int_E f$  par définition de  $E$  (car  $\int_{I \setminus E} f = \int_{I \setminus Z} 0 dx = 0$ ) on a donc  $\int_I f = 0$ .

Inversement, supposons qu'on n'ait pas  $f(x) = 0$  presque partout sur  $I$ ,

autrement dit que  $E = \{x \in I ; f(x) > 0\}$  vérifiée  $\lambda_N(E) > 0$  :

il s'agit de montrer que  $\int_I f \neq 0$ .

**Lemme 3.1.1** Si on pose  $E_n := \{x \in I ; f(x) \geq \frac{1}{n}\}$  (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ), alors la suite d'ensembles  $(E_n)_{n \geq 1}$  est croissante, et on a

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \text{ En. Comme } \lambda_N \text{ est une mesure, on a, et donc } ; \lambda_N(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_N(E_n);$$

et par conséquent on peut trouver un entier  $n$  tel que  $\lambda_N(E_n) > 0$ . On a alors

$\int_{E_n} f \geq \int_{E_n} (\frac{1}{n}) dx = (\frac{1}{n}) \times \lambda_N(E_n) > 0$  et donc  $\int_I f > 0$  puisque  $\int_I f \geq \int_{E_n} f$  .

### 3.1.2 Fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{R}^N$ . Une fonction  $f$  définie sur  $I$  et à valeurs réelles ou complexes sera dite sommable si on a  $\int_I |f| < \infty$ .

L'intégrale d'une fonction sommable à valeurs réelles est définie par

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^- ,$$

et l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes est définie par

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re}(f) + i \int_I \operatorname{Im}(f)$$

On notera  $L^1(I)$  l'ensemble des fonctions sommables sur  $I$ , à valeurs réelles ou complexes.

Exercice. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions égales presque partout sur  $I$ , alors  $f \in L^1(I)$  si et seulement si  $g \in L^1(I)$ . et dans ce cas  $\int_I f = \int_I g$  .

### 3.1.3 Propriétés de l'intégrale.

Les propriétés de l'intégrale sont exactement les mêmes que pour les fonctions d'une variable, avec exactement les mêmes démonstrations.

Rappelons les plus importantes.

(1) Additivité. si  $I = I_1 \cup I_2$  avec  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , alors  $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$ .

(2) linéarité.  $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$  et  $\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$ .

(3) Croissance. si  $f \leq g$  alors  $\int_I f \leq \int_I g$ .

(4) Majoration du module.  $|\int_I f| \leq \int_I |f|$ .

(5) Toute fonction continue sur un ensemble fermé borné  $I \subset \mathbb{R}^N$  est sommable sur  $I$ .

(6) Convergence monotone. si  $(f_n)$  est une suite croissante de fonctions

positives et si  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ .

### L'intégrale double et L'intégrale triple

#### L'intégrale double

Soit  $D$  un domaine régulier du plan et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Pour définir l'intégrale de  $f$  on va procéder comme en dimension 1, par découpage et échantillonnage en adaptant les sommes de Riemann du chapitre.

On considère que  $f$  est la densité par unité de surface de la plaque  $D$ , c'est-à-dire que

$$\delta m / \delta S \approx f(x)$$

et on veut estimer la masse totale de  $D$ .

Pour  $n \geq 1$  entier donné, on peut découper le plan en des carrés (pleins) de largeur  $\frac{1}{n}$

$$C_{k,\ell} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}, \frac{\ell}{n} \leq y < \frac{\ell+1}{n} \right\}.$$

Quand  $n$  est grand, la densité  $f$  oscille peu sur le petit carré  $C_{k,\ell}$  et reste approximativement constante.

On évalue (échantillonne) cette valeur par  $f(M_{k,\ell})$  avec par exemple

$$M_{k,\ell} = \left( \frac{k}{n}, \frac{\ell}{n} \right) \in C_{k,\ell}$$

Comme la surface du carré  $C_{k,\ell}$ , est  $\frac{1}{n^2}$  la masse du petit carré est donc d'après

$$\delta m_{k,\ell} \approx \frac{1}{n^2} f(M_{k,\ell})$$

On a ainsi une estimation de la masse totale de  $D$  par

$$\text{masse}(D) = \sum \delta m_{k,\ell} \approx \frac{1}{n^2} \sum_{M_{k,\ell} \in D} f(M_{k,\ell}) = S_n(f).$$

La somme  $S_n(f)$  obtenue est l'équivalent en « $2D$ » des sommes de Riemann utilisée pour les intervalles; à comparer avec la définition 1.1.

La différence est le poids de chaque échantillon. Le coefficient  $1 = n$  en  $1D$  est la longueur de chaque intervalle de la subdivision, et est remplacé en  $2D$  par la surface

$1/n^2$  du carré  $C_{k,l}$ .

On peut montrer que cette idée de pesée par découpage possède bien une limite quand on découpe  $D$  en des morceaux infiniment petits ( $n \rightarrow +\infty$ ).

**Théorème 3.1.1** (*Définition de l'intégrale double*)

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur le domaine régulier  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  du plan. Les sommes de Riemann  $S_n(f)$  convergent vers un nombre réel limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On appelle intégrale double de  $f$  sur  $D$  cette limite, et on la note  $\int \int_D f(x, y) \delta x \delta y$ .

Même si l'intuition nous porte à croire à ce résultat, sa démonstration mathématique est hors de portée technique à ce niveau.

Elle s'appuie sur les notions de borne sup, de suite de Cauchy et d'uniforme continuité qui ne sont pas au programme.

On va plutôt se consacrer à présenter les techniques de calculs de cette nouvelle intégrale.

**L'intégrale triple**

L'intégrale d'une fonction de 3 variables  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sur un domaine de  $\mathbb{R}^3$  se définit selon les mêmes principes que ci-dessus. Pour  $n \geq 1$ ,

l'espace se découpe en cubes.  $C_{k,l,m} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}, \frac{l}{n} \leq y < \frac{l+1}{n}, \frac{m}{n} \leq z < \frac{m+1}{n} \right\}$ .

Sur chaque cube, on échantillonne la densité  $f$  au point

$$M_{k,l,m} = \left( \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \frac{m}{n} \right) \in C_{k,l,m}.$$

Le volume de chaque petit cube  $C_{k,l,m}$  de côté  $\frac{1}{n}$  est  $\frac{1}{n^3}$ . La masse totale du domaine avec la densité par unité de volume  $f$  est approchée par la somme de Riemann « $3D$ ».

$$S_n(f) = \frac{1}{n^3} \sum_{M_{k,l,m} \in D} f(M_{k,l,m})$$

On a de nouveau un résultat de convergence de ces approximations pour  $n \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 3.1.2** (*Définition de l'intégrale triple*)

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur le domaine régulier  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  du plan. Les sommes de Riemann  $S_n(f)$  convergent vers un nombre réel limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On appelle intégrale triple de  $f$  sur  $D$  cette limite, et on la note  $\int \int \int_D f(x, y, z) \delta x \delta y \delta z$ .

# Chapitre 4

## Applications de l'intégrale en géométrie

### 4.1 l'intégrale de Riemann

Dans tout ce chapitre,  $a < b$  sont des réels. L'idée intuitive d'intégrale d'une fonction est celle "d'aire sous sa courbe" (au moins pour une fonction positive). Nous allons ici donner une façon de construire

théoriquement l'intégrale à partir de cette idée (il existe d'autres constructions comme notamment celle de Lebesgue).

En fait, si  $f$  est une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$  et si  $C_f$  est sa courbe

représentative dans un repère, alors on va définir l'intégrale de  $f$  sur l'intervalle  $[a; b]$ , notée :

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

par l'aire  $A$  de la surface (grisée sur le dessin) délimitée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a : \text{droite verticale} \\ x = b : \text{droite verticale} \\ y = 0 : \text{axe des abscisses} \\ C_f \equiv y = f(x) : \text{graphe de la fonction } f. \end{array} \right.$$

Plus précisément :

si  $f$  est une fonction réelle positive continue prenant ses valeurs dans un segment  $I = [a; b]$ , alors l'intégrale de  $f$  sur  $I$ , notée :

$$\int_{x \in I} f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_{[a; b]} f(x) dx \quad (2)$$

est l'aire d'une surface délimitée par la représentation graphique de  $f$  et par les trois droites

d'équation  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ , surface notée :  $S_f$  soit :

$$S_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \in I \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\} \quad (3)$$

On donne un signe positif à l'aire des surfaces comme  $S_f$  situées au-dessus de l'axe des abscisses.

Pour pouvoir traiter aussi les fonctions négatives, on donne un signe négatif aux portions situées sous cet axe.

Ainsi, pour définir l'intégrale d'une fonction continue dans le cas général (positive ou négative), il suffit de définir  $f^+$  et  $f^-$  comme suit :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

puis de définir l'intégrale de  $f$  à partir de  $f^+$  et  $f^-$ , fonctions continues et positives :

$$\int_{x \in I} f dx = \int_{x \in I} f^+ dx - \int_{x \in I} f^- dx \quad (4)$$

Plus précisément, définir l'aire de cette surface consiste, dans la définition de la théorie

de Riemann, à approcher  $f$  par une suite de fonctions  $g_n$  dont on connaît l'intégrale (en général : des rectangles qu'on définit d'aire égale à  $\pm$  longueur  $\times$  largeur) et telle que la différence entre  $f$  et  $g_n$  tende vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Il se trouve qu'avec cette méthode, il est possible de définir l'aire d'une fonction continue présentant un ensemble dénombrable de points de discontinuité.

On appelle  $f$  un int égrande, et on note  $\int$  (un  $s$  allongé, mis pour somme) l'opérateur mathématique, appele intégrateur, qui est associé à l'intégration.

### 4.1.1 Fonction intégrable au sens de Riemann

#### Subdivisions

On appelle subdivision de l'intervalle  $[a; b]$ , un ensemble fini de points  $x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  telle que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

les  $x_i$  (avec  $i \in \{0, \dots, n\}$ ) sont alors appelés **points de la subdivision** et les intervalles  $]x_{i-1}, x_i[$  (avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) sont appelés intervalles de la subdivision. Le pas de la subdivision,

sera le plus grand des nombres  $x_i - x_{i-1}$  lorsque  $i$  est compris entre 1 et  $n$ .

Une subdivision  $\varkappa'$  est dite plus fine que  $\varkappa$ , si l'ensemble  $\varkappa'$  contient  $\varkappa$  (plus fine = plus de points). Le pas de la subdivision  $\varkappa'$  est donc plus petit que celui de  $\varkappa$ . Obtenir une subdivision plus

fine que  $x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  revient à subdiviser les intervalles  $[x_i - x_{i-1}]$ .

#### Définition : fonction en escalier

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite en escalier (ou encore etag ee) si, et seulement si, il existe une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ , c'est- a-dire un ensemble de points (subdivision) de  $[a, b]$  tel que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (n \in \mathbb{N}).$$

et un ensemble de nombres  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  telle que , pour  $K$  variant de 1 à  $n$ , la fonction soit constante sur l'intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ . et  $y$  prenne la valeur  $K$ , c'est-à-dire :

$$\forall k \in [1; n] \cap \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]x_{k-1}, x_k[ \quad f(x) = \lambda_k.$$

**Remarque 4.1.1** *aux points  $x_k$  la fonction peut prendre d'autres valeurs éventuellement.*

On dira que la subdivision  $x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  est adaptée à la fonction en escalier  $f$  si  $f$  est constante sur chacun des intervalles  $]x_{k-1}, x_k[$ . Toute subdivision plus fine que  $x$  est encore adaptée à  $f$ .

### Définition : intégrale d'une fonction en escalier

Soit  $f$  une fonction en escalier définie sur  $[a, b]$  si  $x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  est une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ , et si, pour  $k$  compris entre 1 et  $n$ , on appelle  $\lambda_k = f(x_{k-1})$  la valeur prise par la fonction  $f$  en un point quelconque  $a_{k-1}$  de l'intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ , on peut considérer

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) (x_{i+1} - x_i)$$

Remarquons que le nombre  $|\lambda_k| (x_k - x_{k-1})$  est l'aire géométrique du rectangle de hauteur  $|\lambda_k|$  et de base  $x_k - x_{k-1}$ . le nombre  $\sigma$  représente donc l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe représentative de  $f$  qui est formé d'une réunion finie de rectangles. Les aires des rectangles situés en dessous de l'axe des  $x$  sont comptées négativement.

Cette somme ne dépend pas de la subdivision adaptée à  $f$  choisie. Prendre une subdivision plus fine revient à décomposer les rectangles précédents en rectangles plus petits, et la somme reste inchangée. Cette somme ne dépend que de  $f$ , et sera notée :

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

et on l'appelle l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ .

En résumé, on a donc la définition suivante :

soit  $f \in \varepsilon([a, b])$ . L'intégrale de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  est le nombre réel :

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) (x_{i+1} - x_i)$$

où  $\forall_i \in \{0, \dots, n-1\} \quad a_i \in ]x_i; x_{i+1}[$

**Exemple 4.1.1** pour la fonction partie entière, on a en choisissant la subdivision

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

$$\int_0^4 E(x) dx = \sum_{k=1}^4$$

$$(x_k - x_{k-1}) E(x_{k-1}) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6.$$

### Définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction bornée

Toutes les fonctions envisagées désormais sont des fonctions à valeurs réelles définies sur un segment  $[a, b]$  et bornées sur cet intervalle.

Pour une fonction bornée, il existe donc un nombre  $M$ , tel que, pour tout  $x$  de  $[a, b]$ , on ait :

$$-M \leq f(x) \leq M$$

Notons :

$$\varepsilon^+ = \{\varphi \in \varepsilon([a; b]) \mid \varphi \geq f\} \quad \text{et} \quad \bar{I}^+(f) = \left\{ I(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \in \varepsilon^+ \right\}.$$

L'ensemble  $\bar{I}^+(f)$  n'est pas vide car il contient :

$$\int_a^b M dx = M(b-a) \tag{5}$$

D'autre part, si  $\varphi$  est une fonction en escalier telle que  $\varphi \geq f$  on a aussi  $\varphi \geq -M$ , et donc :

$$\int_a^b \varphi(x) dx \geq -M(b-a)$$

L'ensemble  $\bar{I}^+(f)$  est donc minoré et non vide. Il possède par conséquent dans l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  une borne inférieure (par la propriété de la borne inférieure que possède de  $\mathbb{R}$ ).

On note  $(f)$  cette borne inférieure, qui est appelée intégrale supérieure de  $f$ .

De même, si l'on pose :

$$\varepsilon^- = \{\psi \in \varepsilon([a; b]) \mid \psi \leq f\} \text{ et } \bar{I}^+(f) = I(\psi) = \int_a^b \psi(x) dx \mid \psi \in \varepsilon^- \quad (6)$$

le même raisonnement montre que cet ensemble n'est pas vide et est majoré (par  $M(b - a)$ ).

Sa borne supérieure existe donc (car  $\mathbb{R}$  vérifie cette propriété de la borne supérieure).

On note  $I^-(f)$  cette borne supérieure, qui est appelée intégrale inférieure de  $f$ .

Donc :

$$I^+(f) = \inf_{\substack{\varphi \in \varepsilon([a; b]) \\ \varphi \geq}} I(\varphi) \quad (7)$$

$$I^-(f) = \sup_{\substack{\psi \in \varepsilon([a; b]) \\ \psi \leq f}} I(\psi) \quad (8)$$

La fonction  $f$  est dite intégrable au sens de Riemann si, et seulement si :

$$I^+(f) = I^-(f)$$

De plus, le nombre réel  $I = I^+(f) = I^-(f)$  est alors appelé l'intégrale de Riemann de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  et est noté :

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (9)$$

En particulier, d'après ce qui précède, une fonction en escalier est Riemann-intégrable.

**Remarque 4.1.2** *la variable d'intégration est "muette" : cela signifie que :*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

### 4.1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

**Définition : fonction continue par morceaux**

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite continue par morceaux si, et seulement si, il existe une subdivision  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de  $[a, b]$  telle que :

- $f$  soit continue sur chaque intervalle  $]a_{i-1}; a_i[ \quad \forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ .
- $\lim_{x \rightarrow a_{i-1}^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)$  existent et sont finies.

Une telle subdivision est alors dite adaptée à  $f$ .

**Notation 4.1.1** on notera  $CM([a, b])$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$ .

**Exemple 4.1.2** les fonctions continues et les fonctions en escalier sont des fonctions continues par morceaux.

- les valeurs prises par une fonction continue par morceaux aux points de subdivision n'importent pas.
- si une subdivision  $\varkappa$  est adaptée à une fonction continue par morceaux alors toute subdivision plus fine que  $\varkappa$  l'est aussi.

**Propriétés des fonctions continues par morceaux**

**Théorème 4.1.1** Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

si  $f$  et  $g$  est continue par morceaux alors  $\lambda \cdot f, g + f, g$  et  $|f|$  le sont aussi.

**Théorème 4.1.2** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  avec  $\alpha < \beta$ .

si  $f$  est continue par morceaux alors  $f|_{[\alpha, \beta]}$  l'est aussi.

**Théorème 4.1.3** Toute fonction continue par morceaux de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$  est bornée.

### Approximation d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier

**Théorème 4.1.4** *soit  $f \in CM([a, b])$  une fonction continue par morceaux. Il existe deux fonctions en escalier  $\psi$  et  $\varphi$  qui encadrent d'aussi près que l'on veut la fonction  $f$ , c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \psi, \varphi \in \mathcal{E}([a, b]) \mid \varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

Preuve

On fait la preuve d'abord pour  $f$  continue.

Comme  $f$  est continue sur l'intervalle fermé borné  $[a, b]$ , elle y est uniformément continue d'après le Théorème de Heine. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x, y \in [a, b], \mid x - y \mid \leq \delta_\varepsilon \implies \mid f(x) - f(y) \mid \leq \varepsilon.$$

soit  $\varepsilon > 0$ , soit  $n \in \mathbb{N}^*$  suffisamment grand pour que  $(b - a) / n \leq \delta_\varepsilon$  et soit

$\{a_0; a_1; \dots; a_n\}$  une subdivision de  $[a, b]$  à pas constant  $(b - a) / n$

, donc telle que  $\forall i \in [0, n] \cap \mathbb{N}$ ,  $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$  donc

$$a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n} \leq \delta_\varepsilon$$

Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[a_{i-1}, a_i]$  et y admet

donc un minimum et un maximum en des points  $\alpha, \beta \in [a_{i-1}, a_i]$ .

Posons  $m_i = f(\alpha)$  et

$M_i = f(\beta)$ . comme  $\mid \beta - \alpha \mid \leq \mid a_i - a_{i-1} \mid \leq \delta_\varepsilon$  on a  $\mid f(\beta) - f(\alpha) \mid \leq \varepsilon$  et on en déduit

que  $0 \leq M_i - m_i \leq \varepsilon$ .

Définissons maintenant des fonctions  $\psi$  et  $\varphi$  qui vont être solutions de notre problème.

Pour  $1 \leq i \leq n$ , on pose  $\varphi$  constante égale à  $m_i$  et constante égale à  $M_i$  sur  $]a_{i-1}, a_i[$ .

pour  $0 \leq i \leq n$ , on pose  $\varphi(a_i) = \psi(a_i) = f(a_i)$ .

Les fonctions  $\psi$  et  $\varphi$  et sont bien définies sur  $[a, b]$  et ce sont évidemment des fonctions en escalier.

En résumé e, les fonctions  $\psi, \varphi \in ([a, b])$  sont donc définies par :

$$\forall x \in ]a_{i-1}, a_i[ \quad \varphi(x) = m_i = \min_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) \text{ et } \varphi(a_i) = f(a_i).$$

$$\forall x \in ]a_{i-1}, a_i[ \quad \psi(x) = M_i = \max_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) \text{ et } \psi(a_i) = f(a_i).$$

L'encadrement  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$  est vérifiée sur chaque intervalle  $]a_{i-1}, a_i[$  et aussi en les  $a_i$ .

Enfin, l'encadrement  $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$  est vérifiée pour les mêmes raisons.

**Théorème 4.1.5** *Toute fonction continue par morceaux est Riemann-intégrable.*

Preuve

Introduisons l'ensemble  $\Phi = \{\varphi \in \varepsilon([a, b], \mathbb{R}) \mid \varphi \leq f\}$  des fonctions en escalier inférieures à  $f$  et celui  $\Psi = \{\psi \in \varepsilon([a, b], \mathbb{R}) \mid f \leq \psi\}$  des fonctions en escalier supérieures à  $f$ . D'après la définition de l'intégrale de Riemann, il faut montrer que les bornes

$$\alpha = \sup \{I_{[a,b]}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$$

et  $\beta = \inf \{I_{[a,b]}(\psi) \mid \psi \in \Psi\}$  existent et sont égales.

Notons

$I^- = \{I_{[a,b]}(\psi) \mid \psi \in \Psi\}$  et  $I^+ = \{I_{[a,b]}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$  les ensembles formés des intégrales des éléments de  $\Phi$  et  $\Psi$ .

Comme la fonction  $f$  est continue par morceaux, elle est bornée et donc il existe  $m, M \in \mathbb{R}$  vérifiant  $m \leq f \leq M$ . On en déduit que l'ensemble est non vide car  $\varphi = m$  est élément de  $\Phi$  et par suite l'ensemble  $I^-$  est non vide. De même, avec  $\psi = M$ , on obtient  $\Psi \neq \emptyset$  puis  $I^+ \neq \emptyset$ .

De plus, pour tout  $\varphi \in \Phi$ , on a  $\varphi \leq f \leq M$  donc  $I_{[a,b]}(\varphi) \leq I_{[a,b]}(M) = M(b-a)$ . Ainsi l'ensemble  $I^-$  est majorée par  $M(b-a)$ .

Finalement  $I^-$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée donc  $\alpha = \sup I^-$  existe.

De même  $\beta = \inf I^+$  existe car  $I^+$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et minorée par  $m$  ( $b - a$ ).

Il reste à montrer  $\alpha = \beta$ .

Pour tout  $\varphi \in \Phi$ , on a  $\varphi \leq f \leq \psi$  donc  $\varphi \leq \psi$  puis  $I_{[a,b]}(\varphi) \leq I_{[a,b]}(\psi)$ .

Par suite  $I_{[a,b]}(\varphi)$  est un minorant de  $I^+$  et donc  $I_{[a,b]}(\varphi) \leq \beta$ . Ainsi est un majorant de  $I^-$  et donc  $\alpha \leq \beta$ .

D'autre part, pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi, \psi \in \varepsilon([a, b], \mathbb{R})$  telles que  $\varphi \leq f \leq \psi$  et  $\psi - \varphi \leq \varepsilon$ . Puisque  $\varphi \in \Phi$  et  $\psi \in \Psi$  on a  $I_{[a,b]}(\varphi) \leq \alpha$  et  $\beta \leq I_{[a,b]}(\psi)$ .

De plus  $\psi \leq \varphi + \varepsilon$  donc  $I_{[a,b]}(\psi) \leq I_{[a,b]}(\varphi) + I_{[a,b]}(\varepsilon)$

On en déduit  $\beta \leq \alpha + \varepsilon(b - a)$ .

Cette relation valant pour tout  $\varepsilon > 0$  on obtient  $\beta \leq \alpha$ , et finalement  $\beta = \alpha$

## Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

### Propriété 4.1.1 linéarité de l'intégrale

Soient  $f, g \in CM([a, b])$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . on a

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx ;$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Preuve

o Cas  $\lambda > 0$

Pour toute fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en escalier inférieure à  $f$ , on a  $\lambda \cdot \varphi \leq \lambda \cdot f$ . Par définition de l'intégrale de la fonction on a  $I_{[a,b]}(\lambda \varphi) \leq \int_a^b \lambda \varphi$  et donc  $I_{[a,b]}(\varphi) \leq \int_a^b$

$\searrow f$ .

En passant cette inégalité en la borne supérieure en  $\phi \in \Phi$ , on obtient :

$$\searrow \int_a^b f \leq \int_a^b \searrow f$$

De même, en partant d'une fonction en escalier  $\psi$  supérieure à  $f$ , on parvient à  $\int_a^b \searrow f \leq \searrow \int_a^b f$ .

et on peut conclure :

$$\int_a^b \searrow f = \searrow \int_a^b f.$$

o Cas  $\searrow < 0$

Même principe mais la multiplication par un scalaire négatif renverse les inégalités.

o Étude de la somme :

Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2 : [a, b]$  des fonctions en escalier respectivement inférieures à  $f$  et  $g$ .

La fonction  $\varphi_1 + \varphi_2$  est alors inférieure à  $f + g$  et par définition de l'intégrale de la fonction  $f + g$ , on a :

$$I_{[a,b]}(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \int_a^b f + g$$

puis :

$$I_{[a,b]}(\varphi_1 + \varphi_2) = I_{[a,b]}(\varphi_1) + I_{[a,b]}(\varphi_2)$$

En passant cette inégalité en la borne supérieure en  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  fonctions en escalier inférieure à  $f$  et  $g$ , on obtient :

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b f + g$$

De même, en partant de fonctions en escalier supérieure à  $f$  et  $g$ , on obtient :

$$\int_a^b f + g \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

et on peut conclure à l'égalité.

### Croissance de l'intégrale

Soient  $f$  et  $g$  des fonctions continues par morceaux ; on a :

Si  $f \leq 0$  alors  $\int_a^b f \geq 0$ .

Si  $f \leq g$  alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Preuve

Si  $f$  est positive alors la fonction nulle est une fonction en escalier inférieure à  $f$  donc

$$\int_a^b f \geq I_{[a,b]}(0) = 0$$

Si  $f \leq g$  alors  $g - f$  donc  $\int_a^b (g - f) \geq$  puis par linéarité  $\int_a^b g \geq \int_a^b f \geq 0$ .

**Relation de Chasles** Soit  $f \in CM([a, b]) \forall c \in [a, b]$  on a :

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Preuve

Si  $f$  est en escalier sur  $[a, b]$  et si  $\{a_0; a_1; \dots; a_p = c, \dots; a_n\}$  est une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ , alors :

$$\int_a^c f(x) dx = \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$$

$$\int_c^b f(x) dx = \sum_{i=p}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$$

Le résultat est alors évident.

**Corollaire** Soit  $f \in CM([a, b])$  On a :

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx ;$$

$$\int_b^a f(x) dx = 0$$

**Propriétés 4.1.1** *intégrale et valeur absolue ou inégalité triangulaire*

Soit  $f \in CM([a, b])$  .Alors :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Preuve

· On peut utiliser la croissance de l'intégrale :

$$-|f| \leq f \leq |f| \text{ donc par croissance } -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

· Une autre démonstration peut se faire en considérant les parties positive et négative de la fonction  $f$  :

$$f^+ = \frac{f + |f|}{2} \quad \text{et} \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}.$$

On a alors  $f = f^+ - f^-$ , et  $f^+$  et  $f^-$  sont des fonctions positives, donc d'intégrales positives. Donc, en utilisant les propriétés de la valeur absolue de la somme :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f^+(x) dx \right| + \left| \int_a^b f^-(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^b f^+(x) dx + \int_a^b f^-(x) dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

### 4.1.3 Intégrale et moyenne

**Définition : valeur moyenne d'une fonction**

Soit  $f \in CM([a, b])$ . La valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle est le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Interprétation graphique :  $\mu$  est la valeur de la fonction constante qui aurait sur  $[a, b]$  la même intégrale que  $f$ .

# Chapitre 5

## Applications de l'intégrale en physique

### 5.1 Intégrale simple

Le physicien a souvent affaire à de « vraies » fonctions, dont l'étude nécessite des arguments pratiques et pas seulement théoriques.

Aussi, il est important de connaître les techniques habituelles permettant de montrer l'intégrabilité de fonctions. La méthode se déroule en deux temps :

- d'abord, trouver des critères pratiques, permettant de décider sur quelles parties de  $\mathbb{R}$  les fonctions usuelles (dites « étalon ») sont intégrables ;
- ensuite, établir des théorèmes de comparaison permettant de ramener l'étude d'une fonction compliquée à celle de fonctions étalon.

#### 5.1.1 Un circuit *RLC*

En physique, il arrive très couramment de considérer les différentielles des grandeurs comme des petites variations de ces grandeurs. C'est ce que l'on retrouve dans la

notation différentielle de la dérivation, par exemple dans l'équation différentielle d'un circuit  $RLC$  :

$duC$  est une petite variation de la tension aux bornes du condensateur, et  $dt$  la petite variation de temps pendant laquelle la variation  $duC$  a eu lieu. Lorsque ces grandeurs deviennent infiniment petites, on retrouve bien le nombre dérivé de  $uC$  à l'instant  $t$  étudié.  $duC$  et  $dt$  sont des infiniment petits d'ordre 1.

La notation de l'intégrale reprend l'idée de la somme de Riemann tout en incluant cette notion d'infiniment petit. à l'origine, le symbole intégrale était un  $S$  utilisé par Leibniz pour écrire des sommes. Calculer l'intégrale d'une fonction  $f$  sur un segment  $[a, b]$ , c'est comme faire la somme d'une infinité de rectangles infiniment fins, de largeur  $dx$  et de hauteur  $f(x)$  pour « tous les  $x$  entre  $a$  et  $b$  ».

Intuitivement, cette opération permet bien d'obtenir l'aire totale comprise entre la courbe de  $f$  et l'axe des abscisses.

- $f(x) dx$  est l'aire du « rectangle infinitésimal courant »
- Le symbole indique qu'on somme les rectangles infinitésimaux entre  $a$  et  $b$ .

### 5.1.2 Passage du discret au continu

C'est ainsi qu'en physique on utilise les intégrales pour sommer les contributions d'éléments que l'on ne peut pas compter car leur distribution est continue (le long d'une ligne, sur un plan ou une nappe, ou même dans un volume) et non discrète (ensemble de points indénombrable).

### 5.1.3 Théorème de superposition

Soient  $n$  particules  $A_1, A_2, \dots, A_n$  immobiles dans l'espace, de charges respectives  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

Le champ électrostatique généré par cette distribution est la somme des champs engendrés par chacune des particules

Une particule de charge  $q$  placée en  $M$  est alors soumise à une force .

On dispose alors de  $n$  charges ponctuelles de l'espace, c'est-à-dire une répartition discrète. On peut sommer comme on a l'habitude de faire les contributions de chaque charge.

Les choses se gâtent lorsqu'on se trouve face à une distribution continue de charges, par exemple lorsqu'on est en présence d'une ligne de charges  $r$  .

On suppose que cette distribution admet une densité linéique de charge  $\lambda$ . Cela signifie qu'en un point  $M$  de la distribution, une longueur infinitésimale  $dL$  de la distribution porte une charge électrique .

Pour trouver le champ électrostatique généré par la distribution en  $P$  , il faudrait sommer les contributions de chaque élément infinitésimal de la distribution. Un élément de longueur  $dL$  en un point  $M$  de  $r$  porte une charge , donc engendre par définition en  $P$  un champ électrique élémentaire

Il ne reste plus qu'à sommer sur toute la longueur de  $r$  en intégrant sur  $r$  , c'est-à-dire en sommant les contributions de tous les points  $M$  .

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié les méthodes d'intégration en détail, puis nous avons abordé l'intégrale multiple (double et triple). A la fin nous avons donné des applications en géométrie et nous avons montré les découvertes les plus importantes qu'ils ont obtenues travers l'intégration mathématique en physique

# Bibliographie

- [1] **C.L.Gabriel. (2021)**, calcul intégral , rappels et applications géométriques ; vol (49),p 1-11.
- [2] **W. Appel.** Mathématiques pour la physique et les physiènes, 5éme édition, Edition H.K,68 , boule vard de port royal 75 005, paris ;vol ( 46) .
- [3] **B.H.zadeh ( 2018)** , Mathématiques pour la physique , projet de fin d'étude , université du gronobel -alpes à paris ,304pages.
- [4] **M.Runim** . Intégration ; vol ( 40) , p 12.
- [5] **V.A. Kostitzin .(1930)**.quelques application des équations intégrales, annales de l'I.H.P. tome 1 , p 177-203.
- [6] **J.L.Raimbault (2010)**. Méthodes mathématiques pour la physique et chimie . université de paris -sud , vol( 140) .p 21-40.
- [7] **H.Keisler.( 1946)** Elementary calculs an infinitensnal approach. second edition .university of wisconsin.
- [8] **M.Janet.(2010)**.équation integral et aplication à certains problèmes de la physique mathématiques .projet de fin d'étude, université de paris .



## ملخص

في هذا البحث درسنا التكامل اخترنا التقريب باستخدام المجموع كأول دراسة تجريبية، ودرسنا أيضا الطرق الأساسية للتكامل ونوضح كيفية استخدامها، إضافة إلى ذلك قدمنا فكرة عن تكامل متعدد وذكرنا أنواعه الثنائية والثلاثية. وفي فصل آخر ناقشنا تطبيقات التكامل في الهندسة، واختتمنا بحثنا بتطبيقات التكامل في مجال الفيزياء، وعرضنا أهم النتائج التي توصلنا إليها من خلال التكامل الرياضي في الفيزياء

**الكلمات المفتاحية :** التكامل -التكامل المضاعف-الهندسة-الفيزياء

**Résumé** Dans ce travail, nous avons étudié les méthodes d'intégration en détail, puis nous avons abordé l'intégrale multiple (double et triple). A la fin nous avons donné des applications en géométrie et nous avons montré les découvertes les plus importantes qu'ils ont obtenues à travers l'intégration mathématique en physique

**Mots clés :** Intégration - Intégration multiple- Géométrie – Physique

**Abstract** In this work, we studied the integration methods in detail, then we approached the multiple integral (double and triple). At the end we gave applications in geometry and we showed the most important discoveries that they obtained through mathematical integration in physics.

**Key words:** Integration - Multiple Integation – Geometry- Physics